М.А. Бектемесов,
Ф.Р. Гусманова,
М.А. Скиба

Ойындар теориясы

Оқу құралы

Алматы, 2021

ӘОЖ 005(075.8)
КБЖ 65.05 я73
Б40

Б40 **Ойындар теориясы**: оқу құралы./ М.А. Бектемесов, Ф.Р. Гусманова, М.А. Скиба - Нұр-Сұлтан: Қаржы академиясы, 2021 . – 105 б.

ISBN 978-601-08-0940-6

Пікір жазғандар:

Қ.С. Дальбекова, Халықаралық бизнес университетінің «Бизнес информатика» кафедрасы, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент;

Ж.Ж. Ахметова, АҚ «Қаржы академиясы», «Есеп және аудит және IT жүйесі» кафедрасы, PhD, доцент.

Баспаға Қаржы Академиясының Ғылыми Кеңесінің шешімімен шығаруға ұсынылған.

(Хаттама №2, 13 қазан 2020 ж.)

Оқу құралы жоғары оқу орындарының студенттеріне «Операцияларды зерттеу және оңтайландыру әдістері», «Бизнес үдерістерді модельдеу», «Кәсіпорын ресурстарын басқару» және басқа да осы бағыттағы пәндер бойынша даярлауға арналған. Оқу құралы ойындар теориясы пәні бойынша теориялық мәліметтерден, практикалық сабақтарда орындайтын тапсырмалардан және осы тапсырмаларға ұқсас талдау жүргізілген мысалдар мен өзін-өзі бақылауға арналған бақылау сұрақтарынан тұрады.

Авторлар осы оқу құралын дайындау барысында өздерінің практикалық тәжірибелері мен оқу құралының соңында ұсынылған әдебиеттердегі материалдар мен өздерінің еңбектерін толықтырылу негізінде құрастырды.

ӘОЖ 005(075.8)
КБЖ 65.05 я73

ISBN 978-601-08-0940-6

КІРІСПЕ

Ойындар теориясы – дау-жанжал жағдайында тиімді стратегиялық шешім қабылдаудың модельдерін зерттейтін математика саласы.

Ойын ұғымын үрдіс мағынасы ретінде қарастыруға болады. Ойынға екі немесе одан да көп қызығушы жақтар –ойыншылар қатыса алады. Жеңіске не жеңіліске жеткізетін стратегиялар басқа ойыншылардың әрекеттеріне байланысты болады. Ойындар теориясы басқа қатысушылар туралы жорамалдарға, олардың ресурстары мен ықтималды әрекеттеріне негізделе отырып, ең жақсы стратегия таңдауға көмектеседі.

Ойындар теориясы ХХ ғасырдың 40-жылдары АҚШ математиктері Джон фон Нейман (1903–1957) мен Оскар Моргенштерн (1902–1977) бәсекелес экономикалық құбылыстарды математикалық жолмен шешу әдісі ретінде қарастырды. Мұндағы негізгі ұғым – ойын, ал оның формальды түрдегі көрінісі – «дау-жанжал» ойыншы, стратегия, мксимин, минимакс принциптері, ойынның құны, ойынның ер нүктесі және т.т. Дау-жанжалда қатысушылар коалиция құра алады.

Әрбір ойыншының стратегиясы оның атқаратын функциясына тәуелді болады. Ойыншы ұтысты көп беретін стратегияны таңдап алады. Дау-жанжалдың шешілу нәтижесінде коалициялардың мүдделері ортақ болса, онда ойын «коалициясыз ойын» деп аталады. Егер коалициясыз ойынға екі ойыншы қатынасса және олардың ұтыс функцияларының таңбасы кез келген ситуацияда бір-біріне қарама-қарсы болса, онда мұндай ойын антагонистік ойын деп аталады. Егер антагонистік ойында екі ойыншының да стратегияларының саны шекті болса, онда бұл ойын матрицалық ойын болып саналады.

Ойындар теориясында «ықтималдық теориясы» жиі пайдаланылады. Қазақстанда ойындар теориясы бойынша зерттеу жұмыстары 1970 жылдан бастап жүргізілуде.

1-ТАРАУ. АНТАГОНИСТИКАЛЫҚ ОЙЫНДАР НЕГІЗДЕРІ

1.1 Ойындар теориясының негізгі ұғымдары.

Шешімді таңдау туралы мәселелер қарастырылатын көптеген әлеуметтік-экономикалық жағдайлардың (әсіресе нарықтық экономика кезінде) әрқайсысы өзінің мақсатына жету үшін әр түрлі тәсілдермен әрекет ету мүмкіндігі бар, кейбір жағдайларда таңдаулары тайталас жақтардың әрекеттерінен тәуелді әр түрлі қызығушылықтарымен (кей жағдайда қарама-қарсы) кем дегенде екі жақ қатысатындай қасиетті қамтиды. Мұндай жағдайлар *дау-жанжал* деп аталады. Дау-жанжал жағдайы келесі белгілермен сипатталады:

1) қызығушы жақтардың жиыны (тұтынушылар, фирмалар, жеке елдер, әр түрлі кеден, сауда, қаржы және экономикалық одақтары, жеке адамдар және т.т.);

2) әрбір жақтың мүмкін болатын әрекеттері (тұтыну көлемін таңдау, дивиденттік саясатты таңдау, инвестициялық қоржынды іріктеудің әр түрлі тәсілдері, ұлттық нарыққа саяси немесе экономикалық түсінік бойынша кейбір тауарларды жібермеу және т.т.);

3) қарама-қарсы жақтардың мүддесі (әр түрлі саяси, қаржы, экономикалық сұраныстарды қанағаттандыру, монополиялық пайда, тауар өткізетін нарықтан бәсекелестерді ығыстыру, артық тауарды сыртқы нарықта сатып жіберу, қазынаның және өндірушілердің табысын арттыру және т.т.).

Нақты өмірлік дау-жанжалда әрбір жақтың жүрісін таңдау – күрделі есеп. Сондықтан оны талдау үшін берілген дау-жанжал жағдайындағы маңызды емес факторларды алып тастап және оның орындалуын белгілі тәртіппен шектей отырып математикалық модельдеуге жүгінуге тура келеді.

Дау-жанжал жағдайындағы математикалық модель *ойын* деп аталады. Дау-жанжал жағдайындағы тиімді шешімді қабылдайтын математикалық модельдеумен айналысатын амалдарды зерттеу теориясының бөлімі *ойындар теориясы* деп аталады.

Ойында мүдделі (қызығушылығы бар) жақтар *ойыншылар* деп аталады. Дау-жанжал қорытындысы *ұтыс* деп аталады. Көбінесе, әйтсе де барлық уақытта емес, ойыншылар тең құқылы болып есептеледі. Егер бірлескен әрекеттері бірлесу мақсатында болып табылса, онда осындай бірлесулер *әрекеттер коалициясы* деп аталады. Егер бірігу ойын нәтижесінің артықтығының сәйкестік белгісі бойынша құрылса, онда ол *мүдде коалициясы* деп аталады. Көрсетілген коалициялар барлық уақытта бірдей бола бермейді. Бірдей болған жағдайда олар жай ғана *коалициялар* деп аталады. Уақытша фактор тұрғысынан алғанда ойын барысында коалициялар *уақытша* немесе *тұрақты* бола алады. Жоғарыда айтып кеткеніміздей ойынды математикалық қалыптастыру мақсатында қарастырсақ, ойын шарттар жүйесін беретін белгілі *ережелер* бойынша жүргізілуі керек. Ол:

- әрбір ойыншының мүмкін болатын әрекеттерін;
- әрбір жақ басқа жақтардың әрекеттері туралы ала алатын ақпарат көлемін;
- қарсыласының жүрісінің әрбір жиынтығының нәтижесіндегі ойынның қорытындысын

сипаттайды.

Ереже бойынша ұтыс (немесе ұтылыс) сандық берілуі мүмкін: мысалы, ұтылысты – нөлмен, ұтысты бір санымен, теңбе-теңді – 1/2 санымен бағалауға болады.

Қарастырылған ережелердің біреуін таңдау және жүзеге асыру ойыншының *жүрісі* деп аталады. Жүріс – дербес және кездейсоқ болуы мүмкін: *дербес жүріс* – мүмкін болатын әрекеттердің біреуін ойыншының әдейі таңдауы (мысалы, шахмат ойынындағы жүріс); *кездейсоқ жүріс* – кездейсоқ таңдалынған әрекет (мысалы, араластырылған карталар ішінен біреуін таңдау).

Көбінесе ойыншылар *тактика* ұғымын пайдаланады: ойыншы ойында нақты жүрісті сол жүріс барысында ғана таңдауға шешім қабылдайды.

Пайда болған жағдайға тәуелді ойыншының жүрісін таңдауды бірмәнді анықтайтын ережелер жүйесі *стратегия* деп аталады. Кез келген жағдайға нақты таңдау сәйкес қойылған ойыншының әрбір бекітілген стратегиясы *таза стратегия* деп аталады. Басқаша айтқанда, ойында ойыншының кез келген мүмкін болатын әрекеті ойыншының *стратегиясы* немесе *таза стратегиясы* деп аталады.

Бір жүрісті ойында стратегия және тактика ұғымдары бір мағынаны білдіреді.

Айталық A ойыншының $m \geq 1$ таза стратегиясы бар болсын, және оларды A_1, A_2, …, A_m арқылы, ал осы стратегиялардың жиынын S_A^C («c» – clean ағылшын сөзінің бірінші әрібінен алынған, аудармасы – таза мағынасын білдіреді) арқылы белгілейік. Сонымен, $S_A^C = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$. Дау-жанжал жағдайында әрбір ойыншы өзінің жүрісін жасайды, яғни өзінің қандай да бір стратегиясын таңдайды. Нәтижесінде дау-жанжалдың *қорытындысы* немесе *жағдайы* деп аталатын, барлық ойыншылардың x стратегиялар жиыны құрылады. Мысалы, егер ойынға A және B ойыншылар сәйкес $S_A^C = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ және $S_B^C = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ стратегиялар жиынымен қатысып, кезекті жүрістің нәтижесінде ойыншылар сәйкес A_i және B_j стратегияларын таңдаса, онда $x = \left(A_i, B_j\right)$ реттелген жұбы осы жүрістен кейінгі жағдай болып табылады.

D және E екі жиынының барлық (d, e) реттелген жұбының $D \times E = \{(d, e): d \in D, e \in E\}$ жиыны $D \times E$ *декарттық көбейтіндісі* деп аталады.

Осы анықтаманы ескере отырып таза стратегияларда барлық жағдайлар жиыны $S_A^C \times S_B^C$ декарттық көбейтіндісін – A ойыншының S_A^C таза стратегиялар жиынының B ойыншының S_B^C таза стратегиялар жиынына декарттық көбейтіндісін береді, яғни $S_A^C \times S_B^C = \left\{\left(A_i, B_j\right): i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\right\}$. Ойыншылар саны екіден артық, ақырлы болған кездегі ойын үшін де осылайша талдауға болады.

Кей кездерде кез келген жағдай мүмкін бола бермейтіндей ойын ережелері кездеседі. Мүмкін бола бермейтін жағдай *тиым салынған жағдай* деп аталады. Ойыншылар тиым салынған жағдайға әкелетін стратегияны таңдаған кездегі ойын ереже бойынша жүргізілмегендіктен *құрылмаған* деп есептеледі.

A ойыншының қызығушылығын қанағаттандыру деңгейі оның барлық жағдайлардың $X = S_A^C \times S_B^C$ жиынында анықталған және әрбір $x \in X$ жағдайын *A ойыншының x жағдайындағы* *ұтысы* деп аталатын қандай да бір $F_A(x) \in R$ санына сәйкес қоятын $F_A: X \to R$ *ұтыс функциясымен* анықталады.

Осылайша, B ойыншы үшін $y = (B_j, A_i)$ жағдайының және олардың әрқайсысын

$$Y = S_B^C \times S_A^C = \{(B_j, A_i): j = 1, 2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, m\}$$

жиынында анықталған *B ойыншының y жағдайындағы ұтысы* деп аталатын $F_B(y) \in R$ санына сәйкес қоятын $F_B: Y \to R$ ұтыс функциясы анықталады.

Ойын бірнеше рет қайталанғанда ойыншыға барынша көп (максимал) мүмкін болатын орташа ұтысқа (немесе барынша аз (минимал) мүмкін болатын орташа ұтылысқа пара-пар) кепілдік беретін стратегия *тиімді стратегия* деп аталады. Басқаша айтқанда, ойыншылардың біреуі (айталық, біріншісі) өзінің стратегиясын ұстаған кезде, екіншісі барынша көп ұтысты иемденуі керек, және осы мезгілде екінші ойыншы өзінің стратегиясын ұстаған кезде бірінші ойыншы барынша аз ұтылысты иемдену керек. Міне осындай стратегиялар *тиімді стратегиялар* деп аталады.

1.2 Ойындарды жіктеу

Ойындар теориясында ойындардың өздері ойынның әр түрлі сипаттамалары, атрибуттары бойынша жіктелуі мүмкін (ойынға қатысушылар, ойын барысындағы жүрісі). Бұл жіктеу, мысалы

1) ойынға қатысатын ойыншылар саны бойынша ;

2) ойынның стратегиялар саны бойынша;

3) ойын нәтижесі (ұтыс, ұтылыс қосындысы) бойынша;

4) ойын барысындағы ойыншылардың өз ара қарым-қатынасы бойынша;

5) ұтыс функциясының түрі бойынша

және т.б. сипаттамалар бойынша жүзеге асырылуы мүмкін.

Ойынға қатысатын ойыншылар саны бойынша ойынды *жұп ойын* және *көптік ойын* деп бөлінетіні жоғарыда айтылды. Ойынға қатысатын жақтардың саны екіге тең болса, ойын *жұп ойын* деп, ал екіден артық болса, онда ойын *көптік ойын* деп аталады.

Стратегиялар санына қатысты ойын *ақырлы* және *ақырсыз* болып бөлінеді. Егер әрбір ойыншының стратегиялар жиыны ақырлы болса, онда ойын *ақырлы* деп аталады. Кері жағдайда, яғни кем дегенде бір ойыншының стратегиялар жиыны ақырсыз болса ойын *ақырсыз* деп аталады.

Ойын ұтысының (нәтижесінің) сипаты бойынша ойын *нөлдік қосындылы ойын* және *нөлдік емес қосындылы* ойын деп бөлінеді.

