Ф.Р. Гусманова,
С.Б. Беркімбаева,
А.Р. Тұрғанбаева

Дискреттік математика элементтері

Оқу құралы

Алматы, 2021

ӘОЖ 510(075.8)
КБЖ 22.31
Г94

Г 94 Дискреттік математика элементтері: оқу құралы / Ф.Р. Гусманова, С.Б. Беркімбаева, А.Р. Тұрғанбаева. - Нұр-Сұлтан: Қаржы академиясы, 2021 . – 127 б.

ISBN 978-601-08-0938-3

Пікір жазғандар:

Қ.С. Дальбекова, Халықаралық бизнес университетінің «Бизнес информатика» кафедрасы, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент;

М.А. Скиба, АҚ «Қаржы академиясының» ректоры, педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент.

Баспаға Қаржы Академиясының Ғылыми Кеңесінің шешімімен шығаруға ұсынылған.

(Хаттама №2, 13 қазан 2020 ж.)

Ұсынылып отырған оқу құралы білім алушылардың «Математика», «Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика», «Математикалық логика» және басқа да осы бағыттағы пәндер бойынша даярлауға арналған. Оқу құралы қажетті теориялық мәліметтерден, практикалық сабақтарда, өз бетімен орындауға арналған тапсырмалардан мен осы тапсырмаларды орындаудың жаттығулар мен өзін-өзі бақылауға арналған бақылау сұрақтарынан тұрады. Дайындалған оқу құралы әр түрлі деңгейдегі білім алушыларға арналғандықтан, келтірілген мәліметтер, осы ғылыми пән бағытында қалыптастырылған классикалық іргелі нәтижелерді қамтитындай жалпы сипатта жазылған.

Оқу құралын дайындау барысында авторлар өз тәжірибелерін, оқу құралында ұсынылған әдебиеттердегі материалдарды, соның ішінде авторлардың алдыңғы еңбектерін толықтыру мен өңдеу негізінде алынған материалдарды пайдаланды.

ӘОЖ 510(075.8)
КБЖ 22.31

ISBN 978-601-08-0938-3

Кіріспе

Дискреттік математика – математика, информатика бағытындағы білімнің маңызды элементі болып табылады. Осы оқу құралында дискреттік математика негізі баяндалады.

Оқу құралы дискреттік математика бағытындағы пәндерге бағытталып дайындалды.

Оқу құралында негізгі санау жүйелері, жиындар теориясының мәліметтері, жиындар элементтерінің қасиеттері мен оларға амалдар қолдану, логикалар алгебрасының негізгі элементтері, атап айтқанда айтылымдар мен предикаттар, тавтология мен кванторлар, логика алгебрасының заңдары мен қасиеттері қарастырылады.

Математикада XIX ғасырдың екінші жартысында жиын ұғымы пайда болды. Жиын теориясының негізін қалаушы неміс математигі Георг Кантор (1845- 1918) болды.

Формалды логика - ескі ғылымдардың бірі. Кейбір бөлімдері Ежелгі Греция мен Үндістанда біздің дәуірге дейінгі VI ғ. қарастырылған болатын. Осы ғылымның негізін қалаушы – Аристотель болатын. Аристотельдің іліміне негізделген логика XX ғасырдың басына дейін жалғасты, одан кейін символдық немесе математикалық логиканың әдістерін қолданумен байланысты ғылыми революция жүзеге асырылды. Соңғы идея XVII ғ. неміс ғалымы Г.В.Лейбництің үлесінде болды.

Ұсынылып отырған оқу құралының бірінші тарауында негізгі санау жүйелері, бір жүйеден екінші жүйеге өту, оларға қолданылатын операциялар қарастырылса, екінші тарауында жиындар теориясының мәліметтері берілді. Ал үшінші тарауда логикалар алгебрасының негізгі мәліметтері: айтылымдар мен предикаттар, тавтология мен кванторлар да қарастырылады.

Оқу құралындағы теориялық бөлімді қорытындылау мақсатында жаттығулар берілген. Сонымен қатар, әрбір тараудың соңында алған білімін пысықтау мақсатында білім алушылардың аудиториялық сабақтарда немесе өз бетімен орындауға арналған жеке тапсырмалар мен бақылау сұрақтары келтірілген.

Басылым бірінші кезекте жоғары оқу орындарының білім алушыларына көмекші құрал ретінде пайдалануға болады. Құрастырушылардың көздеген мақсаты – қазақша оқу құралдарының аздығын ескеріп, қазақ мектептерін тәмәмдап жоғары оқу орындарына түскен студенттер мемлекеттік тілде еркін оқып, білім алуларына септіктерін тигізу.

I-ТАРАУ. САНАУ ЖҮЙЕЛЕРІ

1.1. Санау жүйелеріне қатысты негізгі ұғымдар мен түсініктер

Санау жүйелері – цифрлардың белгілі бір жиынтығының көмегімен мандарды жазу жүйесі.

Санау жүйелері – цифр деп аталатын символдар көмегімен сандарды таңбалайтын атаулар ережесінің жиынтығы. Санау жүйелерінің негізі ретінде әртүрлі символдар саны немесе осы жүйеде цифрларды таңбалауға қолданылатын белгілер алынады.

Басқаша айтқанда, санау жүйесі – сандарды жазудың символдық әдісі, жазбаша таңбалардың көмегімен сандарды беру.

Санау жүйесі:

- сандар жиынын (бүтін немесе нақты) береді;
- әрбір санды бірегей (кем дегенде стандартты) көрсетеді;
- санның алгебралық және арифметикалық құрылымын бейнелейді.

Санау жүйелері *позициялық* және *позициялық емес* болып екіге бөлінеді.

Позициялық санау жүйелері – символдың мәні оның сандағы орналасқан орынынан тәуелді болатын жүйелер.

Позициялық санау жүйелерінде пайдаланылатын әр түрлі цифрлар саны *санау жүйесінің негізі* деп аталады. Позициялық санау жүйелерінде әр цифрдың мәні оның сан ішіндегі позициясына – тұрған орнына байланысты өзгеріп отырады. Мысалы, 666,6 санында бірінші 6 жүзді, екіншісі — 6 ондықты, үшіншісі – 6 бірлікті, ал соңғысы — бірдің оннан 6 бөлігін ғана көрсетеді.

Позициялық емес санау жүйесінде алфавиттегі символдар саны жүйенің негізіне тең болады. Позициялық емес санау жүйесіне рим сандары жатады. Бірнеше сандар негіз болып алынған (мысалы, I, V, X), ал қалғандары осы негізгі сандарды қосу (VI, VII сияқты) немесе алу арқылы (IV, IX сияқты) алынады.

Санау жүйесінің негізіне кез келген натурал санды алуға болады – екі, үш, төрт, бес, т.с.с. Сондықтан, позициялық санау жүйелері шексіз көп бола береді: екілік, үштік, төрттік, т.с.с. Негізі q болып келген санау жүйесінде сандарды жазу мынадай өрнектің қысқаша түрі болып табылады:

$$a_{n-1}\, q^{n-1} + a_{n-2}\, q^{n-2} + \ldots + a_1\, q^1 + a_0\, q^0 + a_{-1}\, q^{-1} + \ldots + a_{-m}\, q^{-m},$$

мұндағы a_i — санау жүйесінің цифрлары; n және m — берілген санның бүтін және бөлшек разрядтары сандары.

666,6 санын мынадай түрде де жазуға болады.

$600 + 60 + 6 + 0,6 = 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} = 666,6.$

ЭЕМ–де қолданылатын позициялық санау жүйелеріне екілік, ондық, сегіздік, он алтылық санау жүйелер жататындықтан біз тарауда тек осы санау жүйелерін қарастырамыз.

1.2. Санау жүйелері

Бұл жерде біз практикада жиі кездесетін позициялық санау жүйелерін қарастырамыз. Олар:

- 2 – екілік (дискреттік математикада, информатикада, программалауда пайдаланылады);
- 3 – үштік;
- 8 – сегіздік;
- 10 – ондық (бірлесе пайдаланылады);
- 12 – он екілік (дюжиндармен есептеледі);
- 16 – он алтылық (информатикада, программалауда пайдаланылады);
- 60 – алпыстық (уақытты өлшеу, бұрыштарды, дербес жағдайларда координаталарды, бойлық пен ендіктерді өлшеу бірліктері).

1.2.1. Ондық санау жүйесі

Алфавиті**:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (S=10).

«Ондық» аты былайша түсіндіріледі: бұл жүйенің түп төркінінде он негізі жатыр. Бұл жүйеде санды жазу үшін он цифр қолданылады:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ондық жүйе позициялық болып табылады, өйткені ондық санды жазуда цифрдың мәні оның позициясына немесе санда орналасқан орнына байланысты.

Санның цифрына бөлінетін позицияны разряд деп атайды.

Сандарды өзге санау жүйесінде түсіну үшін алдымен өзімізге үйреншікті, таныс ондық санау жүйесінде сандардың қалай құрылатынын қарастырайық. Ондық санау жүйесінде санау 9-ға жеткен кезде жаңа разряд (ондық) енгізіледі де бірліктер нөлге айналып, санау қайтадан басталады. 19-дан кейін ондық разряды 1-ге артады, ал бірліктер қайтадан нөлге айналады. Осылай жалғаса береді. Ондық 9-ға жеткеннен кейін үшінші разряд – жүздіктер пайда болады.

Мысалы, 935 жазуы 9 жүздіктен, 3 ондықтан және 5 бірліктен тұратын сан екенін білдіреді. 5 цифры-бірліктер разрядында, 3-ондықтар разрядында, 9-жүздіктер разрядында тұрады. Егер осы санды қосынды түрінде жазатын болсақ:

$$935=9\cdot10^2+3\cdot10^1+5\cdot10^0$$

Қарапайым тілде түсіндірсек, осы қосындыдағы 9, 3, 5 сандары сәйкес 935 санындағы цифрлар. Бұл жазбадағы 10 саны санау жүйесінің негізі болып табылады. Санның әрбір цифры үшін 10 негізі цифрдың орнына байланысты дәрежеленеді және осы цифрға көбейтіледі. Бірліктер үшін негіз дәрежесі -нөлге, ондықтар үшін – бірге, жүздіктер үшін-екіге тең және т.с.с. Мысалы, 555,55 ондық саны мынандай қосындымен белгіленеді:

$$555{,}55_{10} = 5\cdot10^2 + 5\cdot10^1+ 5\cdot10^{\circ}+ 5\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-2}.:$$

Осылайша, ондық санның кез келген цифрының салмағы-оның белгілі бір бүтін дәрежесі, ал дәреженің мәні сәйкес цифрдың позициясын бекітеді.

1.2.2. Екілік санау жүйесі

Алфавиті***:*** 0, 1 (S=2).

Компьютерлік технологияда екілік санау жүйесі жиі қолданылады. Ол есептеу техникасының тілі болып табылады. Мұндай жүйені электроникада (жартылай өткізгіш транзисторлар мен микросұлбалар) жүзеге асыру өте оңай, себебі ол үшін бар жоғы екі орнықты жағдай талап етіледі (0 және 1). Егер бұл ондық санау жүйесі болса, онда он жағдайдан тұратын құрылғыны құру қажет болар еді. Бұл өте күрделі және екілік санау жүйесіне ерекше көңіл бөлінуінің бірден-бір себебі болып табылады.

Екілік санау жүйесінде 0 және 1 цифрлары пайдаланылады. Нақты құрылғыда бұл қандай да бір физикалық құбылыстың бар болуын немесе оның жоқ болуын сипаттайды. Мысалы, электр заряды бар немесе жоқ, кернеу бар немесе жоқ және т.б.

Екі саны екілік санау жүйесінің негізі болып табылады. Екілік санау жүйесіндегі амалдар ондық санау жүйесінде орындалатын амалдарға ұқсас, айырмашылығы бұл жерде тек қана екі – 0 және 1 цифрлары қолданылады. Разряд шегіне жеткен кезде, жаңа разряд пайда болады да алдыңғысы нөлге айналады.

Тек қана 0 және 1 цифрларынан тұратын екілік саннан ондық санды ажырату үшін екілік санды жазуда екілік (кез келген) санау жүйесінің индексіне белгі (санау жүйесінің негізі) қосылады, мысалы, $110101{,}111_2$. Екілік санның әрбір разрядын (цифрын) бит деп атайды.

1.2.3. Сегіздік санау жүйесі

Алфавиті**:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (S=8).

Екілік санау жүйесі компьютер үшін өте қолайлы, ал адам үшін қолайсыз. Бір жағынан сандарды екілік санау жүйесінен ондық санау жүйесіне және керісінше ондық санау жүйесінен екілік санау жүйесіне аударудың машақаты көп. Нәтижесінде программалаушылар көбінесе сегіздік және он алтылық санау жүйесін пайдаланылады. 8-де, 16-да екі санының дәрежесі болғандықтан екілік санды оларға және керісінше аудару өте жеңіл болып есептеледі.

1.2.4. Он алтылық санау жүйесі

Алфавиті**:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (S=16).

Он алтылық санау жүйесінде 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрлары мен латын алфавитінің A, B, C, D, E, F әріптері пайдаланылады.

Екілік санау жүйесі, сегіздік санау жүйесі, ондық санау жүйесі және он алтылық санау жүйелерінің арасындағы байланыс 1-кестеде келтірілген.

1-кесте. Әр түрлі санау жүйелеріндегі сандардың жазылуы

Ондық санау жүйесіндегі сандар	Екілік санау жүйесіндегі сандар	Сегіздік санау жүйесіндегі сандар	Он алтылық санау жүйесіндегі сандар
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

1.1-кесте. Сегіздік және он алтылық санау жүйелерінің сандардың сәйкес үштік және төрттік берілуі.

Сегіздік санау жүйесіндегі сандар		Он алтылық санау жүйесіндегі сандар	
1	2	3	4
	Триад (үштік)		Тетрад (төрттік)
0	000	0	0000
1	001	1	0001
2	010	2	0010
3	011	3	0011

1.1-кестенің жалғасы			
1	2	3	4
4	100	4	0100
5	101	5	0101
6	110	6	0110
7	111	7	0111
		8	1000
		9	1001
		A	1010
		B	1011
		C	1100
		D	1101
		E	1110
		F	1111

1.3. Бір санау жүйесінен сандарды басқа санау жүйесіне ауыстыру

1.3.1. Сандарды ондық санау жүйесінен екілік, сегіздік, он алтылық санау жүйелеріне ауыстыру

а) бүтін ондық сандарды екілік санау жүйесіне ауыстыру

Ереже: Бүтін ондық санды екілік санау жүйесіне ауыстыру үшін осы санды 2-ге бөлу қажет. Бөлінді 2-ден кіші болғанша алынған бөліндіні 2-ге бөле береміз. Ең соңында алынған бөлінді (2-ден кіші) ізделінді санның біріншісі болады, ал екіншісінен бастап алынған қалдық сандардың соңғысынан бастапқысына дейін, немесе төменнен-жоғары қарай жазамыз. Яғни нәтижесі кері бағытта алынады.

Егер ол бөлшек сан болса, онда бүтін бөлігі жоғарыда айтылғандай 2-ге бөлінеді де, бөлшек бөлігі екіге көбейтіліп шыққан мәннің бүтін бөлігін ескермей, бөлшек бөлігі қажетті дәлдікке дейін екіге көбейтіледі де көбейтіндінің бүтін мәндері жоғарыдан төмен немесе солдан оңға қарай алынады.

ә) Ондық сандарды сегіздік санау жүйесіне ауыстыру

Ереже: Ондық жүйеден сандарды сегіздік санау жүйесіне ауыстыру үшін бөлінді 8-ден кіші болғанша сандарды 8 санына бөле береміз. Нәтижесін кері бағытта жазамыз.

Егер ол бөлшек сан болса, онда бүтін бөлігі жоғарыда айтылғандай 8-ге бөлінеді де, бөлшек бөлігі сегізге көбейтіліп, шыққан мәннің бүтін бөлігін ескермей, бөлшек бөлігі қажетті дәлдікке дейін екіге көбейтіледі. Көбейтіндінің бүтін мәндері жоғарыдан төмен немесе солдан оңға қарай жазылады.

б) ондық сандарды он алтылық санау жүйесіне ауыстыру

Ереже: Ондық жүйеден сандарды он алтылық санау жүйесіне ауыстыру үшін бөлінді б16-дан кіші болғанша сандарды 16 санына бөле береміз. Алынған қалдықтағы сан 10-15 аралығындағы сандар болса, онда олар сәйкесінше A-F дейінгі латын әріптерімен алынады да, нәтиже кері бағытта жазылады.

Егер ол бөлшек сан болса, онда бүтін бөлігі жоғарыда айтылғандай 16-ға бөлінеді де, бөлшек бөлігі он алтыға көбейтіліп шыққан мәннің бүтін бөлігін ескермей, бөлшек бөлігі қажетті дәлдікке дейін он алтыға көбейтіледі де көбейтіндінің бүтін мәндері жоғарыдан төмен немесе солдан оңға қарай алынады.

1.3.2. Екілік санау жүйесіндегі сандарды ондық, сегіздік, он алтылық санау жүйелеріне ауыстыру

а) Екілік сандарды ондық санау жүйесіне ауыстыру

Ондық сандар сияқты, кез-келген екілік санды екілік санға кіретін цифрлар салмағының айырмашылығын анық бейнелейтін қосынды түрінде жазуға болады. Бұл қосындыда негіз ретінде 2 саны қолданылады.

Қорытындыласақ, екілік сандарды ондық санау жүйесіне ауыстыру үшін берілген екілік санды ереже бойынша қосынды түрінде жазып, алынған қосындының нәтижесін ондық жүйеде есептеу керек.

ә) екілік сандарды сегіздік санау жүйесіне ауыстыру

8 саны 2-нің үш дәрежесіне тең болғандықтан, кез келген цифрды сегіздік сан түрінде жазу үшін оны үш цифрдан тұратын топқа (триад) бөліп, сегіздік санау жүйесіндегі сәйкес цифрлармен

(1-кесте) алмастырсақ жеткілікті, яғни топтағы әрбір үштікке сегіздік санау жүйесінің бір цифры сәйкес келеді.

Топқа бөлу амалын санның соңынан бастап, жетпейтін цифрларды (бүтін санда ол басындағы топқа қатысты болады, топтағы цифрлар саны 3-тен аз болса) санның басында 0-мен толықтыру керек.

б) екілік сандарды он алтылық санау жүйесіне ауыстыру

Санды екілік санау жүйесінен сегіздік санау жүйесіне аударғандай амалдар орындалады. Тек ескере кететін жағдай 16 саны 2-нің төрт дәрежесіне тең болғандықтан, кез келген цифрды он алтылық санау жүйесінде жазу үшін оны төрт цифрдан тұратын топқа (тетрад) бөліп, он алтылық санау жүйесіндегі сәйкес цифрлармен (1-кесте) алмастырсақ жеткілікті. Яғни топтағы әрбір төрттікке он алтылық санау жүйесінің цифры сәйкес келеді. Топқа бөлу амалын санның соңынан бастаймыз және жетпейтін цифрларды (топтағы цифрлар саны 4-тен аз болса) санның басында 0-мен толықтырамыз.

1.3.3. Сегіздік сандарды ондық, екілік, он алтылық санау жүйелеріне ауыстыру

а) сегіздік сандарды ондық санау жүйесіне ауыстыру

Ондық, екілік сандар сияқты, кез-келген сегіздік санды сегіздік санау жүйесіне кіретін цифрлар салмағының айырмашылығын анық бейнелейтін қосынды түрінде жазуға болады. Бұл қосындыда 8 саны негіз ретінде қолданылады.

Қорытындыласақ, сандарды сегіздік санау жүйесінен ондық санау жүйесіне ауыстыру үшін берілген сегіздік санды ереже бойынша қосынды түрінде жазып, алынған қосындының нәтижесін ондық жүйеде есептеу керек.

ә) сегіздік сандарды екілік санау жүйесіне ауыстыру

Сегіздік сандарды екілік санау жүйесіне ауыстыру үшін әрбір цифрды оның сәйкес екілік санау жүйесіндегі санмен (1-кесте) алмастырса жеткілікті. Әрбір цифрды үш цифрдың көмегімен жазу керек (екілік санау жүйесіндегі 1 санын 001 ретінде жазамыз).

б) сегіздік сандарды он алтылық санау жүйесіне ауыстыру

Сегіздік сандарды он алтылық санау жүйесіне ауыстыру үшін алдымен берілген сегіздік санды екілік санау жүйесіне, содан кейін алынған екілік санды он алтылық санау жүйесіне аударамыз.

1.3.4. Он алтылық санау жүйесінен екілік, сегіздік, ондық, санау жүйелеріне ауыстыру

а) он алтылық санау жүйесінен екілік санау жүйесіне ауыстыру

Он алтылық санау жүйесінен екілік санау жүйесіне ауыстыру үшін әрбір цифрды оның сәйкес екілік санау жүйесіндегі санмен (1-кесте) алмастырса жеткілікті. Әрбір цифрды төрт цифрдың көмегімен жазу керек (екілік санау жүйесіндегі 1 санын 0001 ретінде жазамыз).

ә) он алтылық санау жүйесінен сегіздік санау жүйесіне ауыстыру

Он алтылық сандарды сегіздік санау жүйесіне ауыстыру үшін алдымен берілген он алтылық санды екілік санау жүйесіне, содан кейін алынған екілік санды сегіздік санау жүйесіне аударамыз.

б) он алтылық санау жүйесінен ондық санау жүйесіне ауыстыру

Ондық, екілік, сегіздік сандар сияқты, кез-келген он алтылық санау жүйесіндегі санды қосынды түрінде жазуға болады. Бұл қосындыда 16 саны негіз ретінде қолданылады.

Он алтылық жазылудың көмегімен алуға болатын максималды екі разрядты сан – бұл FF.

$$FF = 15 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 240 + 15 = 255$$

255 – бұл 8 битке тең бір байттың максималды мәні: 1111 1111 = FF.

1.4. Санау жүйелеріне қолданылатын арифметика

1.4.1. Екілік арифметика

*а) қосу***.** Екілік санау жүйесіндегі сандарды қосу үшін екілік қосу кестесі қолданылады, қосқанда олардың кіші разрядынан бастап қосылады. Егер 1+1 болып келсе, 0 сол разрядта қалады да 1 келесі разрядқа беріледі.

ә) азайту. Екілік жүйедегі сандарды азайтқанда олар кесте бойынша бір бірінен азайтылады. Егер разряд жетпесе көршілес үлкен разрядтан 2-ні аламыз және қарыз беруші разряд қарызға 1 береді де, ол келесі разрядқа 2 болып барады.

б) көбейту. Екілік жүйедегі сандарды көбейту үшін 2-кесте бойынша сандар бір біріне көбейтіледі де, шыққан мәндер өзара қосылады.

2-кесте. Екілік санау жүйесіндегі сандарға амалдар қолдану кестесі.

Екілік санау жүйесінде қосу ережесі	0+0=0	0+1=1	1+0=1	1+1=10
Екілік санау жүйесінде азайту ережесі	0-0=0	1-0=1	1-1=0	10-1=1
Екілік санау жүйесінде көбейту ережесі	0x0=0	0x1=0	1x0=0	1x1=1

1.4.2. Сегіздік арифметика

*а) қосу***.** Сегіздік санау жүйесіндегі сандарды өзара қосу үшін ең алдымен олардың кіші разрядтарынан бастап қосылады. Егер қосылып шыққан сан 7 ден үлкен болса, онда сол сан 8-ге бөлінеді, шыққан санның кіші разрядты сол разрядта қалады да, үлкен разряд келесі разрядқа беріледі.

ә) азайту. Сегіздік санау жүйесіндегі сандарды өзара азайтқанда ең алдымен кіші разрядтарынан бастап азайтылады. Егер азайтылатын сан азайтатын саннан кіші болса, онда ол үлкен разрядтан қарыз алады. Үлкен разряд қарыз бергенде 1 береді де, ол 8 болып барады, яғни кіші разряд үлкен разрядтан бір алғанда 8-ді береді.

*б) көбейту***.** Сегіздік санау жүйесіндегі сандарды көбейткенде олар кәдімгі көбейту ережесі бойынша көбейтіледі, көбейтіліп шыққан сан 7 ден үлкен болса онда сол сан 8-ге бөлінеді де кіші разряды сол орында қалады да үлкен разряды ойда деп алып, келесі көбейтілген санға қосамыз, осылайша көбейтіліп алынған сандар бір біріне қосылады.

1.4.3. Он алтылық арифметика

*а) қосу***.** Он алтылық санау жүйесіндегі сандарды қосу үшін ең алдымен оларды кіші разрядтарынан бастап қосамыз, қосылып шыққан сан 15-тен үлкен болса онда оны 16-ға бөлеміз. Одан шыққан санның кіші разряды сол орында қалады да, үлкен разряды келесі разрядқа беріледі.

*ә) азайту***.** Он алтылық санау жүйесіндегі сандарды өзара азайтқанда ең алдымен кіші разрядтарынан бастап азайтылады. Егер азайтылатын сан азайтатын саннан кіші болса, онда ол үлкен разрядтан қарыз алады. Үлкен разряд қарыз бергенде 1 береді де, ол 16 болып барады, яғни кіші разряд үлкен разрядтан бір алғанда 16-ны береді.

*б) көбейту***.** Он алтылық санау жүйесіндегі сандарды көбейткенде олар кәдімгі көбейту ережесі бойынша көбейтіледі. Көбейтіліп шыққан сан 15-тен үлкен болса, онда сол сан 16-ға бөлінеді де, кіші разряды сол орында қалады. Үлкен разряды ойда деп алып, келесі көбейтілген санға қосамыз. Осылайша көбейтіліп, алынған сандар бір біріне қосылады.

Жаттығулар

1-жаттығу.

Ондық санау жүйесіндегі берілген сандарды

1.1. екілік санау жүйесіне аудару керек;
1.2. сегіздік санау жүйесіне аудару керек;
1.3. он алтылық санау жүйесіне аудару керек;

Ескерту:

1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындау керек;
2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

1.1 а) 935_{10} ондық санын екілік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

935:2=467,	қалдық 1;
467:2=233,	қалдық 1;
233:2=116,	қалдық 0;
116:2=58,	қалдық 0;
58:2=29,	қалдық 1;
29:2=14,	қалдық 1;
14:2=7,	қалдық 0;
7:2=3,	қалдық 1;
3:2=1,	қалдық 1;

Алынған соңғы бөлінді 1 мәні 2-ден кіші, сондықтан осы цифрды ізделінді санның біріншісі ретінде, ал қалдықтарды соңғысынан бастап алғашқысына дейін осы цифрдың қасына тіркеп жазамыз:

Жауабы:

$$935_{10}=1110100111_2$$

Тексеру:

$$110100111_2=1*2^9+1*2^8+1*2^5+1*2^2+1*2^1+1*2^0=$$
$$=512+256+128+32+4+2+1=935_{10}$$

1.1 ә) $935{,}625_{10}$ санын екілік санау жүйесіне аудару талап етілсін (үтірден кейін жеті таңбаға дейін).

Шығарылуы:

935 санын алдыңғы мысалда қолданылған әдіспен 2-ге бөліп есептеп аламыз. Оның шешімі 1110100111_2, ал бөлшек бөлігін ереже бойынша 2-ге көбейтеміз:

$$\begin{array}{ll|l} 0{,}625 * 2 & = 1{,}25 & 1 \\ 0{,}25 * 2 & = 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 * 2 & = 1{,}0 & 1 \\ 0 \quad * 2 & = 0 & 0 \end{array} \downarrow$$

Жауабы:

$$935{,}625_{10} = 1110100111{,}101(0)_2.$$

Тексеру:

$1110100111{,}101(0)_2 = 1*2^9+1*2^8 + 1*2^5+1*2^2+1*2^1 +1*2^0 + 1*2^{-1}+1*2^{-3} = =512+256+128+32+4+2+1+0{,}5+0{,}125=935{,}625_{10}$

1.2 а) Ондық жүйедегі 935_{10} санын сегіздік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

$$\begin{array}{l|ll} 935:8=116 & \text{қалдық} & 7; \\ 116:8=14 & \text{қалдық} & 4; \\ 14:8=1 & \text{қалдық} & 6; \end{array} \uparrow$$

Алынған бөлінді 1 мәні 8-ден кіші.

Жауабы:

$$935_{10}=1647_8$$

Тексеру.

$$1647_8=1*8^3+6*8^2+4*8^1+7*8^0=512+384+32+7=935_{10}$$

1.2 ә) $935{,}6_{10}$ санын сегіздік санау жүйесіне аудару талап етілсін (үтірден кейін жеті таңбаға дейін).

Шығарылуы:

935 санын алдыңғы мысалда қолданылған әдіспен 8-ге бөліп есептеп аламыз, оның шешімі 1647_8, ал бөлшек бөлігін ереже бойынша 8-ге көбейтеміз:

$$
\begin{array}{l|l}
0,6 * 8 = 4,8 & 4 \\
0,8 * 8 = 6,4 & 6 \\
0,4 * 8 = 3,2 & 3 \\
0,2 * 8 = 1,6 & 1 \\
0,6 * 8 = 4,8 & 4 \downarrow
\end{array}
$$

Жауабы:

$$935,6_{10}=1647,4631463_8$$

Тексеру.

$$1647,4631463_8=1*8^3+6*8^2+4*8^1+7*8^0+$$
$$+4*8^{-1}+6*8^{-2}+3*8^{-3}+1*8^{-4}+4*8^{-5}+6*8^{-6}+3*8^{-7}\approx 935,6_{10}$$

1.3 а) Ондық жүйедегі 935_{10} санын он алтылық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Алдында қарастырылған мысалдар сияқты бұл жағдайда да берілген ондық санды бөлінді 16-дан кіші болғанша бөле береміз.

$$
\begin{array}{l|ll}
935:16 =58 & \text{қалдық} & 7; \\
58:16=3 & \text{қалдық} & 10\ (A); \uparrow
\end{array}
$$

Алынған бөлінді 3 мәні 16-дан кіші.

Жауабы:

$$935_{10}=3A7_{16}$$

Тексеру.

$$3A7_{16} = 3*16^2+A*16^1+7*16^0=768+160+7=935_{10}$$

1.3 ә) Ондық жүйедегі 935,425 бөлшек санын он алтылық санау жүйесіне аудару талап етілсін (үтірден кейін жеті таңбаға дейін).

Шығарылуы:

935 санын алдыңғы мысалда қолданылған әдіспен 16-ға бөліп есептеп аламыз, оның шешімі $3A7_{16}$, ал бөлшек бөлігін ереже бойынша 16-ға көбейтеміз:

$$
\begin{array}{l|l}
0,425 * 16 = 6,8 & 6 \\
0,8 * 16 = 12,8 & C \\
0,8 * 16 = 12,8 & C \downarrow
\end{array}
$$

Жауабы:

$$935,425_{10}=3A7,6C(C)_{16}.$$

Тексеру:

$$3A7,6C(C)_{16}=3*16^2+A*16^1+7*16^0+6*16^{-1}+C*16^{-2}\approx 935,425_{10}$$

2- жаттығу.

Екілік санау жүйесіндегі берілген сандарды

2.1. сегіздік санау жүйесіне аудару керек;

2.2. ондық санау жүйесіне аудару керек;

2.3. он алтылық санау жүйесіне аудару керек;

Ескерту:

1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындау керек;
2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

2.1 а) 1110100111_2 санын сегіздік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген санды 3 цифрдан тұратындай соңынан бастап топтарға бөлеміз, жетіспеген топты нөлдермен толтырамыз (біздің мысалда басындағы 1 саны біреу болды, сондықтан оның алдына нөлдер жазамыз):

$1110100111_2=1110100\ 111_2=001110100\ 111_2=1\ 6\ 4\ 7_8$

Жауабы:

$$1110100111_2=1647_8$$

Тексеру:

Алдымен сегіздік санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін екілік санау жүйесіне аударамыз.

$1647_8=1*8^3+6*8^2+4*8^1+7*8^0= 512+384+32+7=935_{10}$

935_{10} санды екілік санау жүйесіне аудару керек.

935:2=467	қалдық 1
467:2=233	қалдық 1
233:2= 116	қалдық 1
116:2=58	қалдық 0
58:2=29	қалдық 0
29:2= 14	қалдық 1
14:2=7	қалдық 0
7:2=3	қалдық 1
3:2=1	қалдық 1

$$1647_8=1110100111_2$$

2.1 ә) *$1101011,0110011_2$* санын сегіздік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген санды 3 цифрдан тұратындай үтір белгісінен екі шетке қарай топтарға бөлеміз, жетіспеген топты нөлдермен толтырамыз:

$$1101011{,}0110011_2 = 001\ 101\ 011,\ 011\ 001\ 100_2 = 153{,}314_8$$

Жауабы:

$$1101011{,}0110011_2 = 153{,}314_8$$

Тексеру:

Алдымен сегіздік санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін екілік санау жүйесіне аударамыз.

$$153{,}314_8 = 1*8^2+5*8^1+3*8^0+3*8^{-1}+1*8^{-2}+4*8^{-3} =$$

$$=64+40+3+ 0{,}375+0{,}015625+0{,}0078125 = 107{,}3987375_{10}$$

$107{,}3987375_{10}$ санды екілік санау жүйесіндегі санға аударамыз:

107:2=53	қалдық 1
53:2=26	қалдық 1
26:2=13	қалдық 0
13:2= 6	қалдық 1
6:2=3	қалдық 0
3:2=1	қалдық 1

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 2-ге көбейтеміз:

0, 3987375*2=0,796875	0
0,796875*2=1,59375	1
0, 59375*2=1,1875	1
0, 1875*2=0,375	0
0, 375*2=0,75	0
0,75*2=1,5	1
0,5*2=1,0	1

$$153{,}314_8=107{,}3987375_{10}=1101011{,}0110011_2$$

2.2 а) Екілік санау жүйесіндегі 1110100111 санын ондық жүйеге аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

1110100111екілік саны үшін қосынды мына түрде болады:

$$1110100111_2=1\cdot2^9+1\cdot2^8+1\cdot2^7+0\cdot2^6+1\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$$

Бұл қосынды ондық сан үшін жазылған қосындының ережесі бойынша жазылады. Берілген мысалда екілік сан он санды бүтін бөліктен тұрады. Сондықтан бүтін бөліктің үлкен цифры, яғни 1 саны $2^{10-1}=2^9$ санына көбейтіледі, бүтін бөліктің 1-ге тең келесі саны, 2^8 санына көбейтіледі және т.с.с. Осы қосындыда ондық жүйенің ережесі бойынша арифметикалық операцияларды орындай отырып, 935 санын аламыз.

Осылайша, 1110100111_2 екілік саны 935 ондық санына сәйкес келеді, немесе $1110100111_2=935_{10}$

Жауабы:

$$1110100111_2=935_{10}.$$

Тексеру:

935:2=467	қалдық 1
467:2=233	қалдық 1
233:2=116	қалдық 0
116:2=58	қалдық 0
58:2=29	қалдық 1
29:2=14	қалдық 1
14:2=7	қалдық 0
7:2=3	қалдық 1
3:2=1	қалдық 1

$$935_{10}= 1110100111_2$$

2.2 ә) $101100101{,}01101_2$ санын ондық жүйеге аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Бөлшек сандарды ондық санау жүйесіне ауыстырғанда санның бөлшек бөліктерінің дәрежесі үтір белгісінен оңға қарай -1 ден бастап кішірейе береді де, жоғарыдағы мысалдағыдай есептеледі.

101100101,01101 екілік саны үшін қосынды мына түрде болады:

$$101100101{,}01101_2 = 1\cdot2^8 + 0\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + 0\cdot2^4 +$$

$$+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0 + 0\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3}+0\cdot2^{-4}+1\cdot2^{-5}= 357{,}40625_{10}$$

Жауабы:

$$101100101{,}01101_2=357{,}40625_{10}$$

Тексеру:

357:2=178	қалдық 1	↑
178:2= 89	қалдық 0	
89:2= 44	қалдық 1	
44:2=22	қалдық 0	
22:2=11	қалдық 0	
11:2=5	қалдық 1	
5:2=2	қалдық 1	
2:2=1	қалдық 0	

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 2-ге көбейтеміз:

$0{,}40625_{10}$*2=0,8125	0	
0,8125*2=1,625	1	
0,625*2=1,25	1	
0,25*2=0,5	0	
0,5*2=1,0	1	↓

$$357{,}40625_{10}=101100101{,}01101_2$$

2.3 а) 1110100111_2 санын он алтылық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген санды 4 цифрдан тұратындай соңынан бастап топтарға бөлеміз, жетіспеген топты нөлдермен толтырамыз (біздің мысалда берілген санның басындағы 11 саны екі цифрдан тұрады, сондықтан оның алдына нөлдер жазамыз):

1110100111_2=11 1010 0111_2=0011 1010 0111_2= 3 A 7_{16}

Жауабы:

$$1110100111_2=3A7_{16}$$

Тексеру:

Алдымен он алтылық санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін екілік санау жүйесіне аударамыз.

$3A7_{16}=3*16^2+A*16^1+7*16^0=768+160+7=935_{10}$

935_{10} санды екілік санау жүйесіндегі санға аударамыз:

935:2=467	қалдық 1
467:2=233	қалдық 1
233:2=116	қалдық 0
116:2=58	қалдық 0
58:2=29	қалдық 1
29:2=14	қалдық 1
14:2=7	қалдық 0
7:2=3	қалдық 1
3:2=1	қалдық 1

$$3A7_{16}=935_{10}=1110100111_2$$

2.3 ә) $1100101101,11001101_2$ санын он алтылық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген санды 4 цифрдан тұратындай үтір белгісінен екі шетке қарай топтарға бөлеміз, жетіспеген топты нолдермен толтырамыз.

$1100101101,11001101_2 = 0011\ 0010\ 1101,1100\ 1101_2=32D,\ CD_{16}$

Жауабы:

$$1100101101,11001101_2 =32D,\ CD_{16}$$

Тексеру: Алдымен он алтылық санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін екілік санау жүйесіне аударамыз.

$$32D,CD_{16}=3*16^2+2*16^1+D*16^0+C*16^{-1}+D*16^{-2} =$$

$$=768+32+13 +0,75+0,05078125= 813,80078125_{10}$$

$813,92578125_{10}$ санды екілік санау жүйесіне аударамыз:

813:2= 406	қалдық 1
406:2=203	қалдық 0
203:2=101	қалдық 1
101:2= 50	қалдық 1
50:2=25	қалдық 0
25:2=12	қалдық 1
12:2=6	қалдық 0
6:2=3	қалдық 0
3:2=1	қалдық 1

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 2-ге көбейтеміз:

0,80078125*2=1,6015625	1
0,6015625*2=1,203125	1
0,203125*2=0,40625	0
0,40625*2=0,8125	0
0,8125*2=1,625	1
0,625*2=1,25	1
0,25*2=0,5	0
0,5*2=1,0	1

$32D, CD_{16}=813,80078125_{10}=1100101101,11001101_2$

3- жаттығу.
Сегіздік санау жүйесіндегі берілген сандарды
3.1. екілік санау жүйесіне аудару керек;
3.2. ондық санау жүйесіне аудару керек;
3.3. он алтылық санау жүйесіне аудару керек;
Ескерту:
1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындау керек;
2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

3.1 а) 1647_8 сегіздік санын екілік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

1-кесте бойынша

1 саны 001 санымен;

6 саны 110 санымен;

4 саны 100 санымен;

7 саны 111 санымен алмастырылып, нәтижесінде

$$001\ 110\ 100\ 111_2$$

санын аламыз. Бастапқы нөлдер санның мағынасына әсер етпейтіндіктен жазбай тастап кетеміз.

Жауабы:

$$1647_8=1110100111_2$$

Тексеру:

$$1110100111_2=1*2^9+1*2^8+1*2^7+1*2^5+1*2^2+1*2^1+1*2^0 =$$
$$=512+ 256+128+32+4+2+1= 935_{10}$$

935_{10} санды сегіздік санау жүйесіне аударамыз:

935:8=116	қалдық 7	↑
116:8=14	қалдық 4	
14:8=1	қалдық 6	

$$1110100111_2=935_{10}=1647_8$$

3.1 ә) $2345{,}125_8$ сегіздік санын екілік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

1-кесте бойынша

2 саны 010 санымен;

3 саны 011 санымен;

4 саны 100 санымен;

5 саны 111 санымен ;

1 саны 001 санымен;

2 саны 010 санымен;

5 саны 111 санымен алмастырылып, нәтижесінде

$$010\ 011\ 100\ 111,001\ \ 010\ \ 111_2$$

санын аламыз. Бастапқы нөл санның мағынасына әсер етпейтіндіктен жазбай тастап кетеміз.

Жауабы:

$$2347,127_8=010\ 011\ 100\ 111,001\ \ 010\ \ 111_2.$$

Тексеру: Алдымен екілік санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін сегіздік санау жүйесіне аударамыз.

$$010\ 011\ 100\ 111,001\ \ 010\ \ 111_2=$$

$$=1*2^{10}+1*2^7+1*2^6+1*2^5+1*2^2+1*2^1+1*2^0+1*2^{-3}+1*2^{-5}+1*2^{-7}+$$

$$+1*2^{-8}+1*2^{-9}=1024+128+64+32+4+2+1+0,125+0,03125+$$

$$+0,0078125+0,00390625+0,001953125=1255,169921875_{10}.$$

1255:8=156	қалдық 7
156:8=19	қалдық 4
19:8=2	қалдық 3

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 8-ге көбейтеміз:

0,169921875*8=1,359375	1
0,359375*8=2,875	2
0,875*8=7,0	7

$$10\ 011\ 100\ 111,001\ \ 010\ \ 111_2=1255,169921875_{10}=2347,127_8$$

3.2 а) 1647_8 сегіздік санын ондық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Алдымен осы сан үшін қосындыны жазып, жазылған қосындыны ондық санау жүйесінің ережелерін пайдаланып, есептеу жүргіземіз:

$$1647_8=1\cdot 8^3+6\cdot 8^2+4\cdot 8^1+7\cdot 8^0=1\cdot 512+6\cdot 64+4\cdot 8+7\cdot 1=$$
$$=512+384+32+7=935_{10}$$

Бұл қосынды ондық сан үшін жазылған қосындының ережесі бойынша жазылды. Берілген мысалда сегіздік сан төрт санды бүтін бөліктен тұрады. Сондықтан бүтін бөліктің үлкен цифры, яғни бірі $8^{4-1}=8^3$ санына көбейтіледі, бүтін бөліктің 6-ға тең келесі саны, 8^2санына көбейтіледі және т.с.с., көбейтіледі. Осы қосындыға ондық жүйенің ережесі бойынша арифметикалық операцияларды орындай отырып, 935 санын аламыз.

Осылайша, 1647сегіздік саны 935 ондық санына сәйкес келеді.

Жауабы:

$$1647_8=935_{10}$$

Тексеру:

935:8=116	қалдық 7
116:8=14	қалдық 4
14:8=1	қалдық 6

$$935_{10}=1647_8$$

3.2 ә) $7144{,}325_8$ сегіздік санын ондық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы. Алдымен осы сан үшін қосындыны жазамыз мұнда санның бөлшек бөлігінің дәрежесін үтірден оңға қарай -1 ден бастап азайтып ала береміз, жазылған қосындыны ондық санау жүйесінің ережелерін пайдаланып есептеу жүргіземіз:

$$7144{,}325_8 =7\cdot8^3+1\cdot8^2+4\cdot8^1+4\cdot8^0+3\cdot8^{-1}+2\cdot8^{-2}+5\cdot8^{-3}=7\cdot512+1\cdot64+4\cdot8+$$
$$+4\cdot1+3\cdot0{,}125+2\cdot0{,}015625+5\cdot0{,}001953125=3684{,}416015625_{10}$$

Жауабы:

$$7144{,}325_8 =3684{,}416015625_{10}$$

Тексеру: $3684{,}416015625_{10}$ санынының бүтін бөлігін сегізге бөлеміз:

3684:8=460	қалдық 4
460:8=57	қалдық 4
57:8=7	қалдық 1

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 8-ге көбейтеміз:

$0,416015625*8=3,328125$ | 3
$0,328125*8=2,625$ | 2
$0,625*8=5,0$ | 5

$$3684,366015625_{10}=7144,325_8$$

3.3 а) 1647_8 сегіздік санын он алтылық жүйеге ауыстыру талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген 1647_8 санын алдымен екілік жүйеге аударамыз, ол үшін 3.1 *а*)-мысалдың нәтижесін пайдаланамыз:

$$1647_8=1110100111_2$$

Алынған 1110100111_2 санын төрттік топқа бөліп, 1-кестенің көмегімен сәйкес он алтылық санау жүйесінің мәндерін жазамыз:

$$1110100111_2=11\ \ 1010\ \ 0111=0011\ \ 1010\ \ 0111=3\ \ A\ \ 7=3A7_{16}$$

Жауабы:

$$1110100111_2=3A7_{16}$$

Тексеру: Алдымен он алтылық санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін сегіздік санау жүйесіне аударамыз.

$3A7_{16}=3*16^2+A*16^1+7*16^0=768+160+7=935_{10}$

935:8=116 қалдық 7
116:8=14 қалдық 4
14:8=1 қалдық 6

$$3A7_{16}=935_{10}=1647_8$$

3.3 ә) $2175,516_8$ сегіздік санын он алтылық жүйеге аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген $2175,516_8$ санын алдымен екілік жүйесіне (1-кестені пайдаланамыз) аударамыз:

$$2175,516_8=010001111101,101001110_2$$

Алынған $010001111101,101001110_2$ санын үтірден екі шетке қарай төрттік топқа бөліп, 1-кестенің көмегімен сәйкес он алтылық санау жүйесінің мәндерін жазамыз:

$010001111101,101001110_2=0100\ \ 0111\ \ 1101,1010\ \ 0111 = 4\ 7\ D,\ A\ 7_{16}$

Жауабы:

$$010001111101,101001110_2=47D,A7_{16}$$

Тексеру: $47D,A7_{16}$ санын алдымен ондық жүйесіне аударамыз:

$$47D,A7_{16}=4*16^2+7*16^1+D*16^0+A*16^{-1}+7*16^{-2}=1024+112+13+0,625+ +0,02734375=1149,65234375_{10}$$

$1149,65234375_{10}$ санын екілік санау жүйесіне аударамыз:

1149:2=574	қалдық 1
574:2=287	қалдық 0
287:2= 143	қалдық 1
143:2=71	қалдық 1
71:2=35	қалдық 1
35:2=17	қалдық 1
17:2=8	қалдық 1
8:2=4	қалдық 0
4:2=2	қалдық 0
2:2=1	қалдық 0

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 2-ге көбейтеміз:

0,65234375*2=1,3046875	1
0,3046875*2=0,609375	0
0,609375*2=1,21875	1
0,21875*2=0,4375	0
0,4375*2=0,875	0
0,875*2=1,75	1
0,75*2=1,5	1
0,5*2=1,0	1

$$47D,A7_{16}=1149,65234375_{10}=10001111101,10100111_{2}$$

4- жаттығу.

Он алтылық санау жүйесіндегі берілген сандарды

4.1. екілік санау жүйесіне аудару керек;

4.2. сегіздік санау жүйесіне аудару керек;

4.3. ондық санау жүйесіне аудару керек;

Ескерту:

1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындау керек;
2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

4.1 а) 3A7 он алтылық санын екілік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

1-кесте бойынша

3 саны 11 (0011) санымен;

A саны 1010 санымен;

7 саны 111 (0111) санымен алмастырылып, нәтижесінде

$1647_{8}=001\ 110\ 100\ 111_{2}$ санын аламыз.

Жауабы:

$$3A7_{16}=0011\ 1010\ 0111_{2}$$

Тексеру: Алдымен екілік санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін он алтылық санау жүйесіне аударамыз.

$$1110100111_{2}=1*2^{9}+1*2^{8}+1*2^{7}+1*2^{5}+1*2^{2}+1*2^{1}+1*2^{0}=$$

$$=512+256+128+32+4+2+1=935_{10}$$

935_{10} санды он алтылық санау жүйесіне аударамыз:

935:16 =58	қалдық	7;
58:16=3	қалдық	10 (A);

$$1110100111_2=935_{10}=3A7_{16}$$

4.1 ә) $AB1,A3_{16}$ он алтылық санын екілік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

1-кесте бойынша

А саны 1010 санымен;

В саны 1011 санымен

1 саны 0001 санымен;

А саны 1010 санымен;

3 саны 0011 санымен алмастырылып, нәтижесінде

$AB1,A3_{16}=1010\ 1011\ 0001,\ 1010\ 0011_2$ санын аламыз.

Жауабы:

$$AB1,A3_{16}=1010\ 1011\ 0001,\ 1010\ 0011_2$$

Тексеру: Алдымен екілік санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін он алтылық санау жүйесіне аударамыз.

$$1010\ 1011\ 0001,\ 1010\ 0011_2 = 1*2^{11}+1*2^9+1*2^7+1*2^5+1*2^4+ 1*2^0 +$$

$$+1*2^{-1} + 1*2^{-3}+ 1*2^{-7} + 1*2^{-8} = 2048 + 512 + 128 + 32 + 16 +$$

$$+1 + 0,5 + 0,125+ 0,0078125+0,00390625= 2737,63671875_{10}$$

2737:16=171	қалдық 1
171:16=10(A)	қалдық 11(B)

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 16-ға көбейтеміз:

0, 63671875*16=10,1875	10(A)
0,1875*16=3,0	3

$$1010\ 1011\ 0001,\ 1010\ 0011_2= AB1,A3_{16}$$

4.2 а) $3A7_{16}$ он алтылық санын сегіздік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген $3A7_{16}$ санын алдымен екілік жүйеге аударамыз, ол үшін 10.1-тапсырманың нәтижесін пайдаланамыз:

$$3A7_{16}=0011\ 1010\ 0111_2$$

Алынған 1110100111_2 санын үштік топқа (сегіздік санау жүйесіне көшу талап етілгендіктен) бөліп, 1-кестенің көмегімен сәйкес сегіздік санау жүйесінің мәндерін жазамыз:

$$3A7_{16}=1110100111_2=1\ \ 110\ \ 100\ \ 111=001\ \ 110\ \ 100\ \ 111=$$

$$=1\ \ 4\ \ 6\ \ 7=1467_8$$

Жауабы:

$$3A7_{16}=1467_8$$

Тексеру: Алдымен екілік санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін он алтылық санау жүйесіне аударамыз.

$$1647_8=1\cdot8^3+6\cdot8^2+4\cdot8^1+7\cdot8^0=1\cdot512+6\cdot64+4\cdot8+7\cdot1\ 512+384+\ 32$$
$$+7=935_{10}$$

935_{10} санды он алтылық санау жүйесіне аударамыз:

935:16=58	қалдық 7
58:16=3	қалдық 10(A)

$$1647_8=935_{10}=3A7_{16}$$

4.2 ә) $AF,1F_{16}$ он алтылық санын сегіздік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

Берілген $AF,1F_{16}$ санын алдымен екілік жүйеге аударамыз:

$$AF,1F_{16}=1010\ 1111,0001\ 1111_2$$

Алынған $1010\ 1111,0001\ 1111_2$ санын үтірден екі шетке қарай үштік топқа (сегіздік санау жүйесіне көшу талап етілгендіктен) бөліп, 1-кестенің көмегімен сәйкес сегіздік санау жүйесінің мәндерін жазамыз:

$$AF,1F\ _{16}=010\ 101\ 111,\ 000\ 111\ 110_2 = 257,076_8$$

Жауабы:

$$AF,1F_{16}=257,076_8$$

Тексеру: Алдымен сегіздік санау жүйесіндегі санды ондық санау жүйесіне, содан кейін он алтылық санау жүйесіне аударамыз.

$$257,076_8=2*8^2+5*8^1+7*8^0+7*8^{-2}+6*8^{-3}=128+40+7+$$

$$+0,109375+0,01171875=175,12109375_{10}$$

175:16=10(A) | қалдық 15(F)↑

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 16-ға көбейтеміз:

0,12109375*16=1,9375	1
0,9375*16=15,0	15(F)↓

$$257,076_8=175,12109375_{10}=AF,1F_{16}$$

4.3 а) $3A7_{16}$ санын ондық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

3A7 санын қосынды түрінде жазайық:

$$3A7_{16}=3\cdot16^2+A\cdot16^1+7\cdot16^0=3\cdot256+10\cdot16+7\cdot1=768+160+7=935_{10}$$

Жауабы:

$$3A7_{16}=935_{10}$$

Тексеру:

935:16=58	қалдық 7 ↑
58:16=3	қалдық 10(A)

$$935_{10}=3A7_{16}$$

4.3 ә) $5A1,1B_{16}$ санын ондық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

$5A1,1B_{16}$ санын қосынды түрінде жазайық:

$$5A1,1B_{16}=5\cdot16^2+A\cdot16^1+1\cdot16^0+1\cdot16^{-1}+11\cdot16^{-2}=$$

$$=5\cdot256+10\cdot16+1\cdot1+$$

$$0,0625+0,04296875=768+160+7=1441,10546875_{10}$$

Жауабы:

$$5A1,1B_{16}=1441,10546875_{10}$$

Тексеру:

1441:16=90	қалдық 1	↑
90:16=5	қалдық 10(A)	

Бөлшек бөлігін ереже бойынша 16-ға көбейтеміз:

0,10546875*16=1,6875	1	↓
0,6875*16=11,0	11(B)	

$$1441,10546875_{10}=5A1,1B_{16}$$

5- жаттығу.

Ондық бөлшектерді ондық санау жүйесінен екілік, сегіздік, он алтылық санау жүйелеріне (үтірден кейін жеті таңбаға дейін) ауыстыру керек;

5.1. $0,225_{10}$ санын ондық санау жүйесінен екілік санау жүйесіне аудару талап етілсін, үтірден кейін жеті таңбаға дейін.

Шығарылуы:

0,225 * 2 = 0,45	0	↓
0,45 * 2 = 0,9	0	
0,9 *2 =1,8	1	
0,8 *2 = 1,6	1	
0,6 *2 = 1,2	1	
0,2 *2 = 0,4	0	
0,4 *2 = 0,8	0	

Жауабы:

$$0,225_{10} = 0,0011100_2$$

5.2 $0,56_{10}$ санын ондық санау жүйесінен сегіздік санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

0,56 * 8 = 4,48	4	↓
0,48 * 8 = 3,84	3	
0,84*8= 6,72	6	
0,72*8=5,76	5	
0,76*8=6,08	6	
0,08*8=0,48	0	
0,48 * 8 = 3,84	3	

Жауабы:

$$0,56_{10} =0,4365603_8$$

5.3. $0{,}0125_{10}$ санын ондық санау жүйесінен он алтылық санау жүйесіне аудару талап етілсін.

Шығарылуы:

$$\begin{array}{l|c} 0{,}0125 * 16 = 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 * 16 = 3{,}2 & 3 \\ 0{,}2*16= 3{,}2 & 3 \end{array} \downarrow$$

Жауабы:

$$0{,}0125_{10}= 0{,}33(3)_{16}$$

6- жаттығу.

Екілік санау жүйесіндегі сандарды қосыңыздар, азайтыңыздар, көбейтіңіздер.

6.1. $X=1001_2$;$Y=101_2$; X+Y-ті есептеу керек.

Шығарылуы:

Бір разрядтың берілуі

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Жауабы:

$$1001_2+101_2=1110.$$

6.2. $X=10010_2$;$Y=101_2$; X-Y-ті есептеу керек.

Шығарылуы:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & - & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Жауабы:

$$10010_2\text{-}101_2=1101 \text{ болады.}$$

6.3. $X=1011_2$; $Y=101_2$; X×Y-ті есептеу керек.

Шығарылуы:

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & \times & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Жауабы:

$$1011_2 x 101_2 = 110111.$$

7- жаттығу.

Сегіздік санау жүйесіндегі сандарды қосыңыздар, азайтыңыздар, көбейтіңіздер.

7.1. $7263_8 + 1276_8$ амалын орындау керек.

Шығарылуы:

$$\begin{array}{rrrrr} & 7 & 2 & 6 & 3 \\ + & 1 & 2 & 7 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 6 & 1 \end{array}$$

Жауабы:

$$7263_8 + 1276_8 = 10561_8.$$

7.2. $7153{,}217_8$ – $2267{,}145_8$ сандарының айырмасын табу керек.

Шығарылуы:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 7 & 1 & 5 & 3, & 2 & 1 & 7 \\ - & 2 & 2 & 6 & 7, & 1 & 4 & 5 \\ \hline & 4 & 6 & 6 & 4, & 0 & 5 & 2 \end{array}$$

Жауабы:

$$7153{,}217_8 - 2267{,}145_8 = 4664{,}052.$$

7.3. $57_8 \times 26_8$ сандарын көбейту керек.

Шығарылуы:

$$\begin{array}{rrrrr} & & & 5 & 7 \\ & & \times & 2 & 6 \\ \hline & & 4 & 3 & 2 \\ + & 1 & 3 & 6 & \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Жауабы:

$$57_8 \times 26_8 = 2012_8.$$

8- жаттығу.

Он алтылық санау жүйесіндегі сандарды қосыңыздар, азайтыңыздар, көбейтіңіздер.

8.1. $B4F1_{16}+2A58_{16}$ сандарын қосу керек.
Шығарылуы:

$$\begin{array}{rcccc} & B & 4 & F & 1 \\ + & 2 & A & 5 & 8 \\ \hline & D & F & 4 & 9 \end{array}$$

Жауабы:

$$B4F1_{16}+2A58_{16} = DF49_{16}.$$

8.2. $F154A4_{16}$ - $5401FE_{16}$ сандарын азайту керек.
Шығарылуы:

$$\begin{array}{rcccccc} & F & 1 & 5 & 4 & A & 4 \\ - & 5 & 4 & 0 & 1 & F & E \\ \hline & 9 & D & 5 & 2 & A & 6 \end{array}$$

Жауабы:

$$F154A4_{16} - 5401FE_{16} = 9D52A6_{16}.$$

8.3. $A7_{16}\times B6_{16}$ сандарын көбейту керек.
Шығарылуы:

$$\begin{array}{rcccc} & & & A & 7 \\ & & \times & B & 6 \\ \hline & & 3 & E & A \\ + & 7 & 2 & D & \\ \hline & 7 & 6 & B & A \end{array}$$

Жауабы:

$$A7_{16}\times B6_{16} = 76BA_{16}.$$

Білім алушылардың аудиториялық сабақтарда немесе өз бетімен орындауға арналған жеке тапсырмалары.

1-тапсырма.

Ондық санау жүйесіндегі берілген сандарды

1.1. екілік санау жүйесіне аударыңыз;
1.2. сегіздік санау жүйесіне аударыңыз;
1.3. он алтылық санау жүйесіне аударыңыз;

Ескерту:

1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындаңыз;

2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

№1.	*а*) 1555_{10}	*ә*) 1407_{10}	*б*) 1542_{10}
	в) $153{,}9_{10}$	*г*) $123{,}9_{10}$	*ғ*) $353{,}7_{10}$
№2.	*а*) 133_{10}	*ә*) 2058_{10}	*б*) 1741_{10}
	в) $34{,}4_{10}$	*г*) $134{,}4_{10}$	*ғ*) $44{,}5_{10}$
№3.	*а*) 1408_{10}	*ә*) 3619_{10}	*б*) 1247_{10}
	в) $143{,}3_{10}$	*г*) $101{,}3_{10}$	*ғ*) $243{,}4_{10}$
№4.	*а*) 1020_{10}	*ә*) 6524_{10}	*б*) 1258_{10}
	в) $1122{,}6_{10}$	*г*) $122{,}6_{10}$	*ғ*) $222{,}7_{10}$
№5.	*а*) 2507_{10}	*ә*) 1525_{10}	*б*) 2369_{10}
	в) $12{,}25_{10}$	*г*) $132{,}25_{10}$	*ғ*) $52{,}35_{10}$
№6.	*а*) 1507_{10}	*ә*) 1544_{10}	*б*) 1654_{10}
	в) $4{,}7_{10}$	*г*) $74{,}7_{10}$	*ғ*) $7{,}8_{10}$
№7.	*а*) 1951_{10}	*ә*) 2157_{10}	*б*) 1225_{10}
	в) $15{,}3_{10}$	*г*) $85{,}3_{10}$	*ғ*) $75{,}4_{10}$
№8.	*а*) 2147_{10}	*ә*) 1458_{10}	*б*) 1144_{10}
	в) $9{,}1_{10}$	*г*) $79{,}1_{10}$	*ғ*) $98{,}5_{10}$
№9.	*а*) 2154_{10}	*ә*) 1557_{10}	*б*) 1527_{10}
	в) $7{,}71_{10}$	*г*) $17{,}71_{10}$	*ғ*) $71{,}81_{10}$
№10.	*а*) 1213_{10}	*ә*) 2688_{10}	*б*) 7845_{10}
	в) $89{,}8_{10}$	*г*) $79{,}8_{10}$	*ғ*) $69{,}9_{10}$
№11.	*а*) 4123_{10}	*ә*) 321_{10}	*б*) 1011_{10}
	в) $214{,}7_{10}$	*г*) $114{,}7_{10}$	*ғ*) $314{,}6_{10}$
№12.	*а*) 5215_{10}	*ә*) 5245_{10}	*б*) 1523_{10}
	в) $214{,}25_{10}$	*г*) $105{,}25_{10}$	*ғ*) $334{,}35_{10}$
№13.	*а*) 3423_{10}	*ә*) 6154_{10}	*б*) 3421_{10}
	в) $322{,}17_{10}$	*г*) $222{,}17_{10}$	*ғ*) $122{,}27_{10}$
№14.	*а*) 1551_{10}	*ә*) 3156_{10}	*б*) 1345_{10}
	в) $155{,}65_{10}$	*г*) $255{,}65_{10}$	*ғ*) $255{,}75_{10}$
№15.	*а*) 1348_{10}	*ә*) 1146_{10}	*б*) 1154_{10}
	в) $447{,}68_{10}$	*г*) $347{,}68_{10}$	*ғ*) $547{,}78_{10}$

№16.	*а*) 257_{10}	*ә*) 5382_{10}	*б*) 6012_{10}
	в) $717{,}65_{10}$	*г*) $617{,}65_{10}$	*ғ*) $617{,}75_{10}$
№17.	*а*) 2547_{10}	*ә*) 4533_{10}	*б*) 7129_{10}
	в) $47{,}45_{10}$	*г*) $37{,}45_{10}$	*ғ*) $87{,}35_{10}$
№18.	*а*) 9654_{10}	*ә*) 7894_{10}	*б*) 8415_{10}
	в) $107{,}9_{10}$	*г*) $177{,}9_{10}$	*ғ*) $207{,}15_{10}$
№19.	*а*) 2475_{10}	*ә*) 2101_{10}	*б*) 4752_{10}
	в) $874{,}6_{10}$	*г*) $717{,}45_{10}$	*ғ*) $774{,}7_{10}$
№20.	*а*) 2574_{10}	*ә*) 389_{10}	*б*) 710_{10}
	в) $133{,}12_{10}$	*г*) $103{,}12_{10}$	*ғ*) $233{,}22_{10}$
№21.	*а*) 6578_{10}	*ә*) 3751_{10}	*б*) 1457_{10}
	в) $325{,}6_{10}$	*г*) $225{,}6_{10}$	*ғ*) $425{,}8_{10}$
№22.	*а*) 1472_{10}	*ә*) 1075_{10}	*б*) 2354_{10}
	в) $805{,}8_{10}$	*г*) $705{,}8_{10}$	*ғ*) $705{,}9_{10}$
№23.	*а*) 8523_{10}	*ә*) 6267_{10}	*б*) 3345_{10}
	в) $147{,}45_{10}$	*г*) $47{,}45_{10}$	*ғ*) $247{,}55_{10}$
№24.	*а*) 2147_{10}	*ә*) 2374_{10}	*б*) 4123_{10}
	в) $276{,}7_{10}$	*г*) $176{,}7_{10}$	*ғ*) $376{,}8_{10}$
№25.	*а*) 9874_{10}	*ә*) 6521_{10}	*б*) 5214_{10}
	в) $458{,}25_{10}$	*г*) $358{,}25_{10}$	*ғ*) $558{,}35_{10}$
№26.	*а*) 1879_{10}	*ә*) 7217_{10}	*б*) 1446_{10}
	в) $1124{,}5_{10}$	*г*) $124{,}5_{10}$	*ғ*) $424{,}6_{10}$
№27.	*а*) 1975_{10}	*ә*) 8634_{10}	*б*) 1278_{10}
	в) $99{,}625_{10}$	*г*) $89{,}625_{10}$	*ғ*) $919{,}725_{10}$
№28.	*а*) 2674_{10}	*ә*) 5042_{10}	*б*) 2417_{10}
	в) $214{,}51_{10}$	*г*) $114{,}51_{10}$	*ғ*) $414{,}61_{10}$
№29.	*а*) 1421_{10}	*ә*) 7241_{10}	*б*) 1634_{10}
	в) $174{,}65_{10}$	*г*) $114{,}65_{10}$	*ғ*) $274{,}75_{10}$
№30.	*а*) $2159\ _{10}$	*ә*) 3178_{10}	*б*) 1556_{10}
	в) $18{,}37_{10}$	*г*) $98{,}37_{10}$	*ғ*) $58{,}47_{10}$

2-тапсырма.

Екілік санау жүйесіндегі берілген сандарды

2.1. сегіздік санау жүйесіне аударыңыз;

2.2. ондық санау жүйесіне аударыңыз;

2.3. он алтылық санау жүйесіне аударыңыз;

Ескерту:

1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындаңыз;
2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

№1.	*а*) 101010011_2	*ә*) $1010110011,11_2$
№2.	*а*) 10101010101_2	*ә*) $11101010101,101010101_2$
№3.	*а*) 11010100101_2	*ә*) $101010101101,0100101_2$
№4.	*а*) 11011110101_2	*ә*) $101010110101,00101_2$
№5.	*а*) 11001100101001_2	*ә*) $101001110101001,01001_2$
№6.	*а*) 101101001001_2	*ә*) $1101101001101,001_2$
№7.	*а*) 10101101001_2	*ә*) $110101001001,01001_2$
№8.	*а*) 101011010001_2	*ә*) $1001011010101,1101001_2$
№9.	*а*) 101100010011_2	*ә*) $1101101011011,0010011_2$
№10.	*а*) 110110101101_2	*ә*) $1110010101101,1101101_2$
№11.	*а*) 1011010001_2	*ә*) $11011010001,1010001_2$
№12.	*а*) 1100110011_2	*ә*) $11100110011,10011_2$
№13.	*а*) 110111011_2	*ә*) $110111011,11011_2$
№14.	*а*) 1010101101_2	*ә*) $1110101101,1101_2$
№15.	*а*) 101001101010_2	*ә*) $110100101010,110101_2$
№16.	*а*) 101001111_2	*ә*) $1010010111,001111_2$
№17.	*а*) 1011011101_2	*ә*) $1011010101,011101_2$
№18.	*а*) 1000011011_2	*ә*) $1010011001,0011011_2$
№19.	*а*) 101011011001_2	*ә*) $10101011101,1001_2$
№20.	*а*) 1000111011101_2	*ә*) $11001010111101,1011101_2$

№21. *а*) 100101011101_2 *ә*) $101101011101,01011101_2$

№22. *а*) 10000101010_2 *ә*) $10100101010,010_2$

№23. *а*) 1001111001_2 *ә*) $1101111001,11001_2$

№24. *а*) 100011010101_2 *ә*) $101011010101,011101_2$

№25. *а*) 10010101011101_2 *ә*) $11010101011101,11101_2$

№26. *а*) 100101011101_2 *ә*) $101101011101,1101_2$

№27. *а*) 1001010101_2 *ә*) $1011010101,01_2$

№28. *а*) 101001101011_2 *ә*) $1011011010111,01011_2$

№29. *а*) 100011010111_2 *ә*) $101011010111,101_2$

№30. *а*) 1000101010101_2 *ә*) $1100101010101,01_2$

3-тапсырма.

Сегіздік санау жүйесіндегі берілген сандарды

3.1. екілік санау жүйесіне аударыңыз;

3.2. ондық санау жүйесіне аударыңыз;

3.3. он алтылық санау жүйесіне аударыңыз;

Ескерту:

1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындаңыз;
2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

№1. *а*) 1617_8 *ә*) 2571_8 *б*) 2570_8
в) $6547,3711_8$ *г*) $547,371_8$ *ғ*) $1547,371_8$

№2. *а*) 1265_8 *ә*) 1204_8 *б*) 6204_8
в) $1747,2315_8$ *г*) $147,235_8$ *ғ*) $1147,265_8$

№3. *а*) 1301_8 *ә*) 514_8 *б*) 1517_8
в) $6247,1503_8$ *г*) $247,153_8$ *ғ*) $2147,143_8$

№4. *а*) 2456_8 *ә*) 415_8 *б*) 3515_8
в) $51147,215_8$ *г*) $1147,25_8$ *ғ*) $11147,252_8$

№5. *а*) 5211_8 *ә*) 317_8 *б*) 2517_8
в) $41047,304_8$ *г*) $1047,34_8$ *ғ*) $11047,342_8$

№6.	*а*) 6214_8	*ә*) 201_8	*б*) 5205_8
	в) $32147{,}615_8$	*г*) $2147{,}65_8$	*ғ*) $2047{,}625_8$
№7.	*а*) 5714_8	*ә*) 107_8	*б*) 4107_8
	в) $1644{,}415_8$	*г*) $644{,}45_8$	*ғ*) $6404{,}145_8$
№8.	*а*) 3256_8	*ә*) 1007_8	*б*) 1107_8
	в) $2435{,}614_8$	*г*) $435{,}64_8$	*ғ*) $4305{,}614_8$
№9.	*а*) 1436_8	*ә*) 1001_8	*б*) 1201_8
	в) $2556{,}112_8$	*г*) $556{,}12_8$	*ғ*) $5056{,}121_8$
№10.	*а*) 3333_8	*ә*) 4015_8	*б*) 5015_8
	в) $4326{,}315_8$	*г*) $326{,}35_8$	*ғ*) $3026{,}305_8$
№11.	*а*) 1701_8	*ә*) 555_8	*б*) 1505_8
	в) $1510{,}205_8$	*г*) $510{,}25_8$	*ғ*) $5110{,}125_8$
№12.	*а*) 1507_8	*ә*) 633_8	*б*) 1631_8
	в) $2215{,}07_8$	*г*) $215{,}7_8$	*ғ*) $115{,}72_8$
№13.	*а*) 1234_8	*ә*) 434_8	*б*) 1434_8
	в) $6345{,}712_8$	*г*) $345{,}72_8$	*ғ*) $6144{,}62_8$
№14.	*а*) 3214_8	*ә*) 2555_8	*б*) 1550_8
	в) $7147{,}102_8$	*г*) $147{,}12_8$	*ғ*) $144{,}52_8$
№15.	*а*) 1477_8	*ә*) 7411_8	*б*) 2401_8
	в) $3204{,}417_8$	*г*) $204{,}47_8$	*ғ*) $404{,}57_8$
№16.	*а*) 7521_8	*ә*) 325_8	*б*) 1325_8
	в) $4324{,}605_8$	*г*) $324{,}65_8$	*ғ*) $123{,}55_8$
№17.	*а*) 3654_8	*ә*) 731_8	*б*) 1711_8
	в) $5312{,}\ 104_8$	*г*) $312{,}\ 14_8$	*ғ*) $1312{,}\ 24_8$
№18.	*а*) 1651_8	*ә*) 115_8	*б*) 1105_8
	в) $4100{,}4517_8$	*г*) $100{,}457_8$	*ғ*) $107{,}451_8$
№19.	*а*) 1254_8	*ә*) 2105_8	*б*) 3115_8
	в) $2326{,}5016_8$	*г*) $326{,}506_8$	*ғ*) $226{,}507_8$
№20.	*а*) 1476_8	*ә*) 576_8	*б*) 1576_8
	в) $1107{,}401_8$	*г*) $107{,}41_8$	*ғ*) $117{,}31_8$
№21.	*а*) 3654_8	*ә*) 231_8	*б*) 2232_8
	в) $3245{,}1005_8$	*г*) $245{,}105_8$	*ғ*) $345{,}125_8$

№22.	*а*) 1202_8	*ә*) 2114_8	*б*) 2113_8
	в) $5116,3104_8$	*г*) $116,314_8$	*ғ*) $111,214_8$
№23.	*а*) 1206_8	*ә*) 1051_8	*б*) 2451_8
	в) $7204,1005_8$	*г*) $204,105_8$	*ғ*) $204,105_8$
№24.	*а*) 5204_8	*ә*) 2312_8	*б*) 2702_8
	в) $2445,4512_8$	*г*) $445,452_8$	*ғ*) $4145,152_8$
№25.	*а*) 5111_8	*ә*) 3011_8	*б*) 5001_8
	в) $3247,6403_8$	*г*) $247,643_8$	*ғ*) $1237,243_8$
№26.	*а*) 2170_8	*ә*) 1057_8	*б*) 3057_8
	в) $1546,1405_8$	*г*) $546,145_8$	*ғ*) $246,155_8$
№27.	*а*) 1526_8	*ә*) 256_8	*б*) 1256_8
	в) $4347,7514_8$	*г*) $347,754_8$	*ғ*) $1347,754_8$
№28.	*а*) 1313_8	*ә*) 675_8	*б*) 3475_8
	в) $6747,1512_8$	*г*) $747,152_8$	*ғ*) $147,162_8$
№29.	*а*) 1414_8	*ә*) 574_8	*б*) 2575_8
	в) $7647,1504_8$	*г*) $647,154_8$	*ғ*) $1647,154_8$
№30.	*а*) 1515_8	*ә*) 654_8	*б*) 1754_8
	в) $5447,6105_8$	*г*) $447,615_8$	*ғ*) $1447,615_8$

4-тапсырма.

Он алтылық санау жүйесіндегі берілген сандарды

4.1. екілік санау жүйесіне аударыңыз;
4.2. сегіздік санау жүйесіне аударыңыз;
4.3. ондық санау жүйесіне аударыңыз;

Ескерту:

1. бөлшек сандар үшін үтірден кейін жеті таңбаға дейін орындаңыз;
2. алынған нәтижелерді тексеріңіздер.

№1.	*а*) $B113_{16}$	*ә*) $AB63_{16}$	*б*) $A123_{16}$
	в) $3F54,087_{16}$	*г*) $32F54,7C_{16}$	*ғ*) $12F54,7_{16}$
№2.	*а*) $A2C8_{16}$	*ә*) $B2C4_{16}$	*б*) $92C8_{16}$
	в) $3E54,256_{16}$	*г*) $2E54,B6_{16}$	*ғ*) $2E54,6_{16}$

№3.	*а*) 2E07$_{16}$	*ә*) C2E417$_{16}$	*б*) 1E429$_{16}$
	в) 5B47,125$_{16}$	*г*) 1B47,1A5$_{16}$	*ғ*) 2B47,15$_{16}$
№4.	*а*) EC56$_{16}$	*ә*) DEC55$_{16}$	*б*) ACB6$_{16}$
	в) 5D27,115$_{16}$	*г*) 6D17,1F5$_{16}$	*ғ*) 4D127,15$_{16}$
№5.	*а*) D4E1$_{16}$	*ә*) ED4E2$_{16}$	*б*) B4EF$_{16}$
	в) 25B5,635$_{16}$	*г*) 80B5,35B$_{16}$	*ғ*) 10B5,35$_{16}$
№6.	*а*) 3CE7$_{16}$	*ә*) F3CE6$_{16}$	*б*) 1CD7$_{16}$
	в) 5C45,409$_{16}$	*г*) 54B51,E9$_{16}$	*ғ*) 1C4B51,9$_{16}$
№7.	*а*) F74C$_{16}$	*ә*) F74C45$_{16}$	*б*) B745$_{16}$
	в) 7D1F,305$_{16}$	*г*) 9D0F,4C5$_{16}$	*ғ*) 6D03F,45$_{16}$
№8.	*а*) 6CB3$_{16}$	*ә*) E6CB2$_{16}$	*б*) 7CD3$_{16}$
	в) 4D5,708$_{16}$	*г*) 4DA5,8D$_{16}$	*ғ*) 1DA5,8$_{16}$
№9.	*а*) C1F7$_{16}$	*ә*) DC2F2$_{16}$	*б*) B127$_{16}$
	в) A155,905$_{16}$	*г*) 7A25,25A$_{16}$	*ғ*) A25,25$_{16}$
№10.	*а*) C7D9$_{16}$	*ә*) CB277$_{16}$	*б*) BA7E9
	в) 3B47,775$_{16}$	*г*) D5E7,7F5$_{16}$	*ғ*) B54E7,75$_{16}$
№11.	*а*) 52E8$_{16}$	*ә*) B52E9$_{16}$	*б*) A5C8$_{16}$
	в) 5D22,515$_{16}$	*г*) BD22,5C5$_{16}$	*ғ*) 2D22,55$_{16}$
№12.	*а*) E0B2$_{16}$	*ә*) AE5B1$_{16}$	*б*) D08F2$_{16}$
	в) 90D3,815$_{16}$	*г*) E0D3,65E$_{16}$	*ғ*) 10D33,65$_{16}$
№13.	*а*) F2C4$_{16}$	*ә*) F21C7$_{16}$	*б*) E2B14$_{16}$
	в) 6A D5,44$_{16}$	*г*) A1D5,4B4$_{16}$	*ғ*) 1AD5,44$_{16}$
№14.	*а*) C4F7$_{16}$	*ә*) 2C14F6$_{16}$	*б*) B147$_{16}$
	в) 8DE4,95$_{16}$	*г*) FD5E,55D$_{16}$	*ғ*) 2D5E4,55$_{16}$
№15.	*а*) ED34$_{16}$	*ә*) 3E2D5$_{16}$	*б*) 1DB4$_{16}$
	в) 41B2,625$_{16}$	*г*) CB02,F25$_{16}$	*ғ*) 2B02,125$_{16}$
№16.	*а*) 1B11$_{16}$	*ә*) 1B6BF$_{16}$	*б*) 8D405$_{16}$
	в) FD4B,101$_{16}$	*г*) DDA45,1F7$_{16}$	*ғ*) 1DA46,157$_{16}$
№17.	*а*) 2AC7$_{16}$	*ә*) 2AC8E$_{16}$	*б*) A39C6$_{16}$
	в) AB2A,046$_{16}$	*г*) EB234,1E6$_{16}$	*ғ*) 1B236,146$_{16}$
№18.	*а*) E417$_{16}$	*ә*) 32E41D$_{16}$	*б*) B12F1$_{16}$
	в) DD5D,063$_{16}$	*г*) BD571,5B2$_{16}$	*ғ*) BD51,56$_{16}$

№19.	*а*) $6C151_{16}$	*ә*) $4EC15C_{16}$	*б*) $C1E407_{16}$
	в) $EA59C,022_{16}$	*г*) $CA596,6A5_{16}$	*ғ*) $4A591,625_{16}$
№20.	*а*) $94E52_{16}$	*ә*) $5D4EB_{16}$	*б*) $D1747_{16}$
	в) $CA5D7,018_{16}$	*г*) $A50D2,0C5_{16}$	*ғ*) $4A5D2,025_{16}$
№21.	*а*) $4CB3_{16}$	*ә*) $63C4A_{16}$	*б*) $AD81_{16}$
	в) $CF7,654_{16}$	*г*) $A4F8,6C1_{16}$	*ғ*) $E4F7,65_{16}$
№22.	*а*) $1F745_{16}$	*ә*) $774C4F_{16}$	*б*) $9C9365_{16}$
	в) $BD049,057_{16}$	*г*) $FD043,0D5_{16}$	*ғ*) $7D042,05_{16}$
№23.	*а*) $3C12_{16}$	*ә*) $86CB2E_{16}$	*б*) $E77D7_{16}$
	в) $A55,02C_{16}$	*г*) $E154,9E2_{16}$	*ғ*) $2153,92_{16}$
№24.	*а*) $D2F7_{16}$	*ә*) $9C1FD_{16}$	*б*) $4B465_{16}$
	в) $FE6,\ 84B_{16}$	*г*) $DE08,5F4_{16}$	*ғ*) $5E\ 07,584_{16}$
№25.	*а*) $E2D_{16}$	*ә*) $AB7C_{16}$	*б*) $DB24_{16}$
	в) $BE4,40D_{16}$	*г*) $FE36,4D7_{16}$	*ғ*) $1E35,47_{16}$
№26.	*а*) $52E7_{16}$	*ә*) $B1E9B_{16}$	*б*) $E8D14_{16}$
	в) $D53,70A_{16}$	*г*) $CD59,7A4_{16}$	*ғ*) $2D536,74_{16}$
№27.	*а*) $C0C_{16}$	*ә*) $CEB1A_{16}$	*б*) $BC52_{16}$
	в) $DB157,029_{16}$	*г*) $FB581,1B5_{16}$	*ғ*) $5B585,125_{16}$
№28.	*а*) $E2B3_{16}$	*ә*) $DF1CF_{16}$	*б*) $C10B24_{16}$
	в) $EB81,103A_{16}$	*г*) $CB84,8A5_{16}$	*ғ*) $2B85,85_{16}$
№29.	*а*) $C14F_{16}$	*ә*) $EC4F6E_{16}$	*б*) $D1B45_{16}$
	в) $C2D93,15E_{16}$	*г*) $A2D846,5C6_{16}$	*ғ*) $12D946,56_{16}$
№30.	*а*) $AD4_{16}$	*ә*) $FE25D_{16}$	*б*) $F12B54_{16}$
	в) $DC22,16F_{16}$	*г*) $BC18,6B7_{16}$	*ғ*) $1C19,67_{16}$

5-тапсырма.

Ондық бөлшектерді ондық санау жүйесінен екілік, сегіздік, он алтылық санау жүйелеріне (үірден кейін жеті таңбаға дейін) аударыңыздар.

№1.	$0,285_{10}$	№2.	$0,435_{10}$	№3.	$0,045_{10}$
№4.	$0,295_{10}$	№5.	$0,445_{10}$	№6.	$0,135_{10}$

№7.	$0{,}275_{10}$	№8.	$0{,}455_{10}$	№9.	$0{,}215_{10}$
№10.	$0{,}265_{10}$	№11.	$0{,}465_{10}$	№12.	$0{,}315_{10}$
№13.	$0{,}255_{10}$	№14.	$0{,}475_{10}$	№15.	$0{,}485_{10}$
№16.	$0{,}245_{10}$	№17.	$0{,}585_{10}$	№18.	$0{,}885_{10}$
№19.	$0{,}235_{10}$	№20.	$0{,}495_{10}$	№21.	$0{,}645_{10}$
№22.	$0{,}125_{10}$	№23.	$0{,}375_{10}$	№24.	$0{,}755_{10}$
№25.	$0{,}415_{10}$	№26.	$0{,}495_{10}$	№27.	$0{,}865_{10}$
№28.	$0{,}425_{10}$	№29.	$0{,}155_{10}$	№30.	$0{,}975_{10}$

6-тапсырма.

Екілік санау жүйесінде сандарга келесі амалдарды (сандарды қосыңыздару, азайту, көбейту) орындаңыздар:

№1.	*а*) $1101101_2+11101_2=$	*ә*) $1100101_2-11101_2=$	*б*) $1111_2\times1001_2=$
№2.	*а*) $101011_2+101101_2=$	*ә*) $101011_2-10101_2=$	*б*) $10111_2\times10101_2=$
№3.	*а*) $1111_2+1110_2=$	*ә*) $101011_2-11011_2=$	*б*) $1101_2\times1110_2=$
№4.	*а*) $11110_2+11101_2=$	*ә*) $111110_2-11001_2=$	*б*) $1010_2\times1101_2=$
№5.	*а*) $1011101_2+10101_2=$	*ә*) $101111_2-100101_2=$	*б*) $1101_2\times1011_2=$
№6.	*а*) $1100101_2+1111_2=$	*ә*) $1100101_2-1011_2=$	*б*) $10101_2\times111_2=$
№7.	*а*) $10111_2+10011_2=$	*ә*) $10111_2-111_2=$	*б*) $1011_2\times1011_2=$
№8.	*а*) $111001_2+1111_2=$	*ә*) $11001_2-1111_2=$	*б*) $11001_2\times111_2=$
№9.	*а*) $101010_2+1101_2=$	*ә*) $101010_2-1101_2=$	*б*) $10110_2\times 101_2=$
№10.	*а*) $110011_2+101_2=$	*ә*) $110011_2-101_2=$	*б*) $11011_2\times101_2=$
№11.	*а*) $1111011_2+11011_2=$	*ә*) $110111_2-11011_2=$	*б*) $11011_2\times1011_2=$
№12.	*а*) $1000111_2+1101_2=$	*ә*) $101011_2-1101_2=$	*б*) $10011_2\times1101_2=$
№13.	*а*) $101011_2+110001_2=$	*ә*) $111011_2-11001_2=$	*б*) $1011_2\times1101_2=$
№14.	*а*) $1101_2+111010_2=$	*ә*) $110101_2-11010_2=$	*б*) $1101_2\times111010_2=$
№15.	*а*) $101101_2+1001_2=$	*ә*) $101101_2-1101_2=$	*б*) $101101_2\times1001_2=$

№16.	*а*) $1100101_2+1101_2=$	*ә*) $110101_2-10101_2=$	*б*) $110001_2\times1101_2=$
№17.	*а*) $100111_2+101011_2=$	*ә*) $110100_2-10101_2=$	*б*) $10111_2\times10101_2=$
№18.	*а*) $110011_2+101101_2=$	*ә*) $110011_2-101101_2=$	*б*) $1011_2\times10101_2=$
№19.	*а*) $10101011_2+1110_2=$	*ә*) $10101011_2-1110_2=$	*б*) $11011_2\times1110_2=$
№20.	*а*) $110101_2+10111_2=$	*ә*) $110101_2-10111_2=$	*б*) $11101_2\times10111_2=$
№21.	*а*) $1101101_2+11011_2=$	*ә*) $100101_2-11011_2=$	*б*) $1101101_2\times1111_2=$
№22.	*а*) $101110_2+11011_2=$	*ә*) $10110_2-1011_2=$	*б*) $10110_2\times10011_2=$
№23.	*а*) $101011_2+11001_2=$	*ә*) $101000_2-11011_2=$	*б*) $1011_2\times11001_2=$
№24.	*а*) $101011_2+11001_2=$	*ә*) $101010_2-11001_2=$	*б*) $10011_2\times11001_2=$
№25.	*а*) 1010110+10011=	*ә*) $1010110_2-10011_2=$	*б*) $10110_2\times10011_2=$
№26.	*а*) $110011_2+1011_2=$	*ә*) $10001_2-1011_2=$	*б*) $1011_2\times1011_2=$
№27.	*а*) $1110001_2+10101_2=$	*ә*) $111001_2-10101_2=$	*б*) $11101_2\times10101_2=$
№28.	*а*) $1011101_2+10101_2=$	*ә*) $101100_2-10111_2=$	*б*) $10101_2\times10101_2=$
№29.	*а*) $1011011_2+10111_2=$	*ә*) $101001_2-1011_2=$	*б*) $10011_2\times1011_2=$
№30.	*а*) $100011_2+111001_2=$	*ә*) $101001_2-11011_2=$	*б*) $1011_2\times1101_2=$

7-тапсырма.

Сегіздік санау жүйесінде сандарга келесі амалдарды (сандарды қосыңыздару, азайту, көбейту) орындаңыздар:

№1.	$152_8+1033_8=$	$7252_8-1073_8=$	$5252_8\times1075_8=$
№2.	$1052_8+2547_8=$	$1752_8-1547_8=$	$6752_8\times1546_8=$
№3.	$2114_8+2102_8=$	$2114_8-1176_8=$	$3114_8\times1174_8=$
№4.	$147_8+222_8=$	$5047_8-272_8=$	$2047_8\times271_8=$
№5.	$1234_8+15_8=$	$6234_8-165_8=$	$2234_8\times163_8=$
№6.	$1405_8+47_8=$	$4405_8-1447_8=$	$3405_8\times1444_8=$
№7.	$356_8+451_8=$	$6356_8-451_8=$	$5356_8\times455_8=$
№8.	$121_8+4501_8=$	$2201_8-1501_8=$	$6201_8\times1502_8=$

№9.	$1407_8+146_8=$	$1407_8-146_8=$	$7407_8\times143_8=$
№10.	$1247_8+1236_8=$	$3240_8-1236_8=$	$2240_8\times1235_8=$
№11.	$11_8+7042_8=$	$5001_8-542_8=$	$5041_8\times546_8=$
№12.	$2365_8+4502_8=$	$2365_8-1507_8=$	$3365_8\times1507_8=$
№13.	$777_8+555_8=$	$711_8-555_8=$	$611_8\times512_8=$
№14.	$4465_8+2536_8=$	$4465_8-2536_8=$	$465_8\times2536_8=$
№15.	$1254_8+507_8=$	$1254_8-507_8=$	$1012_8\times217_8=$
№16.	$3014_8+2153_8=$	$3014_8-2155_8=$	$2504_8\times161_8=$
№17.	$1452_8+135_8=$	$1452_8-135_8=$	$2167_8\times243_8=$
№18.	$1024_8+1246_8=$	$5724_8-1246_8=$	$3513_8\times426_8=$
№19.	$1245_8+111_8=$	$7245_8-1117_8=$	$7010_8\times152_8=$
№20.	$1254_8+245_8=$	$3254_8-245_8=$	$2115_8\times543_8=$
№21.	$123_8+247_8=$	$1203_8-247_8=$	$121_8\times246_8=$
№22.	$321_8+254_8=$	$10321_8-254_8=$	$321_8\times252_8=$
№23.	$1420_8+1254_8=$	$4420_8-757_8=$	$1425_8\times755_8=$
№24.	$1256_8+145_8=$	$3250_8-145_8=$	$2250_8\times146_8=$
№25.	$145_8+1451_8=$	$2415_8-1351_8=$	$2415_8\times1352_8=$
№26.	$147_8+4127_8=$	$1745_8-1177_8=$	$5745_8\times1174_8=$
№27.	$745_8+25_8=$	$745_8-265_8=$	$645_8\times264_8=$
№28.	$73_8+105_8=$	$723_8-105_8=$	$523_8\times104_8=$
№29.	$127_8+603_8=$	$1270_8-607_8=$	$3270_8\times606_8=$
№30.	$712_8+254_8=$	$712_8-254_8=$	$412_8\times253_8=$

8-тапсырма.

Он алтылық санау жүйесінде сандарга келесі амалдарды (сандарды қосыңыздару, азайту, көбейту) орындаңыздар:

№1.	$\mathrm{1AC8}_{16}+\mathrm{1D33}_{16}=$	$\mathrm{1A5C}_{16}-\mathrm{D33}_{16}=$	$\mathrm{A5C}_{16}\times\mathrm{133}_{16}=$
№2.	$\mathrm{D8F2}_{16}+\mathrm{2B54E7}_{16}=$	$\mathrm{E05F2}_{16}-\mathrm{2547}_{16}=$	$\mathrm{EF2}_{16}\times\mathrm{2B7}_{16}=$
№3.	$\mathrm{E2B14}_{16}+\mathrm{21B02}_{16}=$	$\mathrm{F2B14}_{16}-\mathrm{2B02}_{16}=$	$\mathrm{F24}_{16}\times\mathrm{1B8}_{16}=$
№4.	$\mathrm{B147}_{16}+\mathrm{2D22}_{16}=$	$\mathrm{B147}_{16}-\mathrm{2D22}_{16}=$	$\mathrm{B147}_{16}\times\mathrm{253}_{16}=$
№5.	$\mathrm{12B4}_{16}+\mathrm{1DB5}_{16}=$	$\mathrm{C23B4}_{16}-\mathrm{1D85}_{16}=$	$\mathrm{C234}_{16}\times\mathrm{1D8}_{16}=$
№6.	$\mathrm{8D405}_{16}+\mathrm{E4F7}_{16}=$	$\mathrm{ED405}_{16}-\mathrm{F4F7}_{16}=$	$\mathrm{ED45}_{16}\times\mathrm{FF7}_{16}=$
№7.	$\mathrm{A39C6}_{16}+\mathrm{B4D51}_{16}=$	$\mathrm{B3FC6}_{16}-\mathrm{BD51}_{16}=$	$\mathrm{B36}_{16}\times\mathrm{B054}_{16}=$
№8.	$\mathrm{B12F1}_{16}+\mathrm{4A591}_{16}=$	$\mathrm{B17F1}_{16}-\mathrm{4A507}_{16}=$	$\mathrm{A11}_{16}\times\mathrm{A57}_{16}=$
№9.	$\mathrm{C407}_{16}+\mathrm{1A46}_{16}=$	$\mathrm{D107}_{16}-\mathrm{1846}_{16}=$	$\mathrm{DE07}_{16}\times\mathrm{846}_{16}=$
№10.	$\mathrm{DB47}_{16}+\mathrm{1B236}_{16}=$	$\mathrm{9B47}_{16}-\mathrm{1836}_{16}=$	$\mathrm{B1B7}_{16}-\mathrm{B283}_{16}=$
№11.	$\mathrm{A123}_{16}+\mathrm{2B47}_{16}=$	$\mathrm{B153}_{16}-\mathrm{A049}_{16}=$	$\mathrm{B53}_{16}\times\mathrm{A49}_{16}=$
№12.	$\mathrm{92C8}_{16}+\mathrm{2E54}_{16}=$	$\mathrm{D2C1}_{16}-\mathrm{E54}_{16}=$	$\mathrm{2C1}_{16}\times\mathrm{B54}_{16}=$
№13.	$\mathrm{1E49}_{16}+\mathrm{12F54}_{16}=$	$\mathrm{1FE0}_{16}-\mathrm{1254}_{16}=$	$\mathrm{F40}_{16}\times\mathrm{254}_{16}=$
№14.	$\mathrm{ACB56}_{16}+\mathrm{1DA5}_{16}=$	$\mathrm{ECB56}_{16}-\mathrm{1DA5}_{16}=$	$\mathrm{EC56}_{16}\times\mathrm{DA5}_{16}=$
№15.	$\mathrm{B45F}_{16}+\mathrm{4B51}_{16}=$	$\mathrm{F4E5F}_{16}-\mathrm{C4B52}_{16}=$	$\mathrm{F4E}_{16}\times\mathrm{C4B}_{16}=$
№16.	$\mathrm{1C4D7}_{16}+\mathrm{4D127}_{16}=$	$\mathrm{C4D7}_{16}-\mathrm{D127}_{16}=$	$\mathrm{C4D7}_{16}\times\mathrm{4D1}_{16}=$
№17.	$\mathrm{B745}_{16}+\mathrm{A25}_{16}=$	$\mathrm{B745}_{16}-\mathrm{A28}_{16}=$	$\mathrm{745}_{16}\times\mathrm{A28}_{16}=$
№18.	$\mathrm{7CD3}_{16}+\mathrm{10B5}_{16}=$	$\mathrm{7CD3}_{16}-\mathrm{10B7}_{16}=$	$\mathrm{CD3}_{16}\times\mathrm{107}_{16}=$
№19.	$\mathrm{B127}_{16}+\mathrm{6D03F}_{16}=$	$\mathrm{BD27}_{16}-\mathrm{603F}_{16}=$	$\mathrm{D27}_{16}\times\mathrm{60F}_{16}=$
№20.	$\mathrm{BA79}_{16}+\mathrm{2DE4}_{16}=$	$\mathrm{CA12}_{16}-\mathrm{25E4}_{16}=$	$\mathrm{71E2}_{16}\times\mathrm{1E4}_{16}=$
№21.	$\mathrm{ED14}_{16}+\mathrm{2153}_{16}=$	$\mathrm{E3D14}_{16}-\mathrm{293}_{16}=$	$\mathrm{E0D1}_{16}\times\mathrm{219}_{16}=$
№22.	$\mathrm{B152}_{16}+\mathrm{1E35}_{16}=$	$\mathrm{B1C2}_{16}-\mathrm{1E86}_{16}=$	$\mathrm{B152}_{16}\times\mathrm{1E3}_{16}=$
№23.	$\mathrm{C124}_{16}+\mathrm{146}_{16}=$	$\mathrm{D124}_{16}-\mathrm{1245}_{16}=$	$\mathrm{B24}_{16}\times\mathrm{12D}_{16}=$
№24.	$\mathrm{D145}_{16}+\mathrm{1C19}_{16}=$	$\mathrm{C145}_{16}-\mathrm{1C17}_{16}=$	$\mathrm{72B45}_{16}\times\mathrm{1C1}_{16}=$
№25.	$\mathrm{F154}_{16}+\mathrm{2B85}_{16}=$	$\mathrm{F154}_{16}-\mathrm{2B49}_{16}=$	$\mathrm{12B54}_{16}\times\mathrm{2B4}_{16}=$

№26	$AD81_{16}$+$7D042_{16}$=	$A2E11_{16}$-$7D42_{16}$=	$ED1_{16}\times 7D5_{16}$=
№27	$9C65_{16}$+$4AD2_{16}$=	$B365_{16}$-$40D2_{16}$=	$C365_{16}\times 4A3_{16}$=
№28	$E7D7_{16}$+$5B585_{16}$=	$E78D7_{16}$-$5B5_{16}$=	$78D7_{16}\times 5B2_{16}$=
№29	$4C65_{16}$+$2D36_{16}$=	$4C65_{16}$-2436_{16}=	$4B65_{16}\times 2D1_{16}$=
№30	$D154_{16}$+$5B07_{16}$=	$D154_{16}$-5067_{16}=	$D1B4_{16}\times 5B6_{16}$=

Бақылау сұрақтары

1. Санау жүйесінің негізгі ұғымдары мен түсініктері.
2. Санау жүйелерінің түрлерін айтып, сипаттама беріңіз.
3. Санау жүйелерінің арасындағы байланысты келтіріңіз.
4. Екілік, сегіздік, ондық, он алтылық санау жүйелеріне сипаттама беріңіз негізгі ерекшеліктерін тұжырымдаңыз.
5. Бүтін сандарды бір санау жүйесінен басқа санау жүйелеріне ауыстыру алгоритмін беріңіз.
6. Бөлшек сандарды бір санау жүйесінен басқа санау жүйелеріне ауыстыру алгоритмін беріңіз.
7. Екілік санау жүйесіндегі сандарға қолданылатын амалдар мен олардың орындалу ережелері.
8. Сегіздік санау жүйесіндегі сандарға қолданылатын амалдар мен олардың орындалу ережелері.
9. Он алтылық санау жүйесіндегі сандарға қолданылатын амалдар мен олардың орындалу ережелері.
10. Екілік, сегіздік, он алтылық санау жүйелерінде теріс сандарға амалдар қолданыла ма?

II-ТАРАУ. ЖИЫНДАР ТЕОРИЯСЫ

2.1. Жиын және оның элементтерінің ұғымы, белгілеуі. Жиынның берілу тәсілдері.

Математикада XIX ғасырдың екінші жартысында жиын ұғымы пайда болды. Жиын ұғымының математикаға енуі жиын теориясын қалыптастырды. Жиын теориясының негізін қалаушы неміс математигі Георг Кантор (1845- 1918) болды.

Жиындар теориясы үш алғашқы түсінікке тіреледі:

1. жиын;
2. элемент;
3. тиістілік.

I. «Жиын» ұғымы алғашқы және анықталмайтын болып табылады. Жиынды қандай да бір ортақ қасиеттің (қандай да бір жалпы белгілермен біріктірілген) қамтитын қандай да бір элементтер жиынтығы ретінде қарастыруға болады. Жиынды құрайтын кез келген табиғаттың объектілерін (сандар, адамдар, заттар және т.б.) оның элементтері деп атайды. Мысалы, Томирис деген студент IV курс студенттер жиынының, наурыз – жылдағы айлар жиынының элементі және т.т. болып табылады.

Жиын латын алфавитінің бас әріптерімен, ал олардың элементтері кіші әріптермен белгіленеді. $a \in R$ жазбасы a элементінің R жиынының элементі болып табылатынын, яғни a элементі R жиынына тиісті екенін білдіреді. Кері жағдайда, a элементі R жиынына тиісті емес болса, $a \notin R$ түрінде жазылады.

II. Қандай да бір элементтер жиынтығын жиын деп атау үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті:

- көрсетілген элемент берілген жиынтыққа тиісті болатынын анықтауға мүмкіндік беретін ереже болуы керек;
- элементтерді бір бірінен ажыратуға мүмкіндік беретін (бұл жиында екі бірдей элемент болмайтынын білдіреді) ереже болуы керек.

Мысалы, a, b, c, d компоненттерінен тұратын A жиыны $A = \{a, b, c, d\}$ түрінде жазылады. Берілген тәсіл жиынға тиісті элементтердің жалпы қасиеті көрсетілген, элементтер саны өте көп емес ақырлы сандар жиынына ғана қолданылады. Бұл жағдайда фигуралық жақшалар жиынның еркін алынған элементінің белгілеуі жазылады, вертикал сызықша қойылады, содан кейін жиынның барлық элементтерін сипаттайтын қасиеті көрсетіледі. Мысалы, 5-тен кіші барлық натурал сандардың K жиынын мына түрде жазуға болады: $K = \{1, 2, 3, 4\}$ немесе $K = \{x|x \in N$ және $x < 5\}$.

Жиындар *ақырлы* немесе *ақырсыз* болуы мүмкін. Мысалы, өндіріс қызметкерлерінің жиыны – ақырлы, түзудің нүктелер жиыны – ақырсыз болады.

Бірде бір элементі жоқ жиын *бос (құр) жиын* деп аталады да, $\emptyset$ арқылы белгіленеді. Бос жиынды кез келген қарама қайшылыққа әкелетін қасиетпен анықтауға болады. Мысалы, $\emptyset = \{x|x \neq x\}$, жиын облысында ол нөлдің рөлін атқарады.

Берілген есепте қарастырылатын барлық элементтердің U жиыны *әмбебап жиын* деп аталады.

Егер A жиынының әрбір элементі бір мезгілде B жиынының элементі болса, A жиыны B жиынының *ішкі жиыны* (бұл жағдайда $A \subset B$ түрінде жазылады) деп аталады. Жиындар арасындағы бұл тәуелділік *ену* деп аталады. Кез келген A жиыны үшін $\emptyset \subset A$ және $A \subset A$ енуі орын алады, яғни бос жиыны кез келген M жиынының ішкі жиыны болып табылады.

Әрбір A жиыны өзінің ішкі жиыны болып табылады: $A \subseteq A$. Кез келген A жиынының B ішкі жиыны A жиынынан өзге A жиынының *өзіндік ішкі жиыны* деп аталады да $\subset$ символы арқылы белгіленеді: $A \subset B$. Ену қатынасы транзитивті, яғни, $A \subseteq B$ және $C \subseteq A$ қатынастарынан $C \subseteq B$ алынады. Өзіндік ену қасиеті де транзитивті.

Тиістілік $\in$ қатынасы мен $\subseteq$ ену қатынасын шатастырмау маңызды: егер $\{a\} \subseteq M$ болса, онда $a \in M$ және керісінше, бірақ $\{a\} \subseteq M$ қатынасынан $\{a\} \in M$ алынбайды. Мысалы, егер $M = \{1, 2\}$ болса, онда ол $1 \in M$ және $2 \in M$ қатынасын білдіреді,бірақ барлық басқа x объектілері үшін $x \notin M$ ақиқат; ену үшін келесі тұжырымдамалар ақиқат:

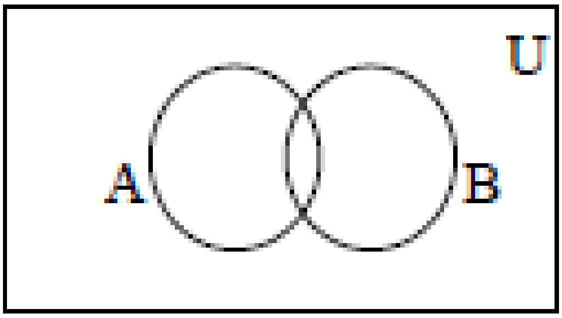
$\emptyset \subseteq M, 1 \subseteq M, 2 \subseteq M, \{1, 2\} \subseteq M.$

Негізгі сандық жиындар

N	$\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Барлық натурал сандар жиыны
Z	$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Бүтін сандар жиыны. Бүтін сандар жиыны натурал сандар жиынын қамтиды.
Q	Рационал сандар жиыны. Бүтін сандардан басқа бөлшек сандар да бар. Бөлшек бұл - p/q түріндегі өрнек, мұндағы p- бүтін сан, q – натурал сан. Ондық бөлшектерді де p/q түрінде жазуға болады. Мысалы, $0{,}25 = 25/100 = 1/4$. Бүтін сандарды да p/q түрінде жазуға болады. Мысалы, бөлімінде «бір» түрінде жазылу: $2 = 2/1$. Осылайша кез келген рационал санды ондық–ақырлы немесе ақырсыз периодты бөлшек түрінде жазуға болады.
R	Барлық нақты сандар жиыны. Иррационал сандар – бұл ақырсыз периодты емес бөлшектер. Оларға: - π саны – шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасы; - e саны –Эйлердің құрметіне аталған және т.т. Екі жиын бірге (рационал және иррационал сандар жиындары) – нақты сандар жиынын құрайды.

2.2. Эйлер-Венн диаграммасы

Эйлер-Венн диаграммасы жиындар мен олардың өзара көрнекті бейнеленуі үшін қолданылады.



2.1 – сурет. Эйлер-Венн диаграммасы

Әмбебап U жиыны тіктөртбұрыш түрінде, ал әмбебап U жиыныныі ішкі жиындары – еркін алынған жиындар шеңберлер түрінде бейнеленеді (2.1-сурет).

Бұл жерде A және B жиындарының өзара орналасуының келесі жағдайлары болуы мүмкін:

1. жиындардың бірі екіншісіне қатаң түрде енеді

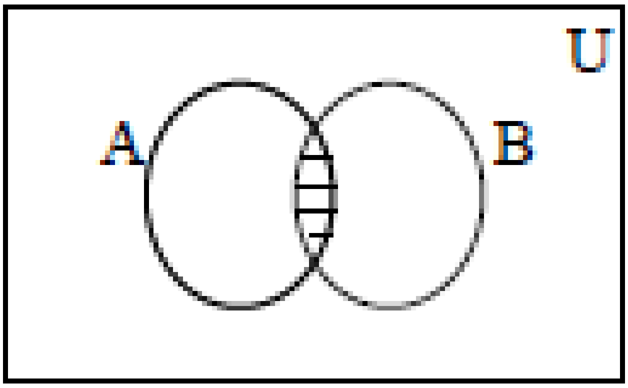
$$(A \subset B, B \subset A);$$

2. жиындардың теңдігі;
3. жиындардың ортақ элементтері жоқ;
4. жиын жалпы жағдайда, яғни жоғарыда қарастырылған жағдайдың бірде бірі орындалмайды, және жиындар 2.1-суретте көрсетілгендей орналасады.

2.3. Жиындарға қолданылатын операциялар

Жиындармен жұмыс істеу үшін келесі операциялар қолданылады: қосу (біріктіру), көбейту (қиылысу), айырым, симметриялы айырым және толықтауыш.

Анықтама 1. A жиынына да, B жиынына да тиісті элементтерден тұратын жиынды A *және* B *жиындарының қиылысуы* (көбейтіндісі, $A \cap B$ түрінде белгіленеді) деп айтады. Сонымен, $c \in A$, және $c \in B$ болғанда ғана $c \in A \cap B$ немесе $C = \{c | c \in A$ және $c \in B\}$ түрінде жазылады.



2.2 – сурет. Жиындардың қиылысуы

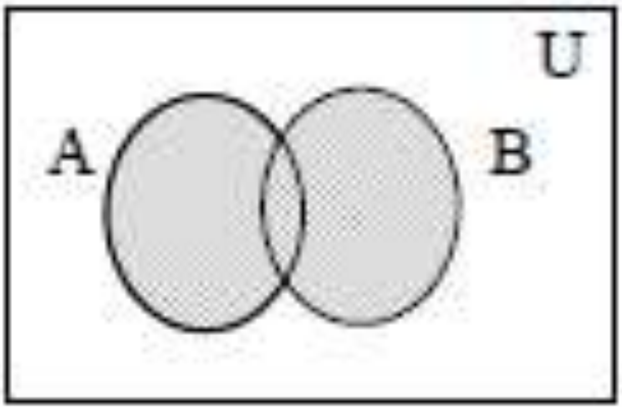
1-*мысал*. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{5, 6\}$ үш жиын берілсін. Сонда:

$A \cap B = \{1, 3\}$;

$B \cap C = \{ 5\}$;

$A \cap C = \emptyset$.

Анықтама 2. Не A, не B жиынына тиісті элементтерден тұратын жиынды *A және B жиындарының біріктіруі* (қосындысы, $A \cup B$ түрінде белгіленеді) деп айтады. Сонымен, не $c \in A$, не $c \in B$ болғанда ғана $c \in A \cup B$. немесе $C = \{c | c \in A \text{ немесе } c \in B\}$ түрінде жазылады.



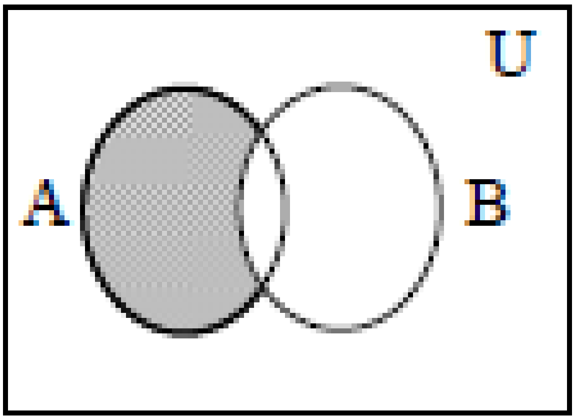
2.3 – сурет. Жиындардың бірігуі

2-*мысал*. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{5, 6\}$ үш жиын берілсін. Сонда:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Анықтама 3. A жиынына тиісті, бірақ B жиынына тиісті емес элементтерден ғана тұратын жиын *A және B жиындарының айырымы* ($A \backslash B$ түрінде белгіленеді) деп айтады.



2.4 – сурет. А және В жиындарының айырымы

3-*мысал*. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{5, 6\}$ үш жиын берілсін. Сонда:

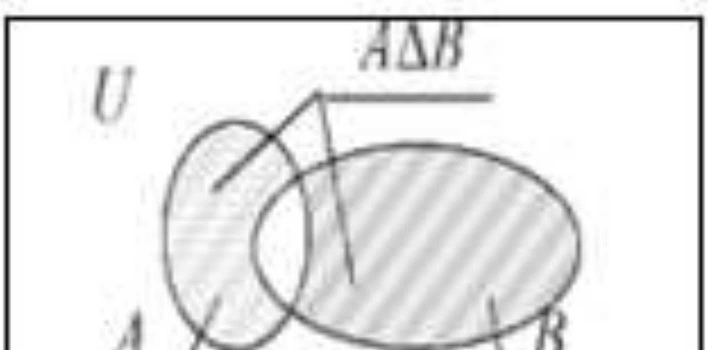
$A \backslash B = \{ 2, 4\}$;
$B \backslash C = \{1, 3\}$;
$A \backslash C = \{ 1, 2, 3, 4\}$.

Анықтама 4. Элементтері не тек қана A жиынына, не тек қана B жиынына тиісті болатын элементтерден тұратын жиынды *A және B жиындарының симметриялы айырымы* ($A \triangle B$ түрінде белгіленеді) деп айтады.

$$A \triangle B = \{x \in A \text{ және } x \notin B\}$$

немесе

$$A \triangle B = \{x \in B \text{ және } x \notin A\}.$$



3.5– сурет. А және В жиындарының симметриялы айырымы

4-*мысал.* A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6} жиындары берілсін. Сонда:

A ∆ B = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}.

Анықтама 5. Егер A – U жиынының ішкі жиыны болса, онда A жиынының U жиынына дейін *толықтауышы* U жиынының элементтерінен ғана тұратын $\bar{A}$ жиыны болады, яғни

$$\bar{A} = U \backslash A = \{x | x \in U \text{ и } x \notin A\}$$

$$C = U \backslash A,$$

$$C = \{c | c \notin A\}.$$

2.4. Жиындар алгебрасының заңдары

Қарапайым алгебрадағы операциялар белгілі бір заңдылықтарға бағынатыны сияқты, жиындарға қолданылатын операциялар да белгілі бір заңдылықтарға сәйкес орындалады.

1. $A \cup B = B \cup A$ (біріктіру операциясына қатысты коммутативтілік қасиеті);
2. $A \cap B = B \cap A$ (қиылысу операциясына қатысты коммутативтілік қасиеті);
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (біріктіру операциясына қатысты ассоциативтілік қасиеті);
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (қиылысу операциясына қатысты ассоциативтілік қасиеті);
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(*қосуға қатысты көбейту дистрибутивтілік қасиеті*)* ;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (көбейтуге қатысты қосу дистрибутивтілік қасиеті);
7. $A \cup A = A$ (біріктіру операциясына қатысты идемпотенттілік қасиеті);
8. $A \cap A = A$ (қиылысу операциясына қатысты идемпотенттілік қасиеті);
9. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (біріктіру операциясына қатысты де Морган заңы);
10. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (қиылысу операциясына қатысты де Морган заңы);

11. $A \cup \emptyset = A,$ (біріктіру операциясына қатысты бос жиын қасиеті);

12. $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap \bar{A} = \emptyset$ (қиылысу операциясына қатысты бос жиын қасиеті);

13. $A \cup U = U \Rightarrow U = \overline{\emptyset} \Rightarrow \overline{U} = \emptyset,$ $A \cup \bar{A} = U$ (біріктіру операциясына қатысты әмбебап жиынның қасиеті);

14. $A \cap U = A$ (қиылысу операциясына қатысты әмбебап жиынның қасиеті);

15. $A \cup (A \cap B) = A,$ $A \cup \bar{A} = U$ (біріктіру операциясына қатысты сіңіру қасиеті);

16. $A \cap (A \cup B) = A$ (қиылысу операциясына қатысты сіңіру қасиеті);

17. Айырым операцияларының қасиеттері*:*

17.1. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;

17.2. $A \backslash B = A \cap \bar{B},$ $A \backslash A = \emptyset$;

17.3. $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$;

17.4. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

17.5. $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$;

17.6. $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$;

17.7. $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

17.8. $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$;

18. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (айырым операциясына қатысты көбейту дистрибутивтілігі);

19. Симметриялы айырым операциясының қасиеттері:

19.1. $A \Delta B = B \Delta A$;

19.2. $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$;

19.3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;

19.4. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

20. Транзитивтілік: Егер $A \subset B$ және $B \subset C$ болса, онда $A \subset C;$

21. Егер $A \subset B$ және $B \subset A$ болса, онда $A = B$.

Білім алушылардың аудиториялық сабақтарда немесе өз бетімен орындауға арналған жеке тапсырмалары.

1-*тапсырма***.** Берілген А және В жиындарының бірігуін табыңыздар:

№1. А={1, 3, 5}, В={-1, 0, 1}

№2. А={a, b, c, d, 1, 2}, В={1, 2, 3};

№3. А жиыны 5425109 санына енетін цифрлардан, В жиыны 8874183 санына енетін цифрлардан тұрады;

№4. А=$\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$, В=$\{4,3,2,1,0,-1,-2\}$;

№5. B = {4, 3, 2, 1, 0, -1, -2}, $C=\{x|-4\leq x<5\}$;

№6. A = {1; 2; 3; 4; 6; 12}, B = {1; 2; 3; 6; 9; 18};

№7. А = [0; 7], В = [3; 10];

№8. А = {2, 4, 6, 8}, В = {5, 6, 7, 8, 9};

№9. A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5};

№10. А = {a, 1, 2}, В = {a, b, 1.

2-*тапсырма***.** Берілген А және В жиындарының қиылысуын табыңыздар:

№1. А= $\{a,b,c,d,e,f\}$, B= $\{b,e,f,k,l\}$;

№2. A= {26;39;5;58;17;81}, B= {17;26;58};

№3. A={26,39,5,58,17,81}, B= {2,6,9,1,7};

№4. А жиыны 5425109 санына енетін цифрлардан, В жиыны 8874183 санына енетін цифрлардан тұрады;

№5. A= $\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$, B= $\{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2\}$;

№6. A жай сандар жиыны – {2;3;5;7;11;13;…}, B жұп сандар жиыны – {2;4;6;8;10;…};

№7. B= $\{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2\}$, $C=\{x|-4\leq x<5\}$;

№8. А = {a, 1, 2}, В = {a, b, 1};

№9. А = {a, b, c, d, e}, В = {b, d, e, g, к};

№10. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞).

3-*тапсырма***.** Берілген А және В жиындарының айырымын табыңыздар:

№1. A= {a, b, c, d}, B= {1, a, d, 5};

№2. A= [1;4], B= [2;6];

№3. A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5};

№4. A = {0, 1, 2}, B = {-1, 2, 3};
№5. A = {a, 1, 2}, B = {a, b, 1};
№6. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);
№7. A = {a, b, c, d, e}, B = {b, d, e, g, к};
№8. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);
№9. B= {4, 3, 2, 1, 0, −1, −2}, $C=\{x|-4\leq x<5\}$;
№10. A жай сандар жиыны – {2;3;5;7;11;13;…}, B жұп сандар жиыны – {2;4;6;8;10;…}.

4-*тапсырма*. Берілген В және А жиындарының айырымын табыңыздар:
№1. A= {a, b, c, d}, B= {1, a, d, 5};
№2. A= [1;4], B= [2;6];
№3. A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5};
№4. A = {0, 1, 2}, B = {-1, 2, 3};
№5. A = {a, 1, 2}, B = {a, b, 1};
№6. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);
№7. A = {a, b, c, d, e}, B = {b, d, e, g, к};
№8. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);
№9. B= {4, 3, 2, 1, 0, −1, −2}, $C=\{x|-4\leq x<5\}$;
№10. A жай сандар жиыны – {2;3;5;7;11;13;…}, B жұп сандар жиыны – {2;4;6;8;10;…}.

5-*тапсырма*. Берілген В және А жиындарының айырымын табыңыздар:
№1. A= {a, b, c, d}, B= {1, a, d, 5};
№2. A= [1;4], B= [2;6];
№3. A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5};
№4. A = {0, 1, 2}, B = {-1, 2, 3};
№5. A = {a, 1, 2}, B = {a, b, 1};
№6. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);
№7. A = {a, b, c, d, e}, B = {b, d, e, g, к};
№8. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);
№9. B= {4, 3, 2, 1, 0, −1, −2}, $C=\{x|-4\leq x<5\}$;
№10. A жай сандар жиыны – {2;3;5;7;11;13;…}, B жұп сандар жиыны – {2;4;6;8;10;…}.

6-*тапсырма*. Берілген A және B жиындарының симметриялық айырымын табыңыздар:

№1. A= {a, b, c, d}, B= {1, a, d, 5};

№2. A= [1;4], B= [2;6];

№3. A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5};

№4. A = {0, 1, 2}, B = {-1, 2, 3};

№5. A = {a, 1, 2}, B = {a, b, 1};

№6. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);

№7. A = {a, b, c, d, e}, B = {b, d, e, g, к};

№8. A=(-∞; 3), B=[-1; +∞);

№9. B= $\{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2\}$, $C=\{x|-4\leq x<5\}$;

№10. A жай сандар жиыны – $\{2;3;5;7;11;13;\ldots\}$, B жұп сандар жиыны – $\{2;4;6;8;10;\ldots\}$.

Бақылау сұрақтары.

1. Жиын ұғымына қатысты анықтамалар мен түсініктер.
2. Жиын қандай тәсілдермен беріледі?
3. Эйлер-Венн диаграммасын құруды мысал арқылы түсіндіріңіз.
4. Жиындарға қолданылатын операцияларды тұжырымдап мысал келтіріңіз.
5. Біріктіру операцияларына қатысты жиындардың қасиеттерін пысықтаңыз.
6. Қиылысу операциясына қатысты жиындардың қасиеттерін пысықтаңыз.

III-ТАРАУ. БУЛЬДІК АЛГЕБРА

3.1. Буль алгебрасының негізгі ұғымдары

Логика алгебрасы

Алгебра – қосу, көбейту, алу және бөлу сияқты операцияларды тек қана сандарға қатысты емес, сонымен қатар басқа да математикалық объектілерге, мысалы, көпмүшеліктерге, векторларға, матрицаларға, операторларға т.т., әр түрлі табиғаттағы объектілерге орындалуын зерттейтін математиканың бөлімі.

Ол біртипті арифметикалық есептерді шығарудың жалпы тәсілін іздеумен байланысты пайда болды. Табылған алгебраның негізінде әріптермен белгіленген шамаларға (теңдеулерді құру және шығару), олардың нақты сандық мәндерінен тәуелді емес қолданылатын амалдар жатыр. Әріптік белгілеулер есептеу құрылымы мен жазбаларды ықшамдағандықтан символиканы енгізу математиканың дамуындағы үлкен қадам болды.

Айтылымдар – қандай да бір тілдің сөйлемін білдіретін (табиғи немесе жасанды), оның ақиқаттылығы мен ғана байланыстылығы қарастырылатын математикалық логиканың термині.

Логика (гректің logos — сөз, ой) – ойлау заңдары мен формалары туралы ғылым жинағы.

Буль (логика) алгебрасы – бұл айтылымдарды оқитын, логикалық өрнектер мен логикалық операцияларды қарастыратын математика бөлімі. Басқаша айтқанда, *логика алгебрасы (айтылымдар логикасы)* – алгебра әдістері айтылымдардың логикалық түрлендіруінде пайдаланылатын логикалық түрлендіруінде алгебра әдісі пайдаланатын математикалық логиканың негізгі бөлімдерінің бірі.

Айтылымдарға қолданылатын логикалық операцияларды қарастыратын буль (логика) алгебрасы компьютердің логикалық негізі болып табылады.

Айтылымның ақиқаттығы немесе жалғандығы туралы баға беруге болатын болымды сөйлем айтылымдар логикасы болып табылады. Олар бір мезгілде ақиқат және жалған бола алмайды. Айтылымдар логикасы бұл сөйлемді мағынасы, мазмұны жағынан емес, тек қана ақиқаттығы немесе жалғандығы жағынан айтылып отыр. «Айтылым» түсінігі үшін кей кезде «пропозиция» термині пайдаланылады, ал «пропозиционалдық» туралы айтсақ, ол айтылым логикасына қатысты айтылғанын білдіреді. Сұраулы, бұйрықты және мағынасыз сөйлемдер логикалық айтылымдар болмайды. Пропозициональдық айнымалылар (яғни айтылымдарды белгілейтін айнымалылар), логикалық байламдар мен жақшалар *айтылымдар алгебрасы тілінің алфавитін* құрайды.

Егер сөйлем ақиқат болса, онда оның ақиқаттық мәні 1-ге тең, егер жалған болса, онда 0-ге тең болады. Элементарлық алгебрада кез келген сан константа болып табылады, шамасы 1-ге немесе 0-ге тең шама – логикалық константа айтылым болып табылады.

Логикалық айтылымдар – болымдылық түрде гипотезаны ұсынатын, ақиқат немесе жалған деп бірмәнді айтуға болатындай хабарлы сөйлем (1-мысал). Айтылымдардың қарапайым (элементарлық) немесе күрделі (құрама) түрлері кездеседі.

Егер айтылым қандай да бір бөлінбейтін біртұтас ретінде қарастырылатын айтылым *қарапайым* (элементерлы, атомарлы) *айтылым* деп аталады. Негізінен оларға логикалық байламдары жоқ айтылымдарды жатқызады.

1-мысал. «7 – қарапайым сан» сөйлемі ақиқат болғандықтан, айтылым болып табылады.

Айтылымдар алгебрасы тілі алфавитінің элементтерінің көмегімен әр түрлі логикалық формулаларды құрастыруға болады. Айтылымдар алгебрасының формуласы деп пропозиционалдық айнымалылар символдарынан, амалдарды орындау ретін анықтайтын операциялар мен жақшалар санынан алынған мағыналы өрнек түсініледі. Формулалар жазылуындағы сыртқы жақшаны жазбай тастап кетуге болады.

Логикалық формула келесі сұлба бойынша индуктивті анықталады:

1. кез келген пропозиционалды айнымалы формула болады.
2. егер A – формула болса, онда $\neg A$ – да формула болып табылады.
3. егер A және B –формула болса, онда $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \sim B)$, $(A \oplus B)$ өрнектері де формула болады.

4. жоғарыда көрсетілген үш ережеден өзге формула құрылмайды.

Нақты материалдық пәндерден ауытқи отырып, грамматика жеке сөздің формасы мен сөйлемдегі сөздер тіркесінің формаларын зерттейтін сияқты; математика сандық және кеңістіктік қатынастар мен формаларды қарайды. *Формалдық логика* да жеке ойлар формалары мен олардың үйлесімділік формаларын пайымдаулардың, қорытындылардың, дәлелдер мен тұжырымдамалардың нақты мазмұнын зерттейді. Математикалық логика формалды логиканың құрамды бөлігі болып табылады.

Кез келген сөйлем логикалық айтылым бола бермейді (2-мысал).

Сұраулы сөйлем айтылым болмайды.

2-мысал. «Көшеде жүріп қайтайық» сөйлемі айтылым болмайды.

Айтылымдық форма – бұл тіке немесе жанама мағынада кем дегенде бір айнымалыны қамтитын және барлық айнымалылар өздерінің мәндерімен алмастырылғанда айтылым болатын хабарлы сөйлем (3-мысал).

3-мысал. «$x+3>10$» - айтылымдық форма болып табылады, $x>7$ мәндерінде ақиқат, басқа мәндерде жалған болады.

Логика алгебрасы тек қана бір тұрғыдан – ол ақиқат немесе жалған болуына байланысты кез келген айтылымды қарастырады. «Және», «немесе» «емес», «егер ... онда» және т.б. сөздері мен сөз тіркестерінің көмегімен бар айтылымдардан жаңа айтылымдарды құруға болады. Осындай сөздер мен сөз тіркестері *логикалық байлам* деп аталады.

Айтылымдар мен логикалық байламдар (байланыстырғыштар, айтылымдарға қолданылатын операциялар) айтылымдар логикасының негізгі түсініктері болып табылады

Логикалық байламдардың көмегімен қарапайым айтылымдардан құрылған айтылымдар *күрделі (құрама) айтылымдар* деп аталады.

Басқаша айтқанда, элементарлық құраушы ретінде қарапайым айтылымға енетін қарапайым айтылымдарды пайдаланып *күрделі* немесе *құрама* айтылымдарды құрастыруға болады. Күрделі айтылымдарды құрастыруда *және, немесе, сонда* *тек сонда ғана, қашан (тек сол жағдайда ғана), егер, ..., онда ..., жоқ* сөздері мен сөз тіркестері пайдаланылады (4-мысал).

4-мысал. «2 саны 12 санына бөлінеді» айтылымы – қарапайым айтылым, «2 саны 12 санына бөлінеді және 4 саны 12 санына бөлінеді» - күрделі айтылым, ол екі қарапайым айтылымы мен «және» логикалық байламының көмегімен құрылған.

Логикалық айтылымдармен жұмыс істеу үшін оларды негізінен латын алфавитінің бас әріптерімен белгілейді (5-мысал).

5-мысал. «2 саны 12 санына бөлінеді» қарапайым айтылымын А арқылы, «4 саны 12 санына бөлінеді» қарапайым айтылымын В арқылы белгілейік. Сонда 4-мысалдағы күрделі айтылымды «А және В» арқылы жазуға болады. Бұл жерде «және» - логикалық байлам. А, В – тек қана сәйкес «1» және «0» арқылы белгіленетін «ақиқат» немесе «жалған» мәндерін қабылдайтын логикалық айнымалылар.

Сонымен, айтылымдар логикасының негізгі есебі: қарапайым айтылымдардың ақиқаттығы немесе жалғандығының негізінде күрделі айтылымдардың ақиқаттығын немесе жалғандығын анықтауда.

3.2. Логикалық операциялар

Айтылымдар алгебрасы тілі алфавитінің элементтерінің көмегімен әр түрлі логикалық формулаларды құрастыруға болады. *Айтылымдар алгебрасының формуласы* деп пропозиционалдық айнымалылар символдарынан, амалдарды орындау ретін анықтайтын операциялар мен жақшалар санынан алынған мағыналы өрнек түсініледі.

Әрбір логикалық формула тек қана екі логикалық мәнді («1» және «0») қабылдай алатын логикалық айнымалылардан логикалық функцияны береді.

Кез келген функцияны формуланың көмегімен беруге болатыны белгілі. Бір немесе екі айнымалы логикалық функциялардың – унарлы және бинарлы логикалық операциялардың айтылымдар алгебрасында алатын орыны ерекше.

Логикада айтылымдарға келесі негізгі операциялар (логикалық байламдар) жүргізіледі: терістеу, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, бірмәнділік емес (модуль бойынша қосу). Олар қарапайым айтылымдардың құраушыларының логикалық мәндері бойынша күрделі айтылымдардың логикалық мәнін есептеу құралы ретінде қарастырылады.

Әрбір логикалық байлам логикалық айтылымдарға қолданатын операция ретінде қарастырылады да, өзінің атауы мен белгіленуі болады (1-кесте).

1-кесте. Негізгі логикалық операциялар

Операцияның белгіленуі	Оқылуы	Операцияның аталуы	Балама белгіленуі
–	ЕМЕС	Терістеу (инверсия)	Үстінен сызықша
$\wedge$	ЖӘНЕ	Конъюнкция (логикалық көбейту)	&
$\vee$	НЕМЕСЕ	Дизъюнкция (логикалық қосу)	+
$\rightarrow$	Егер ... онда	Импликация	$\supset$
$\leftrightarrow$	Сонда тек қана сонда (... болғанда ғана)	Эквиваленттілік	~
XOR	Не ... не	Шығару НЕМЕСЕ (2 модулі бойынша қосу)	$\oplus$

Инверсия. A айтылымы жалған болған жағдайда ғана ақиқат, және ақиқат болған кезде ғана жалған болатын жаңа C айтылымы *инверсия* (терістеу, ЕМЕС / НЕ / NOT операциясы) деп аталады да, $C = \bar{A}$ немесе $C = \neg A$ түрінде жазылады және C – A **ЕМЕС** деп айтылады (6-мысал). Терістеу бір ғана операндқа (аргументке) орындалатын логикалық операция болып табылады.

Бұл логикалық байламдар келесі кестеде кескінделген (ақиқат кестесі):

2-кесте. Логикалық инверсияның ақиқат кестесі.

A	$\neg A$
0	1
1	0

6-мысал. А= «Бүгін сабақ болады», сонда ¬А= «Бүгін сабақ болмайды».

Конъюнкция. A және B екі айтылымдар да ақиқат болған кезде ғана ақиқат болатын жаңа f айтылымы А және В екі айтылымдардың *конъюнкциясы* (лат. conjunctio – біріктіру, логикалық көбейту, ЖӘНЕ / И / AND операциясы) деп аталады да $f = A\&B$ немесе $f = A + B$ түрінде жазылады және f – A **ЖӘНЕ** B-ға тең деп айтылады (7-мысал).

3-кесте. Логикалық көбейтудің ақиқат кестесі.

A	B	$A\&B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

7-мысал. «2 саны 12 санына бөлінеді және 4 саны 12 санына бөлінеді» айтылымы ақиқат, «2 саны 12 санына бөлінеді және 4 саны 12 санынан үлкен» айтылымы жалған.

Дизъюнкция. A және B екі айтылымдардың кем дегенде біреуінің мәні ақиқат болған кезде ғана ақиқат болатын жаңа C айтылымы А және В екі айтылымдардың *дизъюнкциясы* (лат. disjunctio – бөлу, логикалық қосу, НЕМЕСЕ / ИЛИ / OR операциясы) деп аталады да $C = A \vee B$ немесе $C = A + B$ түрінде жазылады және C – A **НЕМЕСЕ** B-ға тең деп айтылады (8-мысал).

4-кесте. Логикалық қосудың ақиқат кестесі.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

8-мысал. «2 саны 7 санына бөлінеді немесе 4 саны 10 санына бөлінеді» айтылымы жалған, «2 саны 12 санына бөлінеді немесе 4 саны 12 санынан үлкен» айтылымы ақиқат.

Импликация. Егер ... онда, және т.б. байламдармен өрнектелетін операция *импликация* деп аталады да, $\rightarrow$ белгісімен белгіленеді. A$\rightarrow$B айтылымы A – ақиқат, B-жалған болған жағдайда ғана жалған болады. Импликация операциясының мәнін

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

логикалық өрнегінің көмегімен есептеуге болады (9-мысал).

5-кесте. Логикалық ұстанудың (импликация) ақиқат кестесі.

A	B	A$\rightarrow$B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

9-мысал. «Егер студент емтиханды «өте жақсы» және «жақсы» бағаларына тапсырса стипендия алады» айтылымын талдайық. Егер студент емтиханды «өте жақсы» және «жақсы» бағаларына тапсырып стипендия алмаған жағдайда ғана импликация жалған болады. Басқа жағдайларда: емтихан «өте жақсы» және «жақсы» бағаларына тапсырылды, стипендия алады, немесе емтиханды тапсыру барысында қандай да бір сабақтардан «қанағаттандырарлық» бағаға тапсырса, стипендия туралы сөз болмайды немесе емтиханды тапсыра алмаса да, стипендия туралы сөз болмайтындығы туралы импликация ақиқат болады

Эквиваленттілік. «Сонда, тек сонда ғана», «қажетті және жеткілікті» және т.б. байламдармен өрнектелетін операция *эквиваленттілік* (бірмәнділік) деп аталады да, ↔ немесе ~ белгілерімен белгіленеді (10-мысал). Эквиваленция операциясының мәнін

$$A \leftrightarrow B = \bar{A}\&\bar{B} \vee A\&B = (\bar{A} \vee B)\&(\bar{B} \vee A)$$

логикалық өрнегінің көмегімен есептеуге болады

6-кесте. Логикалық тепе-теңдіктің (*Эквиваленция*) ақиқат кестесі.

A	B	A~B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

10-мысал. «Егер сан 2-ге қалдықпен бөлінгенде ғана, ол сан тақ сан болып табылады» айтылымы ақиқат болады, ал «Егер сан 2-ге қалдықпен бөлінгенде ғана, ол сан жұп сан болып табылады» айтылымы жалған болады.

Эквиваленттілік элементі қарапайым

$$A \leftrightarrow B = \bar{A}\&\bar{B} \vee A\&B = (\bar{A} \vee B)\&(\bar{B} \vee A)$$

логикалық операциялары арқылы өрнектелуі мүмкін.

Шығару НЕМЕСЕ («1 және тек қана 1», XOR (Exclusive OR)) немесе *2 модулі бойынша қосынды*. Не ... не байламымен өрнектелетін операция *Шығару НЕМЕСЕ* немесе *2 модулі бойынша қосынды* деп аталады да XOR немесе ⊕ белгілерімен белгіленеді. А және В мәндері беттеспеген кезде ғана $A \oplus B$ айтылымы ақиқат болады (11-мысал). Жалпы жағдайда, егер ақиқат айтылым болмаса, бұл операцияның нәтижесі жалған болады. Шығару НЕМЕСЕ операциясының мәнін

$$A \oplus B = \bar{A}\&\bar{A}\&\bar{B}\&C \vee \bar{A}\&B\&\bar{C} \vee A\&\bar{B}\&C$$

логикалық өрнегінің көмегімен есептеуге болады

7-кесте. Шығару «немесе» (бірмәнділік емес) логикалық байламының ақиқат кестесі.

A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

11-мысал. «7 саны – не жұп, не тақ сан» айтылымы – ақиқат. «7 саны – не жай сан, не тақ сан» айтылымы – жалған, себебі осы айтылымды құрайтын екі айтылым да ақиқат.

Үш немесе одан да көп логикалық айнымалы үшін жоғарыдағы екі операция бір –бірінен ерекшеленеді:

ШЫҒАРУ НЕМЕСЕ операциясы үшін жолда жалғыз ғана бір цифры кездессе қорытынды мән ақиқат болады.

2 модулі бойынша қосынды. Ену айнымалыларының арифметикалық қосындысының кіші разряды 1-ге тең жолдағы қорытынды мән ақиқат болып табылады. Ол $A \oplus B \oplus C$ логикалық операциялардың көмегімен өрнектеледі.

Қорытынды. Терістеу, дизъюнкция және конъюнкция операциялары логикалық айтылымдарды сипаттауға және өңдеуге жеткілікті болып табылады.

Сонымен, математикалық логикада күрделі айтылымдарды жазу үшін қарапайым айтылымдарға келесі логикалық операциялар пайдаланылады:

¬ – емес;

&, ∧, AND – және;

∨, +, OR – немесе;

→, ⊃ – алынады;

↔, ~ – эквивалентті;

XOR, ⊕ – не, не.

Осы операциялардың әрқайсысын 0 мен 1 символдарына қолданатын операция деп қарастыруға болады.

Логикалық операциялардың приоритеттері:

жақшаның ішіндегі операция; ¬; &; ∨; ⊕; →; ~.

Жоғарыда келтірілген ақиқат кестелерін жалпылап, бір кестеге жазайық:

8-кесте. Негізгі логикалық операциялар үшін ақиқат кестесі

A	B	¬A	A&B	A∨B	A→B	A↔B	A XOR B
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

3.3. Буль (логикалық) функциясы

Логикалық формула – логикалық шамалардан (тұрақтылар мен айнымалылардан) тұратын, логикалық операциялармен біріктірілетін айтылымның символдық жазбасы.

Логикалық айнымалы – мәні не логикалық 0-ге тең, не логикалық 1-ге тең айнымалы.

Буль (логикалық) функциясы – тек қана 0 немесе 1 мәндерін қабылдайтын логикалық айнымалылардан тұратын функция (12-мысал).

12-мысал. $F(A, B, C) = \neg A \vee B \& C$ – үш A, B, C айнымалыларынан тұратын логикалық функция берілсін.

9-кесте. Берілген логикалық өрнектегі логикалық операциялар үшін ақиқат кестесі

A	B	¬A	A&B	A∨B	A→B	A↔B	A XOR B
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Күрделі өрнектердің ақиқат кестесін құру алгоритмі:

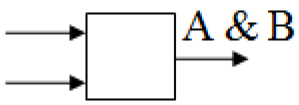
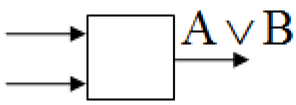
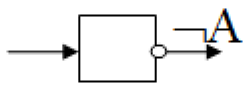
1. жол санын анықтау:
   - жол саны - 2^n+1 (атау жолы);

- n – қарапайым айтылымдар саны.
2. баған санын анықтау:
    - баған саны = айнымалылар саны + логикалық операциялар саны;
    - айнымалылар (қарапайым өрнектер) санын анықтау;
    - логикалық операциялар санын және олардың орындалу тізбегін анықтау.

Логикалық формулаларды логикалық сұлбалардың көмегімен беруге болады. Компьютердің логикалық элементі элементерлық логикалық функцияны жүзеге асыратын электрондық сұлбаның бөлімі және вентиль, триггер деп аталатын ЖӘНЕ, НЕМЕСЕ, ЕМЕС, ЕМЕС-ЖӘНЕ, ЕМЕС-НЕМЕСЕ және т.б. сұлбалар болып табылады.

Негізгі үш логикалық операцияларды жүзеге асыратын үш базалық логикалық элемент бар:

- «ЖӘНЕ» логикалық элемент – конъюнктор;
- «НЕМЕСЕ» логикалық элемент – дизъюнктор;
- «ЕМЕС» логикалық элемент – инвертор.

конъюнктор	дизъюнктор	инвертор
		

Кез келген логикалық операция үш негізгі операциялардың көмегімен берілу мүмкіндігі болғандықтан ақпаратты сақтайтын және өңдейтін компьютердің кез келген құрылғысы базалық логикалық элементтерден жинақталуы мүмкін.

Компьютердің логикалық элементі электр импульстерін беретін сигналдармен орындалады. Импульс болса – сигналдың логикалық мағынасы – 1, импульс жоқ болса – 0 мәніне тең. Логикалық элементтің кірісіне сигналдар – аргументтер мәндері түседі, ал шығысында сигналдар – функция мәні түседі.

Логикалық сұлба – логикалық элементтерден тұратын сұлба.

Сигналды логикалық элементпен түрлендіру өз алдына логикалық сұлба түрінде берілген, логикалық функцияға сәйкес аққиқат кестесі болып табылатын жағдай кестесімен беріледі. Осындай түрде логикалық операциялар тізбегін бейнелеу мен оларға есептеулер жүргізу ыңғайлы.

Логикалық сұлбаларды құру алгоритмі:

1. логикалық айнымалылар санын анықтау;
2. логикалық операциялар саны мен олардың орындалу ретін анықтау керек;
3. әрбір логикалық операцияға сәйкес оның логикалық элементін бейнелеу керек;
4. логикалық элементтерді логикалық операциялардың орындау ретімен біріктіру.

3.4. Логика алгебрасының заңдары

Логикалық өрнектерді логика алгебрасының мына заңдарының (теоремаларының), ережелерінің және қасиеттерінің көмегімен түрлендіруге болады:

- *ассоциативтік (терімділік) заңы*

  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c);$

  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$

- *коммутативтік (орын ауыстыру) заңы*

  $a \wedge b = b \wedge a;$

  $a \vee b = b \vee a.$

- *дистрибутивтік (үлестірімділік) заңы*

  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$

  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$

- *рефлексивтік (идемпотенттілік) заңы*

  $a \wedge a = a;$

  $a \vee a = a.$

- *терістеуді терістеу (қос терістеу) заңы*

  $\bar{\bar{a}} = a.$

- *Блейк-Порецкий (терістеумен түсіп қалу / сіңіру) заңы*

  $a \wedge (\bar{a} \vee b) = a \wedge b;$

$a \vee (\bar{a} \wedge b) = a \vee b.$

-*де Морган (қосжақтылық теоремасы) ережесі*

$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b};$

$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}.$

-*түсіп қалу (сіңіру) ережесі*

$a \wedge (a \vee b) = a;$

$a \vee (a \wedge b) = a.$

-*жапсыру ережесі*

$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) = b;$

$(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = b.$

-*нөлмен және бірмен қосу қасиеті*

$a \vee 0 = a;$

$a \vee 1 = 1.$

-*нөлге және бірге көбейту қасиеті*

$a \wedge 0 = 0;$

$a \wedge 1 = a.$

-*айнымалымен және оның терістеуімен операциялар (қосымша) қасиеті*

$a \wedge \bar{a} = 0;$

$a \vee \bar{a} = 1;$

$\bar{1} = 0;$

$\bar{0} = 1.$

Осы заңдардың дұрыстығын өрнектің оң жағындағы өрнегі үшін ақиқат кестесін құрып, оны сол жағындағы мәнмен салыстыру арқылы дәлелдеуге болады. Заңдарға сүйене отырып күрделі логикалық өрнектерді ықшамдауға болады. Күрделі логикалық функцияларды өзіне мәндес қарапайым логикалық функциямен алмастырудың осындай үрдісі *функцияны минимизациялау* деп аталады.

Буль функциясын *минимизациялау мақсаты* – сұлбадағы логикалық элементтердің ең аз қажетті санын алу.

3.5. Формулалардың пара-парлығы

Бірдей функцияларды беретін формулаларды *эквивалентті* (немесе *пара-пар*) формулалар деп айтамыз. Логикалар алгебрасында формулалардың пара-парлығы тепе-тең теңдік $\equiv$ белгісімен белгіленеді. Екі формуланың эквиваленттілігін орнатудың стандартты әдістері: 1) әрбір формула бойынша ақиқат кестесі толтырылады; 2) алынған кестені айнымалылардың мәндер жиынының әр қайсысы бойынша салыстырылады. $\sim$ және $\equiv$ символдарын ажырата білу керек. $\sim$ белгісі – формалды тіл символы болып табылады және осы символдардың көмегімен формула құрылады. Логикада келесі эквивалентті формулалар – негізгі эквивалентті қатынастар (заңдар) кездеседі:

1. $A \equiv A$ (тепе-теңдік заңы);
2. $A\&0 \equiv 0$;
3. $A \vee 0 \equiv A$;
4. $A\&1 \equiv A$;
5. $A \vee 1 \equiv 1$;
6. $\neg(\neg A) \equiv A$ (*терістеуді терістеу (қос терістеу) заңы*);
7. $A\&(\neg A) \equiv 0$ (логикалық қайшылық заңы);
8. $A \vee (\neg A) \equiv 1$ (үшіншісін алып тастау заңы);
9. $A\&A \equiv A$ (конъюнкцияның *идемпотенттілік заңы*);
10. $A \vee A \equiv A$ (дизъюнкцияның *идемпотенттілік заңы*);
11. $A\&B \equiv B\&A$ (конъюнкцияның *коммутативтілік заңы*);
12. A$\vee$ $B \equiv B \vee A$ (дизъюнкцияның *коммутативтілік заңы*);
13. $A\&(B\&C) \equiv (A\&B)\&C$ (конъюнкцияның *ассоциативтілік заңы*);
14. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (дизъюнкцияның *ассоциативтілік заңы*);
15. $A\&(B \vee C) \equiv (A\&B) \vee (A\&C)$ (дизъюнкцияға қатысты конъюнкцияның *дистрибутивтілік заңы*);
16. $A \vee (B\&C) \equiv (A \vee B)\&(A \vee C)$ ((конъюнкцияға қатысты дизъюнкцияның *дистрибутивтілік заңы*);
17. $A\&(A \vee B) \equiv A$ (сіңірудің бірінші заңы);
18. $A \vee (A\&B) \equiv A$ (сіңірудің екінші заңы);
19. $\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (*де Морганның* бірінші заңы);

20. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$ (*де Морганның* екінші заңы);
21. $A \equiv (A \& B) \vee (A \& \neg B)$ (тармақтанудың бірінші заңы);
22. $A \equiv (A \vee B) \& (A \vee \neg B)$ (тармақтанудың екінші заңы);
23. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ ();
24. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \& \neg B)$ (контропозиция заңы);
25. $A \sim B \equiv (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A) \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$;
26. $A \oplus B \equiv (A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$;
27. $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$;
28. $A \& B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$.

Берілген формулаға эквивалентті басқа кез келген формулаға (белгілі бір ереже бойынша) көшу қандай да бір формуланың *эквивалентті (немесе пара-пар) түрлендіруі* деп аталады. Мысалы, айнымалының орнына формуланың *ауыстыру ережесі* жиі қолданылады.

Алмастыру ережесі белгілі эквивалентті қатынастарды пайдаланып, берілген формулаға эквивалентті формулаларды алу (дербес жағдайда формулаларды ықшамдау). *Ішкі формула* – өзі формула болып табылатын формуланың бөлігі.

3.6. Тавтология. Орындалатын формулалар

Кез келген айнымалылар жиыны үшін мәні 1-ге тең болатын формуланы *тепе-тең ақиқат формула* (немесе *тавтология*) деп айтамыз. Кез келген айнымалылар жиыны үшін мәні 0-ге тең болатын формуланы *тепе-тең жалған формула* (немесе *қарама-қайшылық*) деп айтамыз.

Формуланың тавтология болып табылатынын көрсету үшін оның ақиқат кестесін құру керек. Бұл кестеде формуланың астындағы бағанда тек қана бірліктер (1 саны) тұруы керек. Егер формула 1 мәнін қабылдайтындай айнымалылар мәнінің жиыны бар болса, онда мұндай формула *орындалатын формула* деп аталады. Егер формула 0 мәнін қабылдайтындай айнымалылар мәнінің жиыны бар болса, онда мұндай формула *жоққа (теріске) шығаратын формула* деп аталады. Маңызды тавтологияларға тоқталып кетейік (A, B, C – еркін алынған формулалар):

1. $A \vee (\neg A)$ (үшіншісін алып тастау заңы);
2. $\neg(A \& \neg A)$ (қайшылықты терістеу заңы);
3. $\neg\neg A \sim A$ (қосалқы терістеу заңы);
4. $A \to A$ (тепе-теңділік заңы);
5. $(A \to B) \sim (\neg B \to \neg A)$ (контропозиция заңы);
6. $\big((A \to B) \& (B \to C)\big) \to (A \to C)$ (импликацияның транзитивтілік заңы);
7. $(A \sim B) \sim (\neg A \sim \neg B)$ (қарама-қарсылық заңы);
8. $\big((A \sim B) \& (B \sim C)\big) \to (A \sim C)$ (эквиваленцияның транзитивтілік заңы);
9. $(A \to B) \sim (\neg A \vee B)$;
10. $(A \sim B) \sim \big((A \to B) \& (B \to A)\big)$;
11. $(A \oplus B) \sim \big((A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)\big)$;
12. $(A \vee B) \sim (\neg A \to B)$;
13. $(A \to B) \vee (B \to A)$;
14. $\big(A \& (A \vee B)\big) \sim A$ (бірінші сіңіру заңы);
15 $\big(A \vee (A \& B)\big) \sim A$ (екінші сіңіру заңы);
16. $\neg(A \& B) \sim (\neg A \vee \neg B)$ (де Морганның бірінші заңы);
17. $\neg(A \vee B) \sim (\neg A \& \neg B)$ (де Морганның бірінші заңы);
18. $(\neg A \to A) \to A$;
19. $(A \& B) \to A$; $(A \& B) \to B$;
20. $A \to \big(B \to (A \& B)\big)$;
21. $A \to (B \to A)$;
22. $A \to (A \vee B)$; $B \to (A \vee B)$;
23. $\big((A \to B) \to A\big) \to A$ (Пирс заңы);
24. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

3.7. Конъюнктивтік және дизъюнктивтік қалыпты тұлғалар

Логикалық формуланың қалыпты тұлғаларында элементар емес формулалардың импликация, эквиваленттік және терістеу белгілері болмайды. Қалыпты тұлғаның екі түрі кездеседі:

конъюнктивтік қалыпты тұлға (ҚҚТ) – логикалық өрнекті қосындылардың көбейтіндісі түрінде беру;

дизъюнктивтік қалыпты тұлға (ДҚТ) – логикалық өрнекті көбейтінділердің қосындысы түрінде беру.

Кемелденген конъюнктивтік (дизъюнктивтік) қалыпты тұлға (КҚҚТ / КДҚТ) – дизъюнкциялар (конъюнкциялар) конъюнкциясы (дизъюнкциясы) және формулаға кіретін әрбір дизъюнкцияда (конъюнкцияда) (әрбір жақшада) барлық айнымалылардың өздері немесе олардың терістеуі енеді, бірдей дизъюнкциялар (конъюнкциялар) болмайды, әрбір дизъюнкцияда (конъюнкцияда) бірдей қосылғыштар жоқ.

Ақиқат кесте бойынша ҚДҚТ және КҚКФ құру ережелері:

ҚДҚТ (КҚКФ) ақиқат кестесінің негізінде келесі ереже бойынша құрылады: 1-ге (0-ге) тең функцияның мәніндегі айнымалылардың әрбір жиыны үшін 0 (1) мәнін қабылдайтын айнымалы терістеуімен алынатын көбейтінді (қосынды) жазылады.

Минтерм (*макстерм*) – шығыс айнымалысының (функция) мәні логикалық 1-ге (0-ге) тең болатын ақиқат кестесінің бір жолына сәйкес келетін барлық кіріс айнымалыларының толық көбейтіндісі (қосындысы).

Егер кестенің берілген жолындағы айнымалының мәні 0-ге тең болса, онда ол минтермге инверсиямен, егер оның мәні 1-ге тең болса инверсиясыз енеді.

Минтермдердің (макстермдердің) канондық қосындысы (көбейтіндісі) – бұл ақиқат кестесіне сәйкес келетін максималды логикалық өрнекті беретін барлық минтермдердің (макстермдердің) логикалық қосындысы.

Минимизациялау ең аз қосылғыш санымен ҚДҚТ-сынан ДҚТ-сына көшуді білдіреді. Бұл жерде әрбір қосылғыштағы көбейткіштер саны ең аз, яғни ҚДҚТ-сындағы айнымалылар мен операциялар санын максималды түрде аз болу керек.

Минимизациялау негізіне буль алгебрасының ережелері мен заңдары жатады.

Көбінесе жапсыру ережесі қолданылады:

$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) = b$; $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = b$ немесе $(\bar{a}b + ab) = b$.

Осы ережені ҚДҚТ-сындағы функцияға қолдану үшін тек қана бір аргументпен ерекшеленетін қосылғышты тауып жапсырылады. Барлық жапсыру операциялары орындалғаннан кейін түсіп қалу (жұту) ережесінің қолдану мүмкіндігі тексеріледі.

Сонымен қатар логикалық функцияларды минимизациялаудың басқа да әр түрлі әдістерін пайдалануға болады: Карно (Вейч) картасы; Квайн; Квайн- Мак-Класки; Петрик әдістері.

Солардың ішіндегі ең қарапайымы және көрнектісі – Карно картасы. Карно картасы – ақиқат кестесінің графикалық берілуі. Карно картасының бағандары мен жолдары берілген функцияның тіке және инверсиялық айнымалыларымен немесе олардың сәйкес мүмкін болатын мәндерімен белгіленеді.

Минимизациялау мақсатында Карно картасы «1» және «0» белгілерімен толтырылады. «1» белгісі $f = 1$ мәніне сәйкес келетін комбинация орналасқан торларға сәйкес келеді. Басқа торларға «0» белгілері жазылады. Карта толтырылып болғаннан кейін «1» белгілерімен толтырылған торлар контурларға біріктіріледі. Торлар саны мүмкін болатын комбинациялар санына, яғни $N = 2^n$ санына тең. Бұл – жапсыру үшін функция қосылғыштарын біріктірумен пара-пар. Әрбір тор көршілес контурларға бірнеше рет енуі мүмкін. Картаның қарама-қарсы шеттерінде орналасқан шеткі торлары да біріктірілуі мүмкін.

Екі торды біріктіру нәтижесінде бір аргумент, төрт торды біріктіру – екі аргументті және т.б. аргументтерді алып тастауға әкеледі. Функцияның минимизацияланған өрнегінде тек қана контурдың барлық торларында мәндері бірдей аргументтер қалады.

Карно картасы мен Веч картасының айырмашылығы карталардың жолдары мен бағандарын белгілеуде. Карно картасында жолдар мен бағандар Грей кодының көмегімен белгіленеді.

Бірнеше логикалық элементтерді біріктіру нәтижесінде алынған логикалық сұлба үшін кестенің сол жағында кіріс сигналдарының барлық мүмкін болатын комбинациялары, ал оң жағында – логикалық сұлбаның шығысындағы сәйкес мәндер енгізіледі.

Карно картасының тағайындалуы – тіке және инверсия мәндеріндегі айнымалылардың логикалық қосындысын табу.

Минимизациялаудың қойылған мақсатына жету үшін карта осьтерін белгілеу ережесін орындау қажет:

1. вертикаль осі горизонталь осінен тәуелсіз белгіленеді;
2. белгілеуді айнымалылардың кез келген тіркесінен бастауға болады;
3. айнымалылардың барлық тіркестері көрсетілуі керек;
4. картаның көршілес торлары үшін айнымалылар тек қана бір белгісімен ерекшеленуі керек, және жолдың (бағанның) шеткі торлары көршілес болып табылады.

Екі айнымалы функция үшін Карно картасы 2x2 тордан тұратын квадрат. Бұл торларда ақиқат кестесінің соңғы бағанындағы функциясының $2^2 = 4$ мәні орналастырылады (1-сурет).

x_1	x_2	f
0	0	$f(0,\ 0)$
0	1	$f(0,\ 1)$
1	0	$f(1,\ 0)$
1	1	$f(1,\ 1)$

а)

x_2 / x_1	1	0
0	$f(0,\ 1)$	$f(0,\ 0)$
1	$f(1,\ 1)$	$f(1,\ 0)$

ә)

1-сурет. 2 айнымалы функция үшін
а) ақиқат кестесі және
ә) Карно картасы

Үш айнымалы функция үшін Карно картасы – бұл 2x4 немесе 4x2 тордан тұратын тіктөртбұрыш. Бұл торларда ақиқат кестесінің соңғы бағанындағы функциясының $2^3 = 8$ мәні орналастырылады (2-сурет).

x_1	x_2	x_3	f
0	0	*0*	$f(0,0,0)$
0	0	*1*	$f(0,0,1)$
0	1	*0*	$f(0,1,0)$
0	1	1	$f(0,1,1)$
1	0	0	$f(1,0,0)$
1	0	1	$f(1,0,1)$
1	1	0	$f(1,1,0)$
1	1	1	$f(1,1,1)$

а)

x_3 / x_1x_2	1	0
01	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
11	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$
10	$f(1,0,1)$	$f(1,0,0)$
00	$f(0,0,1)$	$f(0,0,0)$

ә)

x_3 / x_1x_2	0	1
11	$f(1,1,0)$	$f(1,1,1)$
01	$f(0,1,0)$	$f(0,1,1)$
00	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$
10	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$

б)

x_2x_3 / x_1	00	01	11	10
0	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
1	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$

в)

x_2x_3 / x_1	10	00	01	11
0	$f(0,1,0)$	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$
1	$f(1,1,0)$	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$

г)

2-сурет. 3 айнымалы функция үшін *а*) ақиқат кестесі және Карно картасын толтыру мысалдары *(ә*), *б*), *в), г))*

Карта осьтерін белгілеу ережесінің 4-ережесіне ерекше көңіл бөлу және 00 мен 11, не 01 мен 10 тіркестері көршілес болмауын қадағалау қажет. Бұл жерде екі айнымалының мәні қатарынан өзгереді.

Төрт айнымалы функция үшін Карно картасы – бұл 4x4 тордан тұратын квадрат. Бұл торларда ақиқат кестесінің соңғы бағанындағы функциясының $2^4 = 16$ мәні орналастырылады (3-сурет).

Бұл жерде де карта осьтерін белгілеу ережесінің 4-ережесіне ерекше көңіл бөлу және 00 мен 11, не 01 мен 10 тіркестері көршілес болмауын қадағалау қажет. Екі айнымалының мәні қатарынан өзгеретінін ескеру керек.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	*0*	*0*	$f(0,0,0,0)$
0	0	*0*	*1*	$f(0,0,0,1)$
0	0	*1*	*0*	$f(0,0,1,0)$
0	0	1	1	$f(0,0,1,1)$
0	1	0	0	$f(0,1,0,0)$
0	1	0	1	$f(0,1,0,1)$
0	1	1	0	$f(0,1,1,0)$
0	1	1	1	$f(0,1,1,1)$
1	0	*0*	*0*	$f(1,0,0,0)$
1	0	*0*	*1*	$f(1,0,0,1)$
1	0	*1*	*0*	$f(1,0,1,0)$
1	0	1	1	$f(1,0,1,1)$
1	1	0	0	$f(1,1,0,0)$
1	1	0	1	$f(1,1,0,1)$
1	1	1	0	$f(1,1,1,0)$
1	1	1	1	$f(1,1,1,1)$

а)

x_3x_4 x_1x_2	00	01	11	10
00	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$
10	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$
11	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$
01	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$

ә)

x_3x_4 / x_1x_2	11	10	00	01
00	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$
01	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$
11	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$
10	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$

б)

x_3x_4 / x_1x_2	00	01	11	10
00	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$
01	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$
11	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$
10	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$

в)

3-сурет. 4 айнымалы функция үшін *а*) ақиқат кестесі және Карно картасын толтыру мысалдары *(ә)*, *б*), *в))*

Нақты жағдайларда карта торларындағы функция мәндерінің орнына ақиқат кестесінің сәйкес жолдарынан нақты мәндер (логикалық 0 және 1) қойылады. Содан кейін тек қана бірліктермен толтырылған торлар қарастырылады. Осы бірліктер келесі *контурларды құрастыру ережелері* бойынша контурларға алынуы керек:

1. контурлар тікбұрышты болуы және 2^n-ге тең бірлік санын қамтуы керек, мұндағы n – бүтін сан. Сонымен, контурда не бір, не екі, не төрт, не сегіз бірліктер және т.с.с болуы мүмкін;
2. контурда бірліктер саны максималды болуы керек және контурлар өзара қиылысуы мүмкін. Шеткі жолдардың көршілес болатынын және шеткі бағандардың көршілес болатынын ескеру керек, сондықтан контурлар «айырылған» болуы мүмкін;
3. контурлар саны минималды болуы керек және барлық бірліктер контурға алынуы керек. Жеке тұрған бірліктерді ұмытуға болмайды. Әрбір осындай бірлік – бұл барлық

айнымалылардың толық логикалық көбейтіндісі сәйкес келетін контур.

Контурларды жүргізгеннен кейін минималды өрнекті логикалық көбейтінділердің логикалық қосындысы ретінде жазу керек. Әрбір көбейтіндіге Карно картасының бір контуры сәйкес келеді. Берілген контурда өзгерілмейтін айнымалылар ғана көбейтіндіге енеді. Егер берілген контурда айнымалының мәні 0-ге тең болса, онда ол көбейтіндіге инверсиямен енеді, ал мәні 1-ге тең болса инверсиясыз енеді.

3.8. Айтылымдар алгебрасындағы гипотеза мен салдарлар

$$(B \to A) \equiv 1$$

тепе-теңдігі орындалатындай B формуласы A *формуласының гипотезасы* деп түсініледі.

Егер A формуласының гипотезасы айнымалылардың конъюнкциясы немесе терістеуі болса, және оның кез келген көбейткішін тастап кеткеннен кейін ол A формуласының гипотезасы болмаса, онда A формуласының гипотезасы *қарапайым* деп аталады.

$$(A \to B) \equiv 1$$

тепе-теңдігі орындалатындай B формуласы A *формуласының салдары* деп түсініледі.

Егер A формуласының гипотезасы айнымалылардың дизъюнкциясы немесе терістеуі болса, және оның кез келген қосылғышын тастап кеткеннен кейін ол A формуласының салдары болмаса, онда A формуласының салдары *қарапайым* деп аталады.

1. Егер A – B формуласының гипотезасы болса, онда $A\&C$ өрнегі де B формуласының гипотезасы.
2. Егер A – B формуласының салдары болса, онда $A \vee C$ өрнегі де B формуласының салдары.

3. Егер A және $B - C$ формуласының гипотезалары болса, онда $A \vee B$ өрнегі де C формуласының гипотезасы.
4. Егер A және $B - C$ формуласының салдарлары болса, онда $A \& B$ өрнегі де C формуласының салдары.

3.9. Предикаттар логикасы

Математикалық логика – математикалық әдістердің көмегімен дамитын логика екені бәрімізге белгілі. Сонымен қатар бұл терминнің басқа да мағынасы бар: математикалық логика – бұл математикада пайдаланылатын математика. Математикалық логиканың орталық идеясы – математикалық айтылымдарды символдар тізбегі түрінде жазып, оларға формалды ережелер бойынша операцияларды орындау. Бұл жағдайда пайымдаудың дұрыстығын олардың мағынасына терең бойламай, механикалық түрде тексеріледі.

Әрбір айтылым және кез-келген логикалық пайымдау айтылымдар логикасы тілінде сипатталына бермейді. Кейде айтылымдар объектілердің қасиеттері немесе объектілер арасындағы қатынастар туралы болады. Сонымен қатар, кез-келген немесе қандай да бір объектілер белгілі бір қасиеттері бар немесе қандай-да бір байланыста болатындығын дәлелдеу мүмкіндігінің қажеттілігі болады.

Сондықтан айтылымдар алгебрасының шеңберінде қарапайым деп есептелетін айтылымдардың құрылымы мен мазмұнын зерттеуге болатындай айтылымдардың логикасын кеңейту және логикалық жүйе құру керектігі алынады.

Предикаттар логикасы осындай логикалық жүйе болып табылады, ал айтылымдар алгебрасы – оның құрамды бөлігі болып табылады.

3.9.1. Предикаттар

Предикат – бұл белгісізді (немесе бірнеше белгісіздерді) қамтитын айтылымдар.

Бірорынды предикат деп мәндері аргумент мәнін беретін объектілер туралы айтылымдар болып табылатын бір айнымалы функция. Демек, бірорынды $P(x)$ предикаты – бұл қандай да бір M жиынында анықталған x айнымалысының және $\{0,1\}$ жиынынан мәндерді (логикалық) қабылдайтын еркін алынған функция. $P(x)$ предикаты анықталған M жиыны предикаттың *пәндік обылысы* немесе *анықталу обылысы*, ал x айнымалысының өзі – *пәндік айнымалы* деп аталады. Сонымен, бірорынды $P(x)$ предикаты – бұл x объектісі туралы тұжырымдама, мұндағы x айнымалы ретінде қарастырылады. x айнымалысының мәнін бекіткен кезде $P(x)$ тұжырымдамасы туралы оның не ақиқат, не жалған екенін айтуға болады. Яғни, егер $P(x)$ предикатындағы x айнымалысының орынына нақты зерттелетін a объектісін қойсақ, онда айтылымдар алгебрасына тиісті айтылымды аламыз.

M жиынындағы барлық x жиынтығын M жиынында анықталған $P(x)$ предикатының *ақиқат обылысы* деп айтамыз. Бұл жерде осы предикат ақиқат айтылымға айналады:

$$I_P = \{x \in M \,|P(x) \equiv 1\}$$

Басқаша айтқанда, осы предикат 1 мәнін қабылдайтын, оның пәндік обылысының ішкі жиыны.

Егер $I_P = M$ болса, онда M жиынында анықталған $P(x)$ предикаты *тепе-тең ақиқат* деп, және $I_P = \emptyset$ болса *тепе-тең жалған* деп аталады.

n аргументтен тұратын (n –орынды предикат) предикатты беру үшін, алдымен – пәндік $x_1, \dots, x_n$ айнымалыларының өзгеруі $M_1, \dots, M_n$обылысын көрсету керек. Бұл жерде *n –орынды предикат* деп n айнымалыдан тұратын $M = M_1 \times \dots \times M_n$ жиынында анықталған және $\{0,1\}$ жиынынан мәндерді (логикалық) қабылдайтын еркін алынған $P(x_1, \dots, x_n)$ функцияны айтамыз.

Кез келген айтылымды 0-орынды предикат деп қарастыруға болады.

Айтылымдар логикасынан предикаттар логикасына дейін кеңейту формулаға предикаттар болып табылатын тұжырымдамаларды енгізу есебінен жүргізіледі. Предикаттар – логикалық операциялар (конъюнкция, дизъюнкция, терістеу, импликация және т.б.) енгізілген айтылымдар жиынындағы мәндермен бейнелетіндіктен, онда бұл операциялар (логикалық байламдар) предикаттар үшін де анықталады. Бұл жерде күрделі предикаттардың ақиқаттылық мәндері айтылымдарға арналған ережелер бойынша предикаттарды байланыстыратын мәндерден тәуелділікте болады.

3.10. Кванторлар

Квантор — қандай да предикаттың ақиқаттық обылысын шектейтін логикалық операциялар үшін жалпы атау. Математикалық логикада $\forall$ жалпылық кванторы мен $\exists$ бар болу кванторы жиі қолданылады.

$\exists$ символы «табылады», «бар болады», «кем дегенде біреу», «минимум біреуі», «қандай да бір», «қандай болса да» және т.т. сөздерді алмастырады. Осы сөз тіркестерінің барлығының логикалық мағынасы бірдей.

$\forall$ символы «барлығы үшін», «кез келгені үшін», «қандай болса да» және т.т. сөздерді алмастырады. Осы сөз тіркестерінің барлығының логикалық мағынасы бірдей.

Кванторларды логикалық байламдардың жалпыламасы ретінде қарастыруға болады. Ақырсыз жиындарында анықталған предикаттар жағдайында жалпылық кванторы конъюнкцияны, ал бар болу кванторы – дизъюнкцияны жалпылайды. Кванторларды көпорынды предикаттарға да, және жалпы логикалық өрнектерге де тіркеп жазуға болады. $\forall x$ немесе $\exists x$ кванторларына тіркеліп жазылған өрнек *квантор амалының обылысы* деп аталады; осы өрнекке енетін барлық айнымалылар байланысқан болып табылады. Кванторлармен байланыспаған айнымалылар *бос айнымалылар* деп аталады.

Мысалы, екі айнымалы $P(x,y)$ предикатында бір айнымалыға немесе екі айнымалыға кванторлық операцияларды қолдануға болады. Келесі айтылымдарды аламыз:

$$\forall x\, P(x,y);\ \forall y\, P(x,y);\ \exists x\, P(x,y);\ \exists y\, P(x,y);$$

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y);\ \forall x\, \forall y\, P(x,y);\ \exists x\ \forall y\, P(x,y);\ \exists x\ \exists y\, P(x,y);$$

$$\forall y\, \forall x\, P(x,y);\ \forall y\, \exists x\, P(x,y);\ \exists y\ \forall x\, P(x,y);\ \exists y\ \exists x\, P(x,y).$$

Жалпы жағдайда кванторлардың орналасу реті айтылымдардың мағынасы мен оның логикалық мәнін өзгертеді.

Жаттығулар

1-жаттығу. «Бүгін дүйсенбі немесе сейсенбі» айтылымын логикалық формулалардың көмегімен жазу керек.

Шығарылуы: А – «бүгін дүйсенбі», В – «бүгін сейсенбі».

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Жауабы: $A \oplus B$

2-жаттығу. «Қар немесе жаңбыр жауып жатыр» айтылымын логикалық формулалардың көмегімен жазу керек.

Шығарылуы: А – «қар жауып жатыр», В – «жаңбыр жауып жатыр».

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Жауабы: $A \vee B$

3-жаттығу. «Егер жаңбыр жауса, онда үйдің шатыры суланады» айтылымын логикалық формулалардың көмегімен жазу керек.

Шығарылуы: А – «жаңбыр жауып жатыр», В – «үйдің шатыры суланады». Сонда, «егер жаңбыр жауса, онда үйдің шатыры суланады» айтылымы А→В формуласымен беріледі.

A	*B*	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Жауабы: А→В

4-жаттығу. «Айт не, айтпа не» айтылымын логикалық формулалардың көмегімен жазу керек.

Шығарылуы: А – «айт», В – «айтпа». Сонда, «айт не, айтпа не» айтылымы А~В формуласымен беріледі.

A	*B*	A~B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Жауабы: А~В

5-жаттығу. «Пәтер тап-таза және жылы» айтылымын логикалық формулалардың көмегімен жазу керек.

Шығарылуы: А – «пәтер тап-таза», В – «пәтер жылы». Сонда, «пәтер тап-таза және жылы» айтылымы А~В формуласымен беріледі.

A	*B*	*A&B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Жауабы: А&В

6-жаттығу. «Егер кешке дейін компьютерде жұмыс істесең және көп кофе ішсең, онда ертеңіне таңертең нашар көңіл-күймен және басың ауырып тұрады» айтылымын логикалық формулалардың көмегімен жазу керек.

Шығарылуы:

А – «кешке дейін компьютерде жұмыс істейсің»,

В – «көп кофе ішесің»,

С – «таңертең нашар көңіл-күймен тұрасың»,

Е – «таңертең басың ауырып тұрасың». Сонда, «егер кешке дейін компьютерде жұмыс істесең және көп кофе ішсең, онда ертеңіне таңертең нашар көңіл-күймен және басың ауырып тұрады» күрделі айтылымы $(A\&B) \rightarrow (C \vee E)$ формуласымен жазылады.

Жауабы: $(A\&B) \rightarrow (C \vee E)$

7-жаттығу. А – «9 саны 3-ке бөлінеді» және В – «10 саны 3-ке бөлінеді» айтылымдары берілсін. Келесі айтылымдердың ақиқаттылық мәндерін анықтау керек:

1. $B \rightarrow A$;	$0 \rightarrow 1$	ақиқат
2. $\neg A \rightarrow B$	$0 \rightarrow 0$	ақиқат
3. $\neg B \rightarrow \neg A$	$1 \rightarrow 0$	жалған.

Шығарылуы:А – ақиқат, $\neg A$ – жалған, В – ақиқат, $\neg B$ – жалған.

Жауабы:

1. $B \rightarrow A$;	ақиқат
2. $\neg A \rightarrow B$	ақиқат
3. $\neg B \rightarrow \neg A$	жалған.

8-жаттығу. Үш студенттің қайсысы логиканы оқыды деген сұраққа келесі жауап алынды: егер біріншісі оқыса, онда үшіншісі де оқыды, бірақ, егер екіншісі оқыса, үшіншісі де оқыды деген айтылым жалған болады. Кім информатиканы оқыды?

Шығарылуы:

А – «информатиканы біріншісі оқыды»

В – «информатиканы екіншісі оқыды»

C – «информатиканы үшіншісі оқыды»

1. $A \rightarrow C \equiv 1$;

2. $\neg(B \rightarrow C) \equiv 1$.

Осы екі айтылымның конъюнкциясын құрамыз, сонда:

$$1 \equiv (A \rightarrow C)\&\neg(B \rightarrow C) \equiv (\neg A \vee C)\&\neg(B \rightarrow C) \equiv$$

$$\equiv (\neg A \vee C)\&\neg(\neg B \vee C) \equiv (\neg A \vee C)\&(\neg\neg B\&\neg C) \equiv$$

$$\equiv (\neg A \vee C)\&(B\&\neg C) \equiv (\neg A\&B\&\neg C) \vee (C\&B\&\neg C) \equiv$$
$$\equiv (\neg A\&B\&\neg C) \vee 0 \equiv \neg A\&B\&\neg C$$

Сонымен, $\neg A\&B\&\neg C$ *≡1*. Бұл жерде терістеу тек қана B айтылымында жоқ болғандықтан, B айтылымы ақиқат, яғни екінші студент информатиканы оқыды.

Жауабы: екінші студент информатиканы оқыды.

9-жаттығу. Төрт студенттің қайсысы емтихан тапсырды деген сұраққа келесі жауап алынды:

1. егер біріншісі тапсырса, онда екіншісі де тапсырды;

2. егер екіншісі тапсырса, үшіншісі тапсырды немесе біріншісі тапсырған жоқ;

3. егер төртіншісі тапсырса, онда біріншісі тапсырды, ал үшіншісі тапсырған жоқ тапсырды.

Кім емтихан тапсырды?

Шығарылуы:

A – «бірінші студент емтихан тапсырды»

B – «екінші студент емтихан тапсырды»

C – «үшінші студент емтихан тапсырды»

D – «төртінші студент емтихан тапсырды»

1. $A \rightarrow B \equiv 1$;

2. $B \rightarrow (C \vee \bar{A}) \equiv 1$;

3. $\overline{D} \rightarrow (A \vee \bar{C}) \equiv 1$

4. $D \rightarrow A \equiv 1$

Осы айтылымдардың конъюнкциясын құрамыз, сонда:

$$(A \to B)\&\big(B \to (C \vee \bar{A})\big)\&\big(\bar{D} \to (A \vee \bar{C})\big)\&(D \to A) \equiv 1$$

Логикалық операциялардың қасиеттерін пайдаланып, жақшаларды ашып формуланы ықшамдаймыз:

$$(\bar{A} \vee B)\&\big(\bar{B} \vee (C \vee \bar{A})\big)\&\big(D \vee (A\&\bar{C})\big)\&(\bar{D} \vee A) \equiv$$

$$\equiv (\bar{A}\&\bar{B} \vee B\&\bar{B} \vee \bar{A}\&C \vee B\&C \vee \bar{A}\&\bar{A} \vee B\&\bar{A})\&$$

$$\&(D\&\bar{D} \vee A\&\bar{C}\&\bar{D} \vee D\&A \vee A\&\bar{C}\&A) \equiv$$

$$\equiv (\bar{A}\&c \vee B\&C \vee \bar{A})\&(A\&\bar{C}\&\bar{D} \vee D\&A \vee A\&\bar{C}) \equiv$$

$$\equiv (B\&C \vee \bar{A})\&(D\&A \vee A\&\bar{C}) \equiv$$

$$\equiv B\&C\&D\&A \vee \bar{A}\&D\&A \vee B\&C\&A\&\bar{C} \vee \bar{A}\&A\&\bar{C} \equiv$$

$$\equiv B\&C\&D\&A \equiv 1.$$

Жауабы: A, B, C, E айтылымдардың конъюнкциясы 1-ге тең болғандықтан емтиханды төрт студент те тапсырғандықтарын білдіреді.

10-жаттығу.

С логикалық өрнегінің ақиқат кестесін құру керек:

$$C = (\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg B\&A)\ XOR\ A$$

Шығарылуы:

1. жол санын анықтаймыз:

Кірісте екі қарапайым ақиқат: A және B, сондықтан $n = 2$ және жол саны $= 2^2 + 1 = 5$.

2. баған санын анықтаймыз:

Өрнек екі қарапайым өрнектерден (A және B) тұрады;

Логикалық операциялар санын анықтаймыз:

Инверсия операциялары ($\neg$:– $\neg A$, $\neg B$) – 2;

Конъюнкция операциялары (& немесе $\wedge$: $X1 = \neg B\&A$) – 1;

Дизъюнкция операциялары (∨: $X2 = \neg A \vee \neg B$) – 1;
Эквиваленттілік операциясы (↔: $X3 = X1 \leftrightarrow X2$) – 1;
Шығару немесе операциясы (XOR: $X4 = X3\ XOR\ A$) 1.

Сонымен, логикалық операциялар саны – 6, яғни ақиқат кестесінің бағандар саны = айнымалылар саны + операциялар саны$= 2 + 6 = 8$.

Алдымен инверсия операциясы, содан кейін конъюнкция, содан кейін дизъюнкция, содан кейін эквиваленттілік, соңғы кезекте шығару немесе операциясы орындалады.

3. логикалық операциялардың ақиқат кестесін ескере отырып бағандарды толтырамыз:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B\&A$	$\neg A \vee \neg B$	$(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg B\&A)$	C
1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0

Жауабы:

Логикалық өрнектің ақиқат кестесі:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B\&A$	$\neg A \vee \neg B$	$(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg B\&A)$	C
1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0

11-жаттығу.

$F(A, B)$ функциясының логикалық сұлбасын тұрғызу керек:

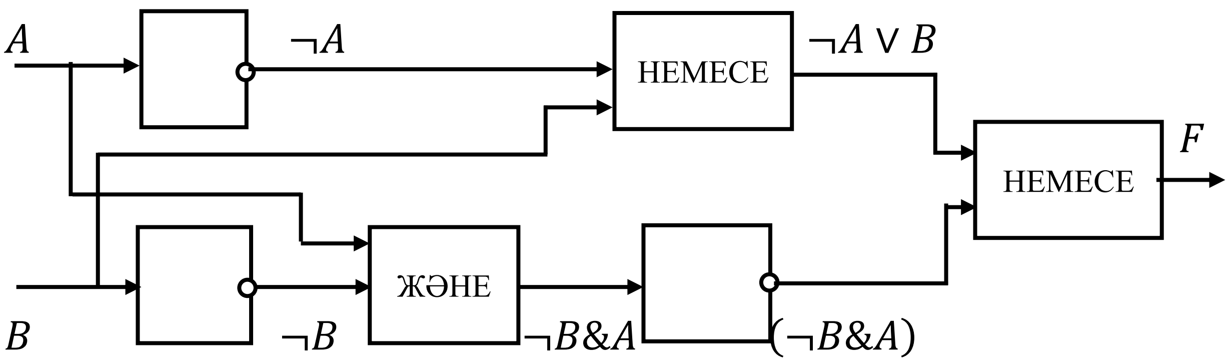
$$\neg A \vee B \vee \neg(\neg B\&A)$$

Шығарылуы:

1. Логикалық айнымалылар саны – 2 (A және B);
2. Операциялар саны – 6 ($\neg A$ – инверсия, $\neg B$ – инверсия, $\neg B\&A$ – конъюнкция, $\neg(\neg B \vee A)$ – инверсия, $\neg A \vee B$ – дизъюнкция, $\neg A \vee B \vee \neg(\neg B \vee A)$– дизъюнкция).

Алдымен инверсия операциясы, содан кейін конъюнкция, соңғы кезекте дизъюнкция операциясы орындалады.

3. Сұлба 3 инвертордан, 1 конъюнктордан, 2 дизъюнктордан тұрады.
4. Сұлбаны тұрғызуды ең соңғы орындалатын логикалық операциядан бастау керек. Берілген жағдайда мұндай операция – логикалық қосу операциясы, демек, шығыста дизъюнктор болады.
5.



12-жаттығу.

Берілген логикалық өрнекті ықшамдау керек:

$$C = \neg(A \vee B)\&(A\&\neg B) \vee A.$$

Шығарылуы:

Де Морган заңы бойынша:

$$\neg(A \vee B)\&(A\&\neg B) \vee A = \neg A\&\neg B\&(A\&\neg B) \vee A.$$

Ассоциативтік (терімділік) заңы бойынша

$$\neg A\&\neg B\&(A\&\neg B) \vee A = \neg A\&\neg B\&A\&\neg B \vee A.$$

Алынған өрнекті топтастырамыз:

$$\neg A\&\neg B\&A\&\neg B \vee A = \neg A\&A\&\neg B\&\neg B \vee A$$

Айнымалымен және оның терістеуімен операциялар (қосымша) қасиеті бойынша

$$\neg A\&A = 0.$$

Рефлексивтік (идемпотенттілік) заңы бойынша

$$\neg B\&\neg B = \neg B$$

Сонда,

$$\neg A\&A\&\neg B\&\neg B \vee A = 0\&\neg B \vee A$$

Нөлге және бірге көбейту қасиеті бойынша:

$$0\&\neg B = 0.$$

Нөлмен және бірмен қосу қасиеті бойынша:

$$0 \vee A = A.$$

Нәтижесінде $\neg(A \vee B)\&(A\&\neg B) \vee A = A$.

Жауабы:

$$\neg(A \vee B)\&(A\&\neg B) \vee A = A$$

13-жаттығу.

Екі өрнек эквивалентті ме, жоқ па, соны анықтаңыздар.

Бірінші өрнек:

$$\neg(A \vee B)\&(A\&\neg B) \vee A \vee B$$

Екінші өрнек:

$$A \vee B$$

Шығарылуы:

Де Морган заңы бойынша:

$$\neg(A \vee B)\&(A\&\neg B) \vee A \vee B = \neg A\&\neg B\&(A\&\neg B) \vee A \vee B$$

Ассоциативтік (терімділік) заңы бойынша

$$\neg A\&\neg B\&(A\&\neg B) \vee A \vee B = \neg A\&\neg B\&A\&\neg B \vee A \vee B.$$

Алынған өрнекті топтастырамыз да, айнымалымен және оның терістеуімен операциялар (қосымша) қасиетін, рефлексивтік (идемпотенттілік) заңын пайдаланамыз:

$$\neg A\&\neg B\&A\&\neg B \vee A \vee B = \neg A\&A\&\neg B\&\neg B \vee A \vee B$$
$$= 0\&\neg B \vee A \vee B$$

Нөлге және бірге көбейту, нөлмен және бірмен қосу қасиеттері бойынша

$$0\&\neg B \vee A \vee B = 0 \vee A \vee B = A \vee B$$

бірінші өрнекті түрлендіру нәтижесінде екінші өрнекті алдық.

Яғни, екі өрнек эквивалентті.

Жауабы: Екі өрнек эквивалентті.

14-жаттығу.

Аргументтердің берілген сәйкес мәндеріндегі f логикалық функциясының мәнін есептеңіздер (функцияның жалған не ақиқаттығын анықтаңыздар).

$$f(x, y) = \neg(x \vee y) \& \neg x \vee y, \qquad x = 0, y = 1.$$

Шығарылуы:

Операциялардың орындалу реттері:

1. $x \vee y$;
2. $\neg(x \vee y)$;
3. $\neg x$;
4. $\neg(x \vee y) \& \neg x$;
5. $\neg(x \vee y) \& \neg x \vee y$;

Енді көрсетілген ретпен біртіндеп әрбір өрнектің мәнін есептейміз:

1. $x \vee y = 0 \vee 1 = 1$;
2. $\neg(x \vee y) = \neg 1 = 0$;
3. $\neg x = \neg 0 = 1$;
4. $\neg(x \vee y) \& \neg x = 0 \& 1 = 0$;
5. $\neg(x \vee y) \& \neg x \vee y = 0 \vee 1 = 1$.

Сонымен берілген аргументтердің мәндерінде функция 1 мәнін қабылдайды.

Жауабы.

$$f = 1,$$

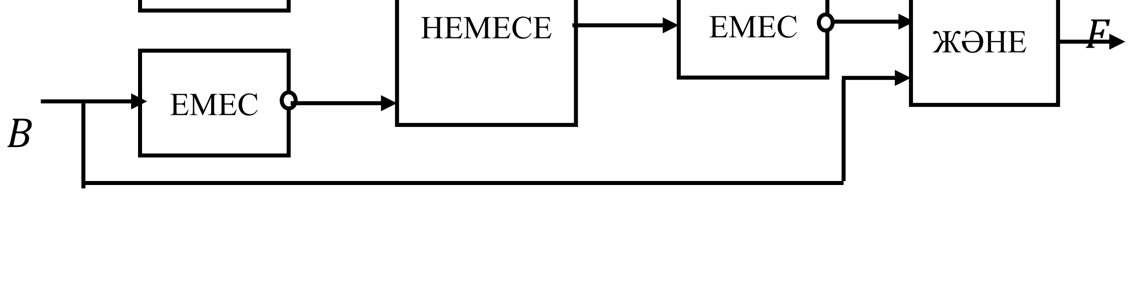
немесе өрнек ақиқат мәнді қабылдайды.

15-жаттығу.

Берілген логикалық сұлба бойынша

а) логикалық функцияның формуласын жазыңыздар;

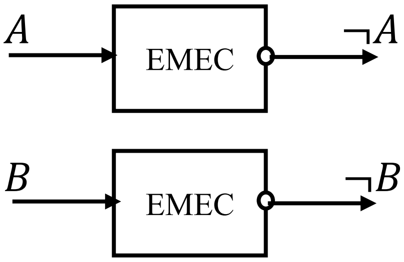
ә) ақиқат кестесін тұрғызыңыздар:



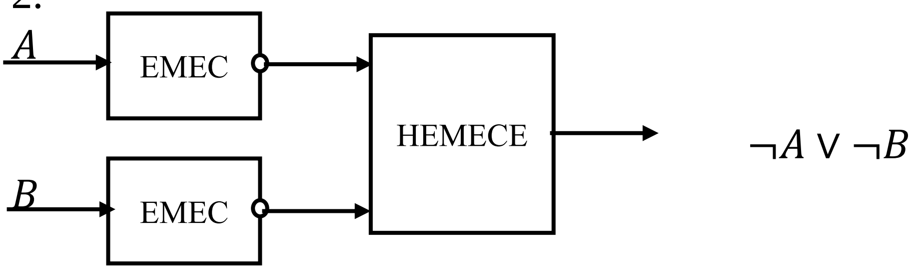
Шығарылуы.

а) Біртіндеп, сұлбаларға сипаттама берейік:

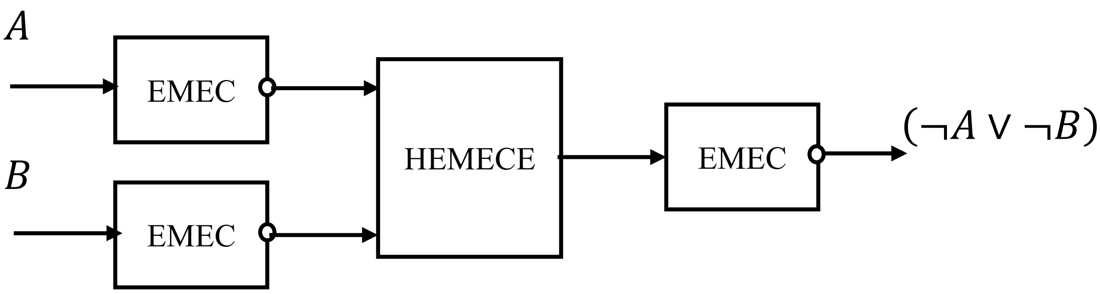
1.



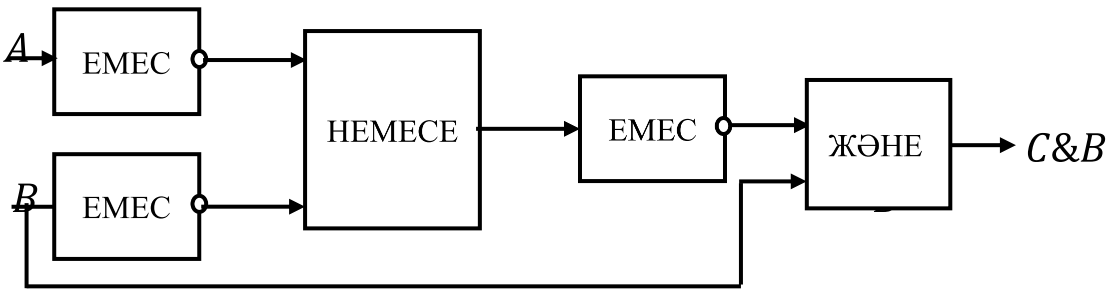
2.



3.



4. Ыңғайлы болу үшін $C = \neg(\neg A \vee \neg B)$ белгілеуін енгіземіз:



Ең соңында $C\&B = \neg(\neg A \vee \neg B)\&B$ формуласын аламыз.

ә) Ақиқат кестесін құрамыз:

1. айнымалылар саны – 2 (A және B айнымалылары);
Жол саны – 2;
2. операциялар саны– 5 ($\neg A$, $\neg B$, $\neg A \vee \neg B$, $\neg(\neg A \vee \neg B)$, $\neg(\neg A \vee \neg B)\&B$);
3. баған саны 7 (айнымалылар саны + операциялар саны);
4. белгілі логикалық операциялардың ақиқат кестесін ескере отырып бағандарды толтырамыз:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	$\neg(\neg A \vee \neg B)\&B$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1

Жауабы:
а) логикалық функцияның формуласы: $\neg(\neg A \vee \neg B)\&B$;
ә) ақиқат кестесі:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	$\neg(\neg A \vee \neg B)\&B$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0

16-жаттығу.
Берілген ақиқат кесте бойынша
1. Берілген ақиқат кестелердегі мәндер бойынша ДҚТ-да бульдік функцияларын жазып, логикалық сұлбасын тұрғызу керек.
2. 1-пунктте алынған функцияларды буль ережелерін пайдаланып алгебралық минимизациялауды жүргізу керек және логикалық сұлбаны тұрғызу керек.

3. 1-пунктте алынған функцияны Карно картасының көмегімен минимизациялап, логикалық сұлбасын тұрғызу керек.
4. 2-пунктте және 3-пунктте алынған нәтижелерді салыстырып, қорытынды жасау керек.

X_3	X_2	X_1	X_0	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Шығарылуы:

1) Кез келген ақиқат кестені ДҚТ ретінде беруге болады.

Логикалық функцияны бірлік термдердің комбинациясы ретінде берілуі.

Біз шығыс биттері 1-ге тең болатын кіріс биттер тобын таңдаймыз.

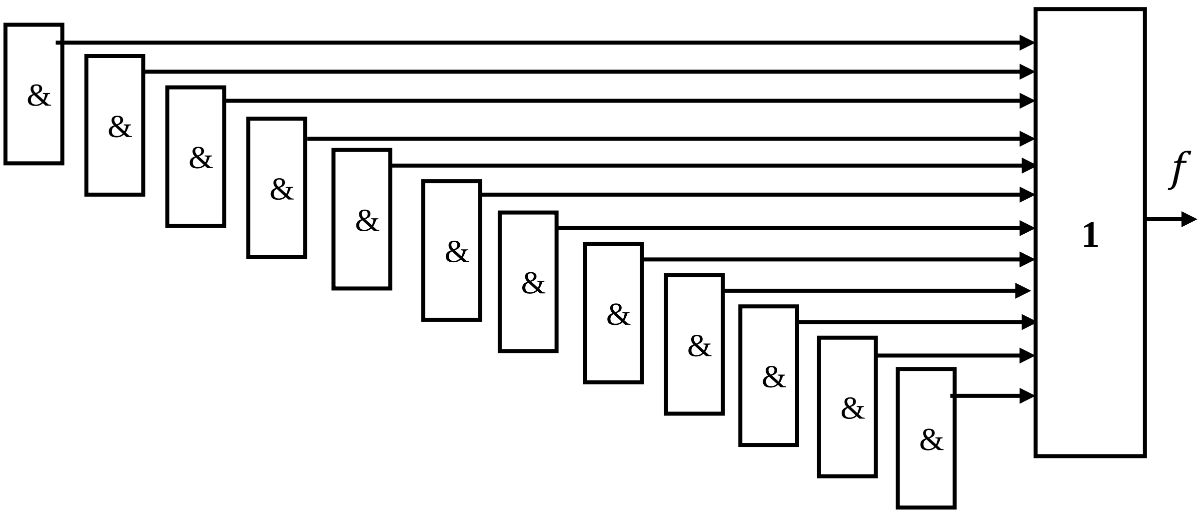
Әрбір терм үшін ЖӘНЕ сұлбасын тұрғызамыз. ДҚТ-ның шығыс функциясы өз алдына термдердің логикалық қосындысын береді.

Әрбір терм үшін олардың көбейтіндісі 1-ге тең болатындай логикалық көбейтіндісін тұрғызамыз. Ыңғайлы болу үшін ақиқат кестеде функцияның мәні 0-ге тең жолдарды алып тастап, 1-ге тең жолдарды қалдырамыз:

X_3	X_2	X_1	X_1	f
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$f = \bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1X_0 + \bar{X}_3X_2X_1\bar{X}_0 + X_3\bar{X}_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + X_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0 + X_3\bar{X}_2X_1\bar{X}_0 + X_3\bar{X}_2X_1X_0 + X_3X_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + X_3X_2\bar{X}_1X_0 + X_3X_2X_1\bar{X}_0 + X_3X_2X_1X_0$$

4 битті қосылғыштар алдық. Сұлбаның шығысында НЕМЕСЕ элементі болады. Бұл элементтің сәйкес 12 кірісі ЖӘНЕ логикалық элементтерінен тұрады. Айтылғандарды сұлба арқылы сызып көрсетейік.



Сонымен, жаттығудың осы бөлігін орындай отырып біз логикалық сұлба үшін 12 * (4 ЖӘНЕ)+12 НЕМЕСЕ ресурс қажет екеніне көз жеткіздік.

2) 1-пунктте алынған функцияларды буль ережелерін пайдаланып алгебралық минимизациялауды жүргізу керек және логикалық сұлбаны тұрғызу керек.

Негізінен екі ережені пайдаланатынымыз жоғарыда айтылған болатын:

1. жапсыру ережесі: $\left(a\bar{b} + ab\right) = a$;
2. түсіп қалу (жұту) ережесі $a + ab = a$.

Енді алынған КДҚТ-ны минимизациялаймыз. Ол әрине минимизациялау нәтижесінде КДҚТ болмайды, себебі термдердегі айнымалылар саны азаяды. Әрбір көршілес екі термдерді топтастырайық. 1-ші және 2-ші термдерді қарастырайық.

$$\bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1\bar{X}_0.$$

Екі қосылғышқа ортақ $\bar{X}_3\bar{X}_1\bar{X}_0$ көбейткіштерін жақшаның сыртына шығарамыз:

$$\bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1\bar{X}_0 = \bar{X}_3\bar{X}_1\bar{X}_0(\bar{X}_2 + X_2) = \bar{X}_3\bar{X}_1\bar{X}_0.$$

Міне осылайша көршілес термдерді топтастыра отырып функциямызды минимизациялаймыз. Алғашқы екі термді топтастыра отырып, 4 битті екі қосылғыштан 3 битті бір қосылғыш алдық. Әрі қарай жалғастырамыз:

$$f = \bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1X_0 + \bar{X}_3X_2X_1\bar{X}_0 +$$

$$X_3\bar{X}_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + X_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0 + X_3\bar{X}_2X_1\bar{X}_0 + X_3\bar{X}_2X_1X_0 +$$

$$X_3X_2\bar{X}_1\bar{X}_0 + X_3X_2\bar{X}_1X_0 + X_3X_2X_1\bar{X}_0 + X_3X_2X_1X_0$$

$$= \bar{X}_3\bar{X}_1\bar{X}_0(\bar{X}_2 + X_2) + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1X_0 + \bar{X}_3X_2X_1\bar{X}_0 + X_3\bar{X}_2\bar{X}_1(\bar{X}_0 + X_0)$$

$$+ X_3\bar{X}_2X_1(\bar{X}_0 + X_0) + X_3X_2\bar{X}_1(\bar{X}_0 + X_0) + X_3X_2X_1(\bar{X}_0 + X_0) =$$

$$\bar{X}_3\bar{X}_1\bar{X}_0 + \bar{X}_3X_2\bar{X}_1X_0 + \bar{X}_3X_2X_1\bar{X}_0 + X_3\bar{X}_2\bar{X}_1 + X_3\bar{X}_2X_1 +$$

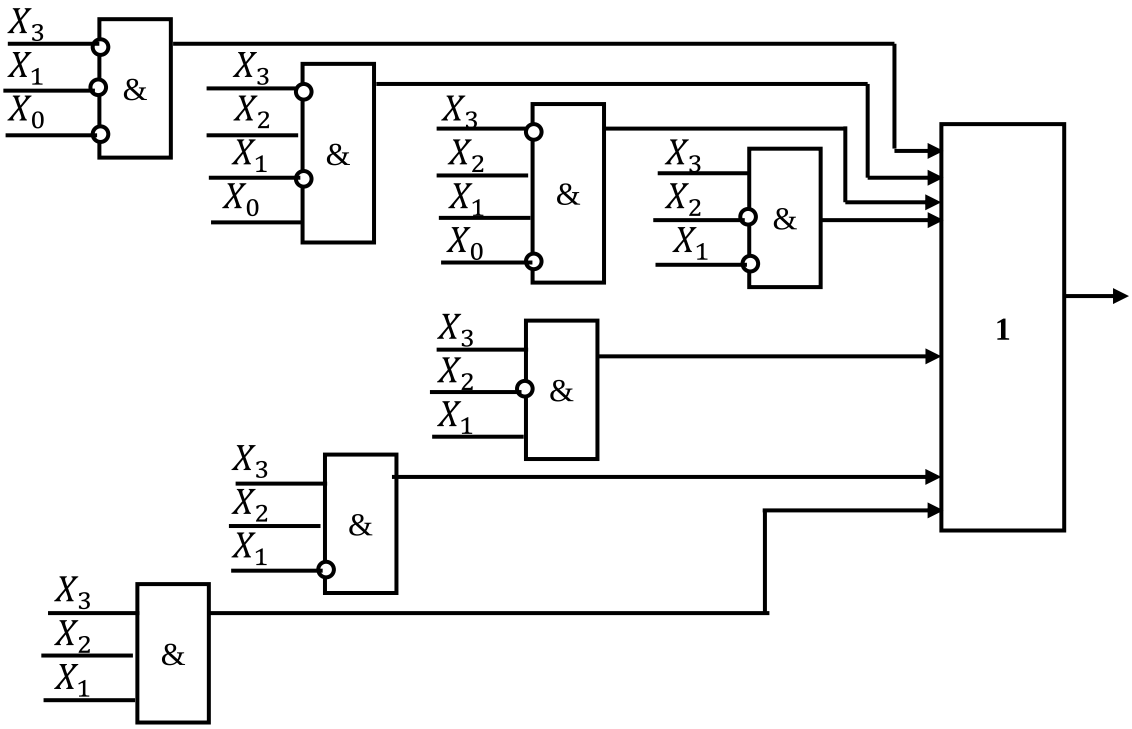
$$X_3X_2\bar{X}_1 + X_3X_2X_1$$

Жаттығудың осы бөлігін орындай отырып, біз логикалық сұлба үшін

2 * (4 ЖӘНЕ)+ 5 * (3 ЖӘНЕ)+7 НЕМЕСЕ

ресурс қажет екенін алдық.

Енді жүзеге асыру мақсатында алынған нәтиже үшін логикалық сұлбасын тұрғызайық.



3. 1-пунктте алынған функцияны Карно картасының көмегімен минимизациялап, логикалық сұлбасын тұрғызу керек.

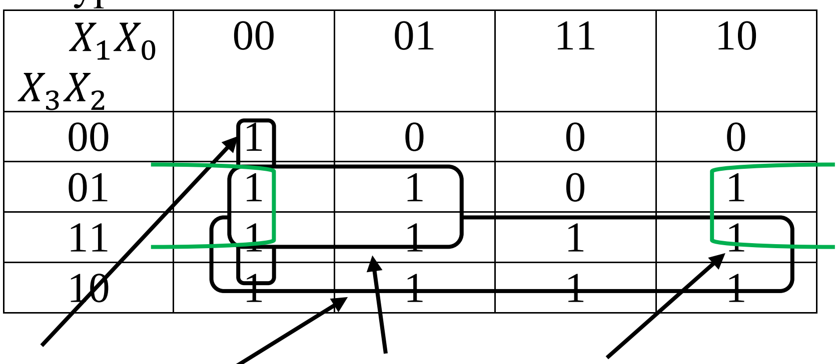
Карно картасы алгебралық түрлендірусіз минимизациялауға мүмкіндік береді. Ақиқат кестесіндегі функцияның мәні 1-ге тең жолдардағы мәндерді рет-ретімен Карно картасына енгіземіз.

X_3	X_2	X_1	X_0	f
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

1-қадам. Карно картасын құрамыз.

X_1X_0 / X_3X_2	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

2-қадам. Саны 2^n-ге тең болатындай бірліктер орналасқан торларды контурға аламыз.



I-контур. II-контур. III-контур. IV-контур.

3-қадам. Контурлар анықталды. Енді осы контурларға жеке-жеке тоқталайық. Контурлар берілген контурда өзгерілмейтін айнымалылардың көбейтіндісімен алмастырылады.

I-контур.

X_1X_0 / X_3X_2	00
00	1
01	1
11	1
10	1

X_3 айнымалысы берілген контур үшін 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_3 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді;

X_2 айнымалысы берілген контур үшін 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_2 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді;

X_1 айнымалысы 0 мәнін ғана қабылдайды, яғни мәні өзгермейді. Және оның мәні 0-ге тең болғандықтан көбейтіндіге инверсиямен енеді.

X_0 айнымалысы да 0 мәнін ғана қабылдайды, яғни мәні өзгермейді. Және оның мәні 0-ге тең болғандықтан ол да көбейтіндіге инверсиямен енеді.

Сонымен, I~$\bar{X}_1\bar{X}_0$.

II-контур.

X_1X_0 / X_3X_2	00	01	11	10
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

X_3 айнымалысы берілген контур үшін 1 мәнін қабылдайды, демек X_3 айнымалысының мәні көбейтіндіге тікелей енеді;

X_2 айнымалысы берілген контур үшін 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_2 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді;

X_1 айнымалысы 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_1 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді;

X_0 айнымалысы 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_0 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді.

Сонымен, II~X_3.

III-контур.

X_1X_0 / X_3X_2	00	01
01	1	1
11	1	1

X_3 айнымалысы берілген контур үшін 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_3 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді;

X_2айнымалысы берілген контур үшін 1 мәнін қабылдайды, демек X_2 айнымалысының мәні көбейтіндіге тікелей енеді;

X_1 айнымалысы 0 мәнін ғана қабылдайды, яғни мәні өзгермейді. Және оның мәні 0-ге тең болғандықтан көбейтіндіге инверсиямен енеді;

X_0 айнымалысы 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_0 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді.

Сонымен, III~ $X_2\bar{X}_1$.

IV -контур.

X_1X_0 / X_3X_2	00	10
01	1	1
11	1	1

X_3 айнымалысы берілген контур үшін 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_3 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді;

X_2айнымалысы берілген контур үшін 1 мәнін қабылдайды, демек X_2 айнымалысының мәні көбейтіндіге тікелей енеді;

X_1 айнымалысы 0 және 1 мәнін қабылдайды, демек X_1 айнымалысының мәні өзгереді, көбейтіндіге енбейді;

X_0 айнымалысы да 0 мәнін ғана қабылдайды, яғни мәні өзгермейді. Және оның мәні 0-ге тең болғандықтан ол да көбейтіндіге инверсиямен енеді.

Сонымен, IV ~ $X_2\bar{X}_0$.

Қорытындыласақ, Карно картасының көмегімен минимизациялау барысында алынған функция мына түрді қабылдайды:

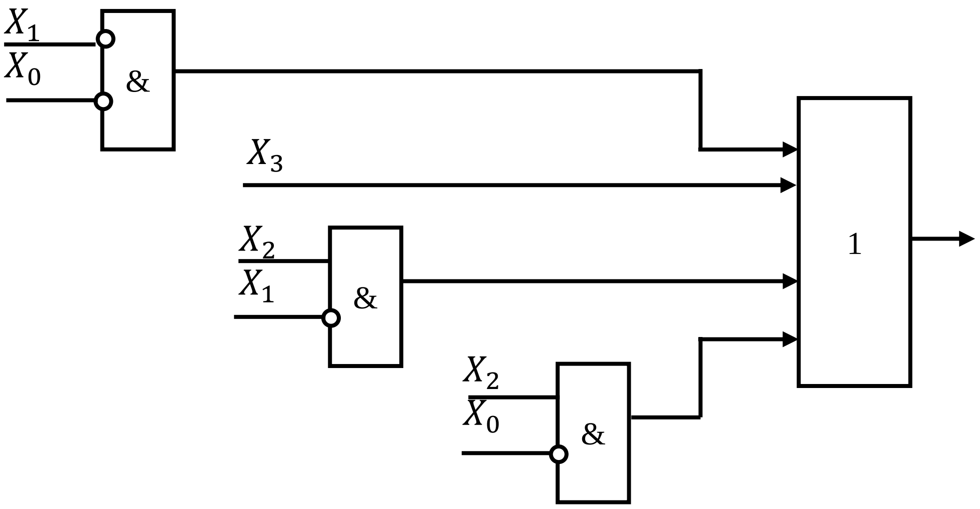
$$f = \bar{X}_1\bar{X}_0 + X_3 + X_2\bar{X}_1 + X_2\bar{X}_0$$

Жаттығудың осы бөлігін орындай отырып біз логикалық сұлба үшін

3 * (2 ЖӘНЕ)+ 1 ЖӘНЕ + 4 НЕМЕСЕ

қатынасын алдық.

Енді осы логикалық функция үшін логикалық сұлба тұрғызайық.



4. 2-пунктте және 3-пунктте алынған нәтижелерді салыстырып, қорытынды жасаймыз. Ыңғайлы болу үшін әрбір кезеңде алынған нәтижені кестеге енгізу арқылы талдау жүргізейік:

Бастапқы функция үшін	Алгебралық минимизациялау нәтижесі	Карно картасының көмегімен минимизациялау нәтижесі
12 * (4 ЖӘНЕ)+12 НЕМЕСЕ	2 * (4 ЖӘНЕ)+ 5 * (3 ЖӘНЕ)+7 НЕМЕСЕ	3 * (2 ЖӘНЕ)+ 1 ЖӘНЕ + 4 НЕМЕСЕ

Карно картасының көмегімен минимизациялау жоғары деңгейде орындалғаны кестеден көрініп отыр. Сол сияқты сұлбалардағы конъюнкторлар мен дизъюнкторлар санының да минимизацияланғанын байқауға болады.

Білім алушылардың аудиториялық сабақтарда немесе өз бетімен орындауға арналған жеке тапсырмалары.

1-тапсырма.

Берілген логикалық өрнектің ақиқат кестесін құрыңыздар.

№1. $(\neg A \& B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow A)\ XOR\ B$

№2. $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)\ XOR\mathrm{A}$

№3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \& A)\ XOR\ B$

№4. $(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (B \vee \neg A)\ XOR\ B$

№5. $(A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(B \& A)\ XOR\ A$

№6. $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (\neg B \& A)\ XOR\ B$

№7. $\neg(B \& A) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B)\ XOR\ B$

№8. $\left(\neg(A \& B)\right) \leftrightarrow (A \vee B)\ XOR\ A$

№9. $(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \& \neg B)\ XOR\ A$

№10. $(\neg B \& A) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)\ XOR\ A$

№11. $\left(\neg(A \& B)\right) \leftrightarrow (A \vee \neg B)\ XOR\ A$

№12. $(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \& B)\ XOR\ B$

№13. $(A \& B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)\ XOR\ A$

№14. $(A \& B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\ XOR\ A$

№15. $\left(\neg(A \& B)\right) \leftrightarrow (\neg A \vee B)\ XOR\ B$

№16. $(A \& B) \leftrightarrow (A \& \neg B)\ XOR\ A$

№17. $(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)\ XOR\ B$

№18. $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(A \& \neg B)\ XOR\ B$

№19. $\neg(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)\ XOR\ A$

№20. $(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \& \neg B)\ XOR\ A$

№21. $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (\neg B \& \neg A)\ XOR\ A$

№22. $(A \& \neg B) \leftrightarrow (\neg B \vee \neg A)\ XOR\ B$

№23. $\neg(B \rightarrow \neg A) \leftrightarrow (A \vee B)\ XOR\ B$

№24. $\neg(B \vee A) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)\ XOR\ A$

№25. $\left(\neg(A \& B)\right) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)\ XOR\ A$

№26. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \& \neg B)\ XOR\ B$

№27. $\left(\neg(A \vee B)\right) \leftrightarrow (A \& \neg B)\ XOR\ A$

№28. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (B \& A)\ XOR\ A$

№29. $(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \& \neg A)\ XOR\ A$

№30. $(\neg A \& B) \leftrightarrow (A \& \neg B)\ XOR\ B$

2-тапсырма.
Берілген функцияның логикалық сұлбасын тұрғызыңыздар.

№1. $(\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg A)$

№2. $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

№3. $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

№4. $\neg(\neg A \& \neg B) \vee (A \vee B)$

№5. $\neg(A \& \neg B) \vee (\neg A \vee B)$

№6. $(\neg A \vee B) \wedge \neg(A \& B)$

№7. $(A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \& B)$

№8. $(A \& B) \vee \left((A \vee B) \wedge \neg A\right)$

№9. $(A \& \neg B) \vee \left((A \vee B) \wedge \neg A\right)$

№10. $\neg\left((\neg A \vee B) \& A\right) \wedge \neg B$

№11. $\neg\left((A \vee \neg B) \& \neg A\right) \wedge \neg B$

№12. $\neg(A \vee \neg B) \vee (A \vee B)$

№13. $\neg(\neg A \vee \neg B) \vee (A \vee \neg B)$

№14. $\neg A \& \neg B \vee \neg(A \vee B)$

№15. $A\&\neg B \vee \neg(\neg A \vee B)$

№16. $\neg A \vee B \vee (\neg B \vee A)$

№17. $A \vee \neg B \vee \neg(B \vee \neg A)$

№18. $(\neg A\&\neg B) \vee (\neg A\&B)$

№19. $(A\&\neg B) \vee (\neg A\&\neg B)$

№20. $(\neg A\&B) \vee (A\&\neg B)$

№21. $\neg(A\&(B \vee A) \vee \neg B)$

№22. $\neg(A\&B) \vee \big(\neg(B \vee A)\big)$

№23. $\neg(A\&B) \vee (\neg B \vee A)$

№24. $\neg(A \vee B) \wedge (A\&\neg B)$

№25. $\neg(A\&B) \wedge (\neg A \vee B)$

№26. $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

№27. $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

№28. $\neg\big(\neg(A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)\big)$

№29. $\neg\big(\neg(A \vee B) \wedge (B \vee \neg A)\big)$

№30. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)$

3-тапсырма.
Берілген логикалық өрнекті ықшамдаңыздар.

№1. $(\neg A\&B) \vee (A\&\neg B) \vee (A\&B)$

№2. $\neg A\&B \vee \neg(A \vee B) \vee C$

№3. $(\neg A\&B) \vee (\neg A\&B) \vee (A\&B)$

№4. $\neg(\neg A\&\neg B) \vee (\neg A\&B)$

№5. $\neg(A\&B) \vee \big(\neg(B \vee C)\big)$

№6. $(A\&B \vee A\&\neg B)\&\neg(\neg A\&\neg B)$

№7. $\neg(\neg A\&C) \vee (B\&\neg C)$

№8. $B \vee A\&\neg A \vee A\&(B \vee B)$

№9. $\neg A \vee B \vee (\neg B \vee A) \vee A \& B$

№10. $\neg(\neg A \& \neg B) \vee \neg A \& \neg\big(A \vee \neg(\neg A \vee B)\big)$

№11. $\neg A \& B \vee \neg(A \vee B) \vee A$

№12. $\neg\left(\left(\big((A \& \neg B) \vee \neg C\big) \& A\right) \& \neg B\right)$

№13. $\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee \neg B) \vee A \& B$

№14. $\neg(A \vee B) \& \neg(C \& \neg A)$

№15. $(A \& B) \vee \big((A \vee B) \wedge (\neg A \& \neg B)\big)$

№16. $\big((\neg(A \& B) \vee C) \vee \neg B \& \neg C\big)$

№17. $\neg\big((\neg A \vee B) \& A\big) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

№18. $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

№19. $(\neg A \vee B) \vee (B \vee C) \vee (A \& C)$

№20. $A \& \neg C \vee C \& (B \vee \neg C) \vee (A \vee \neg B) \wedge C$

№21. $\neg(\neg A \& \neg B) \vee \big((\neg A \vee B) \& A\big)$

№22. $(\neg A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge \neg(B \wedge C)$

№23. $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee A)$

№24. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee (C \wedge \neg A)$

№25. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee A)$

№26. $A \& \neg C \vee C \& (B \vee \neg C) \vee (\neg A \vee B) \wedge \neg C$

№27. $\neg\big((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)\big) \vee (A \vee B)$

№28. $\neg A \& B \vee \neg(A \& \neg B) \vee A$

№29. $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

№30. $\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B)$

4-тапсырма.

C және D өрнектері эквивалентті ме, жоқ па, соны анықтаңыздар.

№1.	$C = A\&(\neg A \vee B)$	$D = A \vee B$
№2.	$C = \neg A\&\neg B\&\neg C$	$D = \neg(A \vee B)\&\neg(C\&\neg A)$
№3.	$C = \neg(A \vee \neg B) \vee \neg B\&C$	$D = \neg A\&(B \vee C)$
№4.	$C = \left((\neg(A\&B) \vee C) \vee \neg B\&\neg C\right)$	$D = C \vee \neg A\&B$
№5.	$C = A\&(B \vee C)$	$D = (A \vee B)\&(A \vee C)$
№6.	$C = \neg\left(\left(\left((A\&\neg B) \vee \neg C\right)\&A\right)\&\neg B\right)$	$D = \neg A \vee B$
№7.	$C = \neg\left(\neg A\&B \vee A\&(B \vee \neg C)\right)$	$D = \neg B\&(\neg A \vee C)$
№8.	$C = \neg(\neg A \vee B) \vee \neg C$	$D = A\&\neg B \vee \neg C$
№9.	$C = \neg(A\&B) \vee \neg C$	$D = \neg A \vee B \vee \neg C$
№10.	$C = (A \vee B)\&(A \vee C)$	$D = A\&(B \vee C)$
№11.	$C = \neg(\neg A \vee B) \vee \neg C$	$D = (A\&\neg B) \vee \neg C$
№12.	$C = \neg(A \vee B)\&\neg(C\&\neg A)$	$D = \neg B\&\neg C$
№13.	$C = \neg(A \vee \neg B \vee C)$	$D = \neg A\&B\&\neg C$
№14.	$C = (A\&B \vee A\&\neg B)\&\neg(\neg A\&\neg B) \vee B$	$D =$A$\vee B$
№15.	$C = A \vee (\neg A\&B)$	$D = A\&B$
№16.	$C = \neg(\neg A\&\neg B) \vee (\neg A\&B) \vee B$	$D =$A$\vee B$
№17.	$C = A\&\neg(\neg B \vee C)$	$D = A\&B\&\neg C$
№18.	$C = B \vee A\&\neg A \vee A\&(B \vee B) \vee A$	$D =$B$\vee A$
№19.	$C = A \vee (B\&C)$	$D = (A\&B) \vee (A\&C)$
№20.	$C = A\&\neg(\neg B \vee C)$	$D = A\&\neg B\&\neg C$
№21.	$C = \neg(A\&B)\&\neg C$	$D = \neg A\&B\&\neg C$
№22.	$C = \neg(A \vee B)\&\neg(C\&\neg A)$	$D = \neg A\&\neg B\&\neg C$
№23.	$C = \neg(\neg A \vee B) \vee \neg C$	$D = \neg A \vee B \vee \neg C$
№24.	$C = (A\&B) \vee (A\&C)$	$D = A \vee (B\&C)$
№25.	$C = \neg C \vee \neg B \vee \neg(A \vee \neg C)$	$D = \neg A\&B \vee \neg C\&B$

№26. $C = (A \vee B)\&(A \vee C)$ $D = A\&(B \vee C)$

№27. $C = \neg(A \vee \neg B \vee C)$ $D = A\&\neg B\&C$

№28. $C = \neg C \vee \neg B \vee \neg(A \vee \neg C)$ $D = \neg A\&\neg B \vee \neg C$

№29. $C = \neg(A \vee B)\&\neg(C\&\neg A)$ $D = \neg A\&\neg B\&\neg C$

№30. $C = \neg(\neg A\&\neg B) \vee \neg A\&\neg\big(A \vee \neg(\neg A \vee B)\big) \vee A$ $D =$B$\vee A$

5-тапсырма.

Берілген X мәніндегі логикалық функцияның мәнін есептеңіздер (функцияның жалған не ақиқаттығын анықтаңыздар).

№1. X=1; $\neg\big((X > 3) \vee (X < 3)\big) \vee (X < 1)$

№2. X=2; $X > 1\&\big(\neg(X < 5) \vee (X > 3)\big)$

№3. X=4; $\big((X > 2) \vee \neg(X < 3)\big)\&\neg(X < 1)$

№4. X=3; $\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)\&\big(\neg(X > 2)\&(X < 7)\big)$

№5. X=2; $(X > 1)\&\big((X < 5) \vee \neg(X < 3)\big)$

№6. X=1; $\neg\big((X > 2) \vee \neg(X > 3)\big)$

№7. X=4; $\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)\&\big(\neg(X < 2) \vee (X > 1)\big)$

№8. X=3; $\big(\neg(X < 2) \vee (X < 3)\big)\&\big((X > 1) \vee (X < 1)\big)$

№9. X=2; $(X > 1)\&\big(\neg(X < 5) \vee (X < 2)\big)$

№10. X=1; $(X > 4) \vee \neg(X > 1)\&(X > 4)$

№11. X=4; $\neg\big((X > 2) \vee \neg(X > 3)\big)$

№12. X=3; $X > 1\&\big(\neg(X < 5) \vee (X < 4)\big)$

№13. X=2; $\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)\&\big(\neg(X < 2) \vee (X < 1)\big)$

№14. X=1; $(X > 0) \vee \neg(X > 1)\&\neg(X > 4)$

№15. X=4; $\neg\big((X > 3) \vee (X < 3)\big) \vee (X < 1)$

№16. X=3; $\neg\big((X > 2) \vee \neg(X > 3)\big)$

№17. X=2; $X > 1\&\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)$

№18. X=1; $\neg\big((X > 2) \vee (X < 2)\big) \vee (X > 4)$

№19. X=4; $X > 1\&\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)$

№20. X=3; $\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)\&\big(\neg(X < 2) \vee (X < 1)\big)$

№21. X=2; $\neg\big((X > 3) \vee (X < 3)\big) \vee (X < 1)$

№22. X=1; $(X > 4) \vee \neg(X > 1) \vee (X > 4)$

№23. X=4; $\neg\big((X > 2) \vee (X < 2)\big) \vee (X > 4)$

№24. X=3; $(X > 4) \vee \neg(X > 1) \vee (X > 4)$

№25. X=2; $\neg\big((X > 2) \vee \neg(X > 3)\big)$

№26. X=1; $\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)\&\big(\neg(X < 2) \vee (X < 1)\big)$

№27. X=4; $(X > 4) \vee \neg(X > 1) \vee (X > 4)$

№28. X=3; $\neg\big((X > 3) \vee (X < 3)\big) \vee (X < 1)$

№29. X=2; $X > 1\&\big(\neg(X < 5) \vee (X < 3)\big)$

№30. X=1; $(X > 4) \vee \neg(X > 1) \vee (X > 4)$

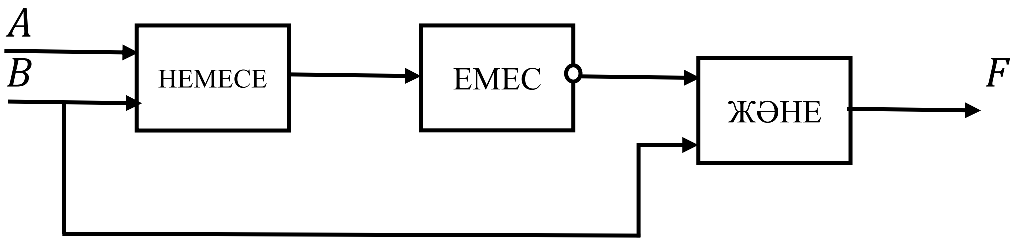
6-тапсырма.

Берілген логикалық сұлба бойынша

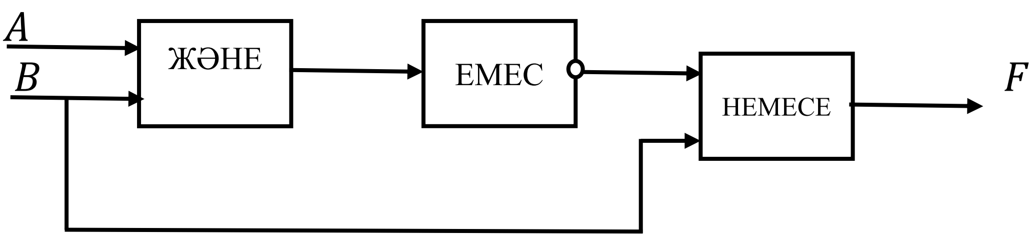
а) логикалық функцияның формуласын жазыңыздар;

ә) ақиқат кестесін тұрғызыңыздар:

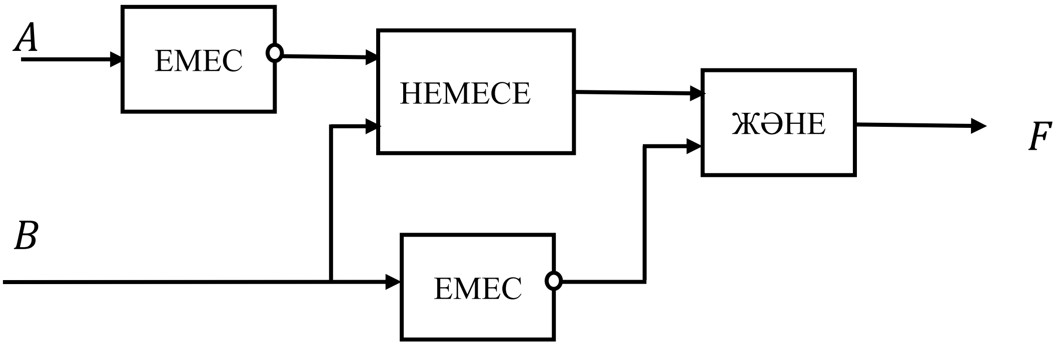
№1.



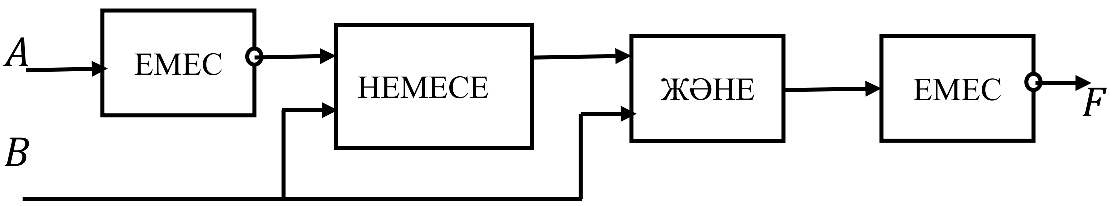
№2.



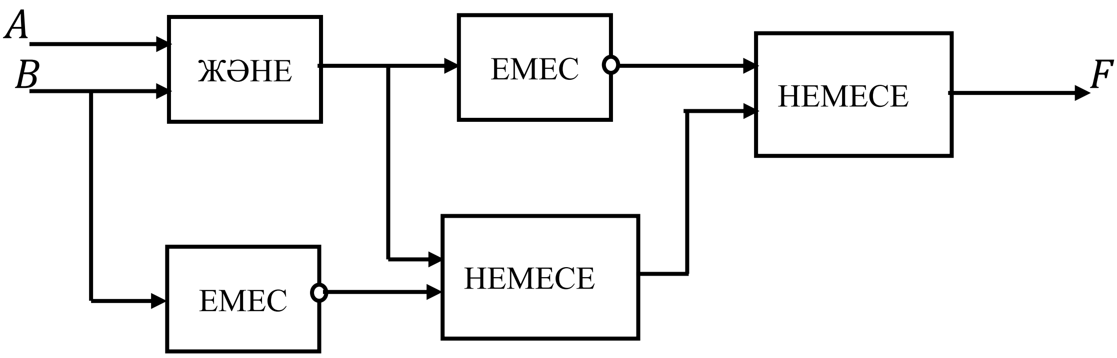
№3.


A
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
ЖӘНЕ
F
B
ЕМЕС

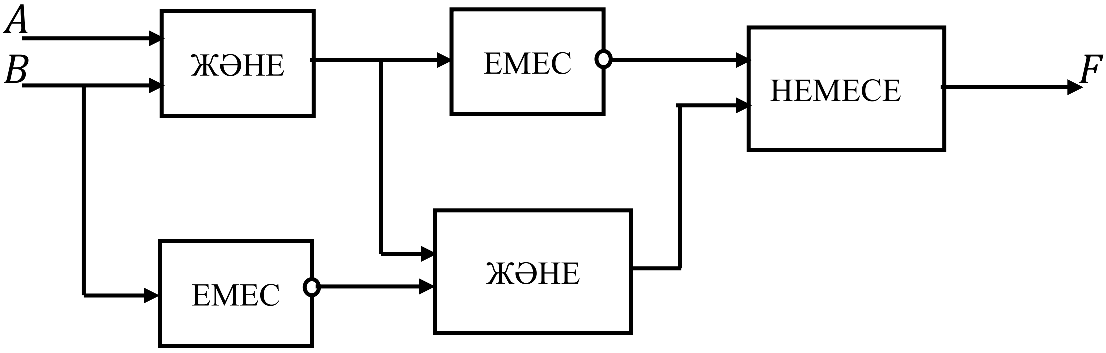
№4.


A
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
ЖӘНЕ
ЕМЕС
F
B

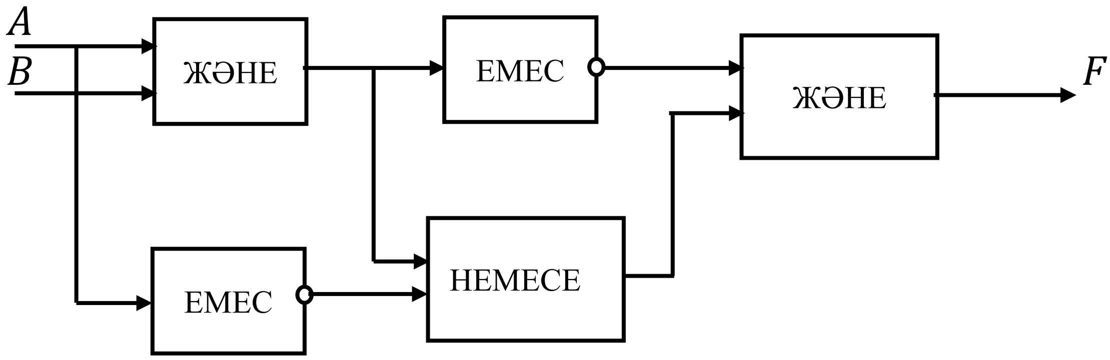
№5.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
F
ЕМЕС
НЕМЕСЕ

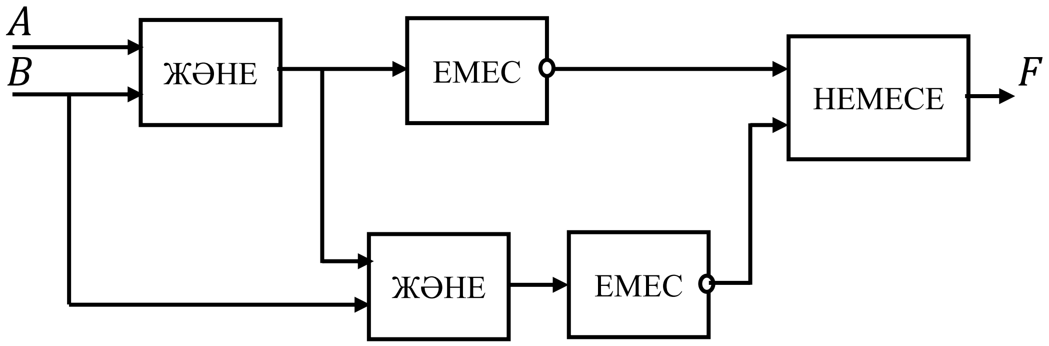
№6.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
F
ЕМЕС
ЖӘНЕ

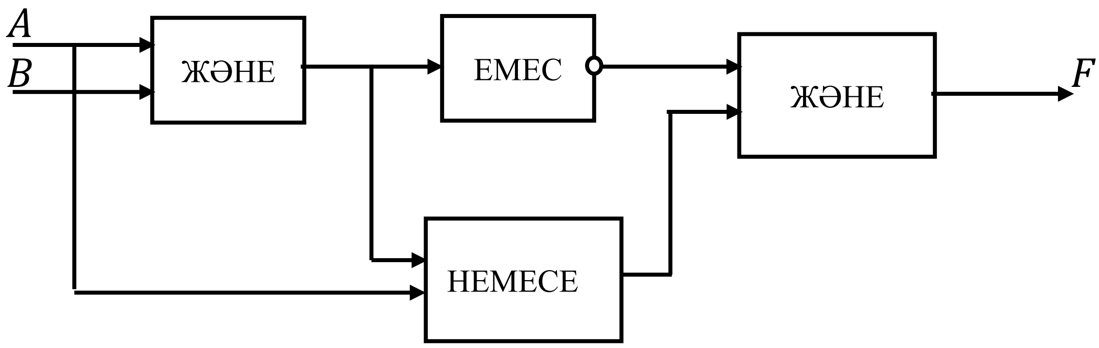
№7.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
ЕМЕС
НЕМЕСЕ

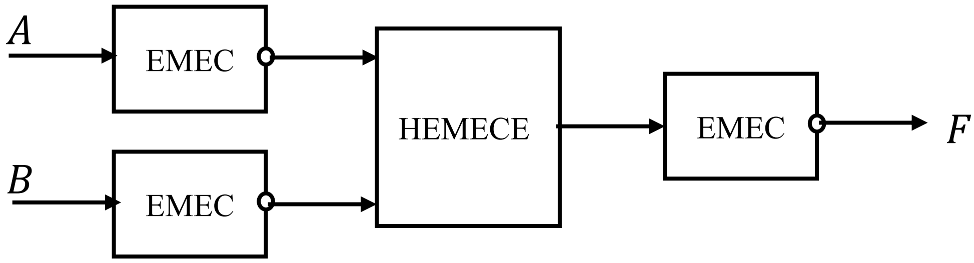
№8.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
F
ЖӘНЕ
ЕМЕС

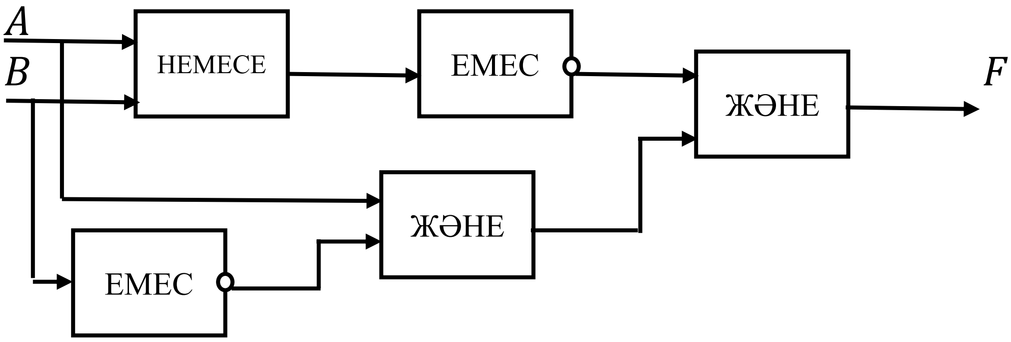
№9.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
НЕМЕСЕ

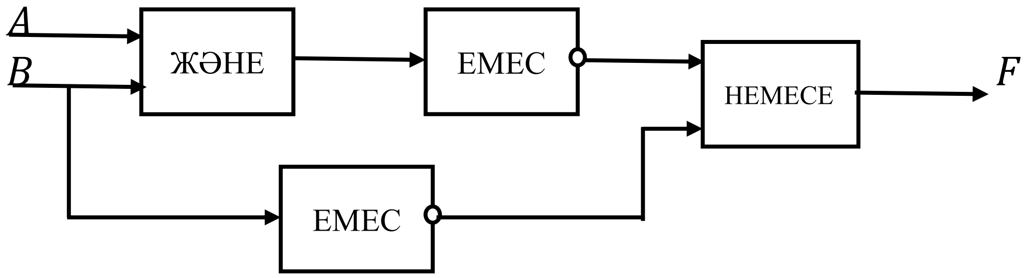
№10.


A
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
F
B
ЕМЕС

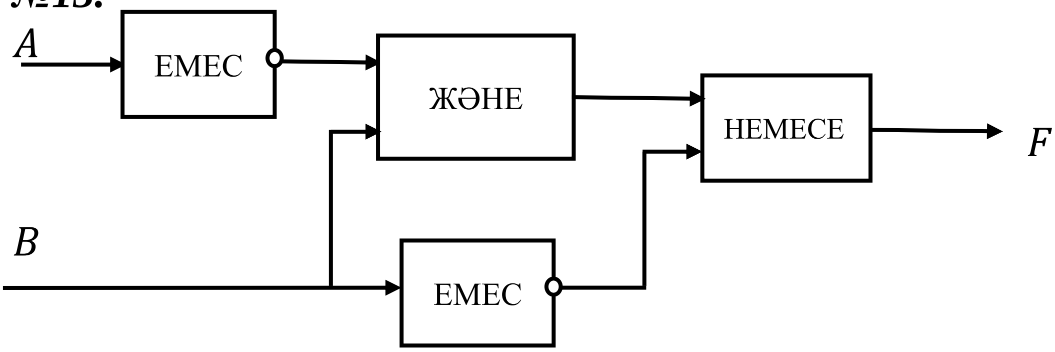
№11.


A
B
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
ЖӘНЕ
ЕМЕС

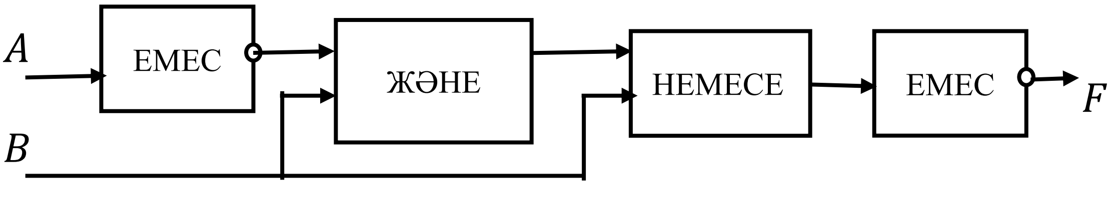
№12.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
F
ЕМЕС

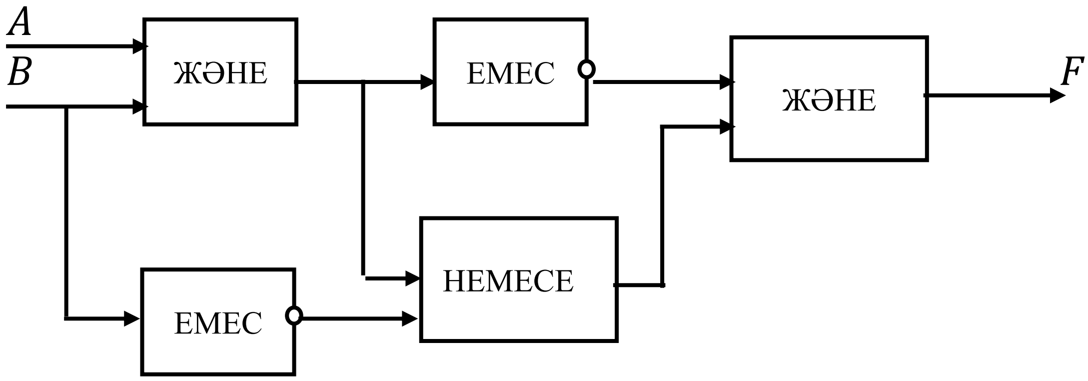
№13.


A
ЕМЕС
ЖӘНЕ
НЕМЕСЕ
F
B
ЕМЕС

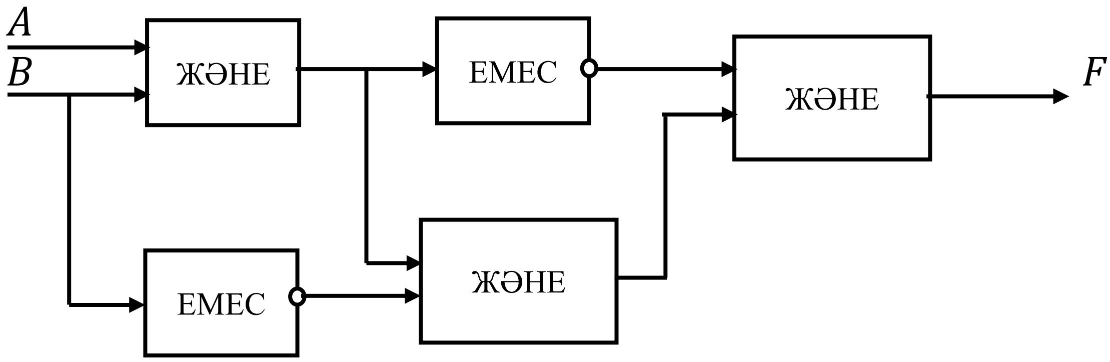
№14.


A
ЕМЕС
ЖӘНЕ
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
F
B

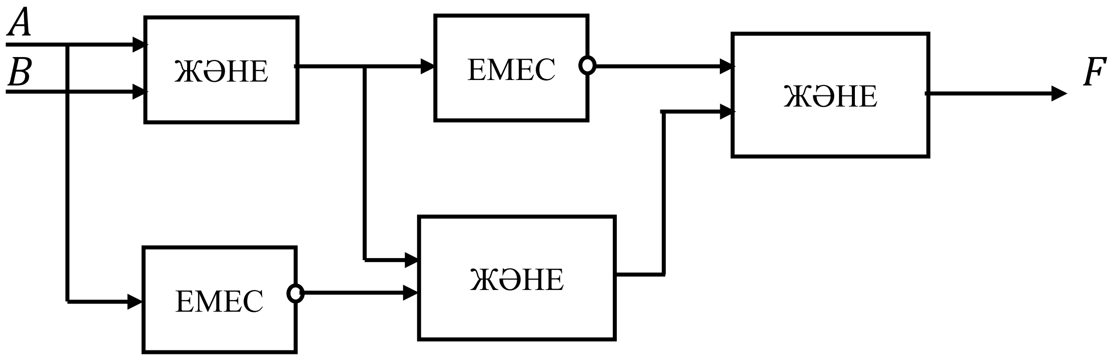
№15.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
НЕМЕСЕ
ЕМЕС

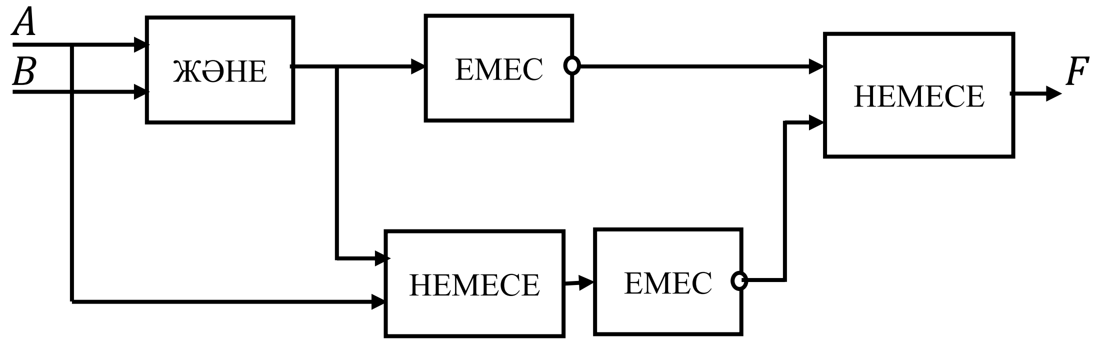
№16.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
ЖӘНЕ
ЕМЕС

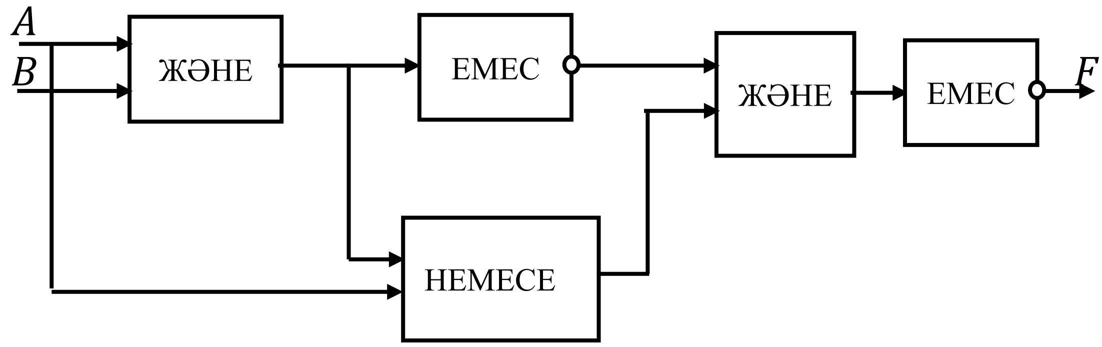
№17.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
ЖӘНЕ
ЕМЕС

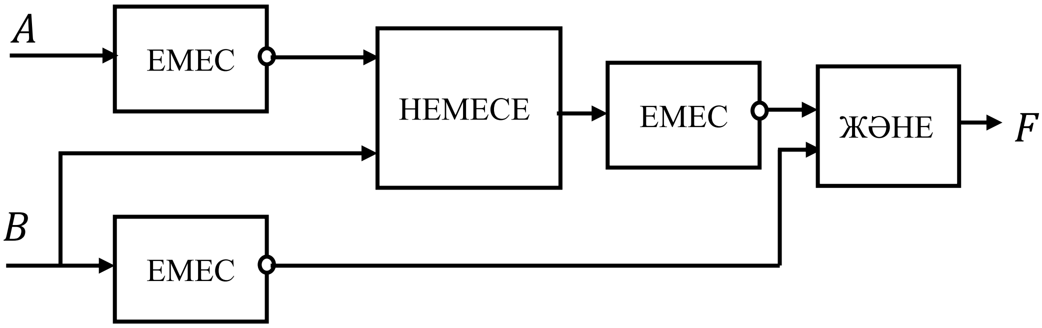
№18.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
F
НЕМЕСЕ
ЕМЕС

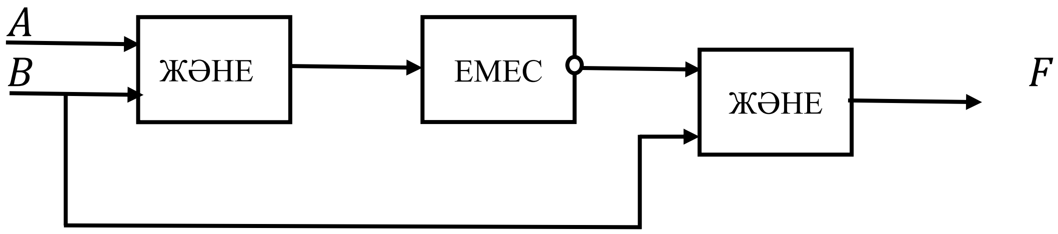
№19.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
ЕМЕС
F
НЕМЕСЕ

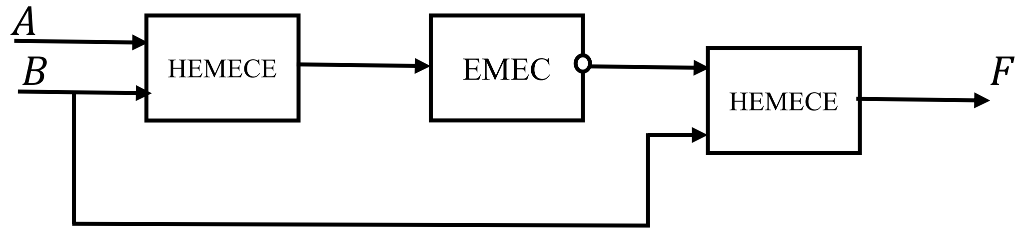
№20.


A
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
B
ЕМЕС

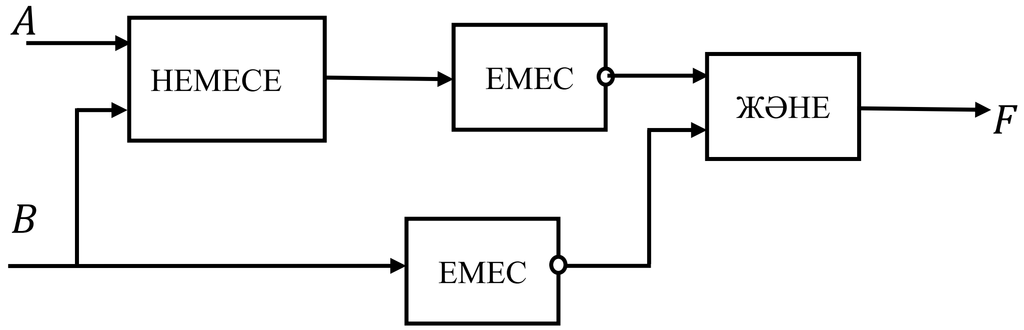
№21.


A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F

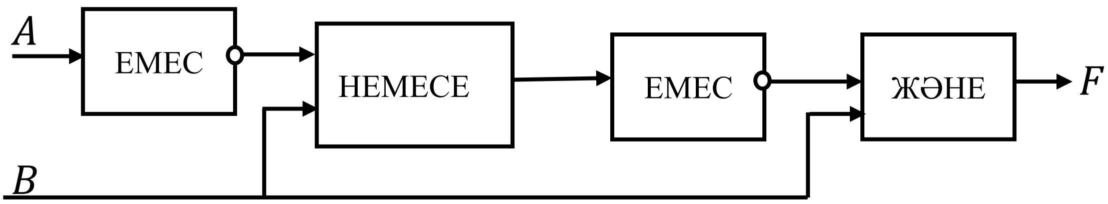
№22.


A
B
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
F

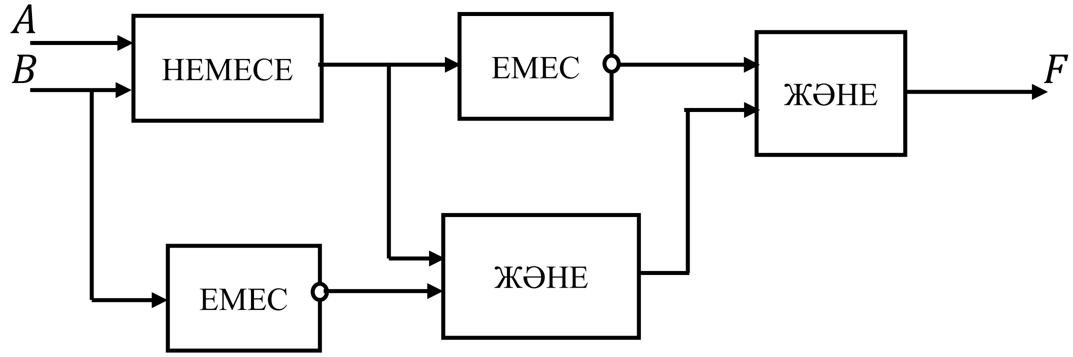
№23.


A
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
B
ЕМЕС

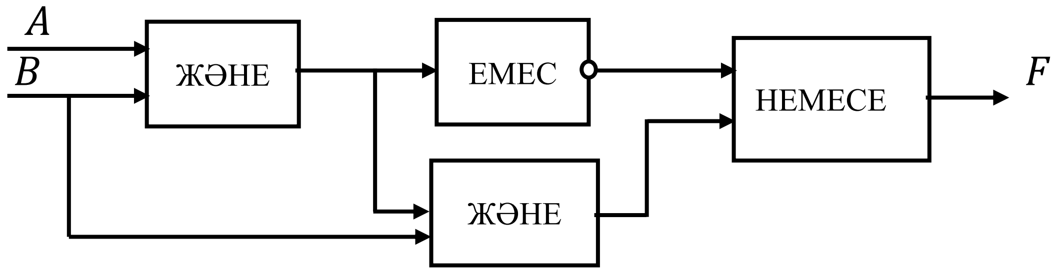
№24.


A
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
B

№25.

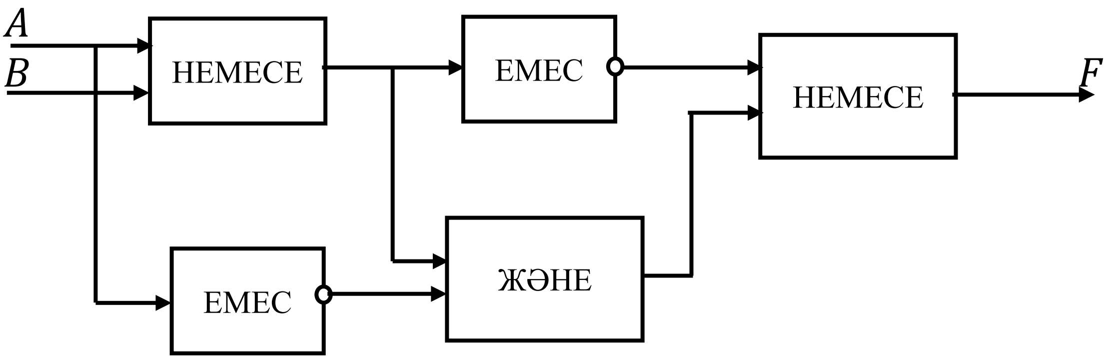

A
B
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
ЕМЕС
ЖӘНЕ

№26.



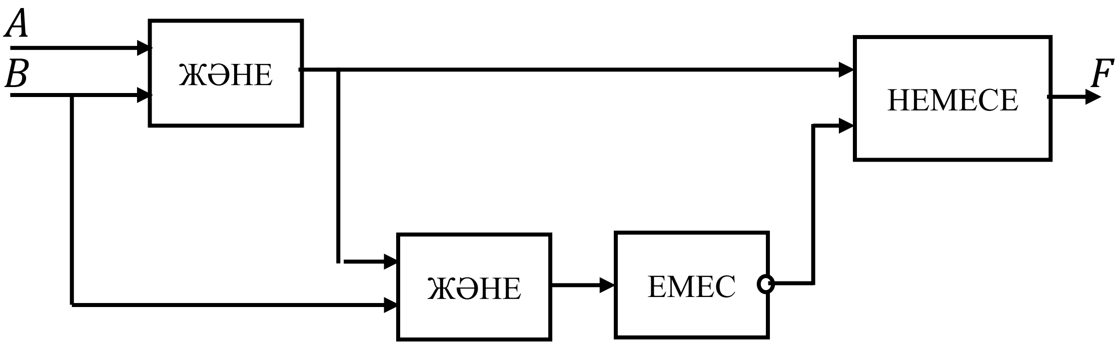
A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
НЕМЕСЕ
F

№27.



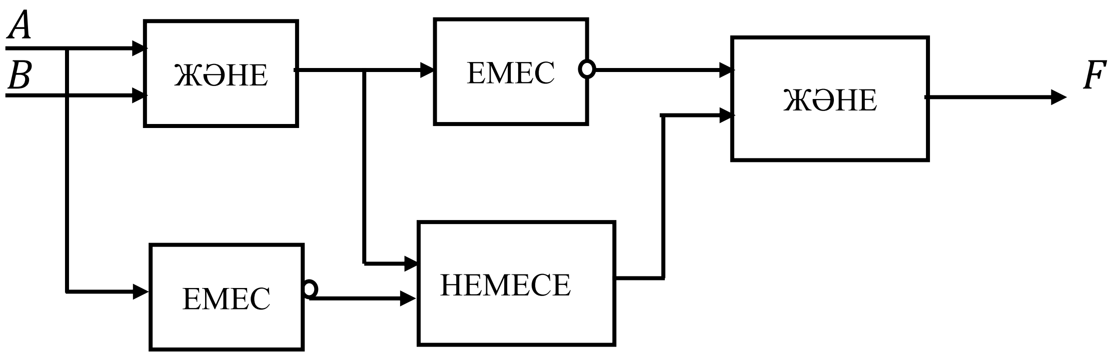
A
B
НЕМЕСЕ
ЕМЕС
НЕМЕСЕ
F
ЕМЕС
ЖӘНЕ

№28.



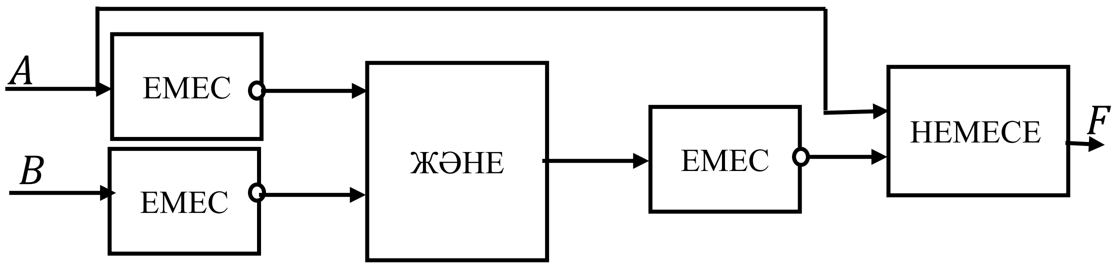
A
B
ЖӘНЕ
НЕМЕСЕ
F
ЖӘНЕ
ЕМЕС

№29.



A
B
ЖӘНЕ
ЕМЕС
ЖӘНЕ
F
ЕМЕС
НЕМЕСЕ

№30.



7-тапсырма.

Берілген ақиқат кесте бойынша

1. Берілген 1-ші (үш айнымалы үшін) және 2-ші (төрт айнымалы үшін) ақиқат кестелердегі мәндер бойынша ДҚТ-да және КҚТ-да бульдік функцияларды жазыңыз.
2. 1-пунктте алынған функцияларды буль ережелерін пайдаланып (арифметикалық) минимизациялаңыз және логикалық сұлбасын тұрғызығыздар.
3. 1-пунктте алынған функцияларды Карно картасының көмегімен минимизациялаңыз және логикалық сұлбасын тұрғызығыздар.
4. 2-пунктте және 3-пунктте алынған нәтижелерді салыстырып, қорытынды жасаңыздар.

   Ескерту. f функциясының төменгі индексі - нұсқа нөмірін көрсетеді. Мысалы, f_1 – 1-нұсқа, f_2 – 2-нұсқа, f_3 – 3-нұсқа және т.т.

1-ші ақиқат кесте.

X_2	X_1	X_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1

1-ші ақиқат кестенің жалғасы.

X_2	X_1	X_0	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0

2-ші ақиқат кесте.

X_3	X_2	X_1	X_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1

2-ші ақиқат кестенің жалғасы

X_3	X_2	X_1	X_0	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1

Бақылау сұрақтары

1. Логика алгебрасы. Логика алгебрасының негізгі ұғымы.
2. Логикалық айтылымдар. Айтылымдық форма.
3. Негізгі логикалық операциялар, олардың белгіленуі, балама белгіленуі, оқылуы, операцияның аталуы. Логикалық операциялардың орындалу приоритеттері.
4. Логикалық формула. Логикалық функция. Негізгі логикалық операциялар үшін ақиқат кесте. Күрделі өрнектердің ақиқат кестесін құру алгоритмі.
5. Негізгі логикалық операцияларды жүзеге асыратын базалық логикалық элементер. Логикалық сұлбаларды құру алгоритмі.
6. Логика алгебрасының заңдары.
7. Буль функциясын минимизациялау мақсаты
8. Қалыпты тұлғаның түрлері. Ақиқат кесте бойынша ҚДҚТ және ҚҚҚФ құру ережелері.
9. Минтерм (макстерм) ұғымдары. Минтермдердің (макстермдердің) канондық қосындысы (көбейтіндісі).
10. Логикалық функцияларды минимизациялаудың әдістері. Минимизациялау мақсатында Карно картасын құру алгоритмі.
11. Минимизациялаудың қойылған мақсатына жету үшін карта осьтерін белгілеу ережелері. Контурларды құрастыру ережелері.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Ф.Р. Гусманова, Б.А. Урмашев, М.Ж. Сақыпбекова, А. Алтыбай. Ақпараттық технологиялар негіздері. Оқу құралы. Алматы, 2015.

2. О. Ю. Агарева, Ю. В. Селиванов. Элементы математической логики. Учебное пособие. Москва, 2008.

3. Гашков С.Б. Системы счисления и их примнение, Издательство Московского центра непрерывного математического образования, Москва, 2004. – 190 с.

4. Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, Ю.В. Кулаков, В.А. Гриднев, В.Г. Однолько. Учебное пособие. Дискретная математика. Тамбов, 2012

4. М.С.Спирина, П.А.Спирин. Дискретная математика. Учебник. Москва, 2004.

5. Қазақша-орысша, орысша-қазақша терминологиялық сөздік. Математика. Алматы, 1999.

6. Қазақша-орысша, орысша-қазақша терминологиялық сөздік. Информатика және есептеуіш техника. Алматы, 1999.

7. Қазақстан Республикасының Үкіметі жанындағы Мемлекеттік терминология комиссиясы бекіткен Қазақша-орысша сөздік. Информатика және Есептеуіш техника. Республикалық мемлекеттік «Рауан» баспасы, 1999.

МАЗМҰНЫ

Ф.Р. Гусманова,
С.Б. Беркімбаева,
А.Р. Тұрғанбаева

Дискреттік математика элементтері

Оқу құралы

Басуға 26.04.2021 ж. қол қойылды. Пішімі 60x90$^{1}/_{16}$.
Офсеттік басылыс. Қаріп түрі «Times». Көлемі 8 б.т.
Таралымы 500 дана. Тапсырыс № 291020-01.

Тапсырыс берушінің дайын файлдарынан басылып шықты.