Ф.Р. Гусманова,
Б.С. Дарибаев,
Қ.С.Дальбекова

Сызықтық программалау

Оқу құралы

Алматы, 2021

ӘОЖ 004(075.8)
КБЖ 32 0,73.2 я73
Г94

Г 94 Сызықтық программалау: оқу құралы. / Ф.Р. Гусманова, Б.С. Дарибаев, Қ.С.Дальбекова - Нұр-Сұлтан: Қаржы академиясы, 2021 . – 128 б.

ISBN 978-601-08-0939-0

Пікір жазғандар:

С.Б. Беркімбаева, Халықаралық бизнес университетінің «Бизнес информатика» кафедрасы, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент;

М.А. Скиба, АҚ «Қаржы академиясының» ректоры, педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент.

Баспаға Қаржы Академиясының Ғылыми Кеңесінің шешімімен шығаруға ұсынылған.

(Хаттама №2, 13 қазан 2020 ж.)

Оқу құралы жоғары оқу орындарының студенттеріне «Операцияларды зерттеу және оңтайландыру әдістері», «Бизнес үдерістерді модельдеу», «Кәсіпорын ресурстарын басқару» және басқа да осы бағыттағы пәндер бойынша даярлауға арналған. Оқу құралы қажетті теориялық мәліметтерден, практикалық және зертханалық сабақтарда, өз бетімен орындауға арналған тапсырмалардан және осы тапсырмаларды орындаудың үлгілері мен өзін-өзі бақылауға арналған бақылау сұрақтарынан тұрады.

Ұсынылып отырған оқу құралын әзірлеген авторлар білім беру саласындағы тәжірибелерін, сонымен қатар құралда келтірілген әдебиеттердегі материалдар, соның ішінде авторлардың алдыңғы еңбектерін толықтыру мен өңдеу негізінде құрастырылды.

ӘОЖ 004(075.8)
КБЖ 32 0,73.2 я73

ISBN 978-601-08-0939-0

КІРІСПЕ

Кез келген экономикалық мәселелердің шешімін қабылдау түбегейлі есептеулер мен зерттеу нысанының мықты және әлсіз жақтарын талдауды, оның бәсекелестері мен контрагенттерін, сонымен қатар, клиенттердің қызығушылықтарын ескеруді талап етеді. Экономика субъектісін талдау және ұтымды қызметі үшін экономикалық үрдістің математикалық моделін құры маңызды болып табылады. Экономикалық жүйелердің математикалық модельдеуі сызықтық программалаудың есептеріне әкеледі.

Экономикалық-математикалық модельдеу кезеңдері:

1. экономикалық есептің сипаттамасы;
2. математикалық модельді құру (математикалық формализациялау) шығарылуы және шешімін талдау (жарамдылығы, орнықтылығы және т.б.);
3. есептің экономикалық интерпретациясы.

Оқу құралында талдалынатын мысалдарда осы кезеңдер қарастырылады. Экономикада математикалық программалаудың модельдері мен әдістері жиі қолданылады. Сызықтық программалау осы математикалық теорияның бөлімдерінің бірі болып табылады. Сызықтық программалау бойынша алғашқы еңбекті алғашқы рет 1939 жылы Л.В. Канторович жариялаған болатын. Кейіннен, 1975 жылы Л.В. Канторович математикалық программалау саласындағы еңбегі үшін Нобель сыйлығының иегері болып марапатталды. Содан бері, өндірісті жоспарлаумен, ресурстарды үлестірумен, қамсыздандыру проблемаларымен байланысты экономикалық есептерді шығару барысында сызықтық программалау әдістерікеңінен пайдаланылады.

Оқу құралында сызықтық программалау есебін шығару бойынша теориялық мәліметтер, өндірісті жоспарлау есебі мен шикі затпен қамтамасыздандыру туралы есептері талдалынып, олардың математикалық моделін құру келтірілген. Мысалдар шығарылып, өз бетінше орындауға тапсырмалар берілді. Экономика, математика, ақпараттық технология бағытындағы білім алушыларға арналады.

1-ТАРАУ. СЫЗЫҚТЫҚ ПРОГРАММАЛАУ МОДЕЛЬДЕРІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОСЫМШАСЫ

1.1. Модель ұғымы. Модельдеудің түрлері

«Модель» ұғымының бір-бірінен айырмашылығы бар көптеген анықтамалар кездеседі. Әйтсе де, бұл ұғым көпшілігімізге белгілі. Мысалы, ойыншық тік ұшақ, немесе балалық кезде қағаздан жасайтын көгершін моделі деп қарастыруға болады. Мектеп курсындағы математика, физика сабақтарында қолданылатын формулалар - математикалық модель болып табылады. Жалпы *модель* деп нысанды қандайда бір тілдің көмегімен жуықтап жаңадан жасайтын осы нысанның шартты бейнесі түсініледі, ал модельді құру үрдісі *модельдеу* деп аталады.

Модельдеу бұл – нақты өмірдегі үрдістерді және құбылыстарды үйренудің әмбебап тәсілі. Оның ерекше мәні тікелей бақылау және зерттеу мүмкіндігі болмаған жағдайдағы нысандарды оқып білуде болып табылады. Дербес жағдайда, оған әлеуметтік-экономикалық құбылыстар мен үрдістерді жатқызуға болады.

Модельдеудің вербальды, геометриялық, физикалық және ақпараттық және т.б. түрлері кездеседі.

Вербальды модельдеу – сөйлеу тілді пайдалану негізіндегі модельдеу.

Геометриялық модельдеу макеттік немесе нысандық модельдерде жүзеге асырылады. Бұл модельдер нысанға кеңістіктік форманы, пропорцияны т.т. береді.

Физикалық модельдеу түпнұсқада пайда болатын физикалық-химиялық, технологиялық, биологиялық үрдістерді оқып білу үшін қолданылады.

Ақпараттық модельдеу - ғылымның барлық саласында іргелі маңызы бар.

Кез келген нысанды, қозғалыстың кез келген формасын зерттеу оның сапалық заңдылығымен қатар, математикада оқылатын сандық заңдылықтарын да ашады. Ал бұл болса, айтылғандардың экономикаға қатысты екенін білдіреді.

1.2. Экономикалық-математикалық модельдер

Математикалық символдардың және операциялардың көмегімен құрылған абстрактілік сұлба жүйенің (өндірістік, экономикалық, қаржылық және т.б.) *математикалық моделі* деп аталады.

Математикалық модельді құру үрдісі *математикалық модельдеу* деп аталады. Математикалық модельдеу келесі сұрақтарға жауап береді:

1. пәндік саланы сипаттайды және кіріс мәліметтерін анықтайды;
2. есептерді шешу үрдісінде талап етілетін мәндерді қабылдайтын шығыс айнымалыларын анықтайды;
3. жүйенің ішкі мүмкіндіктері мен әсер етудің сыртқы факторларына негізделген айнымалыларға шектеулер қойылады;
4. барлық мүмкін болатын айнымалылар мәндерінің арасынан есептің мақсатына жетуге сәйкес келетіндей есептің мақсатын қою керек

Экономикалық-математикалық модель – зерттелетін экономикалық үрдістің (нысанның) математикалық сипатталуы. Бұл модель математикалық қатынастардың көмегімен абстрактілі түрде экономикалық үрдістің заңдылығын өрнектейді.

Экономикалық нысандарды сипаттайтын параметрлер модельде не белгілі, не белгісіз шамалар ретінде беріледі. Белгілі шамалар модельден тыс есептеледі де оған дайын түрінде енгізіледі, сондықтан оларды *экзогенді* деп атайды. Модельді шешу нәтижесінде анықталатын шамалар *эндогенді* деп аталады.

Экономикалық-математикалық модельдеудің үш кезеңін ерекше бөліп қарастыруға болады:

1-кезең. Зерттеу есебінің мақсаты қойылады; экономикалық модель түрінде объектіні сапалы сипаттау жүргізіледі.

2-кезең. Зерттелетін объектінің математикалық моделі құрылады; зерттеу әдістеріне таңдау (немесе арнайы әдіс жазылады) жүргізіледі; модельді ЭЕМ-да жүзеге асыру мақсатында программалайды, бастапқы деректер дайындалады.

3-кезең. Математикалық модельге талдау жүргізіледі; алынған нәтижелер өңделінеді және талдау жүргізіледі.

Экономикалық-математикалық модельдерді әр түрлі белгілер бойынша келесі түрде топтастырылады:

Мақсаттық тағайындалу белгісі бойынша теориялық және қолданбалы модельдер болып бөлінеді.

Теориялық модельдер қарастырылатын экономикалық жүйелердің жалпы заңдылықтары мен қасиеттерін оқып білуге арналған.

Қолданбалы модельдер нақты экономикалық нысандардың қызмет атқаратындай параметрлерін анықтау мен бағалауға және шаруашылық практикалық шешімдерді қабылдау үшін ұсыныстарды дұрыстап қабылдауға мүмкіндік береді.

Зерттелетін экономикалық нысанның *масштаб* (*шамалар*) белгісі бойынша модельдер макроэкономикалық және микроэкономикалық болып бөлінеді.

Макроэкономикалық модельдер ірілендірілген материалдық-заттық және қаржы көрсеткіштерін: жалпы ұлттық өнімді, ұлттық табысты, біріктірілген сұранысты, біріктірілген тұтынуды, инвестицияларды, бос емес болуды, инфляция пайыздық мөлшерді, ақша санын және т.б. өзара байланыстыра отырып мемлекеттің экономикасын біртұтас ретінде сипаттайды

Микроэкономикалық модельдер экономиканың құрылымдық және функциональдық құраушыларының не кейбір құраушылардың (сала, аймақ, фирма, тұтынушы және т.б.) шаруашылық ретінің өзара әрекетін сипаттайды.

Уақытқа тәуелді сипатының белгісі бойынша статикалық және динамикалық модельдер болып бөлінеді.

Статикалық модельдер – барлық параметрлердің мәндерін уақыттың бір квантына (мезгілге немесе аралыққа) жатқызатын модельдер.

Динамикалық модельдер – уақытқа қатысты параметрлері өзгеретін модельдер.

Уақытты бейнелеу тәсілінің белгісі бойынша үзіліссіз және дискретті модельдер болып бөлінеді.

Үзіліссіз модельдер – уақыт үзіліссіз фактор ретінде қарастырылатын модельдер.

Дискретті модельдер – уақыт кванттталған модельдер.

Себеп-салдарды бейнелеу сипаты бойынша детерминирленген және теориялық-ойындық модельдер болып бөлінеді.

Детерминирленген модельдер – қатаң функциональды байланыстармен берілген модельдер.

Стохастикалық модельдер – зерттелетін көрсеткіштерге кездейсоқ әсердің болуы мүмкін және ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың ортасын пайдалануға болатын модельдер.

*Теориялық-ойындық модельде*р стохастикалық дәрежеге қарағанда анықталмағандық дәрежесі жоғары факторлардың әсерін ескереді.

Модельдеу кезінде қолданылатын математикалық инструменттер бойынша топтастырылады.

Экономикалық зерттеулерде теориялық және практикалық қосымшалар ретінде кеңінен таратылған және тиімді математикалық әдістер: дифференциалдық есептеулер, математикалық статистика, сызықтық алгебра, математикалық программалау, графтар теориясы, ықтималдықтар теориясы және ойындар теориясы.

Экономикалық-математикалық модельдерді құру алгоритмі.

1. Зерттеу нысаны анықталады: мемлекеттің, саланың, мекеменің, цехтың, зауыттың, қандайда бір әлеуметтік-экономикалық үрдістің, технологиялық экономикалық үрдістің және т.б.
2. Зерттеу мақсаты дайындалады.
3. Қарастырылатын экономикалық нысанда құрылымдық және функционалдық элементтері көрсетіледі және қойылған мақсатқа жетуге әсер ететін осы элементтердің маңыздырақ сапалы сипаттамалары ерекшеленеді.
4. Экономикалық нысанның сипаттамасын ескеру үшін символдық белгілеулер енгізіледі. Олардың қайсысы эндогенді ретінде, қайсысы экзогенді ретінде; қайсысы тәуелді шамалар ретінде, қайсылары тәуелсіз шамалар ретінде; қайсылары белгісіз (ізделінді) ретінде, қайсылары белгілі ретінде қарастырылатыны анықталады.

5. Модельдердің белгілі бір параметрлерінің арасындағы өзара байланыстар құрылады, яғни экономикалық-математикалық модель құрылады.

6. Модель бойынша есептеулер жүргізіледі және олардың нәтижелеріне талдау жүргізіледі.

7. Егер модельденетін үрдістің немесе құбылыстың бейнесінің барабар еместігінің тұрғысынан алғанда нәтижелер қанағаттандырылмаса, онда алдыңғы қадамдардың біріне қайтадан оралып, үрдісті қайтадан жалғастыру керек.

1.3. Математикалық программалаудың жалпы есебі

Аргументтер мәнінің обылысына қосымша шектеулер (теңдеулер немесе теңсіздіктер) қойылған жағдайдағы функцияның экстремумын (максимумын немесе минимумын) табу туралы есепті шығару теориялары мен әдістерін дайындайтын математиканың бөлімі математикалық программалау деп аталады. Математикалық программалау есебі жалпы жағдайда келесі түрде тұжырымдалады:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n\ ) \to max\ (min)$$
$$\begin{cases} g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b \\ \quad\quad \text{немесе} \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

$F(x)$ функциясы *мақсат функциясы* деп, ал қосымша шектеулер есептің *шектеулер жүйесі* деп аталады. Егер $F(x)$ мақсат функциясы сызықтық функция болса, ал шектеулер жүйесі сызықтық теңдеулермен немесе теңсіздіктермен берілсе, онда есеп сызықтық болып табылады. Осындай есептерді шығару әдістерін сипаттайтын математикалық программалаудың бөлімі сызықтық программалау деп аталады. Егер мақсат функциясы немесе шектеулер жүйесіндегі кем дегенде бір шектеу сызықтық емес болса, онда есеп сызықтық емес программалауға жатады.

Математикалық программалау есебін шығару екі кезеңнен тұрады. Біріншіден, шектеулерді пайдалана отырып, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларының мүмкін болатын мәндер обылысын анықтау қажет, екіншіден, табылған мүмкін болатын шешімдердің арасынан $F(x)$ мақсат функциясын максимизациялайтын немесе минимизациялайтын (оңтайландыратын) шешімдерді табу керек, осындай шешім оңтайлы шешім деп аталады.

1.4. Сызықтық программалау есептеріне мысалдар

1.4.1. Өндірісті жоспарлау есебі (ресурстарды пайдалану жайындағы есеп).

Экономикалық есептің сипаттамасы.

Кәсіпорын төрт түрлі P_1, P_2, P_3, P_4 өнім өндіру керек. Өнімдерді дайындау үшін қандайда бір шикі заттар қажет болады; айталық v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 бес түрлі шикі зат пайдаланылсын және олардың қорлары b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 бірлік сандарымен шектелген. Шикі заттардың қорлары, өнімнің бір бірлігін даярлауға жұмсалатын шикі заттың a_{ij} (i-ші өнім түрі, j -шикі зат түрі) бірлік саны 1.1-кестеде келтірілген:

1.1-кесте. Өндірісті жоспарлау есебіне қажетті мәліметтер

Шикі зат түрі	Шикі зат қоры	Өнімнің бір бірлігін даярлауға жұмсалатын шикі заттың бірлік саны			
		P_1	P_2	P_3	P_4
v_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
v_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
v_3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
v_4	b_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
v_5	b_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

Математикалық модельді құру. Әрбір өндірілген өнім бірлігінен кәсіпорынға сәйкес c_1, c_2, c_3, c_4, пайда түседі.

Өндірілген өнімді жүзеге асырғанда пайда ең көп (максималды) болатындай өнімді өндіру жоспарын құру керек.

Шығарылуы. Есептің экономикалық-математикалық моделін құру керек (есепті сызықтық программалау есебі түрінде жазу керек).

x_1, x_2, x_3, x_4 арқылы өндіруге жоспарланған сәйкес P_1, P_2, P_3, P_4 өнім бірліктерінің санын белгілейміз.

Ескеретін жағдай өнімді өндіру үшін бізге шикі заттардың қоры жеткілікті болу керек. Яғни, өнімді даярлау үшін v_1 ресурсының $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$ бірлігі, v_2 ресурсының $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$ бірлігі, v_3 ресурсының $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$ бірлігі, v_4 ресурсының $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4$ бірлігі, v_5 ресурсының $a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4$ бірлігі талап етіледі; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ресурстарын тұтыну олардың қорларынан, сәйкес b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 сандарынан аспау керек болғандықтан, ресурстарды тұтынумен олардың қорларының арасында байланыс келесі шектеулер-теңсіздіктер арқылы өрнектеледі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \le b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \le b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \le b_5 \end{cases} \tag{1.1}$$

Және де есептің мағынасы бойынша өндіруге жоспарланған өнім бірліктерінің саны теріс болуы мүмкін емес болғандықтан:

$$x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,4}) \tag{1.2}$$

(x_1, x_2, x_3, x_4) жоспарымен түсетін пайда келесі түрде анықталады:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \tag{1.3}$$

1.4.2. Шикі затпен қамтамасыздандыру туралы есеп

Экономикалық есептің сипаттамасы.

Белгілі бір шикі заттармен қамтамасыздандыруды қажет ететін P_1, P_2, P_3 үш өндірістік кәсіпорын бар болсын. Әрбір кәсіпорынға сәйкес a_1, a_2, a_3 бірлікке тең шикі зат қажет. Шикі зат сақтайтын S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 бес қойма бар. Олар кәсіпорыннан белгілі бір қашықтықта орналасқан және әр түрлі тарифтармен кәсіпорындармен қатынау мүмкіндігі бар. P_i кәсіпорын S_i қоймадан шикізат алу үшін c_{ij} ақша бірлігі жұмсалады, мұндағы i-ші кәсіпорынның, j-ші қойманың нөмірін көрсетеді. Қажетті мәліметтер 1.2-кестеде келтірілген.

1.2-кесте. Кәсіпорынды қажетті шикі затпен қамтамасыздандыру туралы мәліметтер

Кәсіпорын	Қойма				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
P_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
P_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
P_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}

Математикалық модельді құру. Әрбір қойманың өндірістік қуаттылығына байланысты қоймадағы шикі заттың саны шектеулі: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 қоймаларында сәйкес b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 бірліктегі шикі заттар бар. Аз шығын жұмсап кәсіпорындарды қажетті шикізатпен қамтамасыздандыратындай жоспар (қай қоймадан, қайда және қанша мөлшерде шикізат жеткізу керек) құру керек.

Шығарылуы. Есептің экономикалық-математикалық моделін құрамыз. x_{ij} арқылы j-ші қоймадан i-ші кәсіпорынға алынатын шикі зат санын белгілейміз. Жоспар шешімнің 15 элементінен тұрады:

$$\left.\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{matrix}\right\}$$

Қажеттілік бойынша шектеулер енгіземіз. Бұл жерде әрбір кәсіпорынға қаншалықты шикі заттың қажеттілігі ескеріледі:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = a_3 \end{cases} \qquad (1.4)$$

Енді қойманың мүмкіндіктерінен алынатын шектеулерді жазамыз, яғни қойманың өндірістік қуаттылығына байланысты қоймадағы шикі заттың саны шектеулілігін ескереміз:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \le b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \le b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \le b_3 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \le b_4 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} \le b_5 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Минимизациялау талап етілетін шикі затқа жұмсалынатын жалпы шығынды жазамыз. 1.2-кестедегі мәліметтерді пайдаланамыз:

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \qquad (1.6)$$

1.5. Сызықтық программалау есебінің қойылуы

Мақсат функциясы сызықтық функция, шектеулер жүйесі сызықтық теңдеулермен немесе теңсіздіктермен берілген жағдайда есеп сызықтық болатыны, осындай есептерді шығару әдістерін сипаттайтын математикалық программалаудың бөлімі сызықтық программалау деп аталатыны өткен тақырыптардан белгілі.

Жоғарыда келтірілген мысалдардың мағыналары әр түрлі болғанмен ортақ математикалық тұжырымдамасы бар. Айнымалыларға қойылатын шектеулердегі осы көп айнымалы қандай да бір F функциясының максимумын (минимумын) табу талап етіледі. Сонымен қатар, есептің мағынасына қарай F функциясының аргументтерінің мәні теріс емес болу керек.

m сызықтық теңдеулерден және теңсіздіктерден тұратын, және n айнымалысы бар

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.7}$$

жүйе және

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.8}$$

функциясы берілсін.

(1.7) жүйеде алдымен k теңсіздік, содан кейін $m - k$ теңдік берілген. Егер осы теңсіздіктер мен теңдіктер бастапқы берілуінде басқаша орналасса, орындарын ауыстыру нәтижесінде айтылған түрге келтіруге болады. Жүйенің сол жағы оң жағынан кіші не тең болсын дейміз, егер қандай да бір теңсіздікте керісінше болса, онда сол теңсіздікті «-1»-ге көбейту арқылы қажетті таңбамызды аламыз.

Сызықтық программалау есебінің қойылуы:

(1.8) сызықтық функция оңтайлы (яғни, максималды немесе минималды) мәнді қабылдайтындай және

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, l; l \le n), \tag{1.9}$$

шартын қанағаттандыратындай (1.7) жүйенің $X = (x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_l, \ldots ,\ x_n)$ шешімін табу қажет.

Алдыңғы тақырыпта айтып кеткендей (1.7) жүйе *шектеулер жүйесі* деп, (1.8) - F функциясы *сызықтық функция* немесе *мақсат функциясы* деп, ал (1.9) шарт *теріс еместік шарты* болып табылады.

Экстремумды іздеу типін таңдау салыстырмалы сипатта болады. Себебі, $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ функциясының максимумын іздеу

$$-F = -(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(-c_j\right)x_j$$

функциясының минимумын іздеумен пара-пар.

(1.9) шартты қанааттандыратын, (1.8) сызықтық функция тиімді мәнді (максималды немесе минималды) қабылдайтындай (1.7) шектеулер жүйесінің шешімі *тиімді шешім* (немесе *тиімді жоспар*) деп аталады.

1.6. Сызықтық программалау есебін жазу формалары

Егер сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандырса және (1.7) шектеулер жүйесі тек қана теңсіздіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *стандартты* немесе *симметриялы* деп аталады.

Егер сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандырса және (1.7) шектеулер жүйесі тек қана теңдіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *канондық* немесе *негізгі* деп аталады.

Егер сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандырса және (1.7) шектеулер жүйесі теңдеулерден және теңсіздіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *жалпы түрде берілген* деп аталады.

Сызықтық программалау есебінде кез келген сызықтық программалау есебін канондық түрге келтіруге болады. Айталық, сызықтық программалау есебі стандартты түрде берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Стандартты программалау есебін канондық түрге келтіру үшін шектеулер жүйесіне теріс емес x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m} (теңсіздік берілген қанша шектеу болса, сонша қосымша айнымалылар) қосымша айнымалыларын енгіземіз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

Қарастырылып отырған есепте барлық теңсіздіктердің таңбасы «≤» болғандықтан, қосымша айнымалылар «+» таңбасымен енгізіледі, ал егер теңсіздіктердің таңбасы «≥» болса, онда қосымша айнымалылар «-» таңбасымен енгізіледі.

1.7. Сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығару

Екі айнымалымен берілген сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығаруға болады.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

шектеулер жүйесін, теріс еместік шартты қанағаттандыратындай

$$F = c_1x_1 + c_2x_2$$

мақсат функциясының экстремумын табу керек.

Теорема 1.1. Екі айнымалымен берілген

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

теңсіздіктер шешімінің жиыны жазықтықты $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ түзуі екі жартыжазықтыққа бөлетін осы түзумен бірге жартыжазықтықтың бірі болады, ал осы түзумен бірге екінші жартыжазықтық

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$

теңсіздіктер шешімінің жиыны болады.

Сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығару алгоритмі

1. *Жарамды шешімдер облысын құру.* X_1OX_2 жазықтығында жарамды шешімдер облысын құру керек. Ол үшін сызықтық программалау есебіндегі шектеулер жүйесіндегі барлық теңсіздіктерді теңдеу түрінде ($a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,\ i = \overline{1,m}$) жазамыз да, осы теңдеулердің сәйкес түзулерін тұрғызамыз. Осы түзудің әрқайсысы X_1OX_2 жазықтығын екі жартыжазықтыққа бөледі. Берілген шектеуді қанағаттандыратын жартыжазықтықты анықтау үшін кез келген нүктені, мысалы, көбінесе координатасы $(0,0)$ нүктені қарастырған жеткілікті. Егер осы нүкте теңсіздікті қанағаттандырса, онда осы нүкте ізделінді жартыжазықтықта жататынын білдіреді және өзімізге ыңғайлы болу үшін осы жартыжазықтықты белгілейміз. Егер теңсіздік орындалмаса, онда ізделінді жартыжазықтық берілген нүктеге қарама-қарсы орналасқан жартыжазықтық болып табылады да, оны белгілейміз.с

2. *Деңгей сызығын тұрғызу.*

2.1. Мақсат функциясының $\bar{c} = (c_1, c_2)$ градиент-векторын (компоненттері мақсат функциясының айнымалыларының коэффициенттері) тұрғызамыз.

2.2. Жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін $\bar{c}$ векторына перпендикуляр деңгей сызығының үйірін тұрғызамыз.

3. *Шешімді табу.*

3.1. $\bar{c} = (c_1, c_2)$ векторының бағытында (минимум есебінде не $\bar{c}$ векторының бағытына қарама-қарсы орналасқан, не ең жақын қашықтықта орналасқан), жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең алыс қашықта орналасқан деңгей сызығын таңдау керек. Осы деңгей сызығы өтетін облыстың бұрыштық нүктелерін таңдау керек.

3.2. Экстремум нүктелерінің координаталарын және осы нүктелердегі мақсат функциясының мәнін табу керек.

Ескерту: Бұл жерде алгоритмнің бірінші қадамына қатысты келесі жағдайлар болуы мүмкін:

а) Жарамды шешімдер облысы – құр жиын. Бұл жағдайда шектеулер жүйесінің үйлесімсіздігінен сызықтық программалау есебінің тиімді шешімі болмайды.

ә) Жарамды шешімдер облысы – жалғыз нүктеден тұрады. Бұл жағдайда сызықтық программалау есебінің жалғыз ғана тиімді шешімі болады.

