

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7987895>
УДК 53.532.5.01

ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ КОЛМОГОРОВА

Ю.В. Нужнов,
д.ф.-м.н., проф.,
Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби,
г. Алматы

Аннотация: Представлен анализ теории мелкомасштабной локально изотропной турбулентности А.Н. Колмогорова и выявлены перспективы ее дальнейшего развития применительно к турбулентным течениям с неоднородной мелкомасштабной структурой. Показано, что неоднородность такой структуры обусловлена эффектами внутренней перемежаемости диссипативных полей, и что масштаб частичного усреднения диссипации энергии мелкомасштабных флуктуаций играет ключевую роль в конструктивном определении турбулентной и диссипативной жидкости турбулентного течения.

Ключевые слова: статистическая гидродинамика, мелкомасштабная турбулентность, внутренняя перемежаемость, теория Колмогорова

1. Введение

Теория мелкомасштабной турбулентности *Колмогорова K41* [1] вместе с ее уточненной версией *K62* [2] представляет собой одну из самых глубоких и востребованных теорий в статистической гидродинамике турбулентных течений. Ее фундаментальный характер и практическая значимость находят свое приложение в самых разнообразных областях науки и техники. Особенно ярко это проявляется в моделировании атмосферной турбулентности [3] и турбулентного горения [4, 5]. В то же время исследования мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений, выполненные за последние десятилетия, показали, что такая структура не является однородной, и что теория Колмогорова содержит

определенные «неувязки» с экспериментальными данными. В частности было установлено, что использованная в теории *K62* модель локально изотропной турбулентности, т.е. однородной, изотропной и статистически стационарной *во всем инерционном интервале* волновых чисел спектра турбулентности, не вполне соответствует опытным данным [6]; что гипотеза замыкания теории в виде логнормального закона распределения вероятностей диссипации турбулентной энергии (точнее – *скорости* диссипации) не нашла своего убедительного подтверждения [3, 4, 7]; и что коэффициенты Колмогорова в выражениях безусловных структурных функций не являются универсальными постоянными [4, 8].

Анализ основных положений теории мелкомасштабной турбулентности, выполненный с привлечением прямого численного моделирования *DNS*, также убедительно указывает на имеющиеся в теории *K62* проблемы, [9]). Из вышесказанного следует, что необходимость в дальнейшем развитии теории Колмогорова назрела уже давно и связана с экспериментально установленным фактом, – мелкомасштабная структура турбулентной жидкости турбулентного течения не является однородной, обусловлена внутренней перемежаемостью и, следовательно, имеет двойственную гидродинамическую структуру.

Цель данной статьи, – обосновать перспективы дальнейшего развития теории Колмогорова в свете учета эффектов гидродинамической перемежаемости.

2. Перспективы дальнейшего развития теории Колмогорова

Появление новых теоретических и экспериментальных данных, связанных с исследованиями эффектов перемежаемости, позволяет пересмотреть физическую основу теории Колмогорова в плане ее дальнейшего уточнения. Так в работах [4] учитывалось влияние *внешней* перемежаемости гидродинамических полей турбулентной жидкости на статистические характеристики мелкомасштабной структуры турбулентных течений. При этом в качестве *физической основы* использовалась модель с «двойной» структурой турбулентного течения (ввиду перемежаемости пространственно-временных областей с турбулентной и нетурбулентной жидкостью), тогда как в пространственно-временной

области *турбулентной жидкости* мелкомасштабная структура считалась локально изотропной. Такой подход, однако, не решает вопроса о статистическом моделировании неоднородной мелкомасштабной турбулентности.

2.1. К теории автономного статистического моделирования

Для построения теории автономного (т.е. независимого) статистического моделирования мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений [8] (для краткости изложения – *ASMTurbS*), отличительной особенностью которой является учет эффектов перемежаемости диссипативной жидкости, прежде всего требуется дать физическое обоснование пространственно-временной области с *локально однородной структурой*, представить конструктивное определение *турбулентной и диссипативной жидкости* развитого турбулентного течения, и построить математический аппарат статистики перемежающихся полей диссипации.