Егер жұп ойында ойыншылар қарама-қарсы мақсатты көздесе, онда мұндай ойын *антагонистикалық ойын* деп аталады. Осындай ойында ойыншылардың біреуі қанша ұтса, екіншісі тура сондай ұтылады. Сондықтан, A және B ойыншыларының $F_A\colon S_A^C \times S_B^C \to R$ және $F_B\colon S_B^C \times S_A^C \to R$ ұтыс функциялары өзара келесі қатынаспен байланысқан:

$$F_B\left(B_j, A_i\right) = -F_A\left(A_i, B_j\right),\ i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

мұндағы, S_A^C - A ойыншының таза стратегиясы, S_B^C - B ойыншының таза стратегиясы.

Антагонистикалық ойындарда ойыншылардың ұтыстарының қосындысы барлық уақытта нөлге тең. Антагонистикалық ойынды нөлдік қосындылы ойынның дербес жағдайы ретінде қарастыруға болады.

Ойынның өзара қарым-қатынасы бойынша, нөлдік емес қосындылы көптік ойындар *коалициялы* және *коалициясыз* ойындар деп бөлінеді.

Коалициялы ойындарда ойыншылар коалицияға кіре алады және әрекеттер коалициясы мен қызығушылық коалициясы әр түрлі болады.

Коалициясыз ойындарда әрбір ойыншының мақсаты – барынша көп мүмкін болатын жеке ұтысты иемдену. Егер ойыншылар коалицияға біріксе, онда мұндай коалициялар коалицияға кіретін жеке ойыншылардың мүдделерін ғана анықтайды.

Коалициясыз ойындар өз алдына *кооперативті* және *кооперативті емес* ойындар болып бөлінеді. Кооперативті ойындарда ойыншыларға – коалицияға (топтарға) бірігуге рұқсат етіледі және алдын ала анықталады. Коалиция мақсаты - жалпы ұтысты соңынан келісім бойынша коалиция мүшелері арасында бөліп беретіндей максимизациялау. Қандай да бір коалиция құруға тиым салынған кооперативтік ойындар бар. Бұл кезде ойын бастапқы берілген коалициялық бөліну шарттарында жүргізіледі. Кооперативті емес ойындарда кооперативті ойындарға қарағанда ойыншылар өздерінің күштерімен жеке ұтыстарды максимизациялауға ұмтылады. Кооперативті емес ойындарды көбінесе коалициясыз ойындар деп айтады.

Ұтыс функциясына қатысты ойын матрицалық, nбиматрицалық, үзіліссіз, дөңес, сепарабельді және т.б. бөлінеді.

1.3 Матрицалық ойындар

A ойыншының $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ - m стратегиясы бар, B ойыншының $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ - n стратегиясы бар ақырлы ойынды қарастырайық. Мұндай ойын $m \times n$ - *ойын* деп аталады. Жалпы жағдайда m және n сандары бір-бірінен тәуелсіз. Егер A және B ойыншылар тек қана жеке жүрістерін пайдаланса, онда A және B стратегияларын таңдау ойынның a_{ij} қорытындысын бірмәнді анықтайды, яғни A ойыншының ұтысын және B ойыншының ұтылысын сипаттайтын санды анықтайды. a_{ij} мәні оң да теріс те болуы мүмкін. $a_{ij} > 0$ болғанда A ойыншы ұтады, ал B ойыншы a_{ij} шамасына ұтылады және керісінше, $a_{ij} < 0$ болғанда B ойыншы ұтады, ал A ойыншы ұтылады. Бұл жағдайда көбінесе, ұтылыстың орнына A ойыншының теріс ұтысы айтылады.

Егер ойында кездейсоқ жүрістер қарастырылса, онда A_i және B_j стратегиялардағы ұтыс кездейсоқ болып табылады. Бұл жағдайда күтілетін ұтыс бағасының орнына оның математикалық күтімі алынады.

Айталық, бізге $m \times n$ - ойынының барлық a_{ij} мәні белгілі болсын. Матрицаның жатық жолдарына A ойыншының

A_i стратегияларын, тік жолдарына B ойыншының B_j стратегияларын сәйкес қоюға болады. Егер жатық жолмен тік жолдың қиылысуына A ойыншының (A_i, B_j) жағдайына сәйкес F_A ұтыс функциясының $F_A(A_i, B_j) = a_{ij}$ мәнін қойсақ, онда *A ойыншының ұтыс матрицасы* деп аталатын $\boldsymbol{A}$ матрицасын аламыз:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1.1)$$

Осылайша, B ойыншының F_B ұтыс функциясының $F_B(B_j, A_i) = b_{ji}$ мәндерінен *B ойыншының $\boldsymbol{B}$ ұтыс матрицасын* аламыз.

(1.1) теңдіктен $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}^T$ (яғни $\boldsymbol{B}$ матрицасы $\boldsymbol{A}$ матрицасына қарама-қарсы транспонирленген матрица) аламыз. Демек, $\boldsymbol{B}$ матрицасы $\boldsymbol{A}$ матрицасымен анықталады. Сондықтан, ақырлы антагонистикалық ойын тек қана бір ұтыс матрицасымен сипатталады, осыған байланысты *матрицалық ойын* деп аталады.

Ойын матрицасы A және B ойыншылардың S_A^C және S_B^C реттелген жиынынан маңызды түрде тәуелді. Жалпы, кез келген ақырлы антагонистикалық ойынды матрицалық ойын түрінде жазуға болады.

Ойынның $\boldsymbol{A}$ матрицасы F_A ұтыс функциясының мәндеріне тәуелді құрылады. Ол кестелік, аналитикалық (формула түрінде) немесе сөздік-сипаттау тәсілімен берілуі мүмкін.

Сонымен, матрицалық ойын толығымен A ойыншының S_A^C стратегиялар жиынынан, B ойыншының S_B^C стратегиялар жиынынан және A ойыншының $\boldsymbol{A}$ ұтыс матрицасынан тұратын $\{S_A^C, S_B^C, A\}$ жиынтығымен анықталады.

1.1-мысал.

«*Теңгені ойлап табу*» ойыны.

Бірінші (A) ойыншы өзінің қалауы бойынша және екінші (B) ойыншыға көрсетпей бағасы 50 немесе 100 теңгенің біреуін жұдырығына жасырады, ал екінші ойыншы қандай теңгенің жасырылғанын табуға тырысады. Егер тапса, жасырылған теңгені алады, кері жағдайда бірінші ойыншыға 75 теңге береді.

Ұтыс матрицасын жазу керек.

Шығарылуы. A ойыншының екі стратегиясы бар: A_1 – 50 теңгені жасыру, A_2 - 100 теңгені жасыру; B ойыншының да екі стратегиясы бар: B_1 - 50 теңге деп болжау, B_2 - 100 теңге деп болжау. Сонда осы ойынның ұтыс матрицасы мына түрде жазылады (жатық жолдар – A ойыншының, тік жолдар – B ойыншының стратегиялары):

$$P = \begin{pmatrix} -50 & 75 \\ 75 & -100 \end{pmatrix}.$$

Жауабы. $P = \begin{pmatrix} -50 & 75 \\ 75 & -100 \end{pmatrix}.$

1.4 Максимин, минимакс принциптері

Ойынның шешімін анықтаудың жалпы ережесін табу мақсатында ойынның таза стратегияда шешімі бар болатын (1.1) түріндегі ұтыс матрицасын қарастырайық.

Дау-жанжал жағдайын бірінші ойыншының тұрғысынан қарастырайық. Айталық, A ойыншы өзінің ең жақсы стратегиясын таңдасын, яғни $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ стратегияларының ішінен кез келген A_i-ші стратегияға A ойыншының ұтысы минималды болатындай B ойыншы B_j стратегиясымен жауап береді. Осы B_j стратегиясын табу үшін ұтыс матрицасындағы A_i стратегиясына сәйкес (i-ші нөмірлі жол) жолдағы a_{ij} сандарының ішіндегі ең кішісін табу керек. Оны α_i арқылы белгілейміз, яғни

$$\alpha_i = \min_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.2}$$

α_i мәні A_i-*ші стратегиясының тиімді көрсеткіші* деп аталады.

A ойыншының стратегиясы өзгерген кезде осы стратегияларға сәйкес әрбір α_i саны да өзгеріп отырады. Әрине, A ойыншыға α_i максимал мәнді қабылдайтындай A_i стратегиясына тоқтаған дұрыс. Егер ойыншы айтылғандарды ескеріп қауіп-қатерге тәуекел етпесе, келесі түрде әрекет ету керек: барлық жатық жолдардың ең кіші элементін таңдап, осы таңдалған элементтердің ең үлкенін таңдау керек, ал қауіп-қатерге тәуекел ету – тиімсіз ойнау болып табылады. Сол кезде ол өзінің ұтысына кепілдік береді, ұтыс - ең болмаса, барлық жолдардың ең кіші элементтерінің ішіндегі ең үлкеніне тең болады.

Бұл максимал мәнді $\underline{v}$ арқылы белгілейік, яғни

$$\underline{v} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \alpha_i \tag{1.3}$$

немесе, α_i үшін (1.2) өрнегін ескерсек,

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.3’}$$

$\underline{v}$ шамасы *ойынның төменгі құны (мәні)* немесе *максималды ұтысы* (*максимин)* деп аталады. Бұл B ойыншының кез келген стратегиясындағы A ойыншының кепілденген ұтысы.

Максиминге сәйкес келетін стратегия, яғни $\underline{v}$ санына сәйкес келетін матрицаның жатық жолы *A ойыншының максиминді стратегиясы* деп аталады.

A ойыншының (1.3) тиімді стратегиясын таңдау принципі *максимин принципі* деп аталады.

Осылайша, A ойыншы үшін жүргізілген талдауды B ойыншы үшін жүргізіп мына ұғымдарды аламыз:

$$\beta_j = \min_{i=1,2,\ldots,m} a_{ij}, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.4}$$

β_j мәні B_j*-ші стратегиясының тиімді емес көрсеткіші* деп аталады.

B ойыншы тек қана,

$$\overline{v} = \min_{j=1,2,\dots,n} \beta_j, \tag{1.5}$$

немесе (1.3) формула бойынша

$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij}, \ i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{1.5'}$$

өрнегімен анықталатын β_j шамасынан кем емес ұтысқа жететініне сенімді бола алады.

$\underline{v}$ - *ойынның жоғарғы құны (мәні)* немесе *минималды ұтысы* (*минимакс)* деп аталады. Бұл A ойыншының кез келген стратегиясындағы B ойыншының кепілденген ұтысы болады.

Минимакске сәйкес келетін стратегия, яғни $\overline{v}$ санына сәйкес келетін матрицаның тік жолы *B ойыншының минимаксті стратегиясы* деп аталады. Бұл B ойыншының кез келген жағдайда $\underline{v}$ шамасынан артпайтын ұтылыста болатындай, және сәйкес A ойыншы да $\underline{v}$ шамасынан артпайтын ұтысқа ие болатындай ең сенімді стратегиясы болып табылады.

B ойыншының тиімді стратегиясын таңдаудың (1.5) принципі *минимакс принципі* деп аталады.

Минимаксті немесе максиминді стратегиялар ойында бір немесе одан да көп болуы мүмкін.

Теорема 1.1 (*максимин принципі*). Кез келген матрицалық ойын үшін

$$\underline{v} \leq \overline{v}.$$

Егер $\underline{v} = \overline{v}$ болса, яғни ойынның жоғарғы құны мен төменгі құны өзара беттессе, онда минимаксті және максиминді стратегиялар ойыншылардың *тиімді стратегиялары* деп, олардың жиынтығы *тиімді шешім* деп немесе *ойынның шешімі* деп аталады, $v = \underline{v} = \overline{v}$ шамасы *ойынның мәні* немесе *таза құны* деп аталады. Бұл жағдайда A ойыншы барынша көп кепілденген v ұтысын (B ойыншының жүрісінен тәуелсіз) алады, ал B ойыншы барынша аз кепілденген v ұтылысқа (A ойыншының жүрісінен тәуелсіз) жетеді. Егер ойыншылардың біріншісі өзінің стратегиясын ұстаған кезде, екінші ойыншы үшін өзінің тиімді стратегиясынан бас тарту қолайсыз болса, онда мұндай шешім *орнықты* болып табылады. Тиімді стратегиялар орнықтылық шартын қанағаттандыру керек.

Тиімді стратегияларды i^*, j^*, арқылы белгілейік.

Егер

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.6}$$

теңсіздігі орындалса, онда A және B ойыншылар, сәйкес A_i және B_j, $i^* \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j^* \in \{1, 2, \ldots, n\}$ стратегияларын таңдау нәтижесінде құрылған (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы *A ойыншы үшін қанағаттанарлық жағдайы* деп аталады, және егер

$$a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.7}$$

теңсіздігі орындалса онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы *B ойыншы үшін қанағаттанарлық* деп аталады.

Теорема 1.2. Егер A ойыншының $a_{i^*j^*}$ ұтысы B ойыншының B_{j^*} стратегиясының β_{j^*} тиімді емес көрсеткішімен бірдей болған кезде ғана,

$$a_{i^*j^*} = \beta_{j^*}, \tag{1.8}$$

яғни ойын матрицасының j^* - тік жолында ең көп болса, (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы A ойыншы үшін қанағаттанарлық болып табылады.

Осындай критерий B ойыншының қанағаттанарлық жағдайы үшін де орындалады.

Теорема 1.3. Егер B ойыншының ұтылысы A ойыншының A_{i^*} стратегиясының α_{i^*} тиімді көрсеткішімен бірдей болған кезде ғана

$$a_{i^*j^*} = \alpha_{i^*}, \tag{1.9}$$

яғни ойын матрицасының i^* - жатық жолында ең кіші болса, онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы B ойыншы үшін қанағаттанарлық болып табылады.

B ойыншы үшін қанағаттанарлық жағдайдың саны m мәнінен кем емес және mn мәнінен артық емес.

Тепе-теңдік жағдай

Егер A және B ойыншыларының әрқайсысы үшін (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы қанағаттанарлық жағдай болса, яғни егер (1.6) және (1.7) теңсіздіктер орындалса:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n \tag{1.10}$$

немесе (1.2 және 1.3-теоремалар негізінде) (1.8) және (1.9) теңдіктер орындалса

$$\alpha_{i^*} = a_{i^*j^*} = \beta_{j^*}, \tag{1.11}$$

онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы ойынның *тепе-теңдік жағдайы*, немесе *орнықты*, немесе *ер нүктесі* деп аталады.

Сонымен, (1.10) қос теңсіздік пен (1.11) қос теңдік пара-пар. (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайына сәйкес келетін $a_{i^*j^*}$ ұтысы *ойын матрицасының ер нүктесі* деп аталады.

Тиімді стратегиялар жұбының және ойын құнының жиынтығы *ер нүктесі бар ойынның шешімі* деп аталады.

A және B ойыншыларының сәйкес таза тиімді стратегиялар жиынын S_A^{CO} және S_B^{CO} арқылы белгілейік (O әрібі ағылшынның *optimal* – «тиімді» сөзінің бірінші әрібі).

A және B ойыншыларының таза тиімді стратегиялар жиыны мен ойынның v құнынан тұратын - $\{S_A^{CO}, S_B^{CO}, v\}$ жиынтығы *таза стратегиядағы ойынның толық шешімі* деп аталады. Ал қандай да бір A_i және B_j таза стратегиялар жұбы мен ойынның v құнының жиынтығы *таза стратегиядағы ойынның дербес шешімі* деп аталады,

Теорема 1.4 (*таза стратегиялардағы ойын құнының бар болу критерийі*). Таза стратегиялардағы ойын құны бар болу үшін, яғни ойынның $\underline{v}$ - төменгі құны мен $\overline{v}$ жоғарғы құны тең болу үшін осы ойынның матрицасының ер нүктесінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 1.5. Келесі тұжырымдар ақиқат.

1. A ойыншының әрбір тиімді стратегиясы оның максиминді стратегиясы болып табылады, ал B ойыншының әрбір тиімді стратегиясы оның минимаксті стратегиясы болып табылады.

2. Ер нүктесі жоқ ойында жалпы тиімді стратегия болмайтындықтан бұл ойында бірде бір максиминді және минимаксті стратегиялар тиімді болмайды.

3. Ер нүктесі бар ойында A және B ойыншыларының сәйкес әрбір максиминді және минимаксті стратегиялары тиімді болып табылады.

Басқаша айтқанда, ер нүктесі бар ойында A ойыншының тиімді стратегиялар жиыны оның максиминді стратегиялар жиынымен беттеседі: $S_A^{CO} = S_A^{C\,max\,min}$, ал B ойыншының тиімді стратегиялар жиыны оның минимаксті стратегиялар жиынымен беттеседі: $S_B^{CO} = S_B^{C\,min\,max}$. Ер нүктесі жоқ ойында A ойыншының максиминді стратегиясы $S_A^{C\,max\,min} = \emptyset$ және B ойыншының минимаксті стратегиясы $S_B^{C\,max\,min} = \emptyset$ барлық уақытта бар болса да, бірде бір ойыншының тиімді стратегиясы жоқ: $S_A^C = S_B^C = \emptyset$.

1.2-мысал.

Төмендегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның төменгі және жоғарғы құнын, ер нүктесін, тиімді стратегиясын анықтау керек.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Шығарылуы. Бірінші ойыншының ең жақсы стратегиясын табамыз. Егер ойыншы A_1 стратегиясын таңдаса, онда ол кем дегенде $\underline{v}_1 = \min(2; 0; \ -1) = -1$ ұтысты, A_2 стратегиясын таңдаса - $\underline{v}_2 = \min(3; 4; \ 2) = 2$ ұтысты, A_3 стратегиясын таңдаса - $\underline{v}_3 = \min(4; 6; \ 3) = 3$ ұтысты, A_4 стратегиясын таңдаса - $\underline{v}_4 = \min(5; 7; \ 5) = 5$ ұтысты алады. Алынған мәндерді матрицаның оң жағына сәйкес әр жолдың тұсына жазамыз.

Осындай мүмкіндіктерді көре отырып, бірінші ойыншы өзінің ең аз ұтысын максимизациялау мақсатында келесі стратегияны таңдайды:

$$\underline{v} = \max \underline{v}_i = \max\{-1; 2; 3; 5\} = 5.$$

Алынған $\underline{v}$ мәні ойыншының кепілденген ұтысы (ойынның төменгі құны). $\underline{v}$ ұтысын қамтитын A_4 стратегиясы – минимаксті стратегия. Бірінші ойыншы үшін қолайлы жағдайлар: (A_4, B_1), (A_4, B_2), (A_4, B_3).

Осылайша екінші ойыншының ең жақсы стратегиясын анықтаймыз. Екінші ойыншы B_1 стратегиясын таңдаса, ең кем дегенде $\overline{v}_1 = \max(-2; 3; 4; 5) = 5$ ұтылысын, B_2 стратегиясын таңдаса - $\overline{v}_2 = \max(0; 4; 6; 7) = 7$ ұтылысын, B_3 стратегиясын таңдаса - $\overline{v}_3 = \max(-1; 2; 3; 5) = 5$ ұтылысын алады. Ойыншы ұтылысы ең аз болатын стратегияны таңдайды:

$$\overline{v} = \min_j \overline{v}_j = \min(5; 7; 5) = 5.$$

$\overline{v}$ мәні ойыншының кепілденген ұтылысы (ойынның жоғарғы құны). $\overline{v}$ ұтылысын қамтитын B_1 және B_3 стратегиялары – максимнді стратегия. Екінші ойыншы үшін қолайлы жағдайлар: (A_1, B_1), (A_2, B_1) (A_3, B_1), (A_4, B_1), (A_5, B_1), (A_1, B_3), (A_2, B_3), (A_3, B_3), (A_4, B_3), (A_5, B_3).

Алынған мәндерді матрицаның төменгі жағына сәйкес әр бағанның астына жазамыз:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \right.$$
$$\begin{matrix} 5 & 7 & 5 \end{matrix}$$

$\underline{v} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = \max\{-1; 2; 3; 5\} = 5;$
$\underline{v} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = \min\{5; 7; 5\} = 5,$
$i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}7$

Бұл мысалда ойынның төменгі құны мен жоғарғы құны өзара тең: $\underline{v} = \overline{v} = v = 5$. Яғни ойынның таза стратегиялар жиынында шешімі бар, ол $v = 5$ мәніне тең. Қарастырылып отырған мысалда екі тиімді стратегия (ер нүктені анықтайды) бар: (A_4, B_1), (A_4, B_3).

Жауабы. Ойынның төменгі құны - $\underline{v} = 5$, жоғарғы құны $\overline{v} = 5$, $\underline{v} = \overline{v}$ =5. Ойынның құны - $v = 5$. Тиімді стратегиялар: (A_4, B_1), (A_4, B_3). Екі ер нүкте бар - $a_{41} = a_{43} = 5$.

Қарастырылып отырған ойында екі ер нүкте бар. Жалпы практикада бір ер нүкте болатын немесе екі, үш, төрт және одан көп ер нүкте болатын есептер кездеседі.

1.5 Аралас стратегиялар

Таза стратегиялардың бірін кездейсоқ таңдаудан тұратын ойыншының стратегиясы *аралас стратегия* деп аталады. Сонымен, ойыншының аралас стратегиясы - нөмірлері оның таза стратегиясының мәні болатын дискреттік кездейсоқ шама болып табылады.

A ойыншының аралас стратегиясын матрица түрінде жазуға болады:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

немесе

$$S_A = (p_1,\ p_2, \dots\ p_i, \dots ,\ p_m), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Осылайша B ойыншының аралас стратегиясы:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_i & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

немесе

$$S_B = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_J & \dots & q_n \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Таза стратегияларды аралас стратегиялардың дербес жағдайы деп қарастыруға болады. Себебі, A ойыншының әрбір A_i, $i = \overline{1, m}$ таза стратегиясын

$$\begin{cases} A_1 = (1, 0, \dots , 0, 0) \\ A_2 = (0, 1, \dots , 0, 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ A_m = (0, 0, \dots , 1, 0) \\ A_m = (0, 0, \dots , 0, 1) \end{cases}$$

түріндегі аралас стратегия ретінде қарастыруға болады. Бұл жерде A_i таза стратегия $p_i = 1$ ықтималдықпен, ал қалған таза стратегиялар нөлге тең ықтималдықтармен таңдалынады.

Минимакс принципінің негізінде ойынның тиімді шешімі анықталады – егер ойыншылардың біреуі өзінің тиімді стратегиясын ұстаса, онда екіншісіне өзінің стратегиясынан бас тарту тиімді болмайтындай S_A^*, S_B^* тиімиді стратегиялар жұбы. Тиімді шешімге сәйкес ұтыс *ойынның құны* деп аталады. Ойынның v құны$A_1\ \ A_2\ \dots\ A_i\ \dots\ A_m$

$$\underline{v} \le v \le \overline{v}$$

теңсіздігін қанағаттандырады, мұндағы $\underline{v}$ және $\overline{v}$ - сәйкес ойынның төменгі және жоғарғы құндары.

Теорема 1.6 (*ойындар теориясының негізгі теоремасы – Нейман теоремасы*). Кез келген ақырлы ойынның кем дегенде бір тиімді шешімі бар болады және ол аралас стратегияларда болуы мүмкін.

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_i^*, \dots, p_m^*)$$

және

$$S_B^* = (q, q_2^*, \dots, q_i^*, \dots, q_m^*)$$

- тиімді стратегиялар жұбы болсын. Егер таза стратегия нөлдік ықтималдықтан өзге тиімді аралас стратегияға енетін болса, онда ол *белсенді стратегия* деп аталады.

Теорема 1.7 (*белсенді стратегиялар туралы*). Егер ойыншылардың біреуі өзінің тиімді стратегиясын ұстаса, онда екіншісі өзінің белсенді стратегияларынан тыс кетпесе, онда ұтыс өзгеріссіз қалады және ойынның v құнына тең болады.

Ер нүктесі жоқ ойында ойындар теориясының негізгі теоремасына сәйкес тиімді шешімі бар және S_A^*, S_B^* аралас стратегияларының жұбымен анықталады.

1.6 Аралас стратегиялардағы ұтыстар

Ойын $m \times n$ – өлшемді ұтыс матрицасымен берілсін. Ойыншылардың сәйкес P және Q аралас стратегиялары белгілі болсын. Көрсетілген жағдайлардағы ойыншылардың ұтысын немесе ұтылысын анықтау керек.

A ойыншының $(P, Q\ )$ жағдайындағы ұтысы

$$H(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j, \ (P, Q) \in S_A \times S_B,$$

$$P = (p_1,\ p_2, \dots,\ p_m), Q = (q_1,\ q_2, \dots, q_n) \qquad (1.12)$$

формуласы бойынша анықталады, $H(P^0, Q^0\ )$ мәнін

$$H(P, Q) = P\boldsymbol{A}Q^T, \qquad (1.12')$$

формуласымен де анықтауға болады, мұндағы,

$P = (p_1,\ p_2, \dots,\ p_m)$ - $1 \times m$ өлшемді вектор-жол;

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - $m \times n$ өлшемді ойын

матрицасы (таза стратегиядағы A ойыншының ұтыс матрицасы);

$Q^T = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ - $n \times 1$ өлшемді вектор-баған («T»-транспонирлеу белгісі).

A ойыншының (P^0, B_l) жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы P^0 аралас стратегиясын, B ойыншы B_l таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы

$$H(P, B_l) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{il} = P(a_{1l}, a_{2l}, \dots, a_{ml})^T = PAB_l^T, \quad (1.13)$$

формуласымен, B ойыншының (A_k, Q^0) жағдайындағы ұтылысы

$$H(A_k, Q) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} q_j = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})Q^T = A_k \boldsymbol{A} Q^T, \quad (1.14)$$

формуласымен есептеледі.

Теорема 1.8 (*А ойыншының Р аралас стратегиясының тиімділік көрсеткіші туралы*)**.** A ойыншының кез келген аралас (дербес жағдайда таза) $P \in S_A$ стратегиясының қарсыласының (B ойыншының) таза және аралас стратегияларының S_B^C және S_B жиындарына қатысты тиімділік көрсеткіштері тең болады, яғни

$$\underline{v}(P, S_B^C) = \underline{v}(P, S_B) = \min_{1 \le j \le n} H(P, B_j). \quad (1.15)$$

Теорема 1.9 (*В ойыншы үшін Q аралас стратегиясының тиімділік емес көрсеткіші туралы*) B ойыншының кез келген аралас (дербес жағдайда таза) $Q \in S_B$ стратегиясының қарсыласының (A ойыншының) таза және аралас стратегияларының S_A^C және S_A жиындарына қатысты тиімділік емес көрсеткішіне тең болады, яғни –

$$\overline{v}(Q, S_A) = \overline{v}(Q, S_A^C) = \max_{1 \le i \le m} H(A_i, Q). \quad (1.16)$$

Теорема 1.10. Кез келген ақырлы матрицалық ойын үшін аралас стратегияларда ойынның төменгі және жоғарғы құндары бар болады.

Теорема 1.11. таза стратегиялардағы ойынның $\underline{v}$ төменгі құны мен $\overline{v}$ жоғарғы құны, аралас стратегиялардағы $\underline{V}$ төменгі құны мен $\overline{V}$ жоғарғы құны келесі теңсіздіктерді қанағаттандырады:

$$\underline{v} \le \underline{V} \le \overline{V} \le \overline{v}.$$

1.3-мысал.

2×4 – ойынның $\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$ ұтыс матрицасы және A, B ойыншыларының сәйкес $P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$; $Q^0 = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ аралас стратегиялары берілсін.

A ойыншының

$$(P^0, Q^0), (P^0, B_1), (P^0, B_2), (P^0, B_3), (P^0, B_4)$$

жағдайындағы ұтысын, A ойыншының P^0 аралас стратегиясының тиімділік көрсеткішін анықтау керек.

Шығарылуы. A ойыншының (P^0, Q^0) жағдайындағы ұтысы (1.12) формуласы бойынша анықталады. Бұл мысалда

$$n = 2, m = 4,$$

$$a_{11} = 4, a_{12} = 5, a_{13} = 3, a_{14} = 8,$$

$a_{21} = 8,\, a_{22} = 4,\, a_{23} = 5,\, a_{24} = 3,$

$p_1^0 = \frac{1}{4},\, p_2^0 = \frac{3}{4},\, q_1^0 = \frac{1}{5},\, q_2^0 = 0,\, q_3^0 = \frac{3}{5},\, q_4^0 = \frac{1}{5}$:

$H(P^0, Q^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} p_i^0 a_{ij} q_j^0 =$

$$= \sum_{i=1}^{2} p_i^0 \sum_{j=1}^{4} a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 (a_{i1} q_1^0 + a_{i2} q_2^0 + a_{i3} q_3^0 + a_{i4} q_4^0) =$$

$$= p_1^0 (a_{11} q_1^0 + a_{12} q_2^0 + a_{13} q_3^0 + a_{14} q_4^0) +$$

$$+ p_2^0 (a_{21} q_1^0 + a_{22} q_2^0 + a_{23} q_3^0 + a_{24} q_4^0) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5}\right) +$$

$+ \frac{3}{4} \cdot \left(8 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{99}{20}.$

$H(P^0, Q^0)$ мәнін (1.12’) формуласымен де анықтауға болады.

$$H(P^0, Q^0) = P^0 \boldsymbol{A} (Q^0)^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)^T =$$

$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 8, \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 4, \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 5, \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 3\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(7, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{17}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{5} + \frac{17}{4} \cdot 0 + \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{17}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5} + 0 + \frac{27}{10} + \frac{17}{20} =$$

$$= \frac{28+54+17}{20} = \frac{99}{20}.$$

A ойыншының (P^0, B_1) жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы $P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралас стратегиясын, B ойыншы $B_1 = (1, 0, 0, 0)$ таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы (1.13) формуласымен есептеледі. Сонда

$$H(P^0, B_1) = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 a_{i1} = p_1^0 a_{11} + p_2^0 a_{21} = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 7.$$

A ойыншының (P^0, B_2) жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы $P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралас стратегиясын, B ойыншы $B_2 = (0, 1, 0, 0)$ таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы:

$$H(P^0, B_2) = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 a_{i2} = p_1^0 a_{12} + p_2^0 a_{22} = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{17}{4}.$$

A ойыншының (P^0, B_3) жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы $P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралас стратегиясын, B ойыншы $B_3 = (0, 0, 1, 0)$ таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы:

$$H(P^0, B_3) = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 a_{i3} = p_1^0 a_{13} + p_2^0 a_{23} = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{9}{2}.$$

A ойыншының (P^0, B_4) жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы $P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралас стратегиясын, B ойыншы $B_4 = (0, 0, 0, 1)$ таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы:

$$H(P^0, B_4\ ) = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 a_{i4} = p_1^0 a_{14} + p_2^0 a_{24} = \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{17}{4}.$$

A ойыншының P^0 аралас стратегиясының тиімділік көрсеткіші (1.15) формуланың көмегімен есептеледі. Онда

$$\underline{v}(P^0) = min\{H(P^0, B_1), H(P^0, B_2), H(P^0, B_3), H(P^0, B_4\ )\} =$$

$$= \min\left\{7, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{17}{4}\right\} = \frac{17}{4}.$$

Жауабы. $H(P^0, Q^0\ ) = \frac{99}{20}$; $\underline{v}(P^0) = \frac{17}{4}$;

$H(P^0, B_1) = 7;$ $\quad$ $H(P^0, B_2) = \frac{17}{4};$

$H(P^0, B_3) = \frac{9}{2};$ $\quad$ $H(P^0, B_4\ ) = \frac{17}{4}.$

1.4-мысал.

1.3-мысалдың шартында берілген ойын үшін B ойыншының

(A_1, Q^0), (A_2, Q^0), (A_3, Q^0),

жағдайындағы ұтылысын, B ойыншының Q^0 аралас стратегиясының тиімді емес көрсеткішін анықтау керек.

Шығарылуы. B ойыншының (A_1, Q^0) жағдайындағы ұтылысы (1.14) формуласымен есептеледі:

$$H(A_1, Q^0) = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} q_j^0 = a_{11} q_1^0 + a_{12} q_2^0 + a_{13} q_3^0 + a_{14} q_4^0 =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} + 0 + \frac{9}{5} + \frac{8}{5} = \frac{21}{5},$$

$$H(A_2, Q^0) = \sum_{j=1}^{4} a_{2j} q_j^0 = a_{21} q_1^0 + a_{22} q_2^0 + a_{23} q_3^0 + a_{24} q_4^0 =$$

$$= 8 \cdot \tfrac{1}{5} + 4 \cdot 0 + 5 \cdot \tfrac{3}{5} + 3 \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{8}{5} + 0 + \tfrac{15}{5} + \tfrac{3}{5} = \tfrac{26}{5},$$

B ойыншының Q^0 аралас стратегиясының тиімді емес көрсеткіші (1.16) формуланың көмегімен есептеледі.

Сонда

$$\overline{v}(A_i, Q^0) = \max\{H(A_1, Q^0), H(A_2, Q^0)\} = \max\left\{\frac{21}{5}, \frac{26}{5}\right\} = \frac{26}{5}$$

Жауабы. $H(A_1, Q^0) = \frac{21}{5}, H(A_2, Q^0) = \frac{26}{5}, \overline{v}(Q^0) = \frac{26}{5}.$

1.7 Редуциялау тәсілі

Ұтыс матрицасының өлшемі үлкен болған жағдайда, ер нүктесі жоқ ойынның шешімін табу қиын болады. Кейбір жағдайларда осындай есептерді ойынды редуциялаудың, яғни, күрделі матрицадан қарапайым матрицаға келтірудің көмегімен ықшамдауға болады. Редуциялаудың бір тәсілі *доминациялау принципін* қарастырайық.

Ойын $m \times n$ ұтыс матрицасымен берілсін:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Егер $\boldsymbol{A}$ матрицасының жолдарының екі дөңес комбинациялары

$(\sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{in}),$

$$p_i' \geq 0,\, i = 1, 2, \dots, m;\, \sum_{i=1}^{m} p_i' = 1 \tag{1.17}$$

және

$$\left(\sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{in}\right),$$

$$p_i'' \geq 0,\, i = 1, 2, \dots, m;\, \sum_{i=1}^{m} p_i'' = 1 \tag{1.18}$$

үшін

$$\sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i1} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i2} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i2},$$

$$\dots, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{in} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{in}, \tag{1.19}$$

теңсіздігі орындалса, онда (1.18) жол (1.17) жолды *доминациялайды*, ал (1.17) жол (1.18) жолмен *доминацияланады* деп айтады.

Егер (1.19) теңсіздіктің әрқайсысы теңдік болса, онда (1.17) жол мен (1.18) жол бірін бірі *дубльдейді* деп айтады. Екі дубльденетін жолдардың әрқайсысы бір мезгілде доминациялайтын, әрі доминацияланатын жол болып табылады.

Егер (1.19) теңсіздіктің әрқайсысы қатаң теңсіздік болса, онда (1.18) жол (1.17) жолды *қатаң доминациялайды*, ал (1.17) жол (1.18) жолмен *қатаң доминацияланады* деп айтады, немесе, (1.18) жол - (1.17) жолды қатаң доминациялайтын жол, ал (1.17) жол - (1.18) жолмен қатаң доминацияланатын жол болып табылады.

Осындай терминология *A* ойыншының сәйкес стратегиялары үшін де пайдаланылады. Егер (1.18) жол (1.17) жолды сәйкес доминацияласа, дубльдесе, қатаң доминацияласа, онда $P'' = (p_1'', p_2'', \dots, p_m'')$ стратегиясы $P' = (p_1', p_2', \dots, p_m')$ стратегиясын сәйкес доминациялайды, дубльдейді, қатаң доминациялайды.

Егер $\boldsymbol{A}$ матрицасының бағандарының екі дөңес комбинациялары

$$\left(\sum_{j=1}^{n} q_j' a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j' a_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} q_j' a_{mj}\right)^T,$$

$$q_j' \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \sum_{j=1}^{n} q_j' = 1 \qquad (1.20)$$

және

$$\left(\sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{mj}\right)^T,$$

$$q_j'' \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \sum_{j=1}^{n} q_j'' = 1 \qquad (1.21)$$

үшін

$$\sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{1j} \leq \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{2j} \leq \sum_{j=1}^{n} q_j' a_{2j},$$

$$\dots, \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{mj} \leq \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{mj} \qquad (1.22)$$

теңсіздігі орындалса, онда (1.20) баған ($Q' = (q_1', q_2', \dots, q_n')$, стратегия) (1.21) бағанды ($Q'' = (q_1'', q_2'', \dots, q_n'')$ стратегияны) *доминациялайды*, ал (1.21) баған (Q" стратегия) (1.20) бағанмен (Q' стратегиямен) *доминацияланады* деп айтады.

(1.22) теңсіздіктің әрқайсысы теңдік болса, онда (1.20) және (1.21) бағандар (Q' және Q" стратегиялар) *дубльденетін* бағандар (стратегиялар) деп аталады.

(1.22) теңсіздіктің әрқайсысы қатаң теңсіздік болса, онда (1.20) баған (Q' стратегия) (1.21) бағанды (Q" стратегияны) *қатаң доминациялайды*, ал (1.21) баған (Q" стратегия) (1.20) бағанмен (Q' стратегиямен) *қатаң доминацияланады* деп айтады.

Егер ойын матрицасының k-шы жолы оның қалған жолдарының қандай да бір дөңес комбинациясымен қатаң емес доминацияланса, онда k–шы жолды *жазбай тастап кетуге болатыны* алынады. Нәтижесінде матрица өлшемі кішірейтіледі. Осындай жағдай ойын матрицасының доминацияланатын бағандарына да қатысты.

Екі дубльденетін таза стратегиялардың біреуін (кез келгенін) жазбай тастап кетуге болады.

1.5-мысал.
Ойын 5×5–өлшемді ұтыс матрицасымен берілсін:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_1 & B_1 & B_1 & B_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ойын матрицасын редуциялау керек.

Шығарылуы.

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \overset{\to}{(1)}$$

$$\overset{\to}{(1)} P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \overset{\to}{(2)}$$

$$\overset{\to}{(2)} P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \overset{\to}{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{(4)} P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{(5)}$$

$$\xrightarrow{(5)} P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \xrightarrow{(6)} \quad P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array},$$

мұндағы, (1) – A_1 стратегиямен A_4 стратегия дубдьденетіндіктен осы стратегиялардың кез келген біреуін жазбай тастап кетеміз (A_4 стратегияны жазған жоқпыз); (2) – B_2 стратегия B_3 стратегиямен қатаң емес доминацияланады, B_2 стратегиясын жазбаймыз; (3) – B_3 стратегия B_4 стратегиямен қатаң емес доминацияланады, B_3 стратегиясын жазбаймыз; (4) – A_3 стратегия A_5 стратегияны қатаң доминациялайды, A_5 стратегиясын жазбаймыз; (5) – B_1 стратегия B_4 стратегиямен қатаң доминацияланады, B_1 стратегиясын жазбаймыз; (6) – A_1 стратегия A_2 стратегияны қатаң доминациялайды, A_2 стратегиясын жазбаймыз.

Редуциялау нәтижесінде 2×2 матрицасын алдық.

Жауабы. $P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$

1.8 Матрицалық 2×2 ойындарын шешудің элементарлық әдістері

1.8.1 Матрицалық 2×2 ойынының аналитикалық шығарылуы

Ойын $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілсін.

Егер ер нүкте жоқ болса, онда шешімді аралас стратегияда ($P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$) іздейміз. Ойындар теориясының негізгі теоремасына сәйкес A ойыншының тиімді стратегиясын қолдану B ойыншының кез келген стратегиясында V ұтысты иемденеді. Осы айтылғандардың негізінде B ойыншының сәйкес B_1 және B_2 стратегияларын ұстағанда келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v, & (B_1 \text{ стратегиясы}) \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v, & (B_1 \text{ стратегиясы}) \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

Осы жүйені шеше отырып, тиімді стратегияны және ойынның құнын аламыз:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{1.24}$$

$$v = \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{1.25}$$

Осылайша, белсенді стратегиялар туралы теореманы пайдалана отырып, B ойыншының орташа ұтылысының ойынның құнына тең екенін ескеріп, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v, \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Сонда $S_B^*(q_1^*, q_2^*)$ тиімді стратегиясы мына формулалармен анықталады:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{1.26}$$

1.6-мысал.

«Іздеу» ойыны.

A ойыншы I немесе II қорғанның біреуіне тығылуы мүмкін. B ойыншы A ойыншыны осы қорғандардың біреуінен іздейді. Егер B ойыншы A ойыншыны тапса, онда A ойыншы B ойыншыға бір бірлік, кері жағдайда B ойыншы A ойыншыға бір бірлік көлемінде айыппұл төлейді.

Ұтыс матрицасын жазу керек. Ойынның құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. A ойыншының екі стратегиясы бар: A_1 – I қорғанға жасырылады, A_2 - II қорғанға жасырылады; B ойыншының да екі стратегиясы бар: B_1 - I қорғаннан іздейді, B_2- II қорғаннан іздейді.

Сонда осы ойынның ұтыс матрицасы мына түрде жазылады:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ойынның сәйкес төменгі және жоғарғы құндары: $\underline{v} = -1$, $\overline{v} = 1$, $\underline{v} \neq \overline{v}$. Демек, ер нүкте жоқ. Ойынның шешімін аралас стратегияда іздейміз.

(1.23) формуладан мына теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -p_1^* + p_2^* = v, \\ p_1^* - p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

(1.24)-(1.25) формулаларды пайдаланып келесі тиімді стратегияны және ойынның құнын аламыз:

$$p_1^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$p_2^* = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$v = \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{(-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1}{(-1) + (-1) - 1 - 1} = \frac{0}{-4} = 0.$$

Жүйені жоғары математика курсынан белгілі әдістердің бірімен шығарып (1.24), (1.25) формулалардың көмегімен алынған нәтижелердің ақиқаттығына көз жеткізуге болады. Осылайша, B ойыншының орташа ұтылысының ойынның құнына тең екенін ескеріп, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -q_1^* + q_2^* = v, \\ q_1^* - q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Сонда $S_B^*(q_1^*, q_2^*)$ тиімді стратегиясы:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

Жауабы. $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$p_1^* = 0{,}5,\ p_2^* = 0{,}5,$

$q_1^* = 0{,}5,\ q_2^* = 0{,}5,\ v = 0.$

Алынған жауап - әрбір ойыншының тиімді стратегиясы өзінің таза стратегиясын кездейсоқ түрде кезектестіру үшін әрбір қорғанды 0,5 ықтималдықпен таңдайтынын және орташа ұтыс 0-ге тең болатынын білдіреді.

$P = (1 - p, p)$, $p \in [0, 1]$ аралас стратегиясының

$$\underline{v}(P) = \min\{H(P, B_1), H(P, B_2)\}$$

тиімділік көрсеткіші $H(P, B_2)$ және $H(P, B_1)$ функцияларының *төменгі орайжанауышы* болып табылатын $p \in [0, 1]$ шамасына тәуелді функцияны береді.

1.8.2 *Матрицалық* 2 × 2 *ойынының геометриялық шешімі*

A ойыншының тиімді стратегиясын, ойынның құнын, ойынның таза стратегиялардағы төменгі және жоғарғы құндарын, ойын матрицасының ер нүктелерін және ойыншылардың доминацияланатын стратегияларын *геометриялық (графикалық) анықтаудың жалпы алгоритмі*.

Алгоритм 1

1. Абсцисса осінде бірлік A_1A_2 кесіндісін тұрғызамыз. A_1 нүктесі A_1 стратегиясын бейнелейді. Осы кесіндідегі басқа аралық нүктелер бірінші ойыншының S_A аралас стратегияларын береді. S_A мәнінен кесіндінің оң жақ шетіне дейінгі ара қашықтық - A_1 стратегиясының p_1 ықтималдығын, сол жақ шетіне дейінгі ара қашықтық - A_2 стратегиясының p_2 ықтималдығын береді.

2. A_1A_2 кесіндісінің ұштарында оған екі перпендикуляр: A_1 стратегиясына сәйкес сол жақ перпендикуляр және A_2 стратегиясына сәйкес оң жақ перпендикуляр тұрғызамыз.

3. Сол жақ перпендикулярда $\boldsymbol{A}$ матрицасының бірінші жолдарының a_{11} және a_{12} элементтерін белгілейміз.

4. Оң жақ перпендикулярда $\boldsymbol{A}$ матрицасының екінші жолының a_{21} және a_{22} элементтерін белгілейміз.

Ескерту. Сол жақ және оң жақ перпендикулярлардағы масштабтар бірдей болу керек, бірақ, $[0, 1]$ горизонталь кесіндісінің масштабымен бірдей болуы міндетті емес.

5. Екінші индекстері бірдей элементтерді: a_{11}-ді a_{21}-мен, a_{12}-ді a_{22}-мен кесінді арқылы қосамыз. Нәтижесінде $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерін аламыз.

5.1. Егер $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділері кемімелі емес болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын доминациялайды. Егер $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділері өспелі болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

5.2. Егер $a_{11}a_{21}$ кесіндісі $a_{12}a_{22}$ кесіндісінен төмен орналаспаса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын доминациялайды. Егер $a_{11}a_{21}$ кесіндісі $a_{12}a_{22}$ кесіндісінен жоғары орналасса және онымен қиылыспаса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

6. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышын табамыз.

7. Төменгі орайжанауыштың жоғарғы нүктесін табамыз.

8. $[0, 1]$ горизонталь кесіндісіне олардың ортогональды проекциясын түсіреміз.

9. Алынған p^0 проекциясы A ойыншының $P^0 = (1 - p^0, p^0)$ аралас стратегиясын анықтайды.

10. Орайжанауыштың перпендикулярларда жататын ең жоғарғы нүктесінің ординатасы ойынның V құнын береді.

11. Төменгі орайжанауыштың екі шетінің жоғарғысы таза стратегиялардағы ойынның $\underline{v}$ төменгі құнын береді.

12. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің екі жоғарғы ұштарының төменгісі таза стратегиялардағы ойынның $\overline{v}$ жоғарғы құнын береді.

13. Егер элемент өзі орналасқан перпендикулярдағы кішісі және өзі орналасқан $a_{11}a_{21}$ немесе $a_{12}a_{22}$ кесіндісінің жоғарғы ұшы болса, онда бұл элемент ойынның ер нүктесі болып табылады. Бұл жағдайда, нөмірі ер нүктенің екінші индексімен бірдей болатын B ойыншының таза стратегиясы тиімді болып табылады.

1.7-мысал.

$P = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін геометриялық әдіспен табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 1.1-суретте келтірілген. $a_{11}Na_{22}$ төменгі орайжанауышының максимал нүктесі оң жақ перпендикулярда орналасқан a_{22} нүктесі. Сондықтан A ойыншының $A_2 = (0, 1)$ таза стратегиясы оның тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $\underline{v} = \overline{v} = V = a_{22}$=-2. a_{22} элементі P матрицасының ер нүктесі болып табылады және ойынның таза стратегияда шешімі бар болады.

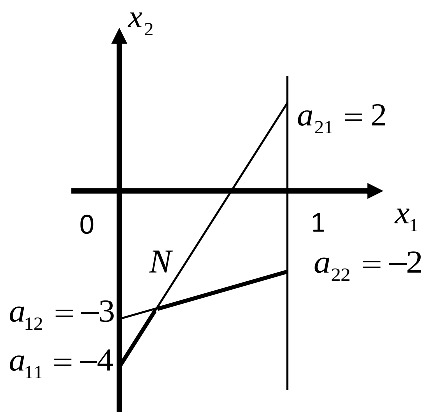
Жауабы. $\underline{v} = \overline{v} = V = a_{22}$, a_{22} элементі ойынның ер нүктесі.

1.8-мысал.

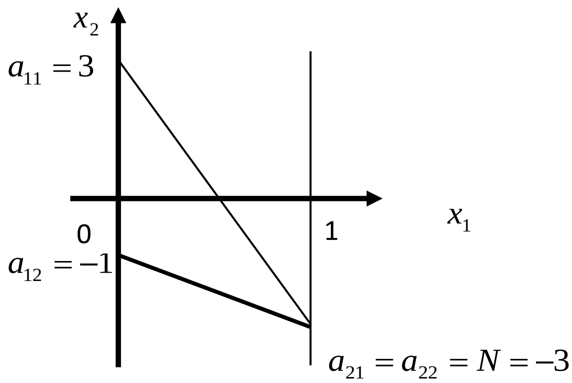
$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 1.2-суретте келтірілген. $a_{12}a_{22}$ төменгі орайжанауышының максимал нүктесі – a_{12} сол жақ перпендикулярда, ал $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің N қиылысу нүктесі оң жақ перпендикулярда жатыр. $A_1 = (1, 0)$ таза стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. a_{12} элементі P матрицасының ер нүктесі болып табылады. $B_2 - B$ ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $V = a_{12} = -1$.

Жауабы. $V = a_{12} = -1$, A ойыншының тиімді стратегиясы - $A_1 = (1, 0)$, $B_2 - B$ ойыншының тиімді стратегиясы. a_{12} элементі ойынның ер нүктесі болып табылады.



1.1-сурет $\underline{v} = \overline{v} = V = a_{22} = -2$



1.2-сурет $\underline{v} = \overline{v} = V = a_{12} = -1$

1.9-мысал.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, A ойыншының тиімді стратегиясын табу керек.

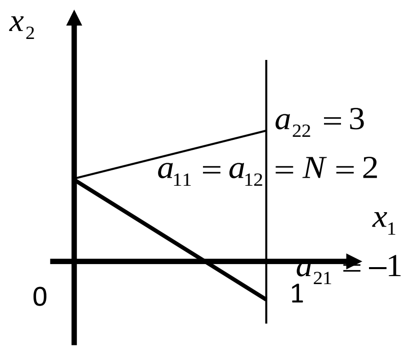
Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 1.3-суретте келтірілген. $a_{11}a_{21}$ төменгі орайжанауышының максимал a_{11} нүктесі де, $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің N қиылысу нүктесі де сол жақ перпендикулярда жатыр. Сондықтан $A_1 = (1, 0)$ таза стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $V = a_{12} = 2$. a_{11} және a_{12} нүктелері беттесетіндіктен және a_{11} - $a_{11}a_{21}$ кесіндісінің жоғарғы ұшы болғандықтан a_{11} элементі P матрицасының ер нүктесі болып табылады. a_{11} және a_{12} нүктелері беттессе де a_{12} нүктесі $a_{12}a_{22}$ элементі кесіндісінің жоғарғы ұшы болмайтындықтан, a_{12} элементін ойынның ер нүктесі деп айтуға болмайды.

Жауабы. $A_1 = (1, 0)$ таза стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы. $V = a_{12} = 2$ - ойынның құны. a_{11} элементі ойынның ер нүктесі.

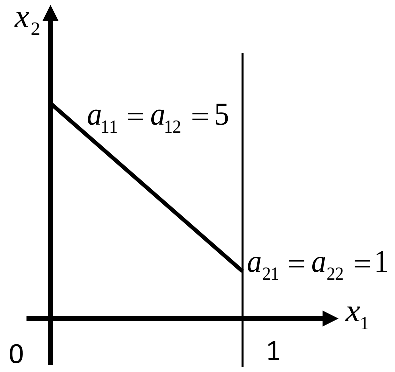
1.10-мысал.

$P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 1.4-суретте келтірілген. Беттесетін $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышы осы кесінділермен беттеседі. Төменгі орайжанауыштың максимал нүктесі $a_{11} = a_{12}$, сондықтан A_1 - A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны $V = a_{11} = a_{12} = 5$. a_{11} және a_{12} элементтері ойынның ер нүктелері болып табылады. Бұл жағдайда B ойыншының әрбір $Q = (q_1, q_2)$ аралас стратегиясы тиімді болып табылады.



1.3-сурет $\underline{v} = \overline{v} = V =$
$= a_{12} = 2$



1.4-сурет $\underline{v} = \overline{v} = V =$
$= a_{11} = a_{12} = 5$

Жауабы. A_1 - A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны $V = a_{11} = a_{12} = 5$. a_{11}, a_{12} элементтері ойынның ер нүктелері. B ойыншының әрбір $Q = (q_1, q_2)$ аралас стратегиясы тиімді.

1.11-мысал.

$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, A ойыншының тиімді стратегиясын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 1.5-суретте келтірілген. $a_{11}a_{21}$ кесіндісі $[0, 1]$ горизонталь кесіндіге параллель, яғни $a_{11} = a_{21}$, және $a_{12}a_{22}$ кесіндісімен N нүктесінде қиылысады. $[p_0, 1]$ кесіндісінің әрбір нүктесінде ең үлкен мәнді қабылдайтын $a_{12}Na_{21}$ сынығы $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышы. Сондықтан, осы сынықтың максимал нүктелері $[N, a_{21}]$ кесіндісін толтырады. a_{21} элементі берілген ойынның ер нүктесі болып табылады және A_2 стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны $V = a_{21} = 3$. Әрбір $P = (1 - p, p)$, $p^0 \leq p < 1$ аралас стратегия A ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. a_{21} элементі A матрицасының ер нүктесі болғандықтан, B_1 стратегиясы B ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

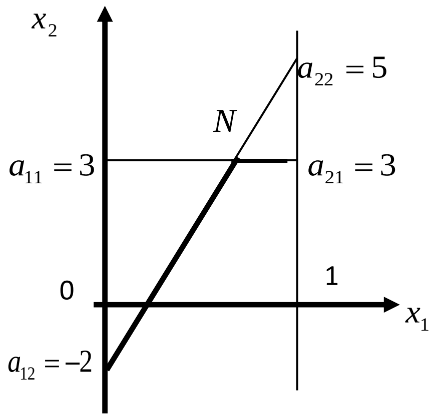
Жауабы. a_{21} элементі ойынның ер нүктесі және A_2 стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны

$V = a_{21} = -2$. Әрбір $P = (1-p, p)$, $p^0 \le p < 1$ аралас стратегия A ойыншының тиімді стратегиясы, B_1 стратегиясы B ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

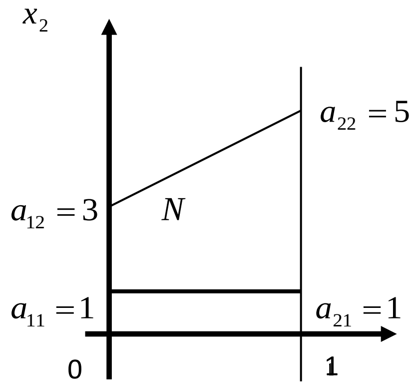
1.12-мысал.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, ойыншылардың тиімді стратегиясын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 1.6-суретте келтірілген.



1.5-сурет. $\underline{v} = \overline{v} = V = = a_{21} = 3$



1.6-сурет. $\underline{v} = \overline{v} = V = = a_{11} = 1$

$a_{12}a_{22}$ кесіндісі $a_{11}a_{21}$ кесіндісінен жоғары орналасқан, және қиылыспайды. Ал бұл B_2 стратегиясы B_1 стратегиясымен қатаң доминацияланатынын B ойыншы үшін тиімді емес екенін білдіреді. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышы $a_{11}a_{21}$ кесіндісімен беттеседі. $a_{11} = a_{21}$ теңдігіне байланысты $[0, 1]$ горизонталь кесіндісіне параллель, $a_{11}a_{21}$ төменгі орайжанауышының максимал нүктелер жиыны $a_{11}a_{21}$ кесіндісімен беттеседі, сондықтан A ойыншының әрбір $P = (p_1, p_2)$ стратегиясы тиімді стратегия болып табылады. $V = a_{11} = a_{21} = 1$. a_{11} және a_{21} элементтері ойынның ер нүктелері. A ойыншының тиімді стратегиясы $[0, 1]$ кесіндісімен бейнеленеді. B_1 - B ойыншының тиімді стратегиясы.

Жауабы. A ойыншының әрбір $P = (p_1, p_2)$ стратегиясы тиімді стратегия, $V = a_{11} = a_{21} = 1$. a_{11} және a_{21} элементтері ойынның ер нүктелері. B_1 - B ойыншының тиімді стратегиясы.

Жоғарыда қарастырылған алгоритм ойынның ер нүктесі болған жағдайдағы есептерді шешуге және A ойыншының ұтысын талдауға арналған. B ойыншы үшін де талдау осы бағытта жүргізіледі.

$Q = (1 - q, q)$, $q \in [0, 1]$ аралас стратегиясының

$$\overline{v}(P) = \max\{H(A_1, Q), H(A_2, Q)\}$$

тиімді емес көрсеткіші $H(A_1, Q)$ және $H(A_2, Q)$ функцияларының *жоғарғы орайжанауышы* болып табылатын $p \in [0, 1]$ ықтималдығының функциясын береді.

Ойынның ер нүктесі болмаған жағдайдағы, яғни аралас стратегиялардағы 2x2 ойынның шешімін геометриялық әдіспен шығаруды қарастырайық.

$\boldsymbol{A}$ матрицасымен берілген 2x2 ойынның *геометриялық шешімін табу алгоритмі*.

Алгоритм II

1. Абсцисса осінде A_1A_2 бірлік кесіндісін тұрғызамыз.

2. A_1A_2 кесіндісінің ұштарында оған екі перпендикуляр: A_1 стратегиясына сәйкес сол жақ перпендикуляр және A_2 стратегиясына сәйкес оң жақ перпендикуляр тұрғызамыз.

3. 0 нүктесінде тұрғызылған вертикаль сандық осьтегі сол жақ перпендикулярдың бойында a_{22} элементінен басқа $\boldsymbol{A}$ матрицасының барлық элементтерін белгілейміз.

4. 1 нүктесінде тұрғызылған оң жақ перпендикулярдың бойында a_{11} элементінен басқа $\boldsymbol{A}$ матрицасының барлық элементтерін белгілейміз.

Ескерту. Сол жақ және оң жақ перпендикулярлардағы масштабтар бірдей болу керек, бірақ, $[0, 1]$ горизонталь кесіндісінің масштабымен бірдей болуы міндетті емес.

5. Сол жақ перпендикулярдағы әрбір элементті оң жақ перпендикулярдағы бір ғана индекспен айырмашылығы бар

элементтермен қосып кесінді тұрғызамыз. Нәтижесінде $a_{11}a_{21}$, $a_{12}a_{22}$, $a_{11}a_{12}$, $a_{21}a_{22}$ кесінділерін аламыз.

6. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышын табамыз.

7. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы N нүктесін табамыз.

8. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы нүктесінің p^0 абсциссасын табамыз.

9. $P^0 = (1 - p^0, p^0\ )$ аралас стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

10. $a_{11}a_{12}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділерінің жоғарғы орайжанауышын табамыз.

11. Жоғарғы орайжанауыштың ең төменгі M нүктесін табамыз.

12. Жоғарғы орайжанауыштың ең төменгі нүктесінің q^0 абсциссасын табамыз.

13. $Q^0 = (1 - q^0, q^0\ )$ аралас стратегиясы B ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

14. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы нүктесінің ординатасы жоғарғы орайжанауыштың ең төменгі нүктесінің ординатасына тең және ойынның V құнын береді.

15. Осылайша геометриялық ортада ойынның $\{P^0, Q^0,\ V\}$ құны табылды.

16. Төменгі орайжанауыштың шеттерінің жоғарғысы таза стратегиялардағы ойынның $\underline{v}$ төменгі құнын береді.

17. Жоғарғы орайжанауыштың шеттерінің (перпендикулярларда жатқан) төменгісі таза стратегиялардағы ойынның $\overline{v}$ жоғарғы құнын береді.

Егер $M = N$ болса, онда $a_{12}a_{22}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділерінің әрқайсысы a_{22} және $M = N$ екі нүктелері арқылы өтеді, демек, бұл кесінділер беттеседі, осыдан $a_{12} = a_{21}$. Егер $a_{12} = a_{21}$ болса, онда $a_{11}a_{12}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділері сияқты $a_{12}a_{22}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділері де беттеседі, сондықтан $M = N$.

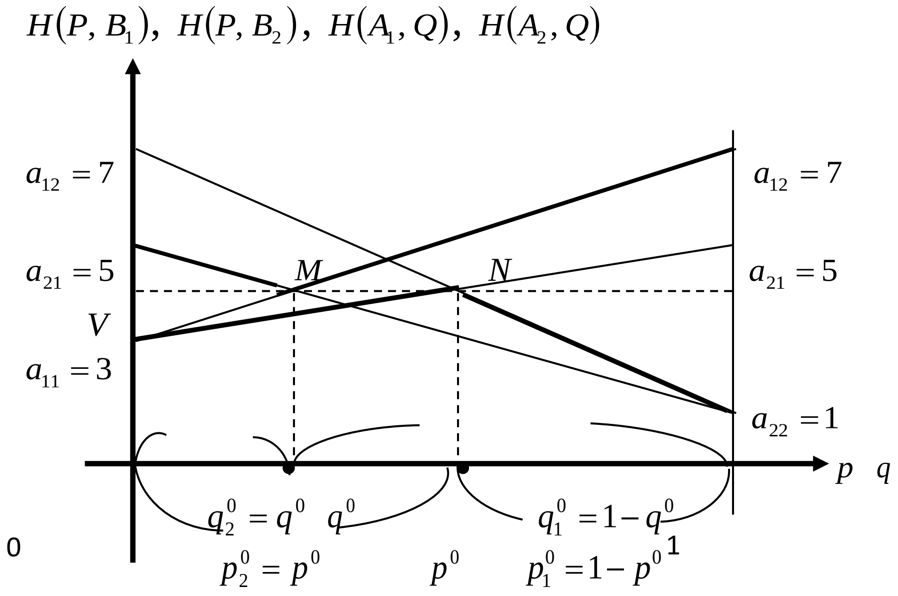
Сонымен, жоғарыда қарастырылған талдаулардың нәтижесінде 2х2 ойында әрбір ойыншының тиімді стратегиялар жиыны не $[0, 1]$ кесіндісінің жалғыз нүктесінен, не бір шеті ғана $[0, 1]$ кесіндісінің шетімен беттесетін аралықтан, не

$[0,1]$ кесіндісімен толығымен беттесетін кесіндіден тұруы мүмкін екенін байқадық.

1.13-мысал.

$P=\begin{pmatrix}3 & 7\\5 & 1\end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 1.7-суретте келтірілген.



1.7-сурет

A ойыншының тиімді стратегиясының геометриялық интерпретациясын қарастырайық.

Суреттен көріп отырғанымыздай, a_{11}, a_{21} нүктелерінің әрқайсысы сәйкес перпендикулярлармен $a_{11}a_{21}$ немесе $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің қиылысында жатыр. Егер P матрицасының a_{ij}, $i=1,2,\ j=1,2$ элементін бейнелейтін нүкте өзі қиылысуында орналасқан кесіндінің төменгі ұшы және перпендикулярдың жоғарғы нүктесі болса, осы элемент ойынның ер нүктесі болады. Қарастырып отырған ойында ер нүкте жоқ.

Төменгі орайжанауыштың екі төменгі ұштарының жоғарғысы болып табылатын нүктені бейнелейтін P матрицасының элементі таза стратегияларда ойынның төменгі құнын, жоғарғы орайжанауыштың екі жоғарғы ұштарының төменгісі болып табылатын нүктені бейнелейтін P матрицасының элементі таза стратегияларда ойынның жоғарғы құнын береді. Жоғарыда келтірілген ереже бойынша қарастырып отырған ойында ер нүкте жоқ және $\underline{v} = 3, \overline{v} = 5$.

Демек таза стратегияларда ойынның шешімі жоқ. Ойынның шешімін аралас стратегияда іздейміз.

Ойынның құнын табу үшін геометриялық әдісті қолданайық.

1.7-суреттегі N және M нүктелерінің ординаталары (өзара тең) ойынның құнын береді, ал абсциссалары сәйкес A және B ойыншылардың тиімді стратегияларын анықтайды.

N нүктесі $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің қиылысында жатыр. Осы нүктенің координатасын анықтау үшін түзулердің теңдеулерін жүйенің теңдеулері ретінде қарастырып, жүйені шешеміз. Жоғарыда қарастырып кеткеніміздей бұл түзулердің теңдеулерін анықтау үшін екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін пайдаланамыз: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

$a_{11}a_{21}$ түзуінің теңдеуі (a_{11} ұшының координатасы $(0,3)$, a_{21} ұшының координатасы $(1,5)$):

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{5-3} \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow$ 2x=y-3;

$a_{12}a_{22}$ түзуінің теңдеуі (a_{12} ұшының координатасы $(0,7)$, a_{22} ұшының координатасы $(1,1)$):

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-7}{1-7} \Rightarrow x = \frac{y-7}{-6} \Rightarrow$ -6x=y-7;

$$\begin{cases} 2x = y - 3 \\ -6x = y - 7 \end{cases} \Rightarrow x = 0{,}5;\ y = 4,$$

яғни $N(0{,}5; 4)$.

Сонымен, $p_1^0 = 0{,}5,\ p_2^0 = 1 - p_1^0 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

$S_A^* = (0{,}5; 0{,}5)$ - тиімді стратегия; $V = 4$ - ойынның құны.

Осылайша M нүктесінің координаталарын анықтай отырып B ойыншының тиімді стратегиясын анықтауға болады.

$M(0{,}25; 4)$; $q_2^0 = 0{,}25$, $q_1^0 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

$S_B^* = (0{,}25; 0{,}75)$ - тиімді стратегия; $V = 4$ - ойынның құны.

Жауабы. $S_A^* = (0{,}5; 0{,}5)$, $S_B^* = (0{,}25; 0{,}75)$ - сәйкес A және B ойыншылардың тиімді стратегиялары; $V = 4$ - ойынның құны.

1.9 Матрицалық $2 \times n$ ойындардың геометриялық шешімі

A ойыншының A_1, A_2 - 2 таза стратегиясы, B ойыншының $B_1, B_2, \dots, B_n$ - n таза стратегиясы бар $2 \times n$ ойынды қарастырайық.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \end{array}$$

.

$P = (p_1, p_2)$ стратегиясының тиімділік көрсеткіші мына формуламен есептеледі:

$$\underline{v}(P) = \min_{1 \le j \le n} H(P, B_j) = \min_{1 \le j \le n} (p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j}).$$

Егер $p_2 = p$ болса, онда $p_1 + p_2 = 1$ болғандықтан $p_1 = 1 - p$. Сонда, $\underline{v}(P)$ мына формуламен өрнектеледі:

$$\underline{v}(P) = \min_{1 \le j \le n} \left((1-p)a_{1j} + pa_{2j}\right) = \min_{1 \le j \le n} \left((a_{2j} - a_{1j})p + a_{1j}\right) \quad (1.27)$$

Сонымен, $\underline{v}(P)$ ықтималдығы $p \in [0, 1]$ болатын n сызықтық $H(P, B_j) = (a_{2j} - a_{1j})p + a_{1j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ функцияның *төменгі орайжанауышын* береді, олардың әрқайсысының графигі осы сызықтық функцияның $k_j = a_{2j} - a_{1j}$ бұрыштық коэффициентінің оң, теріс немесе нөлге тең болуына тәуелді өспелі (оң көлбеу), кемімелі (теріс көлбеу) немесе горизонталь кесінді болады.

$P^* = (1-p^*, p^*)$ стратегиясы келесі теңдікті қанағаттандырады:

$$\max_{P\in S_A} \underline{v}(P) = \underline{v}(P^*) = \min_{1\le j\le n}\left(\left(a_{2j}-a_{1j}\right)p^* + a_{1j}\right) \quad (1.28)$$

мұндағы, S_A - A ойыншының барлық аралас (олардың ішінде таза стратегия да бар) стратегиялар жиыны тиімді (матрицалық ойындардың фон Нейманның негізгі теоремасы бойынша) болып табылады, яғни төменгі орайжанауыштың максимал (ең жоғарғы) нүктесінің $p^0 \in [0,1]$ абсциссасы A ойыншы өзінің таза: A_1 стратегиясын - $1-p^0$ ықтималдықпен, A_2 стратегиясын - p^0ықтималдықпен болатындай кездейсоқ таңдайтын $P^0 = (1-p^0, p^0)$ тиімді стратегиясын анықтайды.

Матрицалық ойындардың негізгі фон Нейман теоремасы бойынша ойынның құны

$$V = \underline{v}(P^0), \quad (1.29)$$

яғни V ойынның құны төменгі орайжанауыштың максимал нүктесінің ординатасына тең.

Сонымен, A ойыншының тиімді стратегиясы мен ойын құнын табудың геометриялық (графикалық) алгоритмін жазайық.

Алгоритм «А»

1. $[0,1]$ горизонталь кесіндісін қарастырамыз.

2. $[0,1]$ кесінділерінің ұштары арқылы екі: сол жақ және оң жақ перпендикуляр жүргіземіз.

3. 0 нүктесінен $[0,1]$ кесіндісімен қиылысқандағы вертикаль сандық остің бойында жататын сол жақ перпендикулярдың бойынан $\boldsymbol{A}$ матрицасының бірінші жолының барлық элементтерін белгілейміз.

4. 1 нүктесінен $[0,1]$ кесіндісімен қиылысқандағы (вертикаль сандық осьтегі сияқты) жүргізілген оң жақ перпендикулярдың

бойынан $\boldsymbol{A}$ матрицасының екінші жолының барлық элементтерін белгілейміз.

Ескерту. Сол жақ және оң жақ перпендикулярлардағы масштаб бірдей болу керек, бірақ $[0, 1]$ горизонталь кесіндінің масштабымен бірдей болу міндетті емес.

5. $\boldsymbol{A}$ матрицасының j-ші, $j = 1, 2, \dots, n$ бағанында орналасқан a_{1j} және a_{2j} элементтерін бейнелейтін нүктелердің әрбір жұбын $a_{1j}a_{2j}$ кесіндісімен қосамыз.

Осылайша,

$$H(P, B_j) = (a_{2j} - a_{1j})p + a_{1j}, p^0 \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, n \quad (1.30)$$

n сызықтық функцияның графигін беретін n кесінділер тұрғызылады.

6. Егер $a_{1j}a_{2j}, j = 1, 2, \dots, n$ барлық кесінділер кемімелі емес (теріс емес көлбеуі бар) болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ барлық кесінділер өспелі (оң көлбеуі бар) болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

7. Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ барлық кесінділер өспелі емес (оң емес емес көлбеуі бар) болса, онда A_1 стратегиясы A_2 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ барлық кесінділер кемімелі (теріс көлбеуі бар) болса, онда A_1 стратегиясы A_2 стратегиясын қатаң доминациялайды.

8. Егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі $a_{1j_2}a_{2j_2}$, $j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ кесіндісінен төмен емес орналасса, онда B_{j_2} стратегиясы B_{j_1} стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі $a_{1j_2}a_{2j_2}$, $j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ кесіндісінен жоғары орналасса, онда B_{j_2} стратегиясы B_{j_1} стратегиясын қатаң доминациялайды.

9. (1.30) кесінділер үйірінің дербес жағдайда кесінді де болуы мүмкін, жалпы жағдайда жоғары дөңес қисықты беретін (1.27) төменгі орайжанауышын табамыз.

10. Төменгі орайжанауышта максимал (ең жоғарғы) нүктені (немесе нүктелерді) табамыз.

11. Осы нүктенің p^* абсциссасы ((1.28) теңдікті қанағаттандыратын) A ойыншының $P^* = (1 - p^*, p^*)$ тиімді аралас стратегиясындағы таза A_2 стратегиясын таңдау ықтималдығы болып табылады.

12. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы нүктесінің ординатасы V ойынның құнын береді ((1.29) қараңыз).

13. Төменгі орайжанауыштың перпендикулярларда жатқан екі шетінің жоғарғысы - ойынның таза стратегиялардағы $\underline{v}$ төменгі құнын береді.

14. $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ кесінділерінің шеттерінің жоғарғыларының төменгісі - ойынның таза стратегиялардағы $\overline{v}$ жоғарғы құны.

15. Өзі орналасқан перпендикулярда төменгі нүкте болып табылатын және кесіндінің жоғарғы шеті болып табылатын A матрицасының элементі ойынның ер нүктесі болып табылады.

Бұл жағдайда нөмірі ер нүктенің екінші индексімен беттесетін B ойыншының таза стратегиясы тиімді болып табылады.

1.8-суретте $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ - n кесінділерінің төменгі орайжанауышты анықтауға қатысты үшеуі көрсетілген; N - осы орайжанауыштың максимал нүктесі; p^* - N нүктесінің абсциссасы; демек, $P^* = (1 - p^*, p^*)$ - A ойыншының тиімді аралас стратегиясы; V ойын құны N нүктесінің ординатасына тең; таза стратегиялардағы ойынның төменгі құны: $\underline{v} = a_{2j_2}$; таза стратегиялардағы ойынның жоғарғы құны: $\overline{v} = a_{2j_1}$; 1.8-суреттен көрініп отырғандай $\underline{v} < V < \overline{v}$.

Теорема 1.12. Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының B ойыншының B_j, $j = 1, 2, \dots, n$ таза стратегияларымен жасақталатын максимал N нүктесі арқылы қандай да бір $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2}$, $j_1 \neq j_2$, $j_1 j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ кесінділері өтсе, онда N нүктесінің абсциссасы

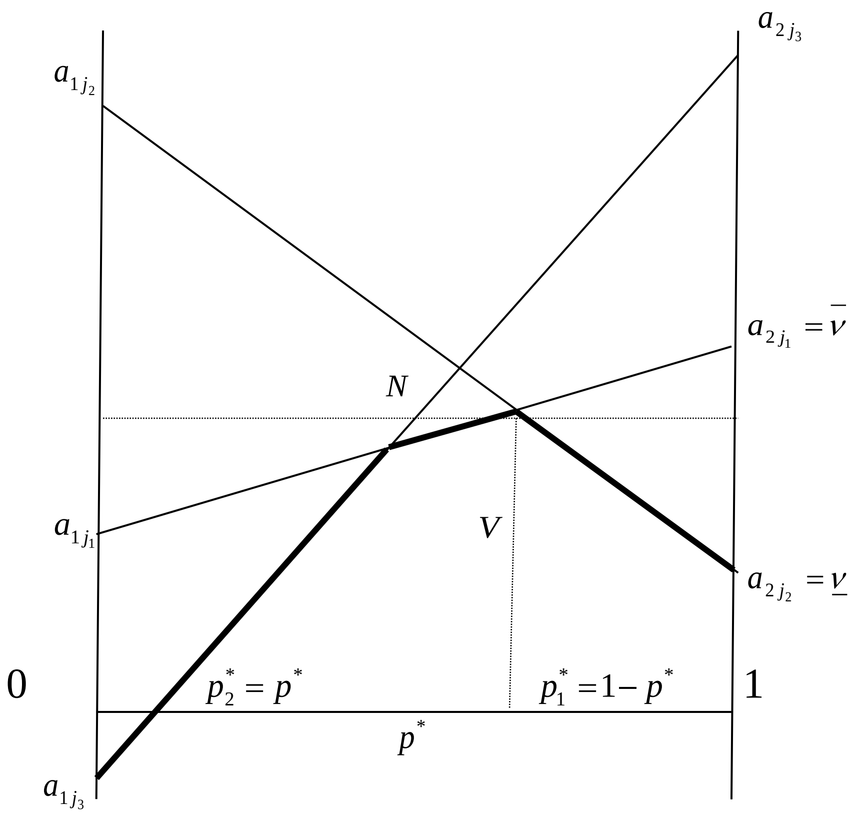
$$p_2^* = p^* = \frac{a_{1j_1} - a_{1j_2}}{(a_{1j_1} + a_{2j_2}) - (a_{1j_2} + a_{2j_2})} \qquad (1.31)$$

және демек,

$$p_1^* = 1 - p_2^* = 1 - p^* = \frac{a_{2j_2} - a_{2j_1}}{(a_{1j_1} + a_{2j_2}) - (a_{1j_2} + a_{2j_1})}, \qquad (1.32)$$

ал ойынның құны

$$V = \frac{a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} - a_{1j_2} \cdot a_{2j_1}}{(a_{1j_1} + a_{2j_2}) - (a_{1j_2} + a_{2j_1})} \qquad (1.33)$$



1.8-сурет $\underline{v} = a_{2j_2} < V < \overline{v} = a_{2j_1}$

(1.31), (1.32) және (1.33) формулаларда $j_1 = 1$ және $j_2 = 2$ болған кезде сәйкес (1.24) қатынасының екінші формуласын, (1.24) қатынасының бірінші формуласын және (1.25) қатынасын аламыз.

Біз төменгі орайжанауыштың N максимал нүктесі арқылы бірден артық кесінді өтетінін қарастырдық (1.8-сурет). Практикада N нүктесі арқылы бір ғана кесінді өтетін жағдай да кездеседі. 1.9, 1.10, 1.11 және 1.12-суреттерде төменгі орайжанауыштың N максимал нүктесі арқылы жалғыз ғана $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісі өтеді. Егер $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісі $p^* \in [0, 1]$ кесіндісіне параллель болса, онда максимал нүктелері қандай да бір аралықты толықтырады. 1.9-суретте төменгі орайжанауыштың максимал нүктесі $\left[a_{1j_3}, a_{2j_3}\right]$ кесіндісінің бөлігін, атап айтқанда, $[N_1, N_2]$ аралығын, 1.10-суретте $\left[a_{1j_3}, a_{2j_3}\right]$ кесіндісін толығымен толықтырады. Сондықтан, 1.9-суретте A ойыншының тиімді стратегиялар жиыны

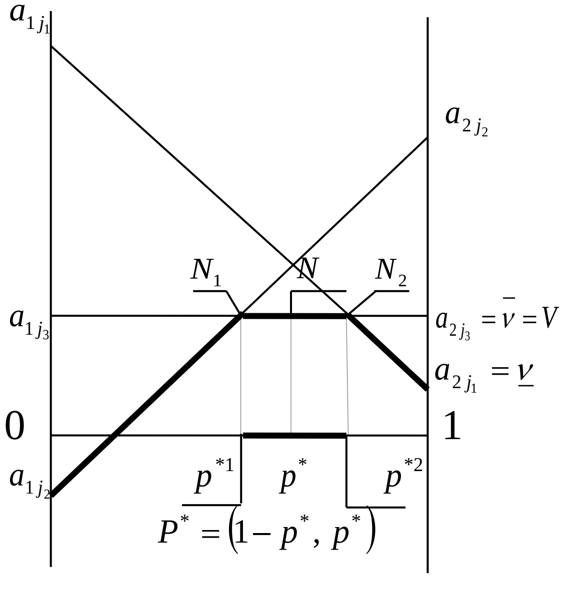
$$S_A^O = \{P^* = (1 - p^*, p^*): p^{*1} \leq p^* \leq p^{*2}\}$$

мұндағы p^{*1} және p^{*2} төменгі орайжанауыштың сәйкес N_1 және N_2 шеттік максимал нүктелерінің абсциссасы. Бұл S_A^O жиыны $[p^{*1}, p^{*2}]$ кесіндісімен өрнектеледі.

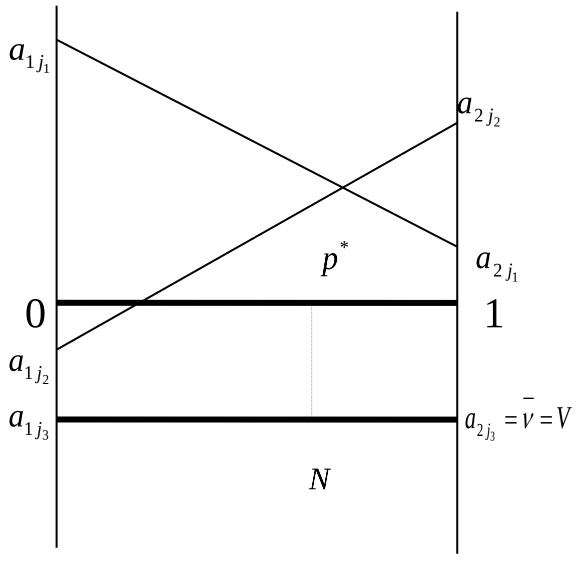
1.10-суретте ойыншының тиімді стратегиялар жиыны оның барлық стратегиялар жиынымен беттеседі:

$$S_A^O = S_A$$

және $[0, 1]$ кесіндісімен өрнектеледі; дербес жағдайда, оның A_1 және A_2 таза стратегиялары да тиімді болып табылады.

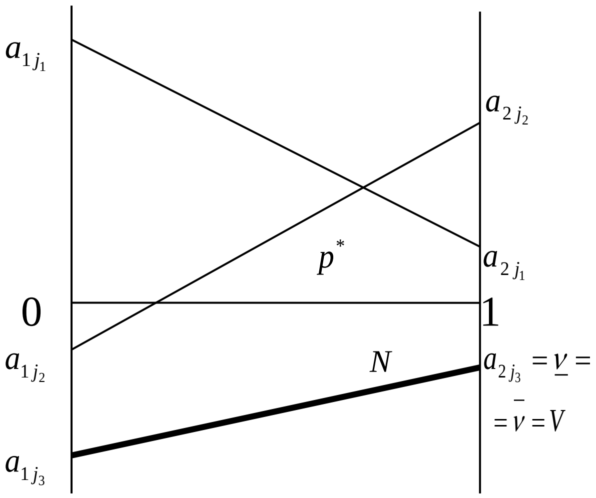


1.9-сурет

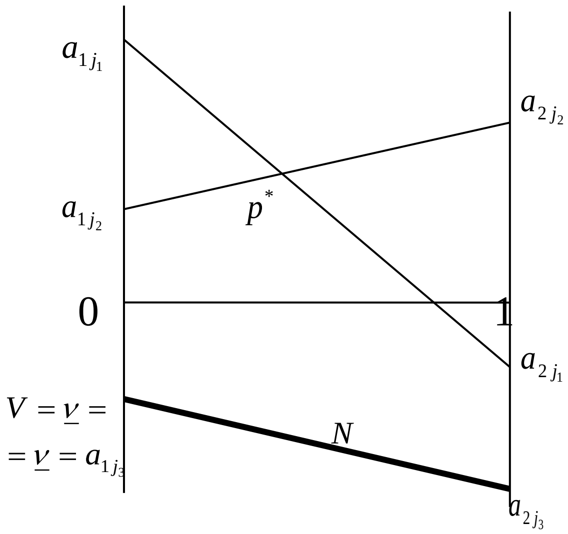


1.10-сурет

1.11-суретте $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісі N кесіндісіне параллель емес және оң көлбеу болғандықтан, жалғыз N максимал нүкте оң жақ перпендикулярда жатады. Сондықтан, A ойыншының A_2 таза стратегиясы жалғыз тиімді стратегия болып табылады.



1.11-сурет



1.12-сурет

Егер $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісінің теріс көлбеуі бар болса, онда жалғыз N максимал нүктесі сол жақ перпендикулярда жатады және A_1 таза стратегиясы A ойыншының жалғыз тиімді стратегиясы болып табылады. 1.9-суретте A ойыншының S_A^O тиімді стратегиялар жиынын бейнелейтін $[p^{*1}, p^{*2}]$ кесіндісі $[0, 1]$ кесіндісінің ішінде жатқандықтан ер нүкте жоқ. Осы себеппен барлық тиімді стратегиялар аралас стратегиялар болып табылады. Ойынның V құны таза стратегиядағы ойынның $\overline{v}$ жоғарғы құнымен беттеседі.

1.10 және 1.11-суреттерде a_{2j_3} элементі, 1.12-суретте a_{1j_3} элементі ер нүкте болып табылады.

Теорема 1.13. $a_{1j}a_{2j},\ j = 1, 2, \dots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының B ойыншының $B_j,\ \ j = 1, 2, \dots, n$ таза стратегияларымен жасақталатын максимал N нүктесі арқылы қандай да бір $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2},\ j_1 \neq j_2,\ j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ кесінділері өтсін.

B ойыншының $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ аралас стратегисы тиімді болу үшін $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің көлбеулері әр түрлі болу керек, мұндағы

$$q_{j_1}^* = \frac{-(a_{2j_2} - a_{1j_2})}{(a_{2j_1} - a_{1j_1}) - (a_{2j_2} - a_{1j_2})}, \tag{1.34}$$

$$q_{j_2}^* = 1 - q_{j_1}^* = \frac{a_{2j_1} - a_{1j_1}}{(a_{2j_1} - a_{1j_1}) - (a_{2j_2} - a_{1j_2})},, \tag{1.35}$$

$$q_j = 0, j \in \{1, 2, \dots, n\} \backslash \{j_1, j_2\}. \tag{1.36}$$

$j_1 = 1$ және $j_2 = 2$ болған кезде (1.34) формула (1.26) қатынасының бірінші формуласына, ал (1.35) формула (1.26) қатынасының екінші формуласына айналады.

Егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі горизонталь болса, онда B ойыншының B_{j_2} стратегиясы тиімді.

$a_{1j_1}a_{2j_1}$ және $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің бұрыштық коэффициенттері

$$k_{j_1} = a_{2j_1} - a_{1j_1}, k_{j_2} = a_{2j_2} - a_{1j_2}$$

$a_{1j_1}a_{2j_1}$ және $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің көлбеулері бірдей болғандықтан олар не екеуі де оң, не екеуі де теріс, не екеуі де нөлге тең болады. Осы кездегі барлық мүмкін болатын жағдай 1.1-кестеде келтірілген.

1.1-кестеде келтірілген 1-7 жағдайлардың геометриялық инерпретациясы 1.13-1.19 суреттерде бейнеленген.

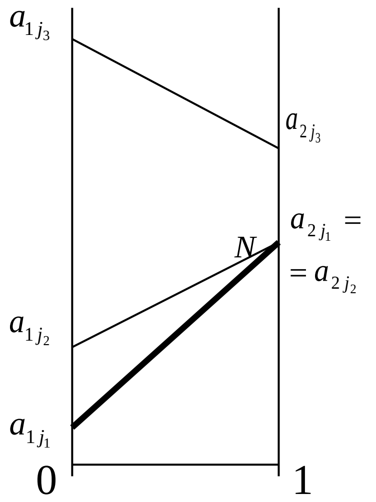
1.1-кестенің соңғы бағаны ($q_{j_1}^*$)

$$q_{j_1}^* = \frac{-k_{j_2}}{k_{j_1} - k_{j_2}}$$

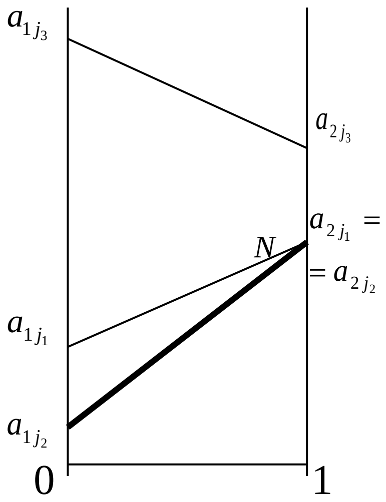
формуласының көмегімен толтырылады, және кестеден көріп отырғанымыздай $q_{j_1}^*$ ықтималдық бола алмайды.

1.1-кесте

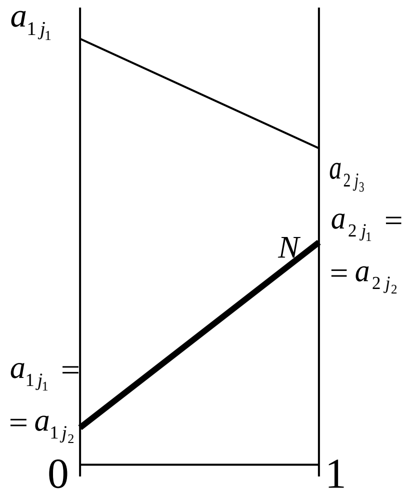
№	k_{j_1}	k_{j_2}	-k_{j_2}	$k_{j_1} - k_{j_2}$	$q^*_{j_1}$
1	>0	>0	<0	>0	<0
2	>0	>0	<0	<0	>1
3	>0	>0	<0	=0	=-∞
4	<0	<0	>0	<0	<0
5	<0	<0	>0	>0	>1
6	<0	<0	>0	=0	=+∞
7	=0	=0	=0	=0	=0/0



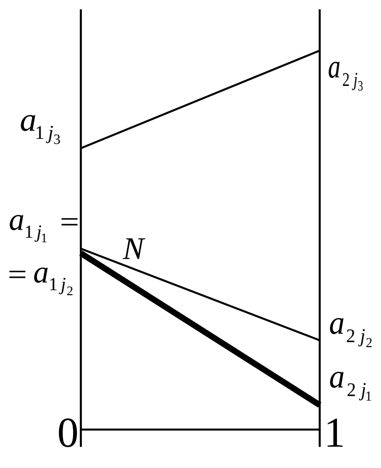
1.13-сурет



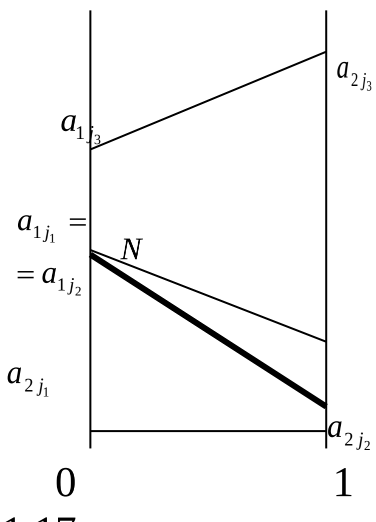
1.14-сурет



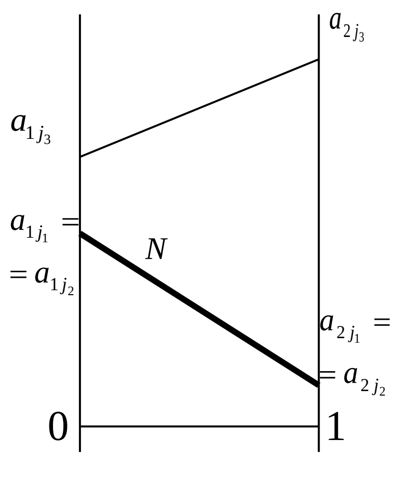
1.15-сурет



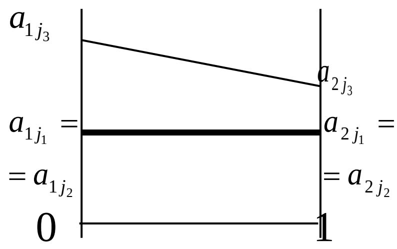
1.16-сурет



1.17-сурет



1.18-сурет



1.19-сурет

$a_{1j_1}a_{2j_1}$ және $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің көлбеулерін әр түрлі жағдайды қарастырайық. Бұл кездегі барлық мүмкін болатын жағдайдың саны 6-ға тең (1.2-кестеде келтірілген).

1.2-кесте

№	k_{j_1}	k_{j_2}	$-k_{j_2}$	$k_{j_1} - k_{j_2}$	$q_{j_1}^*$
1	>0	>0	>0	>0	>0
2	>0	=0	=0	=k_{j_1}>0	=0
3	<0	>0	<0	<0	>0
4	<0	=0	=0	=k_{j_1}<0	=0
5	=0	>0	<0	=-k_{j_2}<0	=1
6	=0	<0	>0	=-k_{j_2}>0	=1

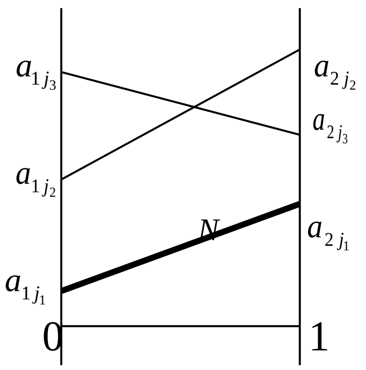
(1.15), (1.16), (1.17) формулаларының көмегімен a_{1j} a_{2j}, $j = 1, 2, \dots, n$ кесіндісінің төменгі орайжанауышының максимал N нүктесі арқылы көлбеуі әр түрлі болатын олардың (кесіндінің) тек қана екеуі өтетін жағдайдағы B ойыншының тиімді стратегиясын табуға болады.

Максимал N нүктесі арқылы бірдей көлбеуі бар екі кесінді өтетін барлық мүмкін болатын жағдай 1.1-кестеде келтірілген және 1.13-1.19 суреттерде геометриялық бейнеленген.

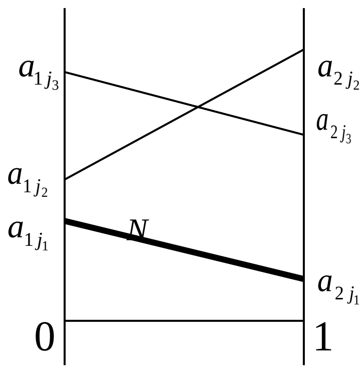
1.1-кестедегі 1, 2, 3 жағдайларда және оларға сәйкес 1.13, 1.14, 1.15-суреттерде $a_{2j_1} = a_{2j_2}$ элементтері ер нүктелері болып табылады; ал, 1.1-кестедегі 4, 5, 6 жағдайларда және оларға сәйкес 1.16, 1.17, 1.18-суреттерде $a_{1j_1} = a_{1j_2}$ элементтері ер нүктелері болып табылады және 1.1-кестедегі 7-жағдайда, 1.19-суретте $a_{1j_1} = a_{1j_2} = a_{2j_1} = a_{2j_2}$ элементтері ер нүктелері болып табылады. Сондықтан, 1.1-кестедегі барлық жағдайда (1-7) B_{j_1} және B_{j_2} стратегиялары тиімді болып табылады.

Енді $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының максимал N нүктесі арқылы олардың $a_{1j_1}a_{2j_1}$ біреуі өтетін жағдадй қарастырайық. Егер осы кесіндінің көлбеуі нөлден өзге болса (егер ол горизонталь болмаса), онда N нүктесі $[0, 1]$ кесіндісіне перпендикулярлардың біреуінде жатады. 1.20-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің оң көлбеуі бар және N нүктесі оң жақ перпендикулярда жатыр. Бұл жағдайда a_{2j_1} элементі ер нүкте болып табылады. 1.21-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің көлбеуі теріс; N нүктесі сол жақ перпендикулярда жатыр; a_{1j_1} элементі ер нүкте. 1.22-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің әрбір нүктесі максимал және $a_{1j_1} = a_{2j_1}$ элементтері ер нүкте болып табылады.

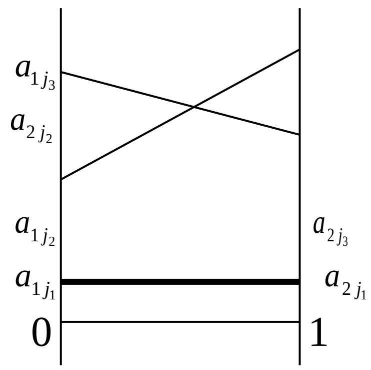
Сондықтан, 1.20, 1.21, 1.22-суреттерде бейнеленген барлық үш жағдайда да B_{j_1} стратегиясы тиімді болып табылады.



1.20-сурет



1.21-сурет



1.22-сурет

Салдар 1.2 (1.13-теоремадан алынады). Егер 1.13-теореманың шартындағы $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесіндісі горизонталь болмаса, яғни нөлдік емес көлбеуі бар болса, онда B ойыншының B_{j_1} таза стратегиясы белсенді болып табылады.

Осылайша, егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі горизонталь болмаса, онда B ойыншының B_{j_2} таза стратегиясы белсенді болып табылады.

Сонымен, егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің біреуі де горизонталь болмаса, онда B_{j_1} мен B_{j_2} стратегиялары белсенді болып табылады.

Салдар 1.2 (1.13-теоремадан алынады). Егер 1.13-теореманың шартындағы $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесіндісі горизонталь болса, онда B ойыншының B_{j_1} стратегиясы тиімді.

Егер a_{1j_1} $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі горизонталь болса, онда B ойыншының B_{j_2} стратегиясы тиімді.

(1.34), (1.35), (1.36) формулаларының көмегімен $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ кесіндісінің төменгі орайжанауышының N максимал нүктесі арқылы әр түрлі көлбеудегі олардың екеуі өтетін жағдайдағы B ойыншының тиімді стратегиясын табуға болады.

Енді $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының N максимал нүктесі арқылы олардың $a_{1j_1}a_{2j_1}$ біреуі өтетін жағдайды қарастырайық. Егер осы кесіндінің көлбеуі нөлден өзге болса (егер ол горизонталь болмаса), онда N нүктесі $[0, 1]$ кесіндісіне перпендикулярлардың біреуінде жатады. 1.20-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің оң көлбеуі бар және N нүктесі оң жақ перпендикулярда жатыр. Бұл жағдайда a_{2j_1} элементі ер нүкте болып табылады. 1.21-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің көлбеуі теріс; N нүктесі сол жақ перпендикулярда жатыр; a_{1j_1} элементі ер нүкте. 1.22-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің әрбір нүктесі максимал және $a_{1j_1} = a_{2j_1}$ элементтері ер нүкте болып табылады

Сондықтан, 1.20, 1.21, 1.22-суреттерде бейнеленген барлық үш жағдайда да B_{j_1} стратегиясы тиімді болып табылады.

Осы тақырыптағы $2 \times n$ ойынына жүргізілген талдаудан A және B ойыншыларының әрқайсысының екіден артық емес таза стратегиясы бар тиімді стратегиясының болатыны алынды.

1.14-мысал.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

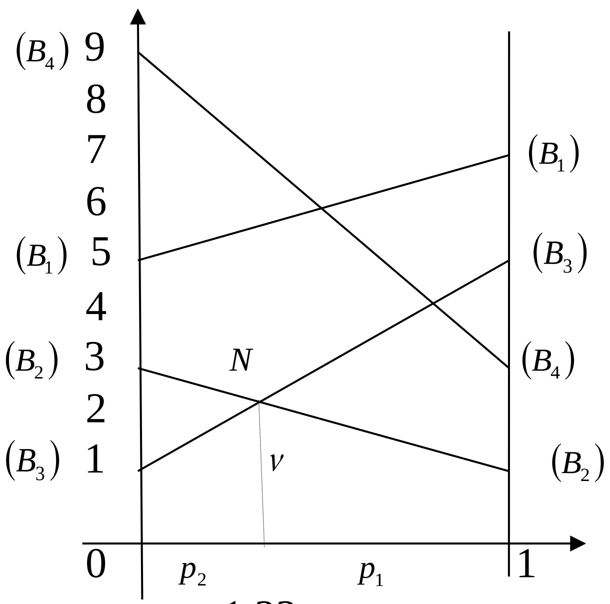
матрицасымен берілген ойынның шешімін табу керек.

Шығарылуы.

$$\underline{v} = \max(1, 1) = 1; \overline{v} = \min(7, 3, 5, 9) = 3;$$

$$\underline{v} \neq \overline{v}; 1 < v < 3.$$

Ойынның ер нүктесі жоқ. Сондықтан ойынның тиімді шешімін аралас стратегиялар облысынан іздейміз. Жазықтықта екінші ойыншының стратегияларына сәйкес кесінділерді тұрғызамыз (1.23-сурет).



1.23-сурет.

A алгоритмін пайдаланып, есепті талдайық.

B_1B_1 кесіндісі B_3B_3 кесіндісінен (өспелі, оң көлбеуі бар) жоғары жатқандықтан B_3 стратегиясы B_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

B_4B_4 кесіндісі B_2B_2 кесіндісінен (кемімелі, теріс көлбеуі бар) жоғары жатқандықтан B_2 стратегиясы B_4 стратегиясын қатаң доминациялайды. Яғни екінші ойыншыға B_1 және B_4 стратегияларын ұстаған қолайлы емес, сондықтан оларды қолдану ықтималдығы нөлге тең: $q_1 = 0, q_4 = 0$.

Доминациялау принципін пайдалана отырып берілген ұтыс матрицасын редуциялау нәтижесінде 2×2 ұтыс матрицасын аламыз:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Алынған 2×2 ойынды өзімізге белгілі тәсілдердің біреуімен