б) Жарамды шешімдер облысы – дөңес көпбұрыш. Бұл жағдайда есептің тиімді шешімін табу үшін көпбұрыштың барлық бұрыштық нүктелерінің координаталарын тауып, барлық бұрыштық нүктелердегі мақсат функциясының мәнін есептеп, солардың ішіндегі ең үлкенін (немесе ең кішісін) таңдау керек. Сәйкес бұрыштық нүктенің координаталары тиімді шешім болып табылады.

Әрине, тиімді шешімге сәйкес бұрыштық нүктені графикалық түрде бірден табуға болатын басқа да тәсіл бар. Айталық, c_0 - қандай да бір сан болсын. $c_1x_1 + c_2x_2 = c_0$ түзуі мақсат функцияның деңгей сызығы болып табылады. Осы түзудің әрбір нүктесінде мақсат функция c_0 мәніне тең бір ғана мәнді қабылдайды. Мақсат функцияның

$$\bar{c} = grad\ \bar{L}(x) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}; \frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$$

вектор-градиенті деңгей сызықтарына перпендикуляр және осы функция ең үлкен жылдамдықпен өсетін бағытты көрсетеді. $\bar{c}$ векторының бағытында (немесе минимизациялау есебінде - қарама-қарсы бағытта орналасқан), ең алыс қашықта орналасқан жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін деңгей сызығын таңдай отырып мақсат функция максималды (минималды) мәнді қабылдайтындай бұрыштық нүктені анықтаймыз. Егер экстремум бірден екі сыбайлас бұрыштық нүктелерде болса, онда осы екі нүктені қосатын

$$\bar{x}_{\text{тиім}} = t\bar{x}_{\text{тиім}} + (1-t)\bar{x}_{2\ \text{тиім}},\ t \in [0; 1]$$

кесіндінің кез келген нүктесі тиімді шешім болады.

в) Жарамды шешімдер облысы – дөңес шектелмеген облыс. Бұл жағдайда максимизациялау есебінде мақсат фкнкциясы жоғарыдан шектелмегендіктен, ал минимизациялау есебінде төменнен шектелмегендіктен, немесе жарамды шешімдер облысының бұрыштық нүктелерінің біреуінде жатқандықтан экстремум болмауы мүмкін.

1.1-мысал.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 24 \end{cases}$$

шектеулеріндегі

$$F = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow extr$$

сызықтық функциясының минимум және максимум мәндерін табу керек.

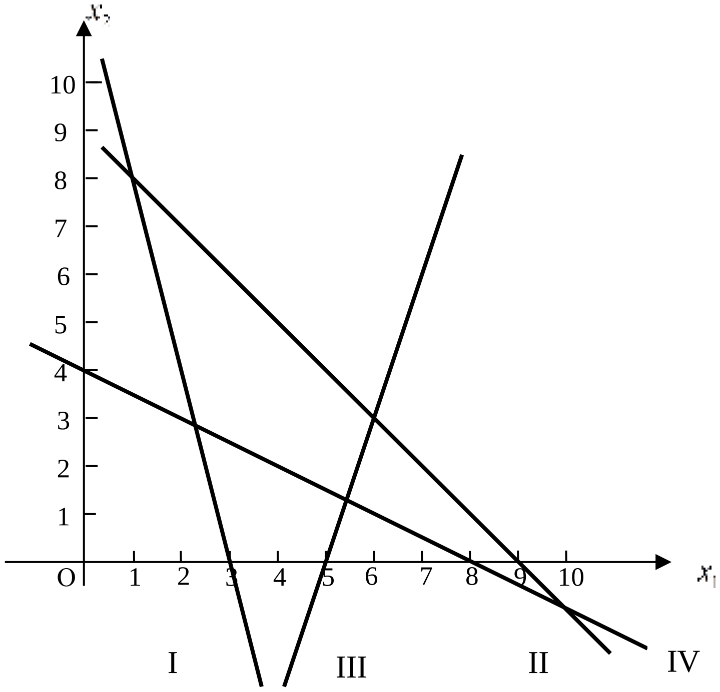
Шығарылуы.

1. Жарамды шешімдер облысын құрамыз:

1.1. Шектеулердегі теңсіздіктерді теңдіктерге алмастырамыз

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 15 \\ 3x_1 + 6x_2 =\geq 24 \end{cases}$$

1.2. Алынған теңдеулер бойынша түзулер тұрғызамыз (1.1-сурет)

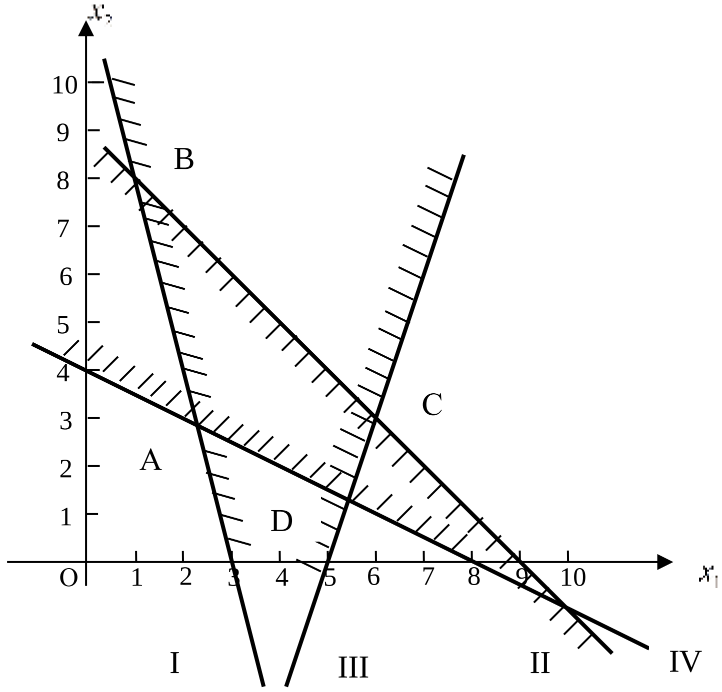


1.1-сурет

1.3. Ыңғайлы болу үшін берілген теңсіздіктер жүйесін нөмірлейміз:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 12 & \text{(I)} \\ x_1 + x_2 \leq 9 & \text{(II)} \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 & \text{(III)} \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 24 & \text{(IV)} \end{cases}$$

1.4. Жоғарыдағы теорема бойынша теңсіздіктердің шешімі жартыжазықтықты береді. Осы жартыжазықтықты анықтау үшін еркін алынған бақылау нүктесін аламыз. Айталық берілген шектеулер-теңсіздіктер үшін (0,0) нүктесі ыңғайлы болып табылады. Бақылау нүктесін теңсіздіктердің орнына қойып теңсіздіктің шешімі қай жартыжазықтықта екенін айқындаймыз. Алынған жартыжазықтықтарда белгілеудің нәтижесінде дөңес ABCD төртбұрышын аламыз (1.2-сурет).



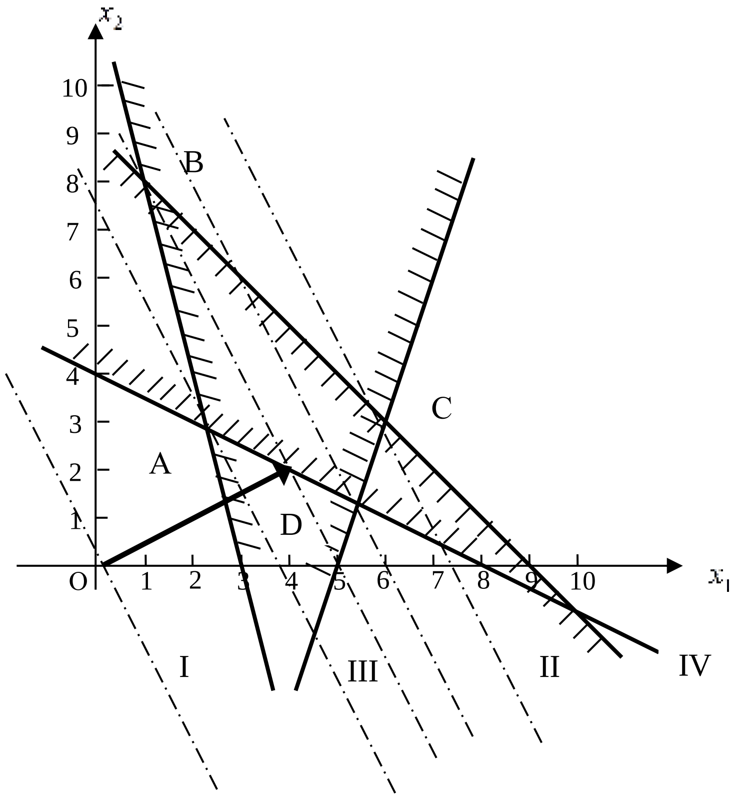
1.2-сурет

2. $F = 4x_1 + 2x_2$ мақсат функциясының $\bar{c} = (4, 2)$ градиент-векторын тұрғызамыз (ол үшін $(4, 2)$ нүктесін белгілеп координаталар бас нүктесімен қосып, вектор тұрғызамыз).

3. Жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін $\bar{c}$ векторына перпендикуляр деңгей сызығының үйірін тұрғызамыз.

4.1. Мақсат функциясын максимизациялау есебінде $\bar{c} = (4, 2)$ векторының бағытында жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең алыс қашықта орналасқан деңгей сызығын (максимум мәнді береді) таңдау керек. 1.3-суреттен көріп отырғанымыздай бұл С нүктесі.

4.2. Мақсат функциясын минимизациялау есебінде $\bar{c} = (4, 2)$ векторының бағытында жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең жақын қашықта орналасқан деңгей сызығын (минимум мәнді береді) таңдаймыз, ол А нүктесі.



1.3-сурет

5.1. Экстремум (С және А) нүктелерінің координаталарын табу керек.

А нүктесінің координаталарын анықтау үшін А нүктесі қандай қандай түзулердің қиылысуында орналасқанын қараймыз. Біздің есепте А нүктесі (I) және (IV) түзулердің қиылысуында орналасқан. Осы теңдеулерден алынған теңдеулер жүйесін шешеміз. Алынған шешім А нүктесінің координаталарын береді.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12 - 4x_1 \\ 3x_1 + 6 \cdot (12 - 4x_1) = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12 - 4x_1 \\ -21x_1 = -48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12 - 4x_1 \\ x_1 = \frac{48}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{20}{7} \\ x_1 = \frac{48}{21} \end{cases}$$

Осыдан А $\left(\frac{16}{7}, \frac{20}{7}\right)$.

Осылайша С нүктесінің координаталарын анықтаймыз. С нүктесі (II) және (III) түзулердің қиылысуында орналасқан.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ 4x_1 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$C(6,3)$.

5.2. Осы нүктелердегі мақсат функциясының мәнін табамыз.

$$F_{min}\left(\frac{16}{7},\frac{20}{7}\right) = 4 \cdot \frac{16}{7} + 2 \cdot \frac{20}{7} = \frac{104}{7},$$
$$F_{max}(6,3) = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30.$$

Жауабы: $F_{min}\left(\frac{16}{7},\frac{20}{7}\right) = \frac{104}{7}$, $F_{max}(6,3) = 30$.

1.2-мысал

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

шектеулеріндегі

$$F = x_1 + 2x_2 + x_5 \rightarrow extr$$

сызықтық функциясының минимум және максимум мәндерін графикалық әдістің көмегімен табу керек.

Шығарылуы.

Графикалық әдісті айнымалылардың саны екіге тең болған жағдайда қолданған ыңғайлы екені бізге мәлім. Әйтсе де, мақсатымыз осы мысал арқылы айнымалылар саны екіден артық болғанда да графикалық әдісті қолдануға болатынын көрсету.

Есепті графикалық әдіспен шығару керек болғандықтан біз жазықтықта жұмыс істейміз. Шектеулер жүйесінде кездесетін барлық айнымалыларды (негізгі айнымалылар) x_1, x_2 (негізгі емес айнымалылар) айнымалылары арқылы өрнектейміз.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_4 = 2 - x_2 - x_3 + x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5 = 5 - x_1 - x_2 - (1 + x_4 - x_5) - x_4 \\ x_4 = 2 - x_2 - (1 + x_4 - x_5) + x_5 \Rightarrow \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 \\ x_4 = 1 - x_2 - x_4 + 2x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_4 \\ 2x_4 = 1 - x_2 + 2x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 - x_1 - x_2 - (1 - x_2 + 2x_5) \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 + x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_5 = 3 - x_1 \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 + x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \\ x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 1 + 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_1 \\ x_4 = 2 - \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \\ x_3 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Айнымалылардың теріс еместік шартын пайдалансақ,

$$\begin{cases} x_5 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 \le \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 2 \\ \frac{1}{2}x_2 \le \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$F = x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 + 2x_2$$

1.1-мысалды шығарған алгоритм бойынша есепті әрі қарай шығарамыз.

1. Жарамды шешімдер облысын құрамыз:

ол үшін шектеулер жүйесіндегі теңсіздіктерді теңдеулерге алмастырамыз:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

алынған теңдеулер бойынша түзулер тұрғызамыз;

(0,0) бақылау нүктесінің көмегімен әрбір теңсіздік бойынша жарты жазықтықтарды анықтаймыз.

Алынған жартыжазықтықтарды біріктіру нәтижесінде дөңес OABCD - көпбұрышты аламыз. Мақсат функциясының $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ градиент-векторының көмегімен экстремум нүктелерін анықтаймыз. 1.4-суреттен көріп отырғанымыздай бұл B (max) және O (min) нүктелері.

Экстремум (O және B) нүктелерінің координаталарын табу керек.

O нүктесі координаталар бас нүктесі; B нүктесі $x_2 = 3$ және $x_1 + x_2 = 4$ түзулерінің қиылысуында орналасқан.

O нүктесінің координаталары $(0, 0)$.

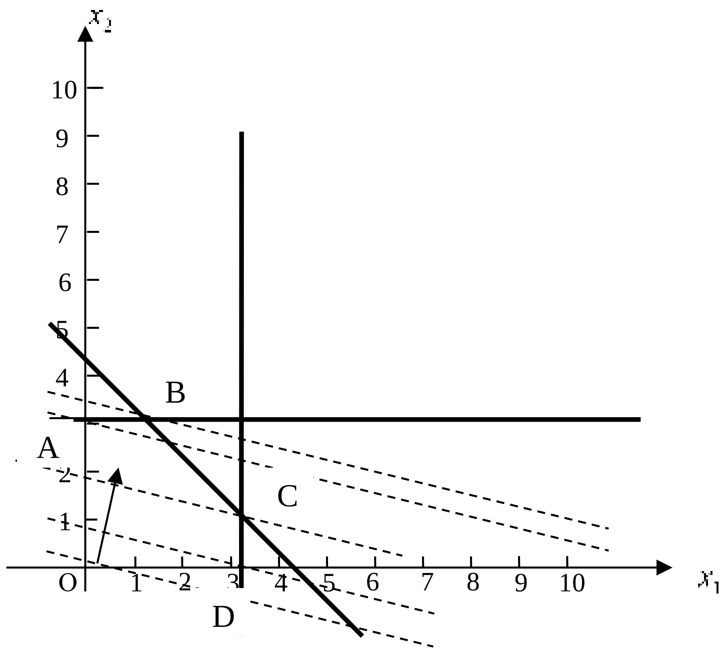
B нүктесінің координаталарын табу үшін

$\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешеміз: $x_1 = 1; x_2 = 3$

Осы нүктелердегі мақсат функциясының мәнін табамыз.

$F_{min}(0,0) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \cdot 0 = \frac{3}{2}$,
$F_{max}(1,3) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8.$
Жауабы:

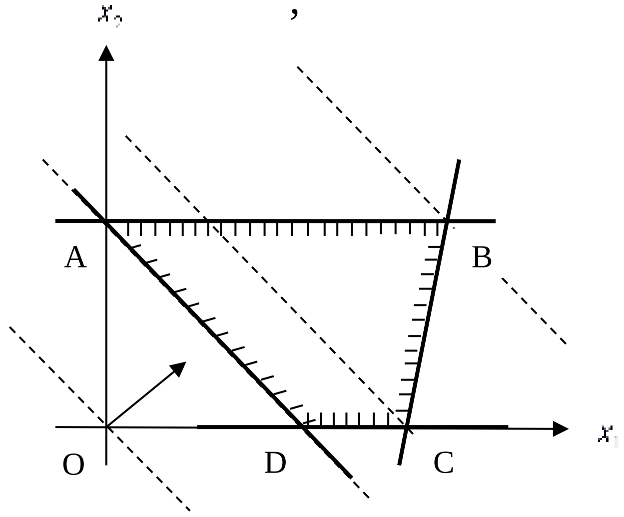
$$F_{min}(0,0) = \frac{3}{2}, F_{max}(1,3) = 8.$$



1.4-сурет

Практикада сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығару барысында әр түрлі жағдайлар кездеседі. Солардың кейбір жағдайларының графигін талдайық:

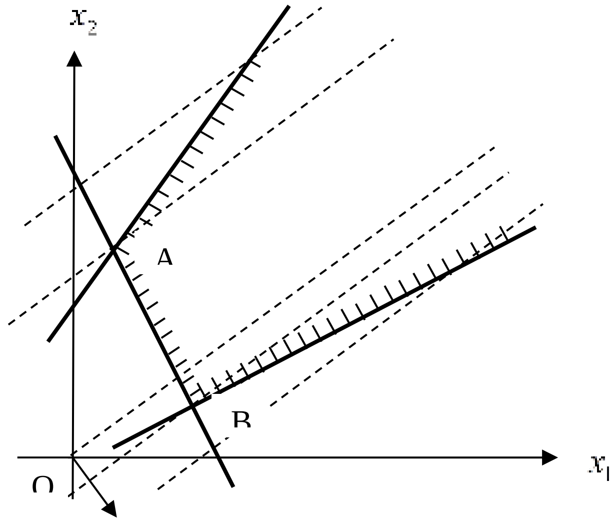
1.5-суретте мақсат функциясының градиент-векторына жүргізілген перпендикуляр деңгей сызығының үйірінің бірі жарамды шешімдер обылысы - ABCD төртбұрышының бір қабырғасымен беттеседі. Бұл, айталық, мақсат функциямыз жалпы жағдайда $F = c_1x_1 + c_2x_2$ түрінде берілсе, онда жарамды шешімдер облысының (ABCD төртбұрышының) деңгей сызығымен беттесетін қабырғасы (AD) өзара параллель, яғни $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ түрінде берілгенін байқауға болады.



1.5-сурет

Бұл жағдайда берілген есепті минимизациялайтын болсақ, осы төртбұрыштың беттесетін (AD) қабырғасындағы барлық нүктелерде мақсат функциясы минималды мәнді қабылдайды, яғни, егер, A нүктесінің координаталары $\left(0, x_2^{(1)}\right)$, D нүктесінің координаталарын $\left(x_1^{(1)}, 0\right)$ деп алсақ, онда AD кесіндісінің нүктелері $x_1 = -\frac{x_1^{(1)}}{x_2^{(1)}} \cdot x_2 + x_1^{(1)}$ теңдеуімен беріледі, мұндағы $0 \leq x_2 \leq x_2^{(1)}$. Сонда, ізделінді жауабымыздың мәні: $x_2 = c, x_1 = -\frac{x_1^{(1)}}{x_2^{(1)}} \cdot c + x_1^{(1)}$ тиімді шешімдерінің ақырсыз жиынында $F_{min} = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot x_2^{(1)} = c_1 \cdot x_1^{(1)} + c_2 \cdot 0$ немесе $F_{min} = c_2 \cdot x_2^{(1)} = c_1 \cdot x_1^{(1)}$; мұндағы $0 \leq c \leq x_2^{(1)}$ және бұл жағдайда балама оптимум бар деп айтады; ал максимизациялау есебінде B нүктесінде максимал мәнді қабылдайды. B нүктесінің координаталарын $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$ деп алсақ, онда $F_{max} = c_1 \cdot x_1^{(2)} + c_2 \cdot x_2^{(2)}$.

1.6-суретте минимизациялау есебін қарастырсақ, онда деңгей сызығын сызықтық функцияның кему (градиент-векторға қарама-қарсы бағытта) бағытында жылжытсақ, онда деңгей сызығы барлық кезде шешімнің көпбұрышымен қиылысады, демек, сызықтық функция шексіз кемиді.



1.6-сурет

Сонымен сызықтық функцияның ақырлы оптимумы жоқ, яғни

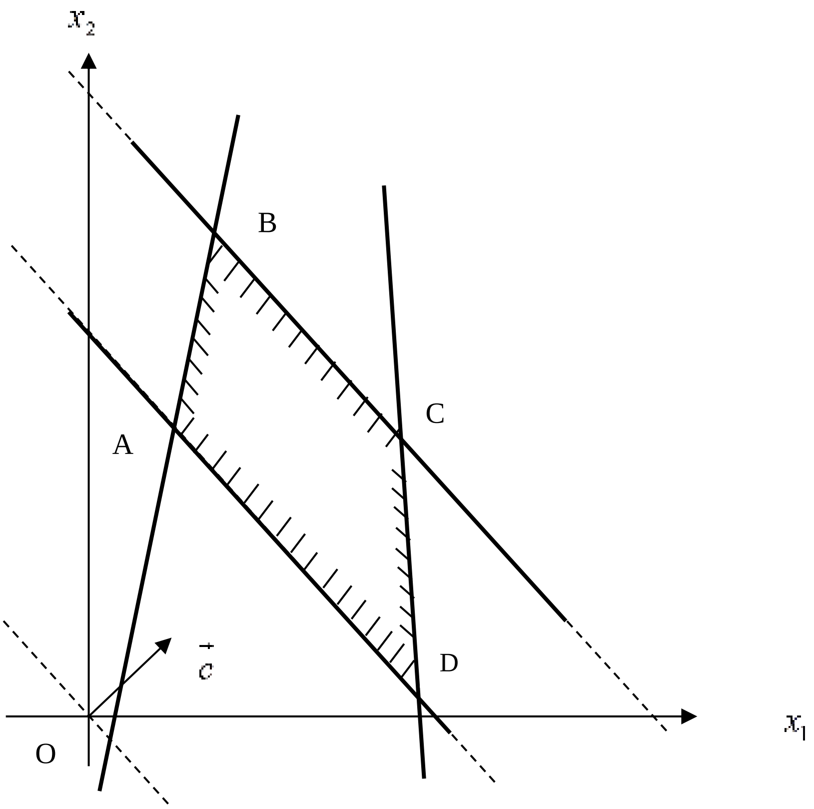
$$F_{min} = -\infty.$$

Осы жағдайда максимизациялау есебін қарастырсақ, онда деңгей сызығын сызықтық функцияның өсу (градиент-вектормен бағыттас) бағытында жылжытсақ, онда деңгей сызығы барлық кезде шешімнің көпбұрышымен қиылысады, демек, сызықтық функция шексіз артады және бұл жағдайда да сызықтық функцияның ақырлы оптимумы болмайды, яғни,

$$F_{max} = \infty.$$

1.7-суретте 1.5-суреттегі жағдайға ұқсас. Бұл жағдайда есептің шешімі: минимизациялау есебінде AD кесіндісінің барлық нүктелері; максимизациялау есебінде BC кесіндісінің барлық нүктелері.

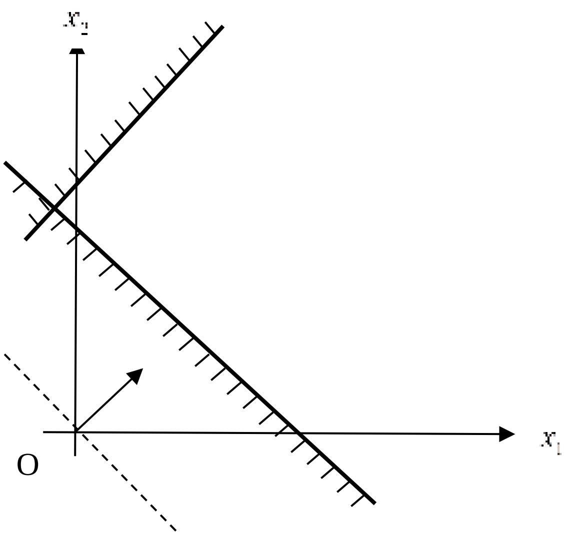
Әрі қарай талдауды оқырмандардың өздеріне ұсынамыз.



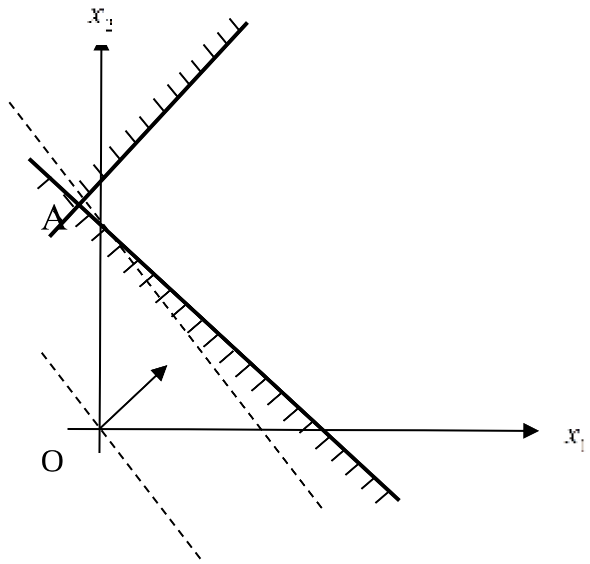
1.7-сурет

1.8-суретте жарамды шешімдер облысы бос жиын, демек шексіздіктер жүйесі үйлесімсіз, яғни есептің оптимумы жоқ.

1.9-суретте жарамды шешімдер облысы А нүктесін береді, және бұл нүктеде сызықтық функцияның оптимумы болады.



1.8-сурет



1.9-сурет

1.8. Сызықтық программалаудың екі айнымалы жағдайдағы есебін шешудің орнықтылығын талдау

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{1.10}$$

$$x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,2}) \tag{1.11}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to max \tag{1.12}$$

*(*1.10*) шектеулер жүйесін қанағаттандыратын, (*1.11*) шарттары орындалатындай және (*1.12*) функция максимум мәнді қабылдайтындай өнім өндірудің* $X = (x_1,\ x_2)$ *жоспарын табу* есебінің жалғыз шешімі болсын.