Идентификация турбулентной жидкости. Как известно [4], развитое турбулентное течение содержит в себе перемежающиеся пространственно-временные области с турбулентной $G_t = D_t \times [0, \tau_t]$ и нетурбулентной $G_n = D_n \times [0, \tau_n]$ жидкостью; при этом обобщенная область течения $G = G_t + G_n + G_s$; здесь G_s – область тонкого «суперслоя» между турбулентной и нетурбулентной жидкостью, в которой под воздействием сильного сдвига зарождается процесс превращения нетурбулентной жидкости в турбулентную, [10, 11]. Возникающие в этом процессе турбулентные движения (мелкомасштабные вихри) с размером порядка самых крупных вихрей из инерционного интервала захватываются турбулентной жидкостью (увеличивая ее объем) и, далее, дробятся до самого малого диссипативного масштаба (в данном статистическом моделировании область G_s не учитывается). При этом идентификация турбулентной жидкости в каждой фиксированной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ турбулентного течения осуществляется посредством функции перемежаемости поля диссипации [4, 8], а именно:

$$I(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_l > \varepsilon_0; (\mathbf{x}, t) \in G_t \\ 0, & \varepsilon_l \leq \varepsilon_0; (\mathbf{x}, t) \in G_n \end{cases} \quad (1)$$

где ε_l – частично усредненное значение диссипации с характерным размером l из инерционного интервала $\eta \ll l \ll L$; ε_0 – пороговое значение диссипации ε_l на условной границе раздела между турбулентной и нетурбулентной жидкостью. (Единый метод экспериментального определения величины ε_0 в настоящее время не выработан; подробный анализ этого вопроса представлен в [4].)

Статистическое усреднение функции 0 как функции скачков дает коэффициент внешней перемежаемости $\gamma(\mathbf{x}) = \langle I(\mathbf{x}, t) \rangle$; в вероятностном пространстве величина $\gamma(\mathbf{x}) = \lim_{Re \rightarrow \infty} \text{prob}(\varepsilon_l > \varepsilon_0)$ и представляет собой вероятность наблюдения турбулентной жидкости в фиксированной точке \mathbf{x} , т.е. вероятность события $\{I = 1; (\mathbf{x}, t) \in G_t\}$. При этом в турбулентной жидкости (т.е. когда $(\mathbf{x}, t) \in G_t$) содержатся мелкомасштабные движения (вихри) всех размеров r , принадлежащих инерционному интервалу $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.

Идентификация диссипативной жидкости. Известно, что внутри турбулентной жидкости развитого турбулентного течения существуют пространственно-временные области с сильной «активной» диссипацией турбулентной энергии; эти области чередуются с областями, где диссипация не так значительна. Впервые это явление было обнаружено *Бэтчелором и Таунсендом* [12] и теперь его принято называть «внутренней» перемежаемостью.

Для учета эффектов внутренней перемежаемости было введено понятие «диссипативной» жидкости [8], которая находится внутри турбулентной жидкости и характеризуется сильной диссипацией ($\varepsilon_{td} \gg \langle \varepsilon \rangle_t$), т.е. самыми сильными градиентами пульсационных скоростей. Считается при этом, что пространственно-временная область турбулентной жидкости G_t содержит в себе две подобласти с диссипативной $G_{td} = D_{td} \times [0, \tau_{td}]$ и недиссипативной $G_{tnd} = D_{tnd} \times [0, \tau_{tnd}]$ жидкостью, т.е. $G_t = G_{td} + G_{tnd}$, $\tau_t = \tau_{td} + \tau_{tnd}$, где τ_{td} и τ_{tnd} – суммарные интервалы времени наблюдения диссипативной и недиссипативной жидкостей, которые находятся внутри турбулентной жидкости. Идентификация диссипативной жидкости, которая находится внутри турбулентной среды, т.е. когда $(\mathbf{x}, t) \in G_{td}$, осуществляется посредством функции внутренней перемежаемости поля диссипации

$$I_{td}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_l > \varepsilon_{0t}; (\mathbf{x}, t) \in G_{td} \\ 0, & \varepsilon_l \leq \varepsilon_{0t}; (\mathbf{x}, t) \in G_{tnd} \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ε_{0t} – пороговая величина диссипации, определяющая условную границу раздела между диссипативной и недиссипативной жидкостью; в силу $\langle \varepsilon_l \rangle_{td} \gg \langle \varepsilon_l \rangle_{tnd}$ величина $\varepsilon_{0t} \gg \varepsilon_0$ и, следовательно, величина ε_{0t} может быть определена по аналогии с определением величины ε_0 , например $\varepsilon_{0t} = \langle \varepsilon \rangle_t / Re$.