Егер есептің шешімі $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ түзу сызыққа қатысты болса, бұл сызықтың жылжуы шешімнің өзгеруіне әкеледі.

Бұл жағдайда $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ шектеу *белсенді* деп аталады.

Егер есептің шешімі $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 < b_1$ жартылай жазықтыққа тиесілі болса, онда $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ шектеуі *белсенді емес* (пассивті) болады.

Егер қандай да бір шектеулер белсенді болса, ол толығымен қолданылатындықтан тиісті ресурс *тапшы* ресурстар қатарына жатады. Белсенді емес шектеулермен байланысты ресурстарды *тапшы емес* ресурстар қатарына жатқызылуы керек.

Оңтайлы шешімді тапқаннан кейін модель параметрлерінің өзгеруі оңтайлы шешімге қалай әсер ететінін анықтау, яғни *есептің шешімінің орнықтылығына* талдау жасау қажет.

1.3–мысал. Өнімнің оңтайлы ассортиментін анықтау.

Кәсіпорын өнімнің екі P_1 және P_2 түрін шығарады, ол көтерме сатылымға шығарылады. Өнімді өндіру үшін шикізаттың екі түрі– α және β пайдаланылады. Ең ықтимал шикізат қоры сәйкесінше тәулігіне 9 және 13 бірлікті құрайды. P_1 және P_2 түрлерінің өнім бірлігіне арналған шикізаттың тәуліктік шығысы 1.3-кестеде келтірілген.

1.3-кесте. Шикізат шығыны

Шикізат	Өнімнің 1 бірлігіне арналған шикізат шығысы		Шикізат қоры, бірлік
	P_1	P_2	
α	2	3	9
β	3	2	13

Жұмыс тәжірибесі көрсеткендей, P_1 өніміне тәуліктік сұраныс P_2 өнімінің сұранысынан 1 бірліктен аспайды. Сонымен қатар, P_2 өніміне тәуліктік сұраныс 2 бірліктен аспайтыны белгілі. P_1 өнімінің көтерме бағасы 3 ақшалай бірлікті, ал P_2 өнімінің көтерме бағасы 4 ақшалай бірлікті құрайды.

Өнімді сатудан түсетін кіріс максималды болуы үшін кәсіпорын әр түрдегі өнімін қандай мөлшерде өндіруі керек?

Осы сұрақтарға жауап бере отырып, өндірістік үрдістің математикалық моделін құрамыз.

Бұл мысалда өндіріс үрдісі модельденеді, онда шикізат 3-кестеде келтірілген тұтыну нормаларына сәйкес дайын өнімге өңделеді.

x_1 және x_2 арқылы сәйкесінше P_1 және P_2 өнімдерін өндірудің тәуліктік көлемін белгілейміз. Кәсіпорынның P_1 және P_2 өнімдерін өндіру шикізатының әр түрінің шектелуінен және осы өнімге сұранысқа байланысты, сонымен қатар өндірілетін өнімдердің саны теріс болмауын ескере отырып, біз келесі шектеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \end{cases} \tag{1.13}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow max \tag{1.14}$$

1.4-мысал. Геометриялық сызбаны қолдана отырып, (1.13)-(1.14) есебінің шешімін табу керек және шешімнің орнықтылығын зерттеу керек болсын.

Жоғарыда келтірілген алгоритм бойынша есептің шешімін табамыз:

1. Жарамды шешімдер облысын құрамыз:

1.1. Шектеулердегі теңсіздіктерді теңдіктерге алмастырамыз

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 = 13 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

1.2. Алынған теңдеулер бойынша түзулер тұрғызамыз.

1.3. Ыңғайлы болу үшін берілген теңсіздіктер жүйесін нөмірлейміз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9 & (I) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13 & (II) \\ x_1 - x_2 \leq 1 & (III) \\ x_2 \leq 2 & (IV) \end{cases}$$

1.4. Теңсіздіктердің шешімі жартыжазықтықты береді. Осы жартыжазықтықты анықтау мақсатында еркін алынған бақылау нүктесін, берілген шектеулер-теңсіздіктер үшін (0,0) нүктесі ыңғайлы болып табылады. Бақылау нүктесін теңсіздіктердің орнына қойып теңсіздіктің шешімі қай жартыжазықтықта екенін айқындаймыз.

2. $F = 3x_1 + 4x_2$ мақсат функциясының $\bar{c} = (3, 4)$ градиент-векторын тұрғызамыз (ол үшін $(3, 4)$ нүктесін белгілеп координаталар бас нүктесімен қосып, вектор тұрғызамыз).

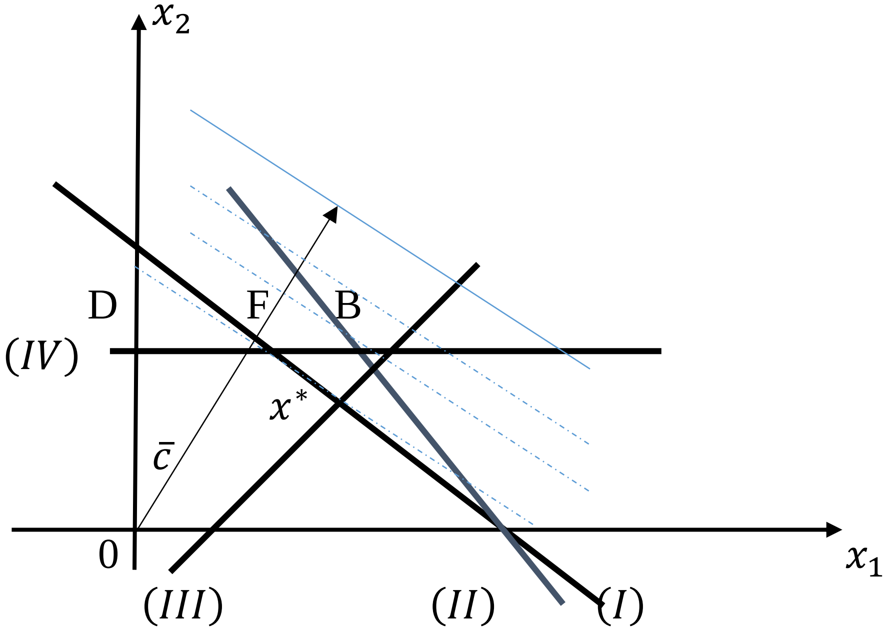
3. Жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін $\bar{c}$ векторына перпендикуляр деңгей сызығының үйірін тұрғызамыз.

4.1. Мақсат функциясын максимизациялау есебінде $\bar{c} = (3, 4)$ векторының бағытында жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең алыс қашықта орналасқан деңгей сызығын (максимум мәнді береді) таңдаймыз.

4.2. Мақсат функциясын минимизациялау есебінде $\bar{c} = (3, 4)$ векторының бағытында жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең жақын қашықта орналасқан деңгей сызығын (минимум мәнді береді) таңдаймыз.

5.1. Экстремум нүктелерінің координаталарын табамыз.

Есептің шарты бойынша мақсат функциясының максимумын табу талап етіледі.



1.10-сурет

Жоғарыда берілген алгоритм бойынша есептеу барысында $x^* = (2{,}4; 1{,}4)$ нүктесінде мақсат функциясы максимум мәнін қабылдайтыны алынады. $F(2{,}4; 1{,}4) = 12{,}8$.
Келесі сұрақтарға жауап алу қажет:

- F мақсат функциясының оңтайлы мәнін жақсарту үшін қандай да бір ресурстардың қорын қанша арттыруға болады?
- F мақсат функциясының алынған оңтайлы мәнін сақтай отырып, үшін қандай да бір ресурстың қорын қаншаға азайтуға болады?

2. (1.13) шектеулер жүйесіндегі бірінші (α шикізат қорларын анықтайтын) және үшінші (шығарылатын өнімге сұраныстың қатынасын анықтайтын) шектеулер белсенді, екінші (β шикізат қорларын анықтайтын) және төртінші (P_2 өнімдеріне сұраныс) белсенді емес болып табылады.

Сәйкесінше, α шикізаты мен P_1 және P_2 өнімдеріне сұраныстың қатынасы тапшы ресурстар болып табылады. β шикізаты артығымен бар, P_2 өніміне деген сұраныс толығымен қанағаттандырылмайды.

Тапсырманы нақтылайық.

- Табылған оңтайлы шешімді жақсартуға мүмкіндік беретін тапшы ресурстардың қорларын қаншалықты арттыруға болатынын;
- осыған дейін табылған мақсат функцияның оңтайлы мәнін өзгертпейтін тапшы емес ресурстар қорын қаншалықты азайтуға болатынын анықтауды талап етеді.

3. Алдымен α шикізат ресурстарын қарастырайық.

1.10-суретте осы ресурстың қоры көбейген кезде (I) түзу сызық (II), (III) және (IV) шектеулер сызықтары қиылысатын B нүктесіне дейін, жоғары қарай өзіне өзі параллель жылжытылады. Бұл жағдайда жоспар шешімі ODBA төртбұрышын береді, ал шешім есептің барлық шектеулері белсенді болатын $B(3;2)$ (x^*=(3;2), F(3;2)=17) нүктесінде алынады. α шикізат қорының одан әрі артуында (I) шектеу шамадан тыс артық болады және оңтайлы шығарылымға әсер етпейді. Сонымен, α ресурстық қордың максималды өсуі $(2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - 9 = 3$-ке, ал α ресурсының өсуінен табыстың максималды өсуі $Z(3;2) - Z(2.4;1.4) = 4.2$ мәніне тең болады.

4. P_1 және P_2 өнімдеріне сұраныстың өзгеруі қатысты мәселені қарастырамыз (1.10 сурет). (I) және (II) түзулерінің қиылысындағы $Q(4.2; 0.2)$ нүктесі - жаңа оңтайлы нүкте болып табылады, P_1 өнімдеріне тәуліктік сұраныс P_2 өнімінің тәуліктік сұранысынан $4.2 - 0.2 = 4$ шамасына артуы керек. Табыстың өсуі $F(3; 2) - F(4.2; 0.2) = 13.4 - 12.8 = 0.6$. P_1 және P_2 өнімдеріне сұраныстың одан әрі артуы оңтайлы шешімге әсер етпейді.

5. Тапшы емес ресурстарды қарастырайық.

(IV) шектеу P_2 өнімдеріне сұраныстың шекті деңгейін белгілейді. Егер (IV) түзуді Е нүктесіне дейін төмен қарай жылжытсақ, онда 1.10-суреттен, оңтайлы шешімнің өзгермейтінін байқаймыз.

Е нүктесінің координаталары (2.4; 1.4) болғандықтан, P_2 өнімдеріне сұраныстың $x_2 = 1.4$ мәніне дейін төмендеуі оңтайлы шешімге әсер етпейді. Демек, (IV) шектеуді $x_2 \leq 1.4$ түрінде жазуға болады.

Сол сияқты, тапшы емес β шикізат қорын шектейтін (II) түзуді координаталар бас нүктесінің бағытына қарай Е нүктесіне жеткенге дейін жылжытуға болады. Бұл жағдайда (1.6)-дағы (II) шектеудің оң жағы $3 \cdot 2.4 + 2 \cdot 1.4 = 10$ –ға тең болады, бұл осы шектеуді $3x_1 + 2x_2 \leq 10$ түрінде жазуға мүмкіндік береді. Сонымен, егер тәуліктік β шикізат қоры 3 бірлікке азайтылса, шешім өзгермейді.

Келтірілген талдау нәтижелерін 1.4- кестеге жинақтаймыз.

1.4-кесте. Шикізат шығыны

Ресурс	Ресурс түрі	Ресурс қорының барынша өзгеруі, бірлік өлшемі	Ресурс қорының өзгеруінен түсетін кірістің барынша ұлғаюы, ақшалай бірлік
α (I)	Тапшы	12-9=3	17-12,8=4,2
β(II)	Тапшы емес	10-13=-3	12.8-12.8=0
(III)	Тапшы	4-1=3	13,4-12,8=0.6
(IV)	Тапшы емес	1,4-2=0,6	12,8-12,8=0

Бақылау сұрақтары

1. Экономикалық-математикалық модельдеу қандай кезеңдерден тұрады?
2. Модельдеудің қандай түрлері кездеседі?
3. Математикалық модель, математикалық модельдеу, экономикалық-математикалық модель ұғымдарын түсіндіріңіз.
4. Экономикалық-математикалық модельдердің топтастырылуын негіздеңіз.
5. Экономикалық-математикалық модельдерді құру алгоритмін келтіріңіз.
6. Математикалық программалау есебі жалпы жағдайда қалай тұжырымдалады?
7. Сызықтық программалау қандай есептерді шығарумен айналысады?
8. Мақсат функциясы, шектеулер жүйесі дегеніміз не?
9. Сызықтық программалау есептеріне мысалдар келтіріңіз.
10. Сызықтық программалау есебінің қандай формалары кездеседі?
11. Сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығару алгоритмін беріңіз.
12. Сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығаруда жарамды шешімдер облысы қалай құрылады?
13. Сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығаруда деңгей сызығын қалай тұрғызылады?
14. Белсенді, белсенді емес шектеулер деп қандай шектеулерді айтамыз?
15. Есеп шешімінің орнықтылығына талдау қалай жүргізіледі?
16. Қандай ресурстарды тапшы ресурстар қатарына жатқызамыз, ал қандай ресурстарды тапшы емес ресурстар қатарына жатқызамыз?

1-тарау теориясы бойынша тапсырмалар

1-тарау теориясы бойынша тапсырмалар оқу құралының 110-112 беттерінде келтірілген 1-тапсырманы орындаудан тұрады.

2-ТАРАУ. СИМПЛЕКС ӘДІСІ

2.1. Сызықтық программалау есебін шығарудың жалпы идеясы

Симплекс әдісі айнымалылар мен шектеулердің кез келген санында сызықтық программалау есебінің әмбебап әдісі болып табылады.

Бұл әдісті 1946 жылы америкалық математик Дж.Данциг ұсынған болатын. Ал экономика бойынша Нобель сыйлығының лауреаты ресейлік Л.В. Канторович (1912-1986) те сызықтық программалау есептерінің дамуына зор үлес қосты.

Симплекс әдістің аталуы ол алғашқы рет D шешімдер жиыны R^n кеңістікте симплексті ($simplex$ – латыншадан аударғанда қарапайым деген мағынаны білдіреді) беретін сызықтық программалау есебіне қатысты дайындалды:

$$D = \left\{x_j \in R^n \middle| \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0\right\}$$

мұндағы $x_j = \left(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j\right)^T$ - n -өлшемді вектор, $1 = (1_1, 1_2, \dots, 1_n)^T$ - бірлік вектор; $0 = (0_1, 0_2, \dots, 0_n)^T$ - нөлдік вектор.

Канондық түрде берілген кез келген сызықтық программалау есебін шығаруға мүмкін болғандықтан симплекс әдісі әмбебап әдіс болып табылады.

*Анықтама 1***.** $(n-2)$ -өлшемді бір жазықтықта жатпайтын $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$ - n нүктенің дөңес қабықшасы S_n (n -өлшемді) *симплекс* деп аталады.

Басқаша айтқанда, симплекс бұл – n төбесі бар n -өлшемді дөңес көпжақ. Симплекстің кез келген нүктесін оның төбесінің дөңес қабықшасы ретінде беруге болады. Екіөлшемді симплекс бұл – кесінді, үшөлшемді симплекс – үшбұрыш, төртөлшемді симплекс – тетраэдр. Бұл жерде симплекстің өлшемділігі өзі орналасқан $(n-1)$-өлшемді гипержазықтықтың өлшемділігі бойынша емес, ал кеңістіктің өлшемділігі бойынша анықталады.

$x_j = \left(0_1, 0_2, \dots, 1_j, \dots, 0_n\right)^T$, $j = \overline{1, n}$ нүктелері симплекстің төбелері болып табылады.

Симплекс әдісінің негізгі идеясы қандай да бір тірек шешімнен бастап жүйенің тірек шешімдері бойымен біртіндеп тиімді тірек шешімге бағытталады. Осылайша тиімді тірек шешімге бағыттала отырып бір шешімнен бір шешімге көшу барысында максимум есебінде мақсат функциясының мәні кемімейді, минимум есебінде артпайды. Тірек шешімнің саны ақырлы болғандықтан қандай да бір қадамның ақырлы санынан кейін тиімді шешім табылады немесе есептің шешімінің жауабын аламыз.

Сызықтық программалау есебін симплекс әдіспен шығару алгоритмі.

Жоғарыда айтылғандай, алдымен сызықтық программалау есебінің канондық түрде болуын тексереміз (кері жағдайда қосымша айнымалылар енгізе отырып осы түрге келтіреміз). Осыдан кейін кез келген сызықтық программалау есебін симплекс әдісімен шығара аламыз. Тек шектеулер жүйесінің бос мүшелері оң болатындығына көңіл аударуымыз керек.

1. Базистік шешімді табу үшін айнымалыларды негізгі және негізгі емес айнымалыларға бөлеміз. Бірінші қадамда, мүмкін болса негізгі айнымалылар ретінде m айнымалыны таңдаймыз, бұл айнымалылардың әрқайсысы шектеулер жүйесінің m теңдеулерінің тек қана біреуіне енгізілуі тиіс, ал мұндай мүмкін болмаса негізгі айнымалылардың анықтамасын пайдаланамыз.

2. Негізгі айнымалыларды негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

3. Негізгі емес айнымалыларды нөлге теңестіреміз. Алынған сызықтық теңдеулер жүйесін негізгі айнымалыларға қатысты шешіп, базистік шешімді табамыз.

4. Негізгі айнымалылар анықталған өрнектердегі бос мүшелердің теріс еместігіне көзімізді жеткізе отырып, негізгі айнымалылардың теріс еместігін тексереміз. Ал теріс бос мүше кездессе алгоритмнің екінші қадамына көшеміз де, айнымалыларды негізгі және негізгі емес айнымалыларға бөлудің басқа нұсқасын қарастырамыз (бұл қадамды негізгі және негізгі емес айнымалыларға бірінші рет бөлгенде ғана орындалады).

5. Төртінші қадамды орындау нәтижесінде негізгі айнымалылар теріс емес болса, алынған базистік шешім тиімді болуы мүмкін. Сондықтан, F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

6. Негізгі емес айнымалылардың мәнін нөлге теңестіріп, табылған базистік шешімде F мақсат функциясының мәнін есептейміз.

7. F мақсат функциясының формуласында негізгі емес айнымалылардағы барлық коэффициенттер оң (теріс) болса, онда табылған базистік шешім минимал (максимал) болады да, есеп шешілген болып есептелінеді. Кері жағдайда, яғни, негізгі емес айнымалылардағы коэффициенттердің таңбалары әр түрлі болып келсе (оң және теріс коэффициенттер араласып келсе), алгоритмнің келесі қадамына көшеміз.

8. Жаңа базиске енгізілетін және одан шығарылатын айнымалыларды анықтаймыз: егер F мақсат функциясындағы негізгі емес айнымалылардың коэффициенттерінің барлығы бірдей оң (теріс) болмаса, онда мақсат функциясына енетін айнымалылардың коэффициенттерінің ішінен модулі бойынша ең үлкен болатындай теріс (оң) коэффициенті бар айнымалыны негізгі емес айнымалы ретінде таңдаймыз. Оны қандай да бір базистік айнымалы нөлге тең болғанша арттыра береміз (бұл кезде қалған негізгі емес айнымалылар өздерінің нөлдік мәнін сақтайды). Таңдап алынған негізгі емес айнымалыны келесі қадамда негізгі айнымалы ретінде, ал нөлге тең болған базистік айнымалыны жаңа негізгі емес айнымалы ретінде қарастырамыз.

9. Тиімді шешім табылғанша (F мақсат функциясындағы негізгі емес айнымалылардың коэффициенттерінің барлығы бірдей оң (теріс) болғанша), айнымалыларды негізгі және негізгі емес айнымалыларға жаңадан бөлуді пайдалана отырып алгоритмнің үшінші қадамына қайта ораламыз.

Осы алгоритмді пайдаланып әр түрлі жағдайдағы сызықтық программалау есептерін шығаруға болады.

2.1-мысал.

Симплекс әдісін пайдаланып

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

сызықтық функциясының максимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Қосымша айнымалыларды енгізе отырып шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -14 \\ x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 34 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad\quad + x_6 = 5 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + x_7 = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 34 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad\quad + x_6 = 5 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + x_7 = 8 \end{cases}$$

Бірінші итерациялық қадам.

1.1. Базистік шешімді табу үшін айнымалыларды негізгі және негізгі емес айнымалыларға бөлеміз.

н.а. x_3, x_4, x_5, x_6, x_7;

н.е.а. x_1, x_2;

1.2. Негізгі айнымалыларды негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

$$\begin{cases} x_3 = 14 + x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 34 - x_1 - 4x_2 \\ x_5 = 13 - x_1 - x_2 \\ x_6 = 5 - x_1 + x_2 \\ x_7 = 8 - x_1 \end{cases}$$

1.3. Негізгі емес айнымалыларды нөлге теңестіреміз.

$$x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Алынған сызықтық теңдеулер жүйесін негізгі айнымалыларға қатысты шешіп, базистік шешімді табамыз.

$$X_1 = (0, 0, 14, 34, 13, 5, 8);$$

1.4. Табылған базистік шешімнің компоненттері теріс емес, сондықтан ол жарамды.

1.5. F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

$$F_1 = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

1.6. Мақсат функциясының формуласында негізгі емес айнымалылардағы барлық коэффициенттер оң, сондықтан алынған базистік шешім тиімді емес.

Жаңа базиске енгізілетін және шығарылатын айнымалыларды анықтаймыз. Берілген мысалда x_1 айнымалысының коэффициенті үлкен, сондықтан x_1 айнымалысы негізгі емес айнымалыдан негізгі айнымалыға көшіріледі.

1.7. $x_2 = 0$ (1.3 қадам бойынша, x_1 айнымалысы негізгі айнымалыға көшірілгендіктен нөлге тең емес):

$$\begin{cases} x_3 = 14 + x_1 \\ x_4 = 34 - x_1 \\ x_5 = 13 - x_1 \\ x_6 = 5 - x_1 \\ x_7 = 8 - x_1 \end{cases}$$

(1.2 қадамда есептелген жүйеге $x_2 = 0$ мәнін қоямыз).
Айнымалылардың теріс еместік шартын ескерсек

$$\begin{cases} x_3 = 14 + x_1 \geq 0 \\ x_4 = 34 - x_1 \geq 0 \\ x_5 = 13 - x_1 \geq 0 \\ x_6 = 5 - x_1 \geq 0 \\ x_7 = 8 - x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14 + x_1 \geq 0 \\ 34 - x_1 \geq 0 \\ 13 - x_1 \geq 0 \\ 5 - x_1 \geq 0 \\ 8 - x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq -14 \quad (\infty) \\ x_1 \leq 34 \quad (34) \\ x_1 \leq 13 \quad (13) \\ x_1 \leq 5 \quad (5) \\ x_1 \leq 8 \quad (8) \end{cases}$$

$$x_1 = min\{\infty, 34, 13, 5, 8\};$$

1.8. Табылған 5 мәні 4-теңдеуге сәйкес келеді, 4-теңдеу - шешуші теңдеу. x_6 негізгі айнымалыдан негізгі емес айнымалыға өтеді.

Екінші итерациялық қадам.

2.1. н.а. x_1, x_3, x_4, x_5, x_7;
н.е.а. x_2, x_6;

2.2. $$\begin{cases} x_3 = 14 + (5 + x_2 - x_6) - 2x_2 \\ x_4 = 34 - (5 + x_2 - x_6) - 4x_2 \\ x_5 = 13 - (5 + x_2 - x_6) - 2x_2 \\ x_1 = 5 + x_2 - x_6 \\ x_7 = 8 - (5 + x_2 - x_6) - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 + x_2 - x_6 \\ x_3 = 19 - x_2 - x_6 \\ x_4 = 29 - 5x_2 + x_6 \\ x_5 = 8 - 2x_2 + x_6 \\ x_7 = 3 - x_2 + x_6 \end{cases}$$

2.3. $x_2 = 0, x_6 = 0, X_1 = (5, 0, 19, 29,8, 0, 3)$.

2.4. Базистік шешім жарамды.

2.5. $F = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot (5 + x_2 - x_6) + 2x_2 = 15 + 5x_2 - 3x_6$;

$$F_2 = 15 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 15.$$

2.6. Мақсат функцияда жалғыз x_2 айнымалысының коэффициенті оң болғандықтан, x_2 айнымалысы негізгі емес айнымалыдан негізгі айнымалыға көшіріледі.

2.7. $x_6 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = 5 + x_2 \\ x_3 = 19 - x_2 \\ x_4 = 29 - 5x_2 \\ x_5 = 8 - 2x_2 \\ x_7 = 3 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + x_2 \geq 0 & (\infty) \\ 19 - x_2 \geq 0 & (19) \\ 29 - 5x_2 \geq 0 & \left({}^{29}/_{5}\right) \\ 8 - 2x_2 \geq 0 & (4) \\ 3 - x_2 \geq 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2 = min\left\{\infty, 19, {}^{29}/_{5}, 4, 3\right\} = 3.$$

2.8. Бесінші теңдеу – шешуші теңдеу, x_7 айнымалысы негізгі айнымалыдан негізгі емес айнымалыға көшіріледі.

Үшінші итерациялық қадам.

3.1. н.а. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5;
н.е.а. x_6, x_7;

3.2. $$\begin{cases} x_1 = 5 + (3 + x_6 - x_7) - x_6 \\ x_3 = 19 - (3 + x_6 - x_7) - x_6 \\ x_4 = 29 - 5 \cdot (3 + x_6 - x_7) + x_6 \\ x_5 = 8 - 2 \cdot (3 + x_6 - x_7) + x_6 \\ x_2 = 3 + x_6 - x_7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 3 + x_6 - x_7 \\ x_3 = 16 - 2x_6 + x_7 \\ x_4 = 14 - 4x_6 + 5x_7 \\ x_5 = 2 - x_6 + 2x_7 \end{cases}$$

3.3. $x_6 = 0, x_7 = 0, X_1 = (8, 3, 16, 14, 2, 0, 0)$;

3.4. Базистік шешім жарамды.

3.5. $F = 15 + 5x_2 - 3x_6 = 15 + 5 \cdot (3 + x_6 - x_7) - 3x_6 =$
$= 30 + 2x_6 - 5x_7.$

$$F_3 = 30 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 30.$$

3.6. Мақсат функцияда x_6 айнымалысының коэффициенті оң болғандықтан, x_6 айнымалысы негізгі емес айнымалыдан негізгі айнымалыға көшіріледі.

3.7. $x_7 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 3 + x_6 \\ x_3 = 16 - 2x_6 \\ x_4 = 14 - 4x_6 \\ x_5 = 2 - x_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \geq 0 \\ x_2 = 3 + x_6 \geq 0 \\ x_3 = 16 - 2x_6 \geq 0 \\ x_4 = 14 - 4x_6 \geq 0 \\ x_5 = 2 - x_6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8 \geq 0 & (\infty) \\ 3 + x_6 \geq 0 & (\infty) \\ 16 - 2x_6 \geq 0 & (8) \\ 14 - 4x_6 \geq 0 & \left({}^{7}/_{2}\right) \\ 2 - x_6 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$x_6 = min\{\infty, \infty, 8, {}^{7}/_{2}, 2\} = 2.$$

3.8. Бесінші теңдеу – шешуші теңдеу, x_5 айнымалысы негізгі айнымалыдан негізгі емес айнымалыға көшіріледі.

Төртінші итерациялық қадам.

4.1. н.а. $x_1, x_2, \ x_3, x_4, x_6$;

н.е.а. x_5, x_7;

4.2. $\begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 3 + x_6 - x_7 \\ x_3 = 16 - 2x_6 + x_7 \\ x_4 = 14 - 4x_6 + 5x_7 \\ x_6 = 2 - x_5 + 2x_7 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 3 + (2 - x_5 + 2x_7) - x_7 \\ x_3 = 16 - 2 \cdot (2 - x_5 + 2x_7) + x_7 \\ x_4 = 14 - 4 \cdot (2 - x_5 + 2x_7) + 5x_7 \\ x_6 = 2 - x_5 + 2x_7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 5 - x_5 + x_7 \\ x_3 = 12 + 2x_5 - 3x_7 \\ x_4 = 6 + 4x_5 - 3x_7 \\ x_6 = 2 - x_5 + 2x_7 \end{cases}$$

4.3. $x_5 = 0, x_7 = 0$;

4.4. Базистік шешім жарамды.

4.5. $F = 30 + 2x_6 - 5x_7 = 30 + 2 \cdot (2 - x_5 + 2x_7) - 5x_7 =$
$= 34 - 2x_5 - x_7$;

$$F_4 = 34 - 2 \cdot 0 - 0 = 34.$$

4.6. Мақсат функцияда оң коэффициентті айнымалы жоқ, яғни тиімділік критерийі орындалады. Алынған шешім тиімді.

Жауабы: $F_4 = 34, X_4 = (8, 5, 12, 6, 0, 2, 0)$.

2.2-мысал.

Симплекс әдісін пайдаланып

$$\begin{cases}-y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3\\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2\end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to min$$

сызықтық функциясының минимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Қосымша айнымалыларды енгізе отырып шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз.

$$\begin{cases}-y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 \qquad = 3\\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \qquad\qquad - y_7 = 2\end{cases}$$

Бірінші қадамда қолданатын ереже бойынша қарастыратын болсақ, негізгі айнымалылар - y_6, y_7. Бұл жағдайда базистік шешім $Y = (0, 0, 0, 0, 0, -3, -2)$ - жарамды емес, себебі базистік шешім ретінде қарастырып отырған шешімде екі теріс компонент бар. Ал негізгі айнымалыларға қойылатын талаптарды ескерсек, әрбір теңдеуде бір рет кездесетін айнымалыны негізгі айнымалы ретінде алуға болады. Біздің мысалда бірінші теңдеудегі y_5 айнымалысы шектеулер жүйесінде бір рет қана кездеседі, сондықтан, y_5 айнымалысын негізгі айнымалы ретінде қарастырамыз. Ал екінші теңдеуден y_7 айнымалысын аламыз.

Сонда негізгі айнымалылар - y_5, y_7.

$$\begin{cases}y_5 = 3 + y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_6\\ y_7 = -2 + 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4\end{cases}$$

$$Y_1 = (0, 0, 0, 0, 3, 0, -2).$$

Базистік шешім жарамды емес, бір теріс компонент бар.

Базистік шешім жарамды емес болған жағдайда мақсат функциямен жұмыс істеуге болмайды. Сондықтан екінші теңдеуден кез келген оң коэффициентті айнымалыны (y_3) негізгі айнымалы ретінде қарастырамыз.

Бірінші итерациялық қадам.

1.1. н.а. y_3, y_5;

н.е.а. y_1, y_2, y_4, y_6, y_7;

1.2. $\begin{cases} y_5 = 3 + y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_6 \\ y_3 = 2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = 2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7 \\ y_5 = 3 + y_1 - (2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7) - y_4 + y_6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = 2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7 \\ y_5 = 1 + 3y_1 + 3y_2 - 2y_4 + y_6 - y_7 \end{cases}$

1.3. $y_1 = 0, y_2 = 0, y_4 = 0, y_6 = 0, y_7 = 0$;
$Y_1 = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0)$.

1.4. Базистік шешім жарамды.

1.5. $Z = 14y_1 + 34y_2 + 13 \cdot (2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7) + 5y_4 + 8 \cdot (1 + 3y_1 + 3y_2 - 2y_4 + y_6 - y_7) = 14y_1 + 34y_2 + 26 - 26y_1 - 52y_2 + 13y_4 + 13y_7 + 5y_4 + 8 + 24y_1 + 24y_2 - 16y_4 + 8y_6 - 8y_7 = 34 + 12y_1 + 6y_2 + 2y_4 + 8y_6 + 5y_7$

$Z_1 = 34 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 34.$

1.6. Мақсат функцияда теріс коэффициентті айнымалы жоқ, яғни, алынған шешім тиімді шешім болып табылатынын білдіреді.

Жауабы: $Z_1 = 34$, $Y_1 = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0)$.

2.2. Сызықтық программалау есебін симплекс кестемен шығару алгоритмі

Сызықтық программалау есебін компьютердің көмегімен шығаратын жағдайда симплек әдісінің алгоритмін пайдаланған ыңғайлы, ал мұндай есептер компьютерсіз шығарылатын болса, симплекс кестені пайдаланған ыңғайлы болып саналады.

Сызықтық программалау есебін симплекс кестемен шығару алгоритмі.

Сызықтық программалау есебінің максимумын анықтау керек болсын.

1. Қосымша айнымалыларды енгізгеннен кейін теңдеулер жүйесін және сызықтық функцияны бір жүйеге жаза отырып *кеңейтілген жүйе* деп аталатын мына түрдегі жүйені аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots . + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ F - c_1x_1 + c_2x_2 - \cdots - c_nx_n = 0 \end{cases}$$

Алынған жүйедегі енгізілген қосымша айнымалылардың таңбасы жүйенің оң жағындағы бос мүшелердің таңбасымен бірдей болсын деп ұйғарамыз, кері жағдайда М-әдісін (жасанды базис әдісін) пайдаланамыз.

2. Бастапқы кеңейтілген жүйенің компоненттерін бірінші симплекс кестеге енгіземіз. Кестенің бірінші бағанына негізгі айнымалыларды, екінші бағанына кеңейтілген жүйенің b_1, b_2, …, b_m бос мүшелерін, бірінші жолына барлық айнымалыларды жазамыз. Кестенің жұмыс бөлігінде (үшінші бағаннан және екінші жолдан бастап) кеңейтілген жүйенің a_{ij} коэффициенттері жазылады.

2.1 Кестенің соңғы бағанына айнымалының ең үлкен мүмкін болатын мәнін есептеу үшін қажет болатын бағалау қатынасы жазылады. Сызықтық функцияның теңдеуі үшін келтірілген кестенің соңғы жолы *бағалау жолы* деп аталады. Бұл жолда мақсат функциясының қарама-қарсы таңбасымен алынған коэффициенттері жазылады. Әрі қарай кесте белгілі ережелер бойынша түрлендіріледі.

3. Есептің максимумын іздегендегі тиімділік критерийінің орындалуын тексереміз: егер кестенің соңғы жолында теріс коэффициенттер жоқ болса, онда шешім тиімді және $F = c_0$ (кестенің сол жақ төменгі бұрышында), негізгі айнымалылар a_{i0} (екінші баған) мәндерін қабылдайды, негізгі емес айнымалылар нөлге тең болады. Осылайша тиімді базистік шешімді аламыз.

3.1. Егер тиімділік критерийі орындалмаса (кестенің соңғы жолында теріс коэффициенттер бар болса), онда кестенің соңғы жолындағы модулі бойынша ең үлкен теріс коэффициент *шешуші s бағанды* анықтайды.

Келесі ережелер бойынша әрбір жолдың шектеулерін бағалауды қарастырайық.

1) егер b_i мен a_{is} таңбалары әр түрлі болса, онда ∞-ке тең болады;
2) егер $b_i = 0$ мен және $a_{is} < 0$ болса, онда ∞-ке тең болады;
3) егер $a_{is} = 0$ болса, онда ∞-ке тең болады;
4) егер $b_i = 0$ мен және $a_{is} > 0$ болса, онда 0-ге тең болады;
5) егер b_i мен a_{is} таңбалары бірдей болса, онда $\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$ қатынасымен есептеледі.

$\min\limits_i \left\{\frac{b_i}{a_{is}}\right\}$ - анықтаймыз. Егер ақырлы минимум жоқ болса, онда есептің ақырлы оптимумы жоқ ($F_{max} = \infty$). Егер минимум ақырлы болса, онда осы минимумды қабылдаған мән орналасқан q жолды (егер осы минимум бірнеше рет кездессе, олар орналасқан жолдың кез келгенін) таңдаймыз және ол жолды *шешуші жол* деп атаймыз. Шешуші жолмен шешуші бағанның қиылысуындағы элемент a_{qs} *шешуші элемент* деп аталады.

4. Келесі симплекс кестеге көшу үшін төмендегі ережелерді пайдаланамыз:

1. кестенің сол жақ бағанына жаңа базисті жазамыз: x_q негізгі айнымалының орнына - x_s айнымалыны жазамыз;

2. негізгі айнымалыларға сәйкес келетін бағандарға нөлдер мен бірлерді жазамыз: жолдағы айнымалы мен бағандағы

айнымалы бірдей болса 1 санын, ал басқа айнымалы болса 0 санын жазамыз:

3. q нөмірлі жаңа жолды алдыңғы кестедегі осы жолдың элементтерін a_{qs} шешуші элементке бөлу арқылы аламыз;

4. қалған a'_{ij} элементтерін тіктөртбұрыш ережесімен есептейміз:

$$\begin{array}{cc} a_{ij} & a_{is} \\ & \\ a_{qj} & a_{qs} \end{array}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}.$$

Әрі қарай алгоритмнің 3 қадамына көшеміз.

2.3-мысал.

Симплекс кестені пайдаланып

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

сызықтық функциясының максимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Қосымша айнымалыларды енгізе отырып шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз және кенейтілген жүйені жазамыз:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 \ \ + x_4 = 34 \\ x_1 + x_2 \ + x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 5 \\ x_1 + x_7 = 8 \\ F - 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Бірінші симплекс кестені толтырамыз.

2.1-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_3	14	**-1**	2	1	0	0	0	0	∞	
x_4	34	**1**	4	0	1	0	0	0	34	
x_5	13	**1**	1	0	0	1	0	0	13	
x_6	**5**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**5**	⇐
x_7	8	**1**	0	0	0	0	0	1	8	
F	0	**-3**	-2	0	0	0	0	0	max	
		⇑								

Тиімділік критерийін тексереміз. Соңғы жолда екі теріс коэффициент бар. Солардың ішінде модулі бойынша ең үлкенін таңдаймыз (-3), бірінші баған шешуші баған болады (бұл баған ⇑ арқылы белгіленген және қалың боялған), x_1 айнымалысы негізгі айнымалыға көшеді. Бағалау қатынасын анықтаймыз және $x_1 = min\{\infty, 34, 13, 5, 8\} = 5$.

Төртінші жол - шешуші жол (ол жол да ерекше белгіленген). Шешуші жол мен шешуші бағанның қиылысуында $a_{41} = 1$ шешуші элемент орналасқан.

2.2-кестені алгоритмнің 4-қадамындағы ережелер бойынша толтырамыз.

1. кестенің сол жақ бағанына жаңа базисті жазамыз: x_6 негізгі айнымалының орнына - x_1 айнымалыны жазамыз;
2. негізгі айнымалыларға сәйкес келетін аттас айнымалылар орналасқан бағандарға нөлдер мен бірлерді жазамыз (мысалы, x_3 негізгі айнымалыға сәйкес жолдың және аттас бағанның қиылысында 1 санын жазамыз, осы бағанның басқа торларына нөлдерді жазамыз);

3. төртінші жаңа жолды бірінші кестедегі осы жолдың элементтерін $a_{41} = 1$ шешуші элементке бөлу арқылы аламыз;
4. кестенің толтырылмаған бос торларын тіктөртбұрыш ережесімен есептеп толтырамыз ($a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}$, мұндағы a_{ij}, a_{is}, a_{qj} мәндерін 1-кестеден аламыз, $s = 1$, $q = 4$; мысалы кестенің жұмыс үшінші жолымен екінші бағанның қиылысуындағы торды толтыру үшін: $i = 3$, $j = 2$, $a_{ij} = a_{32} = 1, a_{is} = a_{31} = 1, a_{qj} = a_{42} = -1, a_{qs} = a_{41} = 1$, сонда $a'_{ij} = a'_{32} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}} = 1 - \frac{1\cdot(-1)}{1} = 2$, т.т.):

2.2-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_3	19	0	**1**	1	0	0	1	0	19	
x_4	29	0	**5**	0	1	0	-1	0	29/5	
x_5	8	0	**2**	0	0	1	-1	0	4	
x_1	5	1	**-1**	0	0	0	1	0	∞	
x_7	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**3**	⇐
F	15	0	**-5**	0	0	0	3	0	max	
			⇑							

Соңғы жолда бір теріс элемент бар, сондықтан алынған шешім тиімді емес. Осыдан екінші баған - шешуші баған болып табылады. Бағалау қатынасы орналасқан бағанды толтырамыз. Нәтижесінде бесінші жол – шешуші жол болатынына көзімізді жеткіземіз. Осылайша келесі кестені толтырамыз.

2.3-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_3	16	0	0	1	0	0	**2**	-1	8	
x_4	14	0	0	0	1	0	**4**	-5	14/4	
x_5	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**-2**	**2**	⇐
x_1	8	1	0	0	0	0	**0**	1	∞	
x_2	3	0	1	0	0	0	**-1**	1	∞	
F	30	0	0	0	0	0	**-2**	5	max	

$\Uparrow$

Алдындағы кестелерді толтырған алгоритмді пайдалана отырып келесі кестеге көшеміз:

2.4-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	12	0	0	1	0	-2	0	3	
x_4	6	0	0	0	1	-4	0	-13	
x_6	2	0	0	0	0	1	1	-2	
x_1	8	1	0	0	0	0	0	1	
x_2	5	0	1	0	0	1	0	-1	
F	34	0	0	0	0	2	0	1	max

Соңғы жолда теріс элемент жоқ. Яғни, тиімділік критерийі орындалады.
Жауабы: $F_{max} = 34, X = (8, 5, 12, 6, 0, 2, 0)$.

Симплекс кестені пайдаланып сызықтық программалаудың минимизациялау есебін шығару барысында да максимизациялау есебін шығарғанымыздағыдай қадамдарды орнындаймыз. Тек өзгешелігі – тиімділік критерийінде. Максимизациялау есебінде біз соңғы (F мақсат функциясы орналасқан) жолда теріс элементтерінің болмауын талап етсек, минимизациялау есебінде оң элемент жоқ болғанша есепті шығаруды жалғастырамыз.

2.3. Бастапқы базистік шешімді жасанды базис әдісімен анықтау

Жасанды базис әдісі (M әдісі) сызықтық программалаудың кез келген есебін, соның ішінде бастапқы канондық формасы берілмеген жағдайдағы есепті де шығару үшін қолданылады.

2.2-мысалды шығару барысында кез келген сызықтық программалау есебін шығарған кезде жарамды базистік шешімді бірден алу мүмкін бола бермейтініне көзіміз жетті. Осындай жағдайда сызықтық программалау есебін шығару үшін жасанды базис әдісін пайдаланып, симплекс әдісімен шығаруға болатындай алдын-ала дайындап алуға болады. Яғни жасанды базис әдісінің көмегімен алғашқы жарамды базистік шешімді табу қиындықтарынан құтылуға мүмкіндік береді.

Жасанды базис әдісінің алгоритмі.

1. Есепті канондық түрге келтіреміз.

2. Алғашқы базистік шешімде теріс компонент беретін шектеулер жүйесінің әрбір теңдеуіне теңдік таңбасын өзгертпей, коэффициенттері бірге тең, оң жағындағы бос мүшенің таңбасымен бірдей теріс емес жасанды айнымалыларды енгіземіз.

3. Енгізілген барлық жасанды айнымалыларды, жасанды айнымалылар енгізілмеген теңдіктердегі қосымша айнымалыларды бірінші симплекс кестедегі негізгі айнымалылар бағанына жазамыз.

4. $T = F - M \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)$ – сызықтық функциясын құрамыз, мұндағы $y_1, y_2, \ldots, y_k$ - енгізілген жасанды айнымалылар, M - үлкен сан, $M \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)$ - M функциясы.

5. $T = F - M \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)$ функциясының максимумын іздейміз. Бұл кезде келесі жағдайларды ескеру қажет:

а) егер осы T-есептің тиімді шешімінде барлық жасанды айнымалылар нөлге тең болса, онда сәйкес бастапқы есептің шешімі тиімді болады және мақсат функциялардың экстремумдары тең болады;

ә) егер осы T-есептің тиімді шешімінде жасанды айнымалылар ең болмағанда біреуі нөлден өзге болса, онда шектеулер жүйесінің үйлесімді емес болады да, бастапқы есептің шешімі тиімді болмайды;

б) егер T-есептің тиімді шешімі жоқ болса, онда бастапқы есептің де тиімді шешімі болмайды;

в) егер T-есептің максимумы шексіздікке тең болса, онда бастапқы есеп те шешімсіз есеп болып табылады, және не бастапқы есептің де максимумы шексіздікке тең болады, не есептің шарты қайшылықта болып келеді.

Егер негізгі айнымалылар бағанында жасанды айнымалылар жоқ болса, онда олар әрі қарай есептеулерде қолданылмайды, яғни, барлық айнымалылар жазылған бағандардан да жасанды айнымалыларды алып тастаймыз.

6. Есепті әрі қарай симплекс кестені толтырған әдісті пайдаланып шығарамыз.

Практикада негізінен M функциясының минимумын табудың орнына $(-M)$ функцияның максимумын табады.

2.4-мысал.

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \rightarrow min$$

сызықтық функциясының минимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Бұл мысалды біз симплекс әдісін пайдаланып (2.2-мысал) шығарған болатынбыз. Ол кезде алғашқы базистік шешім жарамды емес болды да, біз есепті түрлендіріп, базистік шешім жарамды болатындай түрге келтірдік. Енді осы есепті жасанды базис әдісін пайдаланып шығарамыз.

Есепті канондық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 \ = 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \qquad - y_7 = 2 \end{cases}$$

Негізгі айнымалылар ретінде y_6, y_7 айнымалыларын қарастыруға болады. Базистік шешімде екі теріс компонент бар. Сондықтан, z_1 және z_2 жасанды айнымалыны қосамыз:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 + z_1 = 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \ - y_7 + z_2 = 2 \end{cases}$$

$$T = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 - M(z_1 + z_2) \rightarrow min$$

M функциясының минимумын табудың орнына $(-M)$ функцияның максимумын табамыз:

$$T = -14y_1 - 34y_2 - 13y_3 - 5y_4 - 8y_5 - M(z_1 + z_2) \to max$$

2.5-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар									Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	z_1	z_2		
z_1	3	3	**-1**	1	1	1	-1	0	1	0	3	
z_2	**2**	**2**	**4**	1	**-1**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**1/2**	⇐
F	0	14	**34**	13	5	8	0	0	0	0	max	
$M_Ф$			**-5 M**	-2 M	0	- M	M	M				
			⇑									

Бағалау қатынасынан көріп отырғанымыздай екінші жол шешуші жол болып табылады $\left(min\left\{3, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\right)$. Базистегі z_2 айнымалысының орнына y_2 айнымалысын жазамыз да, z_2 бағанын жазбай тастап кетеміз. Бір жасанды айнымалыдан құтылдық.

2.6-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар								Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	z_1		
z_1	**5/2**	**-3/2**	**0**	**3/4**	**5/4**	**1**	**-1**	**1/4**	**1**	**2**	⇐
y_2	1/2	1/2	1	1/4	**-1/4**	0	0	-1/4	0	∞	
F	-17	-3	0	9/2	**27/2**	8	0	17/2	0	max	
$M_Ф$		3/2 M	0	-3/4 M	**-5/4 M**	- M	M	-1/4 M	0		
					⇑						

Бірінші жол - шешуші жол $(min\{2, \infty\} = 2)$. Базистегі z_1 айнымалысының орнына y_4 айнымалысын жазамыз да, z_1 бағанын жазбаймыз. Жасанды айнымалылардан құтылдық. Соңғы жол жазылмайды. Әрі қарай симплекс кестені жалғастырамыз.

2.7-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
y_4	2	-6/5	0	**3/5**	1	4/5	-4/5	1/5	10/3	
y_2	**1**	**1/5**	**1**	**2/5**	**0**	**1/5**	**-1/5**	**-1/5**	**5/2**	⇐
F	-44	66/5	0	**-18/5**	0	-14/5	54/5	29/5	max	

⇑

Соңғы жолда теріс элементтер бар, яғни, тиімділік критерийі орындалмайды. Модулі бойынша ең үлкен теріс элемент орналасқан баған – шешуші баған.

2.8-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
y_4	**1/2**	**-3/2**	**-3/2**	**0**	**1**	**1/2**	**-1/2**	**1/2**	**1**	⇐
y_3	5/2	1/2	5/2	1	0	**1/2**	-1/2	-1/2	5	
F	-35	15	9	0	0	**-1**	9	4	max	

⇑

Соңғы жолда бір теріс элемент бар, тиімділік критерийі орындалмайды. Осы элемент орналасқан баған – шешуші баған.

2.9-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
y_5	1	-3	-3	0	2	**1**	-1	1	1	
y_3	2	2	4	1	-1	**0**	0	-1	-1	⇐
F	-34	12	6	0	2	**0**	8	5	5	

Соңғы жолда теріс элемент жоқ, демек, тиімділік критерийі орындалады.

$Жауабы.\ F_{max} = -34;\ Z_{min} = -F_{max};\ Y = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0)$

Бақылау сұрақтары

1. Симплек дегеніміз не?
2. Сызықтық программалау есебін симплекс әдіспен шығару алгоритмін түсіндіріңіз.
3. Негізгі, негізгі емес айнымалылардың айырмашылықтары қандай?
4. Сызықтық программалау есебін симплекс әдіспен шығару барысындағы тиімділік критерийін сипаттаңыз.
5. Симплекс кестені қолданып сызықтық программалау есебін шығару алгоритмі.
6. Бағалау жолы қалай анықталады?
7. Шешуші баған қалай анықталады?
8. Шешуші элемент қалай анықталады?
9. Симплекс кестедегі әрбір жолдың шектеулерін бағалау қалай жүргізіледі?
10. Бастапқы базистік шешімді М әдісімен анықтау.

2-тарау теориясы бойынша тапсырмалар

2-тарау теориясы бойынша тапсырмалар оқу құралының 113-118 беттерінде келтірілген 2 а), ә) және 3-ші тапсырмаларды орындаудан тұрады.

3-ТАРАУ. ҚОСЖАҚТЫЛЫҚ ТЕОРИЯСЫ

3.1. Сызықтық программалаудың қосжақтылық теориясының элементтері

Сызықтық программалау теориясында әрбір бастапқы (тура) есепке қосжақты есепті сәйкес қоюға болатын қосжақтылық теориясы маңызды рөлді атқарады.

Тура есепке және қосжақты есепке ортақ мәселелер: есептің әрқайсысында

а) сызықтық функцияның экстремумы ізделінеді;

ә) ізделінді айнымалылар шектеулер жүйесін қанағаттандыруы керек. Сонымен қатар екі есепте де шектеулер жүйесіндегі айнымалыларының коэффициенттерінен тұратын A матрицасының, бос мүшелерден тұратын B векторының, Сызықтық функциясының коэффициенттерінен тұратын C векторының элементтері пайдаланылады.

Ал тура есеппен және қосжақты есептің айырмашылығын *өзара қосжақты есептердің қасиеттері* ретінде берейік:

1. Бір есепте сызықтық функцияның максимумы ізделінсе, екіншісінде минимум ізделінеді.

2. Бір есептегі сызықтық функцияның айнымалыларының коэффициенттері екіншісінде шектеулер жүйесіндегі бос мүшелер болып табылады.

3. Есептің әр қайсысы стандарттық түрде берілген, және минимизациялау есебінде барлық теңсіздіктер “$\leq$” түрінде беріледі, ал минимизациялау есебінде барлық теңсіздіктер “$\geq$” түрінде беріледі.

4. Екі есептің де шектеулер жүйесіндегі айнымалылардың коэффициенттерінен құралған матрица бір біріне транспонирленген болып табылады.

Бастапқы есеп үшін: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, қосжақты есеп үшін: $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{mn} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

5. Бір есептегі шектеулер жүйесінің теңсіздіктер саны екінші есептегі айнымалылар санымен өзара тең.

6. Айнымалылардың теріс еместік шарты екі есепте де бар.

Осы көрсетілген қасиеттерді қамтитын сызықтық программалаудың есептері *симметриялы өзара қосжақты есептер* деп аталады.

Бастапқы есеп	Қосжақты есеп
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots . + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \quad (3.1)$$ шектеулер жүйесін қанағаттандыратындай, $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, \dots, n)$ (3.2) теріс еместік шарты орындалатындай $$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max \quad (3.3)$$ сызықтық функция максимум мәнін қабылдайтындай $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -табу керек .	$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_n \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots . + a_{m2}y_n \ge c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \quad (3.4)$$ шектеулер жүйесін қанағаттандыратындай, $y_i \ge 0\ (i = 1, 2, \dots, m)$ (3.5) теріс еместік шарты орындалатындай $$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \to min \quad (3.6)$$ сызықтық функция минимум мәнін қабылдайтындай $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$-табу керек.

Берілген есепке қосжақты есепті құрудың алгоритмі:

1. Бастапқы есептің шектеулер жүйесінің барлық теңсіздіктерін бір мағынаға келтіру: егер бастапқы есепте сызықтық функцияның максимумы ізделінсе, онда шектеулер жүйесінің барлық теңсіздіктерін “≤” түріне, ал егер минимум ізделінсе - “≥” түріне келтіру керек. Егер осы айтылған талап орындалмайтындай теңсіздік кездессе, онда оны (-1)-ге көбейту керек.

2. Жүйенің A_1 кеңейтілген матрицасын құрамыз. Бұл матрицаға A матрицасындағы айнымалылардың коэффициенттері, шектеулер жүйесінің бос мүшелер бағаны және сызықтық функциядағы айнымалылардың коэффициенттерінен тұратын жол енгізіледі.

3. A_1 матрицасына транспонирленген A'_1 матрицасын табу керек.

4. Алынған A'_1 матрицасының және айнымалылардың теріс еместік шартының негізінде қосжақты есепті құрамыз.

3.1-мысал.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

сызықтық программалау есебіне қосжақты есеп құру керек.

Шығарылуы.

1. Бастапқы есеп максимум табуға арналған. Сондықтан шектеулер жүйесіндегі теңсіздіктер “≤” түрінде болуы керек. Берілген есепте бірінші теңсіздіктің таңбасы “≥”, оны “≤” түріне келтіру үшін -1-ге көбейтеміз.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

2. Жүйенің кеңейтілген матрицасын құрамыз:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 14 \\ 1 & 4 & 34 \\ 1 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & F \end{pmatrix}$$

(соңғы жол – мақсат функциясының айнымалыларының коэффициенттері, соңғы баған – бос мүшелер бағаны).

2. A матрицасына транспонирленген A^T матрицасын жазамыз:

3.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 34 & 34 & 13 & 5 & 0 & Z \end{pmatrix}$$

(соңғы жол – бос мүшелер, соңғы баған – мақсат функциясының айнымалыларының коэффициенттер бағаны).

4. A^T матрицасының негізінде қосжақты есепті құрамыз:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to min$$

3.2. Қосжақтылықтың негізгі теоремалары

Өзара қосжақты есептер берілсін.

Теорема 3.1. (*қосжақтылық теориясының негізгі теңсіздігі*). Кез келген бастапқы есептің $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ жарамды шешімдері және қосжақты есептің $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ жарамды шешімдері үшін келесі теңсіздік ақиқат:

$$F(X) \leq Z(Y) \text{ немесе } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (3.7)$$

Теорема 3.2 (*тиімділіктің жеткілікті белгісі немесе Канторовичтің тиімділік критерийі*).

Егер $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ және $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ үшін

$$F(X^*) = Z(Y^*) \tag{3.8}$$

теңдігі орындалатындай өзара қосжақты есептердің жарамды шешімдері болса, онда X^* - бастапқы есептің тиімді шешімі, ал Y^* - қосжақты есептің тиімді шешімі.

Қосжақтылықтың бірінші (негізгі) теоремасы.

Теорема 3.3 (*бірінші теорема - жарамды шешімнің тиімділігінің қажетті белгісі*). Егер өзара қосжақты есептердін біреуінің тиімді шешімі бар болса, онда екіншісінің де тиімді шешімі бар болады, және олардың сызықтық функциясының тиімді мәндері өзара тең болады:m

$$F_{max} = Z_{min} \text{ немесе } F(X^*) = Z(Y^*). \tag{3.9}$$

Егер өзара қосжақты есептердің біреуінің сызықтық функциясы шектелмеген болса, онда екіншісінің жарамды шешімі болмайды.

3.3-теорема (3.8) теңдіктің тек қана шешімнің тиімділігінің жеткілікті белгісін көрсетіп қоймай, сонымен қатар өзара қосжақты есептердің шешімінің тиімділігінің қажетті белгісі болып табылатынын да көрсетеді.

Қосжақтылықтың екінші теоремасы

Өзара қосжақты есептер берілсін: (3.1)-(3.3) - бастапқы есеп, қосжақты есеп (3.4)-(3.6). Осы есептерді симплекс әдіспен шығару үшін осы есептің әрқайсысын канондық түрге келтіру керек. Ол үшін бастапқы есептің (3.1) шектеулер жүйесіне m теріс емес $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$ - айнымалыларын қосамыз, ал қосжақты есептің (3.4) шектеулер жүйесіне n теріс емес $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+j}, \dots, y_{m+n}$ айнымалыларын қосамыз, мұндағы i (j) - $x_{n+i} \geq 0$ $\left(y_{m+j} \geq 0\right)$ қосымша айнымалысы енгізілген теңсіздік нөмірі. Сонда өзара қосжақты есептің әрқайсысының шектеулер жүйесі мына түрде жазылады:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - y_{m+j} = c_j,\ j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.11}$$

Қосжақты есептердің біреуінің бастапқыда берілген айнымалылары мен екіншісінің қосымша айнымалыларының арасындағы сәйкестікті орнатайық:

<table>
<tr><td colspan="2">Бастапқы есептің айнымалылары</td></tr>
<tr><td>Бастапқы айнымалылар</td><td>Қосымша айнымалылар</td></tr>
<tr><td>$x_1 \quad x_2 \dots x_j \dots x_n$
$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
$y_{m+1}\ y_{m+2} \dots y_{m+j} \dots y_{m+n}$</td><td>$x_{n+1} \quad x_{n+2} \dots x_{n+i} \dots x_{n+m}$
$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
$y_1 \quad y_2 \dots y_i \dots y_m$</td></tr>
<tr><td>Қосымша айнымалылар</td><td>Бастапқы айнымалылар</td></tr>
<tr><td colspan="2">Қосжақты есептің айнымалылары</td></tr>
</table>

(3.12)

Теорема 3.4. Өзара қосжақты есептердің біреуінің тиімді шешімінің оң (нөлдік емес) компоненттері екінші есептің тиімді шешімінің нөлдік компоненттеріне сәйкес келеді, яғни кез келген $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ үшін:

Егер $x_j^* > 0$ болса, онда $y_{m+j}^* = 0$; егер $x_{n+i}^* > 0$ болса, онда $y_i^* = 0$;

егер $y_i^* > 0$ болса, онда $x_{n+i}^* = 0$; егер $y_{m+j}^* > 0$ болса, онда $x_j^* = 0$.

Осы теоремадан келесі маңызды қорытынды алынады: өзара қосжақтылық есептерінің айнымалыларының арасындағы енгізілген (3.12) сәйкестік оптимумға жеткен кезде (яғни, әрбір есепті симплекс әдіспен шешкен кезде соңғы қадамда) қосжақтылық есептерінің біреуінің негізгі айнымалылары (нөлге тең емес) мен екіншісінің негізгі емес айнымалылары (нөлге тең) жарамды базистік шешімді берген кезде олардың арасындағы сәйкестікті береді.

3.4 теорема келесі теореманың салдары болып табылады.

Теорема 3.5 (*қосжақтылықтың екінші теоремасы*). Қосжақты есептің тиімді шешімінің компоненттері бастапқы есептің тиімді шешімінің негізгі емес айнымалылары арқылы өрнектелген сызықтық функциясының сәйкес айнымалыларының коэффициенттерінің абсолют мәніне тең.

3.4-теореманы қосжақтылық теориясының екінші теоремасы ретінде қарастыруға болады.

Ескерту. Егер өзара қосжақты есептің біреуінің тиімді шешімнің жалғыздығы жойылса, онда екіншісінің тиімді шешімі өзгеше болады.

Қосжақтылықтың теоремаларының көмегімен бастапқы есепті симплекс әдіспен шығарып, оған қосжақты есептің оптимумын және тиімді шешімін табуға болады.

Алдымен қосжақты есеп симплекс әдіспен шығарылып, одан кейін бастапқы есептің оптимумы және тиімді шешімі қосжақтылық теориясының теоремаларының көмегімен анықталатын әдіс *қосжақты симплекс әдісі* деп аталады. Бастапқы есептің алғашқы базистік шешімі жарамды емес болса, немесе, мысалы, оның m шектеулер саны n айнымалылар санынан артық болған жағдайда осы әдісті қолданған ыңғайлы.

Қосжақтылықтың үшінші теоремасы

Теорема 3.6. Қосжақты есептің тиімді шешімінің компоненттері $F_{max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ сызықтық функцияның сәйкес аргументтері бойынша дербес туындыларының мәндеріне тең, яғни

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i} = y_i^*, \; i = 1, 2, \dots, m.$$

3.2-мысал.

Екі өзара қосжақты есеп берілсін:

I-есеп

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

II-есеп

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to min$$

Осы есептерге жоғарыда берілген теориялық мәліметтерді қолданып, талдау жүргіземіз.

I-есептің шешімі (2.1 - мысал) $F_{max} = 34$, II-есептің шешімі (2.2 - мысал) $Z_{min} = 34$, яғни, қосжақтылықтың *бірінші теоремасының* бірінші бөлігі орындалады.

(3.12) өрнектің негізінде *айнымалылардың арасындағы сәйкестікті* орнатамыз:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \quad & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_6 & y_7 & & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array}$$

I есеп үшін

$$F = 34 - 2x_5 - x_7, X^* = (8, 5, 12, 6, 0, 2, 0); \qquad (3.13)$$

II есеп үшін

$$F = 34 + 12y_1 + 6y_2 + 2y_4 + 8y_6 + 5y_7, Y^* = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0); \qquad (3.14)$$

Қосжақты есептің тиімді шешімінің компоненттері

$$y_1^* = 0, y_2^* = 0, y_3^* = 2, y_4^* = 0, y_5^* = 1, y_6^* = 0, y_7^* = 0,$$

$$F = 34 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 - 2x_5 - 0 \cdot x_6 - x_7,$$

түріне келтіруге болатын (3.13) сызықтық функциясының сәйкес айнымалыларының коэффициенттеріне (абсолют шамасы бойынша) тең, ал бастапқы есептің тиімді шешімінің компоненттері

$$x_1^* = 8, x_2^* = 5, x_3^* = 12, x_4^* = 6, x_5^* = 0, x_6^* = 2, x_7^* = 0.$$

$$Z = 34 + 12y_1 + 6y_2 + 0 \cdot y_3 + 2y_4 + 0 \cdot y_5 + 8y_6 + 5y_7$$

түріне келтіруге болатын (3.14) сызықтық функциясының сәйкес айнымалыларының коэффициенттеріне (абсолют шамасы бойынша) тең. Осылайша қосжақтылықтың екінші теоремасының да орындалатынына көз жеткізуге болады және оны оқырмандардың өздеріне ұсынамыз.

Бақылау сұрақтары

1. Тура есепке және қосжақты есепке ортақ қандай мәселелер бар?
2. Тура есеппен және қосжақты есептің айырмашылығы қандай?
3. Симметриялы өзара қосжақты есептер деп қандай есептерді айтамыз?
4. Берілген есепке қосжақты есепті құрудың сұлбасын беріңіз.
5. Қосжақтылық теориясының негізгі теңсіздігін сипаттаңыз.
6. тиімділіктің жеткілікті белгісі немесе Канторовичтің тиімділік критерийін тұжырымдаңыз.
7. Қосжақты есептің жарамды шешімнің тиімділігінің қажетті белгісі.
8. Қосжақтылықтың екінші және үшінші теоремалары.
9. Қосжақты есептерінің айнымалыларының арасындағы сәйкестікті орнатыңыз.
10. Қосжақты симплекс әдісін түсіндіріңіз.

3-тарау теориясы бойынша тапсырмалар

3-тарау теориясы бойынша тапсырмалар оқу құралының 113-115 беттерінде келтірілген 2 б) тапсырманы орындаудан тұрады.

4-ТАРАУ. ТАСЫМАЛДАУ ЕСЕБІ

4.1. Тасымалдау есебінің қойылуы және оның математикалық моделі

Өндіріс көлемі a, a_2, …, a_m болатын біртекті өнім өндіретін m өндіріс кешені, тұтыну көлемі b_1, b_2, …, b_n болатын n тұтыну кешені берілсін. *Тарифтер* (өндіріс шығындары немесе тасымалдау шығындары) *матрицасы* берілсін:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

мұндағы, c_{ij} - i-ші жабдықтаушыдан j-ші тұтынушыға жүк бірлігін жеткізуге жұмсалатын құн, *шығын коэффициенті* деп аталады.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицасы *тасымалдау есебінің жоспары* деп аталады, x_{ij} - i -ші жабдықтаушыдан j -ші тұтынушыға жеткізілетін жүк мөлшері.

Тасымалдау жоспарын жүзеге асыратын *жалпы қосынды шығынды* төмендегі мақсат функциясы түрінде беруге болады:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{21} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots +.$$

$$+c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

Осы айтылғандардың барлығын біріктіріп, бір кестеге жазайық:

4.1-кесте.

Жабдықт аушылар	Жабдықтау шылардың қуаттылығы	Тұтынушылар және олардың сұраныстары				
		1	…	j	…	n
		b_1	…	b_j	…	b_n
1	a_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
…	…	…	…	…	…	…
i	a_i		…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Қорытындылай келгенде тасымалдау есебінің математикалық моделі былайша қойылады: әрбір «жабдықтаушы-тұтынушы» жұбы үшін

1. барлық жабдықтаушылардың қуаттылығы толығымен жүзеге асырылатындай (қуаттылық бойынша шектеулер, жол бойынша баланс теңдеуі):
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m} \qquad (4.1)$$

2. барлық тұтынушылардың сұраныстары орындалатындай (сұраныстар бойынша шектеулер, баған бойынша баланс теңдеуі):

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \qquad (4.2)$$

3. тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын ең аз болатындай:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \qquad (4.3)$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

тасымалдау көлемін табу керек.

Тасымалдау есебінің экономикалық-математикалық моделінің ерекшеліктері:

- шектеулер жүйесі - теңдеулер жүйесі (яғни тасымалдау есебі канондық түрде берілген);
- шектеулер жүйесіндегі айнымалылардың коэффициенттер бірге немесе нөлге тең;
- әрбір айнымалы шектеулер жүйесіне екі реттен: бір рет (4.1) жүйесіне және бір рет (4.2) жүйесіне енеді.

4.2. Жабық модельдегі тасымалдау есебі

Тасымалдау есебінің екі түрі кездеседі: егер жабдықтаушылардың жалпы қуаттылығы тұтынушылардың жалпы сұранысына тең болса, онда мұндай түрде берілген есеп *жабық модельді тасымалдау есебі* деп аталады:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{4.4}$$

кері жағдайда, $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ яғни қуаттылық пен сұраныс арасында баланс жоқ болса, *ашық модельді тасымалдау есебі* деп аталады.

Теорема 4.1. (4.4) шарты орындалған жағдайда тасымалдау есебінің матрицасының ((4.1), (4.2) теңдеулер жүйесінің) рангі теңдеулер санынан бірге кем, яғни

$$r(A) = m + n - 1.$$

4.1-теореманы ескерсек, әрбір кестеде тірек жоспарының $m + n - 1$ - мәнінен артық емес толтырылған (базистік) торлары, ал қалғандары бос торлар болуы керек.

Тасымалдау есебінің математикалық моделі сызықтық программалау есебіне жатады және оны симплекс әдіспен шығаруға болады. Әйтсе де, осы есептің практикалық маңыздылығы мен (4.1)-(4.3) шектеулерінің ерекшеліктерін: шектеулер теңдік түрінде берілген; әрбір айнымалы тек қана екі теңдеуде кездеседі; айнымалылардың коэффициенттері бірге тең болатынын ескере отырып оны шешу үшін арнайы алгоритмдер дайындалған.

Жабық модельдегі тасымалдау есебін шешу алгоритмі:

1. алғашқы жарамды базистік шешімді (бірінші тірек жоспарын) табу керек;

2. тірек жоспарын жақсартатын (әрбір жаңа жоспарда жалпы шығын артпау керек) итерация тізбегін құру керек;

3. шешімнің тиімділігін тексеру керек;

3.1. егер шешім тиімді болмаса, алдыңғысына қарағанда тиімді шешімге жақын жаңа тірек жоспарға көшу қажет;

3.2. алгоритмнің 2-қадамына көшу керек.

4.3. Алғашқы базистік шешімді табу

4.3.1 «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісі

Диагональ әдісі немесе «солтүстік-батыс» бұрыш әдісі. Бұл әдісте алғашқы тірек жоспарды құрған кезде кестенің қалған бөлігінің жоғарғы сол жақ торы («солтүстік-батыс» бұрышы) толтырылады. Кестені осындай әдіспен толтыру барысында x_{11} айнымалысы орналасқан тордан басталады да соңғы x_{mn} айнымалысы орналасқан торды, яғни кестенің диагоналы бойынша толтырылған сияқты толтырумен аяқталады.

Бастапқы тірек шешімін диагональ әдісімен анықтаған кезде c_{ij} шығын шамасы ескерілмейтіндіктен тиімді шешімнен қашықтау болады. Сондықтан, тиімді жоспарға жету мақсатында есептеулер үшін көптеген итерация саны талап етілуі мүмкін.

4.1-мысал.

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісі

A_1, A_2, A_3 қоймаларына сәйкес 120, 180 және 230 т көлемінде жүк түсіріледі. Осы жүкті бес тұтынушыға: 70т - B_1 тұтынушыға, 120т - B_2 тұтынушыға, 105т - B_3 тұтынушыға, 125 т – B_4 тұтынушыға, 110 т - B_5 тұтынушыға жеткізу керек. 1т жүкті қоймадан тұтынушыға жеткізу үшін жұмсалатын шығын (ақша бірлігі) C матрицасымен берілген:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 17 & 5 & 3 \\ 21 & 10 & 7 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісін пайдаланып берілген тасымалдау есебінің алғашқы базистік шешімін табу керек.

Шығарылуы. $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$ қатынасы орындалатындықтан есебіміз – жабық модельдегі тасымалдау есебі болып табылады. Бастапқы берілгендерді кестеге жазамыз:

4.2-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_i)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8	17	5	3	120
A_2	21	10	7	11	6	180
A_3	3	5	8	4	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	530 / 530

Кестені солтүстік-батыс бұрышынан, яғни сол жақтағы жоғарғы тордан бастап толтырамыз:

1. $x_{11} = min\{120, 70\} = 70$. B_1 тұтынушыға қажетті жүк жеткізілді, сондықтан ол бағанды біз әрі қарай қарастырмаймыз.

2. Келесі солтүстік-батыс бұрышы - x_{12} торы. $x_{12} = min\{120 - 70, 120\} = 5$ (120-70- себебі, A_1 қоймадан бірінші тұтынушыға 70т жүк жеткізілген болатын). A_1 қоймада жүк қалған жоқ, демек ол жол қарастырылмайды және штрих сызықпен сызылды. Осы жолда қалған барлық торларды штрих сызықпен сызамыз.

Әрі қарай кестенің қалған торларын толтыруда есептеулерді осылай жалғастырамыз:

3. $x_{22} = min\{180, 120 - 50\} = 70$;
4. $x_{23} = min\{180 - 70, 105\} = 105$;
5. $x_{24} = min\{180 - 70 - 105, 125\} = 5$;
6. $x_{34} = min\{230, 125 - 5\} = 120$;
7. $x_{44} = min\{230 - 120, 110\} = 110$.

4.3-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 50	17	5	3	120
A_2	21	10 / 70	7 / 105	11 / 5	6	180
A_3	3	5	8	4 / 120	9 / 110	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Сонымен, келесі базистік жоспары алынды:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 70 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 105 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 110 \end{pmatrix}$$

Алынған бастапқы базистік шешімде толтырылған торлар саны $m + n - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$ -ге, яғни негізгі айнымалылар санына тең.

Осы әдіс бойынша бастапқы шешімді анықтаған кезде соңғы қадамнан басқа әрбір қадамда не баған, не жол қарастырылмайтын болды. Ал соңғы қадамда бірден соңғы жол мен соңғы баған толығымен толтырылады. Сондықтан, толтырылған торлар саны тасымалдау кестесінің жолдары мен бағандарының жалпы санынан бірге кем. «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісінің осы ерекшелігі алынған үлестіру базистік болып табылатындығын білдіреді.

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісінің негізгі кемшілігі шығын коэффициенттерінің мәндерін ескермей тасымалдау кестесін толтыру болып табылады.

4.3.2 Ең кіші элемент (ең кіші құн) әдісі

Бұл әдісте кестені толтырудың әрбір қадамында c_{ij} шығын шамасының ең аз мәні ескеріліп, кесте осы шама орналасқан тордан бастап толтырылады. Егер мұндай тор жалғыз болмаса, яғни кестеде ең кіші элемент бірнеше рет кездессе, онда тігінен немесе көлденеңінен c_{ij} шамасының ең үлкен мәні орналасқан тордан бастап толтырған ыңғайлы, әйтсе де, олардың кез келгенінен бастап толтыра беруге болады.

Теорема 4.2. Кестені толтырудың әрбір қадамында (соңғысынан өзге) не бір жол, не бір баған қарастырылудан шығатындай бір тор пайда болады.

Егер жоспарда базистік торлардың саны $m + n - 1$-шамасынан аз болса, онда ол *өзгеше жоспар* деп аталады.

Егер тасымалдау есебін шығару барысында өзгеше жоспар пайда болса, онда тордың жетіспейтін санына 0-ді жазып, оны базистік деп есептеу керек. Осы қосымша торларға нөлдік тасымалдау жауап беретіндіктен жалпы баланспен жоспарды тасымалдаудың жалпы құны өзгермейді. Дегенмен, торларды еркін түрде таңдай отырып толтыруға болмайды.

4.2-мысал.

Ең кіші элемент (ең кіші құн) әдісі

Жоғарыда қарастырған 4.1-мысалды ең кіші элемент әдісімен шығару керек:

Шығарылуы.

1. Тасымалдау кестесінде ең кіші элемент – 3-ке тең және кестеде ол екі жерде кездеседі: $c_{15} = 3$, $c_{31} = 3$. Мұндай жағдайда (бірнеше ең кіші элемент кездессе) біз үшін көп көлемде жүкті жіберетін жағдайды таңдаған дұрыс: $c_{15} = 3$ тарифы үшін 110 т жіберіледі, $c_{31} = 3$ тарифы үшін 70 т жіберіледі, демек c_{15} торын толтырудан бастаған ыңғайлы, $x_{15} = min\{120, 110\} = 110$.

2. $c_{31} = 3$, $x_{31} = min\{230, 70\} = 70$.

3. Келесі ең кіші элемент 4-ке тең. $c_{34} = 4$, $x_{34} = min\{230 - 70, 125\} = 125$.

4. Келесі ең кіші элемент 5-ке тең.

$c_{32} = 5$, $x_{32} = min\{230 - 70 - 125, 120\} = 35$;. Сондықтан алдымен c_{32} торын толтырамыз

5. Ең кіші элемент – 7-ге тең, $c_{23} = 7$, $x_{23} = min\{180, 105\} = 105$.

6. Ең кіші элемент – 8-ге тең, $c_{12} = 8$, $x_{12} = min\{120 - 110, 120 - 35\} = 10$.

7. Келесі ең кіші элемент және соңғы толтырылмаған тор $c_{22} = 10$, $x_{22} = min\{180 - 105, 120 - 10 - 35\} = 75$;.

4.4-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8 / 10	17	5	3 / 110	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5 / 35	8	4 / 125	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Сонымен, ең кіші элемент әдісінің көмегімен жабық типтегі тасымалдау есебінің келесі базистік жоспары алынды:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 75 & 105 & 0 & 0 \\ 70 & 35 & 0 & 125 & 0 \end{pmatrix}.$$

.

Бұл әдіспен шығарған кезде де толтырылған торлар саны $m + n - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$ -ге тең.

Екі әдіспен алынған алғашқы базистік шешімдегі үлестірулерді салыстырайық. Осы үлестірулердің әр қайсысы үшін ақша бірлігімен анықталатын жалпы шығынды есептейміз:

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісімен анықталған базистік шешім үшін:

$$F_0 = 14 \cdot 70 + 8 \cdot 50 + 10 \cdot 70 + 7 \cdot 105 + 11 \cdot 5 + 4 \cdot 120 + 9 \cdot 110 = 4340.$$

Ең кіші элемент әдісімен анықталған базистік шешім үшін:

$$F_0 = 8 \cdot 10 + 3 \cdot 110 + 10 \cdot 75 + 7 \cdot 105 + 3 \cdot 70 + 5 \cdot 35 +$$
$$+4 \cdot 125 = 2780.$$

Ең кіші элемент әдісімен анықталған базистік шешім тиімді.

4.4. Базистік шешімнің тиімділік критерийі

Тасымалдау есебінде еркін алынған x_{ij} айнымалысы тасымалдау кестесінің (i, j) торына сәйкес элементімен теңестіріледі. F сызықтық функциясының өрнегіндегі x_{ij} бос айнымалыдағы β_{ij} коэффициенті (i, j) *бос торының бағасы* деп аталады. Сонда тиімділік критерийі былайша қойылады: *барлық бос торлардың бағалары теріс емес болған жағдайда ғана тасымалдаудың базистік үлестірілуі тиімді болады*.

Сонымен, 1-кезекте тасымалдаудың базистік үлестірілуі үшін бос торлардың бағаларын табу мәселесі қойылады.

Тасымалдаудың қандай да бір базистік үлестірілуі бекітілген болсын. Бұл жерде (i, j) - бос тор, β_{ij} - (i, j) торының бағасы немесе бос айнымалылар арқылы берілген F сызықтық функциясының өрнегіндегі x_{ij} айнымалысының коэффициенті, яғни

$$F = F_0 + \beta_{ij} + x_{ij} + \cdots, \qquad (4.5)$$

мұндағы көп нүктемен x_{ij} айнымалысынан өзге бос айнымалыларға жауап беретін қосылғыштар белгіленген, F_0 - тасымалдауды берілген үлестіруін тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын. Сонда (4.5) өрнегінен (i, j) бос торының β_{ij} бағасы (i, j) торына бірлік тасымалдауды (x_{ij} айнымалысы 0-ден 1-ге дейін арттырылады) жеткізуге жұмсалатын жалпы шығынның ΔF өсімшесіне тең. Егер $\beta_{ij} > 0$ болса, онда $\Delta F > 0$; $\beta_{ij} < 0$ болса, онда $\Delta F < 0$ болатыны анық. Бос тор бағасының соңғы ұғымын *бос тор бағасының экономикалық мағынасы* деп айтады.

Тиімді шешімде кем дегенде бір бос тордың бағасы нөлге тең болса, онда тасымалдау есебінде *балама оптимумының* бар болуының белгісін білдіреді.

Бос тор бағасын табу үшін көрсетілен бағалардың экономикалық мағынасын қолданайық.

4.3–мысал.

4.1-мысалда анықталған базистік шешімнің тиімділігін тексеру керек.

4.5-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 50	17	5	3	120
A_2	21	10 / 70	7 / 105	11 / 5	6	180
A_3	3	5	8	4 / 120	9 / 110	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Шығарылуы. Толтырылмаған тордың, айталық, (1,3) тордың бағасын есептейік. Ол үшін (1,3) торға бірлік тасымалдау береміз. Бұл жерде жол және баған бойынша баланстар сақталатындай толтырылған торларды өзгерту талап етіледі. (1,3) торынан басқа бос торлардың бәрінде тасымалдау нөлге тең болып қала береді деп ұсынамыз. 3-ші тұтынушы өзіне қажетті 105т көлемінде жүк қабылдау үшін (2,3) тордағы тасымалдауды 1-ге азайтамыз (105-1=104), 2-ші қоймадан 180 т көлемінде жүкті жіберу үшін (2,2) тордағы тасымалдауды 1-ге арттырамыз (70+1=71), 2-ші тұтынушы өзіне қажетті 50т көлемінде жүк қабылдау үшін (1,2) тордағы тасымалдауды 1-ге азайтамыз (50-1=49);

4.6-кесте.

14 / 70	8 / 49	17 / 1	5	3	120
21	10 / 71	7 / 104	11 / 5	6	180
3	5	8	4 / 120	9 / 110	230
70	120	105	125	110	

Тасымалдаудың алынған қайта үлестіруіндегі жалпы шығынның ΔF өзгерісін табамыз.

Тасымалдауға жұмсалған бастапқы шығын:

$$F_б = 14 \cdot 70 + 8 \cdot 50 + 17 \cdot 0 + 10 \cdot 70 + 7 \cdot 105 + 11 \cdot 5 + 4 \cdot 120 + 9 \cdot 110,$$

қайта үлестірудегі жалпы шығын:

$$F_{қү} = 14 \cdot 70 + 8 \cdot 49 + 17 \cdot 1 + 10 \cdot 71 + 7 \cdot 104 + 11 \cdot 5 + 4 \cdot 120 + 9 \cdot 110.$$

Сонда, бос тордың экономикалық мағынасын ескерсек:

$$\beta_{13} = \Delta F = F_{қү} - F_б = 8 \cdot (-1) + 17 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) = -8 + 17 + 10 - 7 = 12$$

(1,3) тордың бағасын анықтаған жолмен (1,4) бос тордың бағасын есептейік:

1) (1,4) торға бірлік тасымалдау береміз.

2) 4-ші бағанның балансын сақтау үшін (2,4) тордағы жүк көлемін 1-ге кемітеміз (5-1=4);

3) 2-ші жолдың балансын сақтау мақсатында (2,2) тордағы жүк көлемін 1-ге арттырамыз (70+1=71);

4) 2-ші бағанның балансын сақтау үшін (1,2) тордағы жүк көлемін 1-ге кемітеміз (50-1=49):

4.7-кесте.

14 70	8 49	17	5 1	3	120
21	10 71	7 105	11 4	6	180
3	5	8	4 120	9 110	230
70	120	105	125	110	

ΔF өзгерісті есептейік.

Тасымалдауға жұмсалған бастапқы шығын:

$$F_6 = 14\cdot 70 + 8\cdot 50 + 5\cdot 0 + 10\cdot 70 + 7\cdot 105 + 11\cdot 5 + 4\cdot 120 + 9\cdot 110,$$

қайта үлестірудегі жалпы шығын:

$$F_{ҚҮ} = 14\cdot 70 + 8\cdot 49 + 5\cdot 1 + 10\cdot 71 + 7\cdot 105 + 11\cdot 4 + 4\cdot 120 + 9\cdot 110.$$

Сонда, бос тордың экономикалық мағынасын ескерсек:

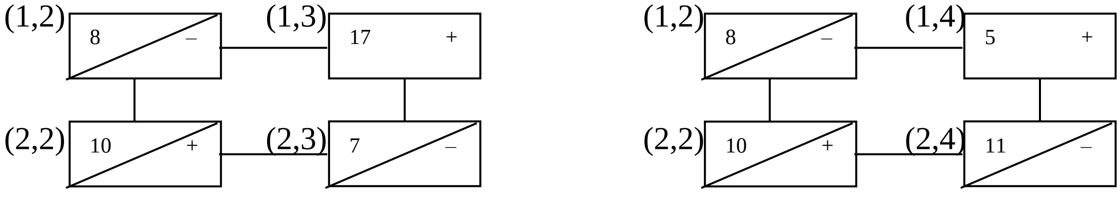
$$\beta_{14} = \Delta F = F_{ҚҮ} - F_6 = 8\cdot(-1) + 5\cdot 1 + 10\cdot 1 + 11\cdot(-1) = -8 + 5 + 10 - 11 = -4.$$

Бос торлардың ішінде теріс бағалы тор болғандықтан тасымалдауды көрсетілген түрде үлестіру тиімді емес.

4.3-мысалды шығару тәсілі өте ұзақ. Кейбір жағдайда барлық бос торлардың бағасын есептеуге тура келеді. Есептеуді қысқарту үшін осы есептің шығарылуын талдайық.

ΔF мәнін есептеген кезде F_6 және $F_{ҚҮ}$ өрнектеріндегі көп қосылғыштар ΔF-ке әсер етпей, өзара жойылып кетеді: тек қана қайта үлестіру кезіндегі тасымалдау торларының шығын коэффициенттері маңызды болады. Бұл жерде ΔF үшін өрнекте кейбіреулері «-» таңбасымен, кейбіреулері «+» таңбасымен енеді. «Таңба ережесін» табу үшін 4.1-суретте келтірілген сызбаны пайдаланған ыңғайлы. Бұл сызбада тасымалдау мәндері өзгеретін торлар келтірілген (сол жағында базистік айнымалыларға сәйкес торлардың нөмірлері жазылған):

а) (1,3) тордың бағасы үшін ә) (1,4) тордың бағасы үшін

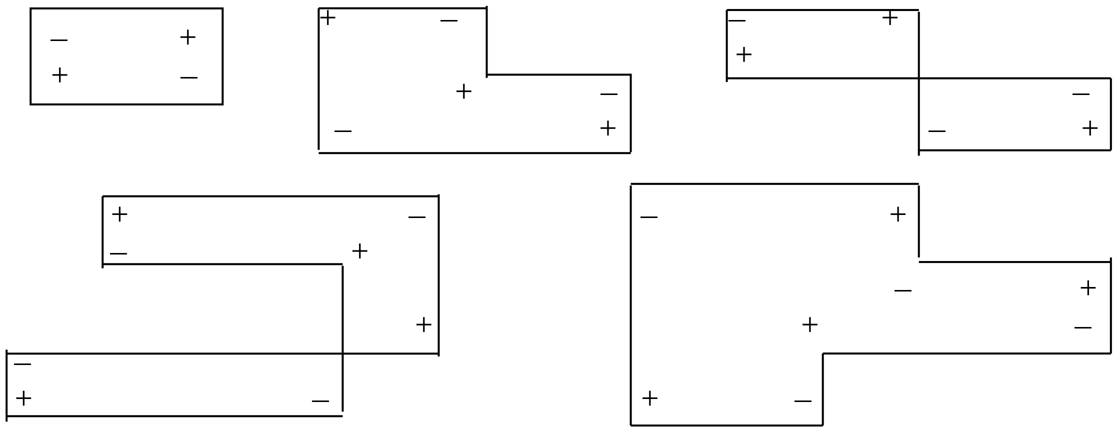


4.1-сурет

«+» таңбамен тасымалдау көлемі артатын торлар, «-» таңбамен тасымалдау көлемі азаятын торлар белгіленген.

Тасымалдауы өзгертілетін торларды біріктіретін сынықтар *қайта есептеудің белгіленген циклдары* деп аталады.

Циклдардың төбелерінің біреуі бос торда, ал қалғандарының барлығы толтырылған торларда орналасады. Төбелердің саны барлық кезде жұп болады. Бос төбеге оң таңба береміз, қалған төбелердегі таңбалар кезектеседі. Осы сынық сызықтың бір жағында екі толтырылған төбе орналаса алады, сонымен қатар бір төбе толтырылатын бос торда жатады.



4.2-сурет

Көбінесе контур тіктөртбұрыш түрінде болады (4.1-сурет), бірақ басқа типтегі фигура түрінде де болуы мүмкін (4.2-сурет).

Сонымен, бос торды табудың 1-ережесін айтуға болады: бос тор үшін қайта есептеу циклын құрып, осы циклдың төбелеріне бос торға «+» таңбасынан бастап басқа торларға біртіндеп таңбаларды кезектестіріп қою керек. Сонда, бос тордың бағасының мәні сәйкес таңбалармен алынған цикл торларының шығын коэффициенттерінің алгебралық қосындысына тең. Осылайша, әрбір бос тор үшін қайта есептеудің мәнді циклын құра отырып, оның бағасын табуға болады.

4.1-суретте келтірілген цикл бойынша есептесек:

(1,3) бос тор үшін: $\beta_{13} = -8 + 17 + (-7) + 10 = 12$ немесе $\beta_{13} = (17 + 10) - (8 + 7) = 12$;

(1,4) бос тор үшін: $\beta_{14} = -8 + 5 + (-11) + 10 = -4$ немесе $\beta_{14} = (5 + 10) - (8 + 11) = -47$.

Ескере кететін жағдай, цикл барлық уақытта осындай түрде қарапайым бола бермейді.

Ескерту. Кейбір кезде еркін алынған мәнді цикл үшін цикл ұғымы енгізіледі: цикл – сәйкес таңбаларымен алынған цикл төбелерінде орналасқан коэффициенттердің алгебралық қосындысы. Цикл бағасы осы циклға енетін жалғыз бос тордың бағасына тең.

Келесі шарттарды қанағаттандыратын матрицаның жолдары мен бағандарының бойында орналасқан торлар мен звенолардағы төбелермен берілген сынық матрицадағы *цикл* деп аталады:

- сынық байланысты болуы керек, яғни оның кез келген төбесінен сынықтың звенолары бойымен басқа төбеге баруға болады;
- сынықтың әрбір төбесінде екі звено кездеседі: олардың біреуі жол бойынша, біреуі – баған бойынша орналасады.

Циклдың бір төбесі бос торда, қалған төбелері толтырылған торларда орналасатын тасымалдаудың базистік үлестіруімен берілген кестедегі цикл *қайта есептеу циклы* деп аталады.

Қайта есептеу циклының бос төбесінде «+» таңбасы, ал көршілес төбелерде қарама-қарсы таңба тұрса онда есептеу циклы *белгіленген* деп аталады.

Тасымалдаудың базистік үлестірімінің әрбір бос торы үшін де қайта есептеу циклы бар және жалғыз, және циклдың белгілену амалы қисынды болады.

Сонымен еркін алынған бос тордың бағасын табудың ережесі алынды. Әйтсе де, бос торлардың бағасын табуды тағы да жеңілдетуге болады. Айталық, барлық толтырылған торлардың шығын коэффициенттері нөлге тең болсын. Егер қарастырылған ереже бойынша бос торлардың бағасын тапсақ, онда бос торлардың бағасы олардың шығын коэффициенттеріне тең, яғни бұл жағдайда баға мәні тасымалдау кестесінен есептеледі, және ешқандай циклды құрудың қажеті жоқ.

Теорема 4.3 (*потенциалдар туралы*). Кестенің қандай да бір жолының (бағанының) шығындар коэффициентіне қандай да бір санды қосса бос тордың бағасы өзгермейді. Белгіленген жолдың (бағанның) шығындар коэффициентіне қосылған осы сан берілген жолдың (бағанның) *потенциалы* деп аталады.

Қарастырылған жағдай мен 4.3-теоремасы бос торларды табудың 2-ережесін береді: тасымалдау кестесінің әрбір жолы мен бағанындағы шығын коэффициенттеріне толтырылған торлардағы шығын коэффициенттері нөлге тең болатындай сандарды (потенциалдарды) қосу керек. Нәтижесінде алынған бос мүшелердің шығын коэффициенттері осы торлардың бағасына тең болады.

4.4-мысал.

4.2-мысалда алынған базистік үлестірудегі бос торлардың бағасын табу керек.

Шығарылуы. Жоғарыда қарастырылған амалдар тізбегін пайдалана отырып бос торлардың бағасын табамыз. Шығын коэффициенттерін кез келген бағаннан (жолдан) бастап өзгертуге болады. Бірінші бағаннан бастайық. Бірінші бағанның потенциалы нөлге тең болсын. Әрбір бағанның және жолдың қасына потенциалын, жақшаның ішіне қадам санын көрсетеміз.

4.8-кесте.

14	8	17	5	3	-6(6)
21	10	7	11	6	-8(5)
3	5	8	4	9	-3(2)
0(1)	-2(4)	1(8)	-1(3)	3(7)	

Енді түсінікті болу үшін осы кестені талдап, әрбір қадамда орындалған амалдарды жекелеп қарастырайық.

1-қадамда бірінші бағанның потенциалы нөлге тең болсын деп ұйғарамыз.

2-қадам.

Бірінші қадамдағы толтырылған тордың ((3,1) тор) шығын коэффициентін нөлге теңестіру үшін (-3) санын қосамыз және сол жолдағы барлық элементтерге осы санды қосып шығамыз:

4.9-кесте.

14	8	17	5	3
21	10	7	11	6
0	2	5	1	6

3-қадам. Толтырылған (4,3) тордағы шығын коэффициентін нөлге теңестіру үшін (-1) санын қосамыз және сол бағандағы барлық элементтерге де осы санды қосамыз:

4.10-кесте.

14	8	17	4	3
21	10	7	10	6
0	2	5	0	6

4-қадам. (-2) санын толтырылған (4,2) тордағы шығын коэффициентін нөлге теңестіру үшін қосамыз, және сол бағандағы барлық элементтерге қосамыз:

4.11-кесте.

14	6	17	4	3
21	8	7	10	6
0	0	5	0	6

5-қадам.

3-жолдағы барлық толтырылған торлардың шығын коэффициенттері нөлге тең болды. Енді екінші жолдағы толтырылған (2,2) тордағы коэффициентті нөлге теңестіру үшін (-8) санын сол жолдың барлық элементіне қосамыз:

4.12-кесте.

14	6	17	4	3
13	0	-1	2	-2
0	0	5	0	6

6-қадам. 1-жолдағы барлық толтырылған торлардың ((1,2) тор) шығын коэффициенттері нөлге тең болуы үшін (-6) санын бірінші жолдың барлық элементіне қосамыз:

4.13-кесте.

8	0	11	-2	-3
13	0	-1	2	-2
0	0	5	0	6

7-қадам. 1-жолдағы (5-бағандағы) барлық толтырылған торлардың ((1,5) тор) шығын коэффициенттері нөлге тең болуы үшін 3 санын төртінші бағанның барлық элементіне қосамыз:

4.14-кесте.

8	0	11	-2	0
13	0	-1	2	1
0	0	5	0	9

8-қадам. Кестеде нөлге айналдырылмаған жалғыз толтырылған тор қалды: (2,3); оны нөлге теңестіру үшін осы бағанның барлық элементіне 1 санын қосамыз:

4.15-кесте.

8	0	12	-2	0
13	0	0	2	1
0	0	6	0	9

Өзгертілген шығын коэффициенттерін бағалар матрицасы ретінде жазған ыңғайлы:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 & -2 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad (4.6)$$

Тасымалдау кестесінің бос торларына сәйкес бағалар матрицасының элементтері осы бос торлардың бағаларына тең.

Матрицадан көріп отырғанымыздай, бос торлар бағасының арасында теріс элемент бар, сондықтан алынған шешім тиімді емес.

Жоғарыда талдаған мәліметтерді ескерсек, бекітілген базистік үлестіру үшін 2-ережені қанағаттандыратындай әр түрлі потенциалдар жиынтығын таңдауға болады.

4.5. Тасымалдау есебін үлестірімділік әдісімен шығару

Бұл әдісті нақты есепті шығару барысында түсіндірейік.

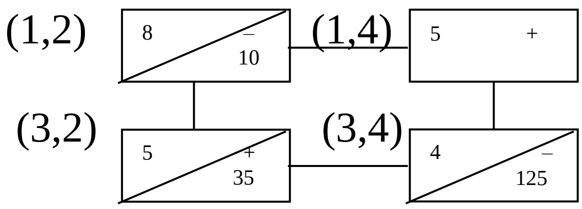
4.5-мысал.

Үлестірімділік әдісін пайдаланып 4.2-мысалда қарастырылған тасымалдау есебінің тиімді үлестіруін табу керек.

Шығарылуы. Тасымалдаудың базистік үлестіруінен бастайық. Осыған дейін алынған шешімнің тиімді емес екеніне көз жеткізген болатынбыз. Бос тор бағасы – сызықтық функция өрнегіндегі бос айнымалыға сәйкес коэффициент. 4.4-мысалдың нәтижесін ескерсек:

$$F = 2780 + 8x_{11} + 12x_{13} - 2x_{14} + 13x_{21} + 2x_{24} + x_{25} +$$
$$+6x_{33} + x_{35}.$$

Берілген үлестіру үшін $F_0 = 2780$ мәні 4.2-мысалды шығару барысында анықталды. Әрі қарай есепті симплекс әдісімен шығарған сияқты тәсілді пайдаланамыз: коэффициенті теріс x_{14} айнымалысын негізгі айнымалыға көшіреміз. x_{14} айнымалысы нөлден бастап өседі. Тасымалдауды бос торға көшіру тасымалдауды қайта үлестіруге әкеледі (тасымалдауды цикл бойынша көшіру). (1,4) тор үшін қайта есептеудің белгіленген циклы 4.3-суретте келтірілген:



4.3-сурет

Симплекс әдістегі тәсілге ұқсас, толтырылған торлардағы тасымалдаудың бірі нөлге тең болғанға дейін (1,4) тордағы x_{14} тасымалдауды (әрі қарай x_{14} тасымалдауын арттыру шешімдердің жарамды облыстар облысынан шығып кетеді) арттырамыз. Бұл тор 4.3-суретте көрсетілген циклға тиісті. Сол торды табамыз. Егер (1,4) торға қандай да бір γ тасымалдауын беретін болсақ, онда циклдағы «+» таңбалы торлардағы тасымалдау γ мәніне артады, ал «-» таңбалы торлардағы тасымалдау γ мәніне кемиді. Сондықтан, ізделінді тор «-» таңбасымен берілген цикл торларының арасынан табылады. Және де ол осындай торлардағы ең аз тасымалдауды қабылдайды. Біздің мысалда, $min\{10, 125\} = 10$ - (1,2) тор және осы тордағы тасымалдауды нөлге айналдыру үшін цикл бойынша 10 жүк бірлігін жөнелту керек, яғни цикл бойынша жөнелтілетін тасымалдау «-» таңбалы цикл торларындағы тасымалдаудың арасындағы минимумы ретінде анықталады. Осыдан кейін (1,4) тор толтырылған, ал (1,2) тор – бос тор болып есептелінеді.

«+» таңбалы цикл торларындағы тасымалдау 10 жүк бірлігіне артады: (1,4) торда – 10 бірлікке, (3,2) торда – 45 бірлікке тең. Ал «-» таңбалы цикл торларындағы тасымалдау 10 жүк бірлігіне кемиді: (1,2) тор – бос тор, ал (3,4) тор 115-ке тең болады.

4.16-кесте.

14	8	17	5 / 10	3 / 110	120
21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
3 / 70	5 / 45	8	4 / 115	9	230
70	120	105	125	110	

Қайтадан алынған тасымалдаудың базистік үлестірімінің тиімділігі туралы мәселе туындайды.

Тасымалдауды үлестірудің бос торларын (бағалар матрицасын) анықтаймыз. Ол үшін 2-ереже бойынша толтырылған торлардың шығын коэффициенті нөлге тең болатындай потенциалдарды таңдаймыз.

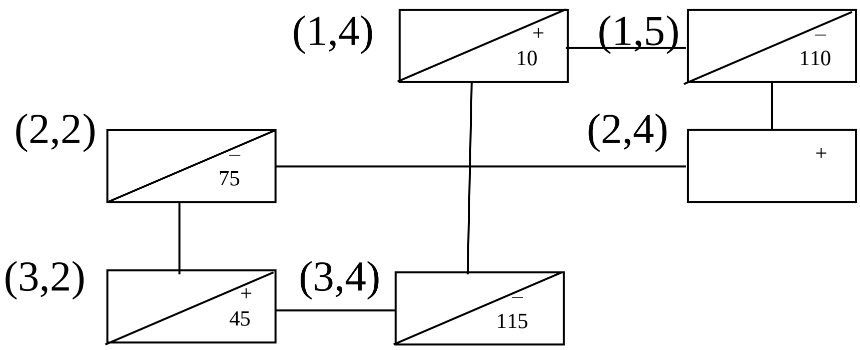
4.17-кесте.

14	8	17	5	3	-4(7)
21	10	7	11	6	-8(4)
3	5	8	4	9	-3(2)
0(1)	-2(3)	1(5)	-1(6)	1(8)	

Нәтижесінде келесі бағалар матрицасын аламыз:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 14 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Бағалар матрицасында теріс элемент бар – (2,5) тордың бағасы теріс, сондықтан алынған базистік шешім тиімді емес. (2,5) тор үшін белгіленген цикл 4.4-суретте келтірілген:



4.4-сурет

Жоғарыда келтірілген ережеге сәйкес цикл бойынша жөнелтілетін тасымалдау: $min\{110, 75, 115\} = 75.$ Цикл бойынша осы тасымалдауды жылжыта отырып, тасымалдаудың жаңа үлестіруін аламыз:

4.18-кесте.

14	8	17	5 / 85	3 / 35	120
21	10	7 / 105	11	6 / 75	180
3 / 70	5 / 120	8	4 / 40	9	230
70	120	105	125	110	

Осы үлестірудің бағалар матрицасын анықтаймыз:

4.19-кесте.

14	8	17	5 / 85	3 / 35	-4(4)
21	10	7 / 105	11	6 / 75	-7(6)*
3 / 70	5 / 120	8	4 / 40	9	-3(2)
0(1)	-2(7)		-1(3)	1(5)	

Ескере кететін жағдай 5-қадамның нәтижесінен кейін екінші жолда екі торда шығын коэффициенттері 7-ге тең болды. 6-қадамда осы жолдағы барлық элементке (шығын коэффициенттеріне) (-7) санын қоса отырып екі шығын коэффициентін нөлге теңестірдік, сондықтан есептеу кезінде қадам саны 1-ге кеміді. Алынған кестені матрица түрінде жазсақ:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 13 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Алынған бағалар матрицасында теріс элемент жоқ болғандықтан, осы үлестіру тиімді.

Осы үлестірудегі тасымалдауға жұмсалатын ақша бірлігіндегі жалпы шығын:

$$F_{min} = 5 \cdot 85 + 3 \cdot 35 + 7 \cdot 105 + 6 \cdot 75 + 3 \cdot 70 + 5 \cdot 120 +$$
$$+4 \cdot 40 = 2685.$$

Тасымалдауды үлестіру әдісін пайдалану нәтижесінде жеткен ақша бірлігіндегі ΔF үнемділігі:

$$\Delta F = F_{min} - F_0 = 2685 - 2780 = -95.$$

Берілген жағдайдағы «-» таңбасы тиімді шешімге көшкен кезде тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығынның азайғанын көрсетеді.

1-ескерту. Цикл бойынша жөнелтілетін тасымалдау циклдағы «-» таңбасымен алынған тордағы тасымалдаудың минимумынан кем де, артық та болуы мүмкін емес. Шынында да, бірінші жағдайда циклдың бірде бір торының нөлдік тасымалдауы болмайды. Сондықтан, толтырылған торлардың жалпы саны $m + n$-ге тең, демек, үлестіру базистік болмайды. Екінші жағдайда жарамды шешімдер облысынан шығып кетеді.

2-ескерту. Табылған тасымалдаудың тиімді үлестіруінде толтырылмаған торлардың бағаларының арасында нөлдік мәндер болса, ол шешім жалғыз емес болады.

3-ескерту. Кейбір жағдайларда тасымалдау есебін шығарудың i-ші қадамында (немесе қадамдардың әр қайсысы үшін) тасымалдауға (шығынды үнемдеуге) кететін ΔF_i шығынның өзгеруін анықтау талап етіледі. Бос тор бағасының экономикалық мағынасынан, қандай да бір i-ші қадамда алынған ΔF_i шығын үнемділігі тасымалдау жіберетін тордың жіберілетін тасымалдауға көбейтіндісіне тең.

Жабық тасымалдау есебін шығару алгоритмі:

1. Толтырылған торлардағы шығын коэффициенттері нөлге тең болатындай, берілген базистік үлестіру үшін жолдар мен бағандардың потенциалын іріктейміз.

2. Егер барлық бос торлардың бағалары теріс емес болса, онда табылған үлестіру тиімді және есепті шығару үрдісі тоқтатылады. Егер бос мүшелердің бағаларының арасында теріс элементтер бар болса, онда олардың біреуін тасымалдауды жеткізу үшін таңдаймыз.

3. Таңдалынған бос тор үшін қайта есептеудің белгіленген циклын тұрғызамыз. Цикл бойынша жіберілетін γ тасымалдауы «-» таңбалы бос торлардағы тасымалдаудың арасындағы минимумы ретінде анықталады. Табылған тасымалдау цикл бойынша жіберіледі. Бұл жерде «+» таңбалы цикл торларында тасымалдау γ мәніне артады, ал «-» таңбалы торларда γ мәніне

кемиді. Осы жерде тасымалдау нөлге тең болатын тор бос тор болып есептеледі, ал циклдың қалған торлары – толтырылған болып есептеледі. Осылайша, тасымалдаудың жаңа базистік үлестіруі алынады.

4. Алгоритмнің 1-қадамына көшеміз.

Тасымалдау есебін шығару барысында пайда болуы мүмкін *ерекше жағдайларды* қарастырамыз:

1. Кейбір жағдайларда, цикл бойынша жіберілетін тасымалдау нөлге тең болуы мүмкін. Бұл «-» таңбалы цикл торында нөлдік тасымалдау болған жағдайда болады. Бұл жағдайда цикл бойынша нөлдік тасымалдау жіберіледі. Нәтижесінде цикл құрылған бос тор толтырылған (нөлдік тасымалдаумен), ал нөлдік тасымалдау орналасқан тор – бос тор болып есептеледі.

2. Егер цикл бойынша тасымалдауды жіберген кезде тасымалдау бір мезетте бірнеше толтырылған торларда нөлге айналса, онда олардың ішіндегі тек қана біреуі (кез келгенін) бос тор деп, ал тасымалдауы нөлге тең болған басқа торларды нөлдік тасымалдауы бар толтырылған торлар деп есептеледі.

4.6. Тасымалдау есебін шығарудың потенциалдар әдісі

Алғашқы тірек жоспарын анықтағаннан кейін, оны тиімділікке тексеру керек. Қажет болған жағдайда мақсат функциясының жақсартылған мәнімен жаңа тірек шешімге көшу керек. Ол үшін потенциалдар әдісі қолданылады. Әрбір A_i жабдықтаушыға және әрбір B_j тұтынушыға осы кешендердің сәйкес u_i және v_j потенциалдары салыстырылады.

Тасымалдау есебінің қандай да бір тірек жоспары тиімді болуы үшін:
толтырылған торлар және $x_{ij} \geq 0$ үшін

$$C_{ij} - (u_i + v_j) = 0, \tag{4.7}$$

бос торлар үшін

$$\Delta C_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0, (i = \overline{1,\ m}, j = \overline{1, n}) \tag{4.8}$$

шарттарын қанағаттандыратын u_i^*, v_i^* - $(m+n)$ сандарынан тұратын жүйенің сәйкес келуі қажетті және жеткілікті болып табылады. ΔC_{ij} - бос тордың бағасы болып табылады.

u_i^*, v_i^* - сандары сәйкес өндірушілер мен тұтынушылардың *потенциалдары*, олардың барлық жүйесі – *потенциалдық*, ал (4.7) - (4.8) шарттар $\{u_i^*, v_i^*\}$ жүйесінің *потенциалдық шарттары*; жеке алғанда әрбір теңсіздік (теңдік) сәйкес (i, j) торының *потенциалдық шарты* деп аталады.

Белгісіз потенциалдардың саны $(m+n)$ - барлық уақытта теңдеулер санынан (толтырылған торлар санынан) $N = m+n-1$ бірге артық болғандықтан, толтырылған тор бар жолды таңдаймыз да осы жол үшін потенциалды нөлге теңестіреміз, мысалы $u_1 = 0$ деп алып (4.7) теңдеулерінен біртіндеп басқа потенциалдардың мәнін анықтаймыз.

Егер толтырылған торлардың саны $N < m+n-1$ болса жоғарыда айтылғандай (4.7) теңдеуіндегі потенциалдарды анықтауға керек болатын толтырылған торлардың қажетті санын алу үшін қосымша $x_{ij} = 0$ нөлдік тасымалдауды енгіземіз.

Содан кейін (4.8) қатынасынан барлық бос торлар үшін ΔC_{ij}, шамасын анықтаймыз және егер $\Delta C_{ij} \geq 0$ болса, онда тасымалдаудың тиімді жоспарын аламыз, егер теріс ΔC_{ij} кездессе, онда жоспар тиімді емес және оны жақсарту керек болатыны, алдыңғы тақырыпта қарастырған болатынбыз.

Базистік шешімнің *тиімділік критерийі*: барлық бос торлардың бағалары теріс емес болған жағдайда ғана тасымалдау есебінің базистік шешімі тиімді болатыны да белгілі.

Теріс мәнді ΔC_{ij} кездесетін бос торлардың ішінен ΔC_{ij} ең кіші болатын торды таңдаймыз. Нәтижесінде белгілі бір толтырылған тор бос болатындай, осы бос торды толтыру ұсынылады.

4.6-мысал.

4.1-мысалда алынған алғашқы базистік шешімді пайдалана отырып, потенциалдар әдісінің көмегімен есептің тиімді шешімін және ең аз тасымалдау шығынын табу керек.

Шығарылуы. 4.1-мысалда «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісін пайдаланып берілген тасымалдау есебінің алғашқы базистік шешімі табылған болатын.

$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$,қатынасы орындалатындықтан есебіміз – жабық модельдегі тасымалдау есебі болып табылады.

4.20-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 50	17	5	3	120
A_2	21	10 / 70	7 / 105	11 / 5	6	180
A_3	3	5	8	4 / 120	9 / 110	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

u_i, v_j потенциалдарын және ΔC_{ij} мәндерін анықтап, есептің шешімін тиімділікке тексереміз.

Толтырылған торлар үшін $C_{ij} - (u_i + v_j) = 0$ теңдеулерінің көмегімен u_i, v_j потенциалдарын анықтаймыз.

$$\begin{cases} C_{11} - (u_1 + v_1) = 0 \\ C_{12} - (u_1 + v_2) = 0 \\ C_{22} - (u_2 + v_2) = 0 \\ C_{23} - (u_2 + v_3) = 0 \\ C_{24} - (u_2 + v_2) = 0 \\ C_{34} - (u_3 + v_4) = 0 \\ C_{35} - (u_3 + v_5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14 - (u_1 + v_1) = 0 \\ 8 - (u_1 + v_2) = 0 \\ 10 - (u_2 + v_2) = 0 \\ 7 - (u_2 + v_3) = 0 \\ 11 - (u_2 + v_3) = 0 \\ 4 - (u_3 + v_4) = 0 \\ 9 - (u_3 + v_5) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 14 \\ u_1 + v_2 = 8 \\ u_2 + v_2 = 10 \\ u_2 + v_3 = 7 \\ u_2 + v_4 = 11 \\ u_3 + v_4 = 4 \\ u_3 + v_5 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = -5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v_1 = 14 \\ v_2 = 8 \\ v_3 = 5 \\ v_4 = 9 \\ v_5 = 14 \end{matrix}$$

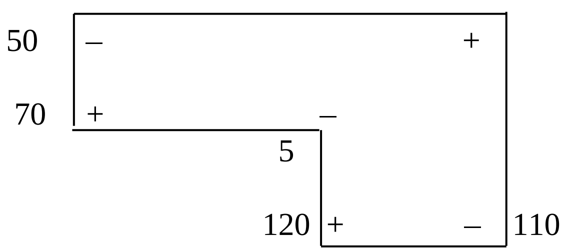
бос торлар үшін $\Delta C_{ij} - \left(u_i + v_j\right) \geq 0,\ (i = \overline{1,\ m}, j = \overline{1, n})$ мәнін анықтап, тиімділік критерийін тексереміз.

$$\begin{cases} \Delta C_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = C_{14} - (u_1 + v_4) = 0 \\ \Delta C_{15} = C_{15} - (u_1 + v_5) = 0 \\ \Delta C_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) = 0 \\ \Delta C_{25} = C_{25} - (u_2 + v_5) = 0 \\ \Delta C_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 0 \\ \Delta C_{32} = C_{32} - (u_3 + v_2) = 0 \\ \Delta C_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{13} = 17 - (0 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = 5 - (0 + 9) \geq 0 \\ \Delta C_{15} = 3 - (0 + 14) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 21 - (2 + 14) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 6 - (2 + 14) \geq 0 \\ \Delta C_{31} = 3 - (-5 + 14) \geq 0 \\ \Delta C_{32} = 5 - (-5 + 8) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = -8 - (-5 + 5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

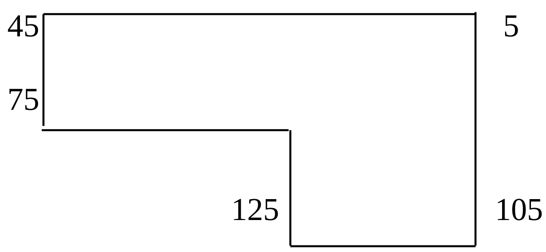
$$\begin{cases} \Delta C_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta C_{14} = -4 \geq 0 \\ \Delta C_{15} = -11 \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 5 \geq 0 \\ \Delta C_{25} = -10 \geq 0 \\ \Delta C_{31} = -6 \geq 0 \\ \Delta C_{32} = 2 \geq 0 \\ \Delta C_{33} = -8 \geq 0 \end{cases}$$

Бос торлар үшін анықталған бағалардың ішінде теріс элемент кездесетіндіктен, алынған шешім тиімді емес. Сондықтан оны жақсартуымыз керек. Осы теріс элементтердің ішіндегі ең кішісін таңдаймыз. Ол (1,5) торға сәйкес -11-ге тең: $\Delta C_{15} = -11$. Осы тормен байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:

Ескі контур



Жаңа контур



«-» таңба орналасқан төбелердегі коэффициенттердің ішіндегі ең кішісін таңдаймыз, ол 5-ке тең. Осы санды оң таңбалы төбелердегі сандарға қосамыз да, теріс таңбалы төбелерден алып тастаймыз. Бір төбесі бос болып келетін жаңа контур аламыз.

Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

4.21-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 45	17	5	3 / 5	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3	5	8	4 / 125	9 / 105	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

u_i, ν_j потенциалдарын және ΔC_{ij} мәндерін анықтаймыз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} C_{11}-(u_1+\nu_1)=0 \\ C_{12}-(u_1+\nu_2)=0 \\ C_{15}-(u_1+\nu_5)=0 \\ C_{22}-(u_2+\nu_2)=0 \\ C_{23}-(u_2+\nu_3)=0 \\ C_{34}-(u_3+\nu_4)=0 \\ C_{35}-(u_3+\nu_5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14-(u_1+\nu_1)=0 \\ 8-(u_1+\nu_2)=0 \\ 3-(u_1+\nu_5)=0 \\ 10-(u_2+\nu_2)=0 \\ 7-(u_2+\nu_3)=0 \\ 4-(u_3+\nu_4)=0 \\ 9-(u_3+\nu_5)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1+\nu_1=14 \\ u_1+\nu_2=8 \\ u_1+\nu_5=3 \\ u_2+\nu_2=10 \\ u_2+\nu_3=7 \\ u_3+\nu_4=4 \\ u_3+\nu_5=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_1=0 & \nu_1=14 \\ u_2=2 & \nu_2=8 \\ u_3=6 & \nu_3=5 \\ & \nu_4=-2 \\ & \nu_5=3 \end{matrix}$$

бос торлар үшін $\Delta C_{ij}=C_{ij}-(u_i+\nu_j)\geq 0,\ (i=\overline{1,\ m}, j=\overline{1,n})$ мәнін анықтап, тиімділік критерийін тексереміз.

$$\begin{cases} \Delta C_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = C_{14} - (u_1 + v_4) = 0 \\ \Delta C_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) = 0 \\ \Delta C_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) = 0 \\ \Delta C_{25} = C_{25} - (u_2 + v_5) = 0 \\ \Delta C_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 0 \\ \Delta C_{32} = C_{32} - (u_3 + v_2) = 0 \\ \Delta C_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{13} = 17 - (0 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = 5 - \big(0 + (-2)\big) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 21 - (2 + 14) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 11 - \big(2 + (-2)\big) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 6 - (2 + 3) \geq 0 \\ \Delta C_{31} = 3 - (6 + 14) \geq 0 \\ \Delta C_{32} = 5 - (6 + 8) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 8 - (6 + 5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta C_{14} = 7 \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 5 \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 11 \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 1 \geq 0 \\ \Delta C_{31} = -17 \geq 0 \\ \Delta C_{32} = -9 \geq 0 \\ \Delta C_{33} = -3 \geq 0 \end{cases}$$

ΔC_{ij} мәндерінің ішінде теріс элементтер бар, демек, алынған шешім тиімді емес. Осы теріс элементтердің ішіндегі ең кішісі $\Delta C_{31} = -17$. Осы тормен байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:

Ескі контур

70 −	+ 5
+	− 105

Жаңа контур

	75
70	35

«-» таңба орналасқан төбелердегі коэффициенттердің ішіндегі ең кішісі – 70-ке тең. Осы санды оң таңбалы төбелердегі сандарға қосамыз да, теріс таңбалы төбелерден алып тастаймыз. Бір төбесі бос болып келетін жаңа контур аламыз. Жаңа жоспар құрамыз:

4.22-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8 / 45	17	5	3 / 75	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5	8	4 / 125	9 / 35	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} C_{12}-(u_1+v_2)=0 \\ C_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ C_{22}-(u_2+v_2)=0 \\ C_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ C_{31}-(u_3+v_1)=0 \\ C_{34}-(u_3+v_4)=0 \\ C_{35}-(u_3+v_5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-(u_1+v_2)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 10-(u_2+v_2)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 3-(u_3+v_1)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \\ 9-(u_3+v_5)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_1+v_2=8 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_2=10 \\ u_2+v_3=7 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_4=4 \\ u_3+v_5=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_1=0 \\ u_2=2 \\ u_3=6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_1=-3 \\ v_2=8 \\ v_3=5 \\ v_4=-2 \\ v_5=3 \end{matrix}$$

бос торлар үшін $\Delta C_{ij}=C_{ij}-\left(u_i+v_j\right)\geq 0,\ (i=\overline{1,\ m}, j=\overline{1,n})$ мәнін анықтаймыз.

$$\begin{cases} \Delta C_{11} = C_{11} - (u_1 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = C_{14} - (u_1 + v_4) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = C_{25} - (u_2 + v_5) \geq 0 \\ \Delta C_{32} = C_{32} - (u_3 + v_2) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta C_{11} = 14 - \big(0 + (-3)\big) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 17 - (0 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = 5 - \big(0 + (-2)\big) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 21 - \big(2 + (-2)\big) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 11 - \big(2 + (-2)\big) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 6 - (2 + 3) \geq 0 \\ \Delta C_{32} = 5 - (6 + 8) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 8 - (6 + 5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta C_{11} = 17 \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta C_{14} = 7 \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 22. \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 11 \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 1 \geq 0 \\ \Delta C_{32} = -9 \geq 0 \\ \Delta C_{33} = -3 \geq 0 \end{cases}$$

ΔC_{ij} мәндерінің ішінде теріс элементтер кездеседі. Демек, алынған шешім тиімді емес. Осы теріс элементтердің ішіндегі ең кішісі $\Delta C_{32} = -9$. Осы тормен байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:

Ескі контур | Жаңа контур

$$\begin{array}{c|cc|c} 45 & - & + & 75 \\ & + & - & 35 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} 10 & & & 110 \\ 35 & & & \end{array}$$

«-» таңба орналасқан төбелердегі коэффициенттердің ішіндегі ең кішісі – 35-ке тең. Жаңа контур аламыз.

Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

4.23-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8 / 10	17	5	3 / 110	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5 / 35	8	4 / 125	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

u_i, v_j, потенциалдарын және ΔC_{ij} мәндерін анықтаймыз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} C_{12} - (u_1 + v_2) = 0 \\ C_{15} - (u_1 + v_5) = 0 \\ C_{22} - (u_2 + v_2) = 0 \\ C_{23} - (u_2 + v_3) = 0 \\ C_{31} - (u_3 + v_1) = 0 \\ C_{32} - (u_3 + v_2) = 0 \\ C_{34} - (u_3 + v_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - (u_1 + v_2) = 0 \\ 3 - (u_1 + v_5) = 0 \\ 10 - (u_2 + v_2) = 0 \\ 7 - (u_2 + v_3) = 0 \\ 3 - (u_3 + v_1) = 0 \\ 5 - (u_3 + v_2) = 0 \\ 4 - (u_3 + v_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 + v_2 = 8 \\ u_1 + v_5 = 3 \\ u_2 + v_2 = 10 \\ u_2 + v_3 = 7 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_2 = 5 \\ u_3 + v_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_1 = 6 \\ v_2 = 8 \\ v_3 = 5 \\ v_4 = 7 \\ v_5 = 3 \end{matrix}$$

бос торлар үшін $\Delta C_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$, $(i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1, n})$ мәнін анықтап, тиімділік критерийін тексереміз.

$$\begin{cases} \Delta C_{11} = C_{11} - (u_1 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = C_{14} - (u_1 + v_4) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = C_{25} - (u_2 + v_5) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{35} = C_{35} - (u_3 + v_5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{11} = 14 - (0 + 6) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 17 - (0 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{14} = 5 - (0 + 7) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 21 - (2 + 6) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 11 - (2 + 7) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 6 - (2 + 3) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 8 - (-3 + 8) \geq 0 \\ \Delta C_{35} = 9 - (-3 + 5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{11} = 8 \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta C_{14} = -2 \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 13 \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 2 \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 1 \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 3 \geq 0 \\ \Delta C_{35} = 7 \geq 0 \end{cases}$$

ΔC_{ij} мәндерінің ішінде бір теріс элемент кездеседі $\Delta C_{14} = -2$, демек, алынған шешім тиімді емес.

Ескі контур

$$\begin{array}{cc} 10^{-} & {}^{+} \\ 35^{+} & 125^{-} \end{array}$$

Жаңа контур

$$\begin{array}{cc} & 10 \\ 45 & 115 \end{array}$$

«-» таңба орналасқан төбелердегі коэффициенттердің ішіндегі ең кішісі – 10-ға тең. Бір төбесі бос болып келетін жаңа контур аламыз.

Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

4.24-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8	17	5 / 10	3 / 110	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5 / 45	8	4 / 115	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Есептің шешімін тиімділікке тексереміз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} C_{14}-(u_1+v_4)=0 \\ C_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ C_{22}-(u_2+v_2)=0 \\ C_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ C_{31}-(u_3+v_1)=0 \\ C_{32}-(u_3+v_2)=0 \\ C_{34}-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5-(u_1+v_4)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 10-(u_2+v_2)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 3-(u_3+v_1)=0 \\ 5-(u_3+v_2)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_1+v_4=5 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_2=10 \\ u_2+v_3=7 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_2=5 \\ u_3+v_4=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1=0 \\ u_2=4 \\ u_3=-1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_1=4 \\ v_2=6 \\ v_3=3 \\ v_4=5 \\ v_5=3 \end{matrix}$$

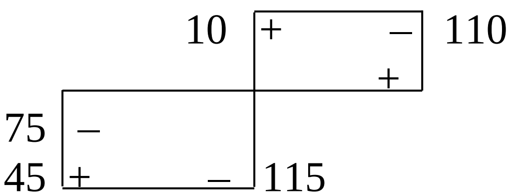
бос торлар үшін $\Delta C_{ij}=C_{ij}-\left(u_i+v_j\right)\geq 0,\ (i=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,n})$ мәнін анықтап, тиімділік критерийін тексереміз.

$$\begin{cases} \Delta C_{11} = C_{11} - (u_1 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{12} = C_{12} - (u_1 + v_2) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = C_{25} - (u_2 + v_5) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{35} = C_{35} - (u_3 + v_5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{11} = 14 - (0 + 4) \geq 0 \\ \Delta C_{12} = 8 - (0 + 6) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 17 - (0 + 3) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 21 - (4 + 4) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 11 - (4 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{25} = 6 - (4 + 3) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 8 - (-1 + 3) \geq 0 \\ \Delta C_{35} = 9 - (-1 + 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

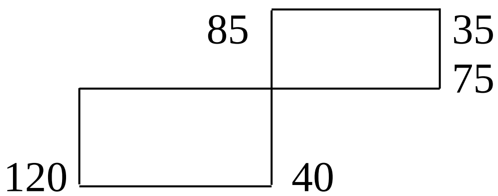
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{11} = 10 \geq 0 \\ \Delta C_{12} = 2 \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 14 \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 13 \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 2 \geq 0 \\ \Delta C_{25} = -1 \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 6 \geq 0 \\ \Delta C_{35} = 7 \geq 0 \end{cases}$$

ΔC_{ij} мәндерінің ішінде теріс элемент бар $\Delta C_{25} = -1$, демек, алынған шешім тиімді емес. Осы тормен (2,5) байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:

Ескі контур



Жаңа контур



«-» таңба орналасқан төбелердегі коэффициенттердің ішіндегі ең кішісі – 75-ке тең. Тағы да бір төбесі бос болып келетін жаңа контур аламыз.

Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

4.25-кесте.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8	17	5 / 85	3 / 35	120
A_2	21	10	7 / 105	11	6 / 75	180
A_3	3 / 70	5 / 120	8	4 / 40	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Есептің шешімін тиімділікке тексереміз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} C_{14}-(u_1+v_4)=0 \\ C_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ C_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ C_{25}-(u_2+v_5)=0 \\ C_{31}-(u_3+v_1)=0 \\ C_{32}-(u_3+v_2)=0 \\ C_{34}-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-(u_1+v_4)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 6-(u_2+v_5)=0 \\ 3-(u_3+v_1)=0 \\ 5-(u_3+v_2)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1+v_4=5 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_3=7 \\ u_2+v_5=6 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_2=5 \\ u_3+v_4=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1=0 \\ u_2=33 \\ u_3=-1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_1=4 \\ v_2=6 \\ v_3=4 \\ v_4=5 \\ v_5=3 \end{matrix}$$

бос торлар үшін $\Delta C_{ij}=C_{ij}-\left(u_i+v_j\right)\geq 0,\ (i=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,n})$ мәнін анықтап, тиімділік критерийін тексереміз.

$$\begin{cases} \Delta C_{11} = C_{11} - (u_1 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{12} = C_{12} - (u_1 + v_2) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) \geq 0 \\ \Delta C_{22} = C_{22} - (u_2 + v_2) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) \geq 0 \\ \Delta C_{35} = C_{35} - (u_3 + v_5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{11} = 14 - (0 + 4) \geq 0 \\ \Delta C_{12} = 8 - (0 + 6) \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 17 - (0 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 21 - (3 + 4) \geq 0 \\ \Delta C_{22} = 10 - (4 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 11 - (3 + 5) \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 8 - (-1 + 4) \geq 0 \\ \Delta C_{35} = 9 - (-1 + 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta C_{11} = 10 \geq 0 \\ \Delta C_{12} = 2 \geq 0 \\ \Delta C_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta C_{21} = 14 \geq 0 \\ \Delta C_{22} = 1 \geq 0 \\ \Delta C_{24} = 3 \geq 0 \\ \Delta C_{33} = 5 \geq 0 \\ \Delta C_{35} = 7 \geq 0 \end{cases}$$

ΔC_{ij} мәндерінің ішінде теріс элемент жоқ, демек, алынған шешім тиімді, яғни тасымалдаудың тиімді жоспары құрылды. Кестедегі берілгендер бойынша X матрицасын құрамыз.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 85 & 35 \\ 0 & 0 & 105 & 0 & 75 \\ 70 & 120 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын:

$$F_{min} = 5 \cdot 85 + 3 \cdot 35 + 7 \cdot 105 + 6 \cdot 75 + 3 \cdot 70 + 5 \cdot 120 + 4 \cdot 40 = 2685$$

Жауабы: Алынған жоспарға талдау жүргізейік:

A_1 қоймада барлығы 120 т көлемінде жүк болды, оның 80 тоннасы 4-ші тұтынушыға, 35 тоннасы 5-ші тұтынушыға жөнелтілді;

A_2 қоймада барлығы 180 т көлемінде жүк болды, оның 105 тоннасы 3-ші тұтынушыға, 75 тоннасы 5-ші тұтынушыға жөнелтілді;

A_3 қоймада барлығы 180 т көлемінде жүк болды, оның 70 тоннасы 1-ші тұтынушыға, 120 тоннасы 2-ші тұтынушыға, 40 тоннасы 4-ші тұтынушыға жөнелтілді. Жүкті тұтынушыларға жеткізудің жалпы құны минималды және 2685 ақша бірлігіне тең.

4.7. Ашық модельдегі тасымалдау есебі

Ашық модельдегі тасымалдау есебінің екі жағдайы болуы мүмкін:

а) жалпы жабдықтаушылардың қуаттылығы тұтынушылардың жалпы сұраныстарынан артық:

$$\sum a_i > \sum b_j;$$

ә) тұтынушылардың жалпы сұраныстары жалпы жабдықтаушылардың қуаттылығынан артық:

$$\sum a_i < \sum b_j;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Осы типтегі берілген есептің қойылуы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i, (i = \overline{1,m}), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ , \quad (j = \overline{1,n}) \end{cases} \qquad \text{(а) жағдайы)}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ (i = \overline{1,m}), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j, \quad (j = \overline{1,n}) \end{cases} \qquad \text{(ә) жағдайы)}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}.$$

сызықтық функциясының минимумын табу керек.

Ашық тасымалдау есебін жабық тасымалдау есебіне келтіре отырып ашық типтегі тасымалдау есебі шығарылады.

а) жағдайында сұраныстары $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ болатын B_{n+1} жалған тұтынушы енгізіледі, яғни, кестеге B_{n+1} қосымша бағанs енгізіледі.

ә) жағдайында жабдықтау қуаттылығы $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$ болатын A_{m+1} жалған жабдықтаушы енгізіледі, яғни кестеге қосымша жол енгізіледі.

Екі жағдайда да тасымалдау құны нөлге тең деп ескеріледі. Жабдықтаушыдан жалған тұтынушыға жүк бірлігін жеткізудегі құн тең болғанда нақты тұтынушыларға жүк бірлігін жеткізуге жұмсалатын шығын ең аз болады, ал жалған тұтынушыға өте аз қолайлы болатын жабдықтаушыдан жүк жіберіледі.

4.7-мысал.

Тасымалдау есебі берілсін. Алғашқы берілгендері кестеде келтірілген.

4.26-кесте.

Жабдықтаушылар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Жабдықтаушылардың қуаттылығы (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	6	8	12	16	100
A_2	16	10	8	6	15	400
A_3	4	1	9	11	13	100
A_4	3	2	7	7	15	100
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	50	100	150	200	250	700 / 750

Осы есептің тиімді шешімін табу керек.

Шығарылуы. Берілген есепте тұтынушылардың жалпы сұранысы жабдықтаушылардың жалпы қуаттылығынан артық

(50+100+150+200+250=750>100+400+100+100=700). «Жалған жабдықтаушы» енгіземіз, және тасымалдау есебі жабық типте болу үшін тасымалдау кестесіне қосымша жол енгіземіз. Жалған жабдықтаушының қуаттылығы 750-700=50 мәніне тең. Осы қосымша жолдың шығын коэффициенттерін нөлге тең деп қабылдайды. Потенциалдар туралы теоремаға сәйкес осы санның нақты мәні тасымалдаудың тиімді үлестіруіне әсер етпейді. Алынған жабық типтегі тасымалдау есебінің бастапқы тірек шешімін ең кіші элементтер әдісі бойынша табайық. Ең кіші элементтер әдісі қолданған кезде ең кіші құнды тек нақты жабдықтаушылар мен тұтынушылардың құндарының арасынан іздейміз, ал жалған жабдықтаушының қорлары соңғы кезекте қарастырылады.

4.27-кесте.

Жабдықтау-шылар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Жабдықтаушы-лардың қуаттылығы (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 / 50	6	8 / 50	12	16	100
A_2	16	10	8	6 / 200	15 / 200	400
A_3	4	1 / 100	9	11	13	100
A_4	3	2	7 / 100	7	15	100
A_5	0	0	0	0	0 / 50	50
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	50	100	150	200	250	$\sum a_i = 750$ $\sum b_j = 750$

1. Ең кіші шығын коэффициенті 1-ге тең:

(1,1) торда $min\{100, 50\} = 50$ - бірінші тұтынушының сұранысы толығымен қамтамасыздандырылды, бірінші баған әрі қарай қарастырылмайды;

(3,1) торда $min\{100, 100\} = 100$ - екінші тұтынушының сұранысы қамтамасыздандырылды және үшінші жабдықтаушының жүк қоры толығымен жөнелтілді, яғни әрі қарай 3-ші жол, 2-баған қарастырылмайды.

2. Қарастырылатын жолдар мен бағандардағы келесі ең кіші элемент 6-ға тең: (2,4) торға $min\{400, 200\} = 200$ көлемінде жүк жеткізіледі. 4-ші тұтынушының сұранысы қанағаттандырылды, демек, 4-ші баған қарастырылмайды.

3. Келесі элемент 7-ге тең. (4,3) торға $min\{100, 150\} = 100$ көлемінде жүк жеткізіледі. 4-ші жабдықтаушының жүгі толығымен жөнелтілді, демек, 4-ші жол қарастырылмайды.

4. Ең кіші элемент 8-ге тең:

(1,3) торда және (2,3) торда. (1,3) тор үшін $min\{100 - 50, 150 - 100\} = 50$, яғни 1-ші жол да, 3-ші баған да қарастырылмайды.

5. Ең кіші және соңғы жалғыз тор – (2,5) тор, шығын коэффициенті 15-ке тең. Бұл торға $min\{400 - 200, 250\} = 50$ мәнін жазамыз. Екінші тұтынушының сұранысы толығымен қанағаттандырылды. Бесінші жабдықтаушыда 50 бірлік көлемінде жүк артық қалды және бесінші тұтынушыға 50 бірлік көлемінде сұранысы қанағаттандырылмады.

6. Жалған жабдықтаушыдағы 50 бірлік көлеміндегі жүкті бесінші тұтынушыға жазамыз.

Толтырылған торлар саны 7-ге тең. Ал ереже бойынша $m + n - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$-ға тең. Сондықтан тағы да екі торға нөлдік тасымалдау береміз. Айталық (4,2) және (3,5) торларға нөл санын жазамыз.

4.28-кесте.

1 / 50	6	8 / 50	12	16	100
16	10	8	6 / 200	15 / 200	400
4	1 / 100	9	11	13 / 0	100
3	2 / 0	7 / 100	7	15	100
0	0	0	0	0 / 50	50
50	100	150	200	250	$\sum a_i = 750$ $\sum b_j = 750$

Алынған шешімді тиімділікке тексереміз. Ол үшін потенциалдарды және бос мүшелердің бағасын анықтаймыз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 & & \\ u_1 + v_3 = 8 & & \\ u_2 + v_4 = 6 & u_1 = 0 & v_1 = 1 \\ u_2 + v_5 = 15 & u_2 = 0 & v_2 = 3 \\ u_3 + v_2 = 1 & u_3 = -2 & v_3 = 8 \\ u_3 + v_5 = 13 & u_4 = -1 & v_4 = 6 \\ u_4 + v_2 = 2 & u_5 = -15 & v_5 = 15 \\ u_4 + v_3 = 7 & & \\ u_5 + v_5 = 0 & & \end{cases}$$

Бос торлар үшін:

$$\begin{cases} 6 - 3 \geq 0 \\ 12 - 6 \geq 0 \\ 16 - 15 \geq 0 \\ 16 - 1 \geq 0 \\ 10 - 3 \geq 0 \\ 8 - 8 \geq 0 \\ 4 + 1 \geq 0 \\ 9 - 6 \geq 0 \\ 11 - 4 \geq 0 \\ 3 - 0 \geq 0 \\ 7 - 5 \geq 0 \\ 15 - 14 \geq 0 \\ 0 + 14 \geq 0 \\ 0 + 12 \geq 0 \\ 0 + 7 \geq 0 \\ 0 + 9 \geq 0 \end{cases}$$

Бос торлар есептелген бағалардың арасында теріс элемент жоқ. Сондықтан тасымалдау есебінің алынған шешімі тиімді болып табылады.

$$X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 200 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тиімді жоспар бойынша тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығынды есептейміз:

$$F_{min} = 1 \cdot 50 + 8 \cdot 50 + 6 \cdot 200 + 15 \cdot 200 +$$
$$+1 \cdot 100 + 7 \cdot 100 = 5450.$$

Жауабы. Алынған жоспарды талдап, келесі қорытындыны алуға болады. Бесінші тұтынушы жалған жабдықтаушыдан 50 бірлік көлемінде жүкті алады, демек оның сұранысы осыншама бірлікке қанағаттандырылмайды.

Тиімді шешім жалғыз емес, себебі (2,3) тор үшін потенциалдар қосындысы тасымалдау құнына тең және оған цикл бойынша 100 бірлік көлемінде жүкті орналастыруға болады. Қайта үлестіру кезінде потенциалдар жүйесі өзгермейді және тасымалдау құны өзгермей бұрынғы күйінде қалады.

Бақылау сұрақтары

1. Тасымалдау есебінің экономикалық-математикалық модельдеуін келтіріңіз.
2. Тарифтер матрицасының элементтерінің мағынасын түсіндіріңіз. Шығын коэффициенті деген не?
3. Тасымалдау есебінің жоспары қандай?
4. Жалпы қосынды шығын қалай өрнектеледі?
5. Сұраныстар бойынша шектеулер, баған бойынша баланс теңдеуін жазыңыз.
6. Қуаттылық бойынша шектеулер, жол бойынша баланс теңдеуін жазыңыз.
7. Тасымалдау есебінің экономикалық-математикалық моделінің ерекшеліктерін айтыңыз.
8. Жабық, ашық модельді тасымалдау есебін түсіндіріңіз.
9. Тасымалдау есебін «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісімен шығару алгоритмін түсіндіріңіз.
10. Тасымалдау есебін ең кіші элемент (ең кіші құн) әдісімен шығару алгоритмін түсіндіріңіз.
11. Өзгеше жоспарды қалай түсінесіз?
12. Базистік шешімнің тиімділік критерийін тұжырымдаңыз.
13. Қайта есептеу циклы дегеніміз не?
14. Тасымалдау есебін үлестірімділік әдісімен шығару алгоритмін келтіріңіз.
15. Тасымалдау есебін шығарудың потенциалдар әдісімен шығару алгоритмін келтіріңіз.
16. Потенциалдар, потенциалдық жүйе, потенциалдық шарт дегеніміз не?
17. Жабық модельдегі тасымалдау есебін шешу алгоритмін келтіріңіз.
18. Ашық модельдегі тасымалдау есебін шешу алгоритмін келтіріңіз.

4-тарау теориясы бойынша тапсырмалар

4-тарау теориясы бойынша тапсырмалар оқу құралының 119-124 беттерінде келтірілген 4-ші және 5-ші тапсырмаларды орындаудан тұрады.

Білім алушылардың аудиториялық сабақтарда немесе өз бетімен орындауға арналған жеке тапсырмалары.

1-тапсырма.

Берілген сызықтық программалау есептерін графикалық әдіспен шығару керек.

1. $F(x) = 10x_1 + 20x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 150 \\ 2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240 \\ x_1 + 3{,}5x_2 \le 350 \\ x_2 \ge 60 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

2. $F(x) = 5x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \le 22 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 21 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

3. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

4. $F(x) = 6x_1 + 10x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 20 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 40 \\ 4x_1 + 15x_2 \ge 88 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

5. $F(x) = 4x_1 + 7x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 27 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 28 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 23 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

6. $F(x) = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

7. $F(x) = 8x_1 - 2x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 18 \\ 3x_1 - x_2 \ge 3 \\ x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 18 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 24 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8. $F(x) = x_1 - x_2 \to extr$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

9. $F(x) = 8x_1 + 10x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 9 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 22 \\ 10x_1 + 8x_2 \le 15 \\ 4x_1 - 9x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

10. $F(x) = 5x_1 + 2x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 13 \\ 10x_1 - -8x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

11. $F(x) = 8x_1 + 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 6x_1 - 6x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

12. $F(x) = 4x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -9x_1 - 10x_2 \le -22 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 21 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

13. $F(x) = 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 \to max$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 + 0{,}6x_2 \le \dfrac{1}{9} \\ 0{,}8x_1 + 0{,}9x_2 \le \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{6}x_2 \le 0{,}3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

14. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to extr$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x_1 + 0{,}6x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 18 \\ 6x_1 + 8x_2 \le 20 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

15. $F(x) = 3x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 12 \\ 9x_1 + 5x_2 \le 22 \\ 8x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

16. $F(x) = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

17. $F(x) = 3x_1 + x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \ge 3 \\ 8x_1 + 3x_2 \ge 36 \\ 2x_1 \le 7 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

18. $F(x) = 4x_1 + 3x_2 \to extr$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 14x_1 + 16x_2 \le 108 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

19. $F(x) = 2x_1 + 2x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 8 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

20. $F(x) = 4x_1 + 6x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18 \\ 0{,}5x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 12 \\ x_2 \leq 9 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

21. $F(x) = x_1 + x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 3x_2 \geq 9 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ x_2 \leq 3{,}5 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

22. $F(x) = x_1 + 2x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \geq 9 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 56 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

23. $F(x) = 6x_1 + x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \geq 30 \\ -8x_1 + 8x_2 \leq 4 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 11x_2 \leq 22 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

24. $F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 2x_1 - 1{,}5x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 48 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

25. $F(x) = 2{,}5x_1 + 3x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

26. $F(x) = 2x_1 + x_2 \to extr$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ 6x_1 - 3x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

27. $F(x) = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 48 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

28. $F(x) = 5x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -8x_1 + 8x_2 \leq 4 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 11x_2 \leq 22 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

29. $F(x) = 5x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} -8x_1 + 8x_2 \leq 4 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 11x_2 \leq 22 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

30. $F(x) = x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 48 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2-тапсырма.

а) берілген сызықтық программалау есептерін симплекс әдісімен шығару керек.

ә) берілген есептерді симплекс кестемен шығару керек.

б) берілген сызықтық программалау есептерін бастапқы есеп ретінде қарастырып, оларға қосжақты есеп құрып, құрылған қосжақты есепті симплекс әдіспен немесе симплекс кестемен (жасанды базис әдісін пайдалануға болады) шығару керек.

1. $F(x) = 11x_1 + 16x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 230 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 182 \\ 4x_1 \le 89 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

2. $F(x) = 8x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 212 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 192 \\ 2x_1 \le 75 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

3. $F(x) = 10x_1 + 15x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 230 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 240 \\ \quad 3x_1 \le 89 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,2}$

4. $F(x) = x_1 - 6x_2 + 4x_3 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 \le 24 \\ 3x_1 - x_2 \le 18 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

5. $F(x) = 10x_1 + 12x_2 +$
$+14x_3 + 11x_4 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 180 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 160 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

6. $F(x) = 2000 - 6x_1 -$
$-12x_2 - 9x_3 \pm 8x_4 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 133 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 168 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 140 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

7. $F(x) = 50 + x_1 - 5x_2 +$
$+2x_3 + 5x_4 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 \le 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 20 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

8. $F(x) = 21 + 5x_1 - 2x_2 -$
$-3x_3 \to min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 \le 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

9. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 +$
$+2x_4 \to max$

$$\begin{cases} 12x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 \le 10 \\ -18x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 \le 12 \\ -8x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \le 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

10. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 +$
$+2x_4 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 16 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$

11. $F(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 -$
$-2x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 12x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 10 \\ -18x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 \leq 12 \\ -8x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \leq 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

12. $F(x) = 12x_1 + 9x_2 -$
$-10x_3 + 21x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 540 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 840 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 \leq 310 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

13. $F(x) = 3x_1 + 12x_2 + 9x_3 +$
$+15x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 15x_4 \leq 300 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 \leq 300 \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 240 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

14. $F(x) = 14x_1 + 16x_2 +$
$+16x_3 + 14x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 100 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 180 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 90 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

15. $F(x) = 6x_1 + 4x_2 + x_3 -$
$-2x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \leq 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

16. $F(x) = 10x_1 + 6x_2 + 10x_3 +$
$+20x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 540 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 840 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 \leq 310 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

17. $F(x) = x_1 + 7x_2 + 6x_3 +$
$+4x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 20 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

18. $F(x) = 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 +$
$+4x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 20 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

19. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow$
max

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \leq 24 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 8 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

20. $F(x) = x_1 + 5x_2 + 4x_3 -$
$-6x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

21. $F(x) = x_1 - 6x_2 + 5x_3 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$

22. $F(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 21 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$

23. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 3x_6 = 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$

24. $F(x) = 15x_1 + 18x_2 + +16x_3 + 14x_4 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 100 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 180 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 90 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

25. $F(x) = 20 + 4x_1 - 2x_2 - -3x_3 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leq 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

26. $F(x) = 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + +15x_4 \to max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 15x_4 \leq 250 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 \leq 250 \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 200 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

27. $F(x) = 20 + 4x_1 - 2x_2 - -3x_3 + x_4 \to min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leq 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

28. $F(x) = 55 + x_1 - 5x_2 + x_3 + +4x_4 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 \leq 9 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

29. $F(x) = 17 + 2x_1 - 3x_2 + +2x_3 \to min$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -5x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$

30. $F(x) = 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 4 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3},$

3-тапсырма.

Симплекс кестесін пайдаланып берілген сызықтық программалау есептерін жасанды базис әдісімен шығару керек.

1. $F(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$

2. $F(x) = -6x_1 - 8x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 12x_1 + 6x_2 + x_3 = 72 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$

3. $F(x) = 15x_1 + 12x_2 - 8x_3 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$

4. $F(x) = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 - -2x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_5 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 30 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 11 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

5. $F(x) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 - -2x_5 \to max$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_5 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 11 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

6. $F(x) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - -3x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 13 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

7. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + +3x_4 - 2x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 13 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

8. $F(x) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + +2x_4 - x_5 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

9. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + +3x_4 - 2x_5 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 13 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

10. $F(x) = 6x_1 - 3x_2 + x_5 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 14 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

11. $F(x) = 5x_1 - 2x_2 + +x_5 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + \ 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 14 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

12. $F(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - -x_5 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

13. $F(x) = 2x_1 + x_2 + 8x_3 + +6x_4 - 3x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

14. $F(x) = x_1 + x_2 + 7x_3 + 6x_4 - -x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 9 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

15. $F(x) = x_1 - 3x_3 + 6x_4 \to max$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

16. $F(x) = 5x_1 - 3x_2 + 4x_4 \to min$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

17. $F(x) = 2x_1 - x_2 + 8x_3 - -3x_4 + 3x_5 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 12 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 14 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

18. $F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 14 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

19. $F(x) = -2x_1 - x_2 + 3x_3 + +4x_4. +6x_5 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

20. $F(x) = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - -2x_4 + 3x_5 \to min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 17 \\ 2x_1 + x_5 = 14 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 12 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

21. $F(x) = 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - -2x_4 + 3x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

22. $F(x) = 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - -2x_4 + 3x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 14 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

23. $F(x) = 5x_1 - 6x_2 + 6x_3 +$
$+4x_4 + 4x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 10 \\ 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 6 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

24. $F(x) = 5x_1 - 6x_2 + 6x_3 +$
$+4x_4 + 4x_5 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 10 \\ 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 6 \end{cases},$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

25. $F(x) = 8x_1 + 2x_2 + 8x_3 -$
$-2x_4 + 7x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 \geq 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_5 = 23 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

26. $F(x) = 7x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 +$
$+8x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

27. $F(x) = 6x_1 + x_2 + 5x_3 +$
$+7x_4 + 8x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

28. $F(x) = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 +$
$+2x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 13 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

29. $F(x) = 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 +$
$+x_5 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 22 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$

30. $F(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to$
max

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 150 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 200 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

4-тапсырма

Бастапқы мәліметтер кестеде берілген. Біртекті жүкті өндіру бекетінен тұтынушылар бекетіне ең аз шығынмен жеткізу керек.

а) «Солтүстік-батыс бұрыш» әдісімен алғашқы базистік шешімді табу керек;

ә) «Ең кіші элемент» әдісімен алғашқы базистік шешімді табу керек;

б) «Солтүстік-батыс бұрыш» әдісімен алынған базистік шешімнің тиімділігін тексеру керек;

в) «Ең кіші элемент» әдісімен алынған базистік үлестірудегі бос торлардың бағасын табу керек;

г) «Ең кіші элемент» әдісімен алынған базистік шешімне үлестірімділік әдісін пайдаланып тиімді үлестіруді анықтау керек;

д) «Солтүстік-батыс бұрыш» әдісімен алынған базистік шешімді пайдалана отырып, потенциалдар әдісінің көмегімен есептің тиімді шешімін және ең аз тасымалдау шығынын табу керек.

1.

4	3	5	555
2	1	6	400
8	2	1	325
525	395	360	

2.

3	5	6	345
3	6	2	265
8	3	5	156
322	244	200	

3.

2	5	6	650
1	3	5	250
6	7	1	325
580	325	320	

4.

7	5	3	489
2	3	1	562
1	8	9	239
400	600	290	

5.

5	8	2	475
2	4	9	225
7	1	3	200
150	325	425	

6.

4	3	1	160
7	5	6	140
1	9	3	250
180	170	200	

7.

5	15	10	9	60
8	10	9	7	110
7	6	6	9	170
11	5	7	12	160
210	50	90	150	

8.

7	12	18	19	80
7	13	11	11	112
19	18	12	13	38
11	3	11	4	45
40	20	40	75	

9.

4	7	10	7	65
6	7	9	10	75
5	12	4	3	120
3	8	8	6	140
180	100	40	80	

10.

3	6	8	6	200
4	4	9	12	250
5	6	7	11	100
6	7	8	2	120
180	320	60	110	

11.

6	10	3	18	195
5	4	6	7	130
8	5	3	7	140
5	9	5	6	75
270	120	60	90	

12.

2	2	3	5	180
5	3	3	7	70
4	8	1	7	30
4	4	7	7	150
95	105	110	120	

17.

20	7	8	175
17	19	4	320
8	18	18	345
10	15	5	300
320	430	390	

18.

27	23	19	1000
25	15	18	4500
13	21	18	3300
20	17	14	2200
2050	5110	3840	

19.

23	15	21	3500
20	20	17	4000
14	19	17	1900
13	26	28	3550
3075	3600	6275	

20.

12	14	5	310
8	13	7	190
7	15	5	320
4	7	10	200
320	370	320	

21.

7	5	12	8	6	240
10	6	11	7	3	110
8	15	12	5	13	70
9	10	8	6	5	120
60	290	40	90	60	

22.

20	4	5	20	7	105
8	10	19	7	6	200
9	18	9	8	4	470
20	10	4	11	13	233
222	215	190	266	115	

23.

3	11	8	5	6	300
3	2	9	6	12	405
8	13	7	10	8	525
9	6	4	2	10	500
225	475	380	375	275	

24.

2	9	4	10	6	28
7	3	0	5	3	35
5	2	1	7	8	26
11	6	2	3	4	18
17	25	20	15	30	

25.

9	5	11	8	150
8	6	8	12	160
7	10	9	15	170
1	9	10	10	300
9	12	5	6	150
380	170	200	180	

26.

4	8	3	2	150
1	5	3	7	220
5	2	8	9	180
6	11	10	4	100
8	9	6	4	150
255	195	180	170	

27.

11	9	3	5	250
6	5	10	7	180
14	8	4	5	250
2	8	9	7	140
5	10	11	8	180
180	130	420	270	

28.

5	4	7	9	175
6	1	5	3	225
8	10	9	4	300
12	5	4	6	140
3	11	7	5	100
320	260	170	190	

29.

2	5	6	7	4	240
3	3	5	8	3	202
5	10	7	10	6	98
190	130	65	45	110	

30.

7	12	18	15	4	200
8	5	2	11	7	170
4	2	15	18	13	130
50	220	80	110	40	

5-тапсырма

Ашық модельдегі тасымалдау есебін жабық түрдегі тасымалдау есебіне келтіріп, тиімді шешімін табу керек.

1.

4	3	5	555
2	1	6	400
8	2	1	325
455	325	300	

2.

3	5	6	345
3	6	2	265
8	3	5	156
222	244	200	

3.

2	5	6	650
1	3	5	250
6	7	1	325
250	325	200	

4.

7	5	3	489
2	3	1	562
1	8	9	239
300	600	290	

5.

5	8	2	475
2	4	9	225
7	1	3	200
250	325	425	

6.

4	3	1	200
7	5	6	140
1	9	3	250
180	170	200	

7.

5	15	10	9	100
8	10	9	7	110
7	6	6	9	170
11	5	7	12	160
210	50	90	150	

8.

7	12	18	19	80
7	13	11	11	12
19	18	12	13	38
11	3	11	4	45
10	20	40	75	

9.

4	7	10	7	50
6	7	9	10	70
5	12	4	3	120
3	8	8	6	140
180	100	40	80	

10.

3	6	8	6	200
4	4	9	12	150
5	6	7	11	90
6	7	8	2	120
180	320	60	110	

11.

6	10	3	18	180
5	4	6	7	130
8	5	3	7	140
5	9	5	6	30
270	120	60	90	

12.

2	2	3	5	180
5	3	3	7	70
4	8	1	7	30
4	4	7	7	150
50	50	110	90	

13.

5	3	12	4	180
2	3	9	5	70
7	5	9	6	20
40	130	110	50	

14.

5	3	12	4	40
2	3	9	5	40
7	5	9	6	20
35	30	40	20	

15.

1	2	4	1	10
2	3	2	4	20
5	7	8	6	30
17	8	10	15	

16.

14	16	13	7	70
15	11	9	8	80
12	17	18	16	110
85	70	60	80	

17.

20	7	8	175
17	19	4	320
8	18	18	345
10	15	5	300
300	410	390	

18.

27	23	19	1000
25	15	18	4500
13	21	18	3300
20	17	14	2200
1950	5000	3330	

19.

23	15	21	3500
20	20	17	4000
14	19	17	1900
13	26	28	3550
3000	4600	3550	

20.

12	14	5	410
8	13	7	190
7	15	5	300
4	7	10	200
290	380	350	

21.

7	5	12	8	6	240
10	6	11	7	3	110
8	15	12	5	13	70
9	10	8	6	5	120
70	290	55	90	60	

22.

20	4	5	20	7	100
8	10	19	7	6	200
9	18	9	8	4	470
20	10	4	11	13	233
201	216	190	266	115	

23.

3	11	8	5	6	300
3	2	9	6	12	405
8	13	7	10	8	550
9	6	4	2	10	200
180	200	450	225	275	

24.

2	9	4	10	6	28
7	3	0	5	3	35
5	2	1	7	8	26
11	6	2	3	4	18
15	25	20	15	30	

25.

2	5	6	7	4	210
3	3	5	8	3	130
5	10	7	10	6	60
190	130	65	45	110	

26.

7	12	18	15	4	189
8	5	2	11	7	168
4	2	15	18	13	130
67	208	80	110	40	

27.

9	5	11	8	140
8	6	8	12	160
7	10	9	15	180
10	9	10	10	30
9	12	5	6	150
310	70	120	160	

28.

4	8	3	2	150
1	5	3	7	220
5	2	8	9	180
6	11	10	4	100
8	9	6	4	150
225	175	180	170	

29.

11	9	3	5	270
6	5	10	7	180
14	8	4	5	150
2	8	9	7	140
5	10	11	8	180
170	130	420	250	

30.

5	4	7	9	185
6	1	5	3	125
8	10	9	4	300
12	5	4	6	140
3	11	7	5	100
280	275	170	190	

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Н. П. Анисимова, Е. А. Ванина. Линейное программирование. Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург, 2013.

2. И.Ю. Выгодчикова. Введение в линейное программирование. Учебное пособие. Саратов, 2014.

3. Ф.Р. Гусманова. Амалдарды зерттеудің негіздері. Оқулық. Алматы, 2011.

4. Ф.Р. Гусманова. Оңтайландыру әдістері. Оқу құралы. Алматы, 2007.

5. Ф.Р. Гусманова, С.Б. Беркімбаева, М.Ж. Сақыпбекова. Оңтайландыру әдістерінен жаттығулар мен есептер. Оқу құралы. Алматы, 2007.

6. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2006.

7. Н.Л. Леонова. Задачи линейного программирования и методы их решения. Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург, 2017.

8. К. Л. Самаров. Математика. Учебно-методическое пособие по разделу линейное программирование. К. Л. Самаров, 2009. Сайт: www.resolventa.ru , E-mail: resolventa@list.ru.

9. Л.А. Усольцев. Линейное программирование. Учебное пособие. Омск, 2008.

МАЗМҰНЫ

Ф.Р. Гусманова,
Б.С. Дарибаев,
Қ.С.Дальбекова

Сызықтық программалау

Оқу құралы

Басуға 26.04.2021 ж. қол қойылды. Пішімі 60х90 $^{1}/_{16}$.
Офсеттік басылыс. Қаріп түрі «Times». Көлемі 8 б.т.
Таралымы 500 дана. Тапсырыс № 291020-02.

Тапсырыс берушінің дайын файлдарынан басылып шықты.