Условное статистическое усреднение функции скачков 0 дает коэффициент внутренней перемежаемости $\gamma_{td}(\mathbf{x}) = \langle I_{td}(\mathbf{x}, t) \rangle_{td}$; в вероятностном пространстве величина $\gamma_{td}(\mathbf{x}) = \lim_{Re \rightarrow \infty} \text{prob}(\varepsilon_l > \varepsilon_{0t})$ и представляет собой вероятность наблюдения диссипативной жидкости в заданной точке \mathbf{x} , находящейся в определенные промежутки времени внутри турбулентной среды турбулентного течения; величина размера частичного усреднения l выбирается из инерционного интервала. Произведение функций внешней 0 и внутренней 0 перемежаемости дает функцию перемежаемости диссипативной жидкости G_t во всей обобщенной области течения G , т.е. $I_d(\mathbf{x}, t) = I(\mathbf{x}, t)I_{td}(\mathbf{x}, t)$. Статистическое усреднение этой функции дает коэффициент перемежаемости $\gamma_d(\mathbf{x}) = \langle I_d(\mathbf{x}, t) \rangle$, который представляет собой вероятность наблюдения диссипативной жидкости в заданной точке \mathbf{x} , т.е. вероятность события $\{I_d = 1; (\mathbf{x}, t) \in G_d\}$. Отсюда следует, что величина $\gamma_d = \gamma\gamma_{td}$. Надо заметить, что в диссипативной жидкости $(\mathbf{x}, t) \in G_{td}$ мелкомасштабная структура турбулентных течений считается локально изотропной во всем спектре мелкомасштабных флуктуаций, включая самые мелкие с размером $r < r_{min}$ (согласно опытным данным наименьший размер флуктуаций из инерционного интервала $r_{min} \cong 60\eta$). В то же время область G_{tnd} содержит только самые крупные мелкомасштабные флуктуации и не является локально изотропной. В недиссипативной жидкости G_{nd} , которая в этой же точке \mathbf{x} наблюдается с вероятностью $\gamma_{nd} = \gamma - \gamma_d$, процесс каскадного дробления вихрей еще не завершился, самые мелкие возмущения еще не появились, а структура мелкомасштабной турбулентности в инерционном интервале спектра турбулентности все еще остается *неоднородной и статистически нестационарной*. Как следствие, теория *K62* в этой области непригодна.

2.2. Влияние размера частичного усреднения диссипации

О выборе величины l в качестве размера частичного усреднения диссипации надо сказать особо. Выясняется, что в случае $l = r_{max}$, где r_{max} – наибольший масштаб турбулентных флуктуаций (в данном случае мелкомасштабных) из инерционного интервала $\eta \ll r \ll L$, гидродинамические неоднородности в объёмах r_{max}^3 «сглаживаются» и, таким образом, в заданной точке пространства $(\mathbf{x}, t) \in G_t$ с течением времени t реализуется турбулентная жидкость с *локально однородной мелкомасштабной структурой* на всех масштабах $r \leq r_{max}$.

В случае $l = r_{min}$, где r_{min} – наименьший масштаб турбулентных флуктуаций из инерционного интервала, *локально однородная структура* реализуется на масштабах $r < r_{min}$. В то же время на масштабах $r \geq r_{min}$ имеет место *внутренняя перемежаемость диссипативной жидкости*, т.е. в заданной точке пространства $(\mathbf{x}, t) \in G_t$ с течением времени t поочередно реализуется режим локально однородной диссипативной и локально неоднородной недиссипативной мелкомасштабной турбулентности. Считается при этом, что для $l \leq r_{min}$ величина $\langle \varepsilon_l \rangle_d \cong \langle \varepsilon \rangle_d$.

3. Заключение

В результате проведенного анализа выясняется, что для дальнейшего развития теории статистического моделирования мелкомасштабной турбулентности и, в частности, развития теории *K62*, прежде всего надо учесть эффекты внутренней перемежаемости случайных полей диссипации энергии. При этом для идентификации турбулентной жидкости достаточно использовать размер частичного усреднения $l = r_{max}$, тогда как для идентификации диссипативной жидкости $l = r_{min}$.

Следует также заметить, что в математическом плане учет эффектов внутренней перемежаемости представляет собой распространение метода «автономного статистического моделирования энергосодержащей структуры турбулентных течений» *ASMTurb* [13, 14, 15] на статистическое *моделирование их мелкомасштабной структуры*. Именно в этой связи теория статистического моделирования мелкомасштабной структуры развитых турбулентных течений была названа теорией *ASMTurbS*.

Таким образом, перспективы построения теории неоднородной мелкомасштабной турбулентности развитых турбулентных течений связаны с использованием теории локально изотропной турбулентности *Колмогорова* с последующим учетом эффектов внутренней перемежаемости *Бэтчелора и Таунсенда*.

Список литературы

[1] Kolmogorov, A.N. 1941. Local turbulence structure in incompressible viscous fluid at very high Reynolds numbers, Dokl. Akad. Nauk SSSR 30, pp. 299-303.

[2] Kolmogorov, A.N. 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structures of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers, J. Fluid Mech. 13, pp. 82-85.

[3] Monin, A.S. and Yaglom, A.M. 1975. Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Volume 2, Cambridge, MA: MIT Press. (Монин А.С., Яглом А.М. 1996. Статистическая гидромеханика. - М.: Гидрометеиздат. Т. 2. - 742 с.)

[4] Kuznetsov, V. R. and Sabel'nikov, V. A. 1990. Turbulence and Combustion. New York: Hemisphere (Kuznetsov, V. R., Sabelnikov, V. A. 1986. Turbulence and combustion. Moscow. Nauka Press, in Russian).

[5] Nuzhnov, Yu. 2015. ASMTurbC method of autonomous statistical modelling of diffusion turbulent combustion and some results of its testing, IX International Science and Technology Conference "Processes of combustion, heat exchange, and ecology of heat engines" Samara, Russia, Vestnik SGAU 14, pp. 137–150.

[6] Browne L., Antonia R., Shah D. 1987. Turbulent energy dissipation in a wake// J. Fluid Mech. Vol.179. pp. 307-326.

[7] Frisch, U. Turbulence. 1995. The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge University Press.

[8] Nuzhnov, Yu. 2013. Some results of statistical modeling of the small-scale turbulence structure revealed with consideration of intermittency// IMECE. - California, San Diego. – Vol. 7A: Fluids Engineering Systems and Technologies. - 7p.

[9] Kaneda, Yu. and Morishita, K. 2013. Small-Scale Statistics and Structure of Turbulence in the Light of High Resolution Direct Numerical

Simulation. In *Ten Chapters in Turbulence*, ed. P.A. Davidson, Yu Kaneda, K.R. Sreenivasan, Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Нужнов Ю.В. 2017. О некоторых текущих проблемах и задачах статистической гидромеханики турбулентных течений// Горение и плазмохимия. Т.15, №2, с.105-112. (Nuzhnov Y.V. 2017. About some current problems and tasks of statistical hydrodynamics of turbulent flows.)

[11] Нужнов Ю.В. 2015. Статистическое моделирование перемежающихся турбулентных течений. Алматы: Казак университети, - 300с.

[12] Batchelor, G.K. and Townsend, A.A. 1949. The nature of turbulent motion at large wave numbers. *Proc. R. Soc. Lond.* Vol. 199, No 1057. pp. 238-255.

[13] Nuzhnov, Yu. 2013. Method of autonomous statistical modeling of turbulent flows, Certificate of authorship 0010816. publ. 10.21.2013, Bul. No. 1392. - 6 p.

[14] Nuzhnov, Yu. 2017. Statistical Modeling for the Energy-Containing Structure of Turbulent Flows. In *Turbulence Modeling Approaches*, K. Volkov (ed.), Current State, Development Prospects, Applications. Published by inTech, Chapter 4, pp. 99-122.

[15] Nuzhnov, Yu. and Yembergenova, D.B. 2019. The prospects of statistical modeling of turbulent flows//International United Academy of Sciences:- Amsterdam. Part 1. General question of world science. Collection of scientific papers on materials VIII International Scientific Conference. SPLN 001-000001-0501-GD; DOI 10.184//gq-31-07-2019-pl; IDSP sciencerussia-31-07-2019-pl.

© Ю.В. Нужнов, 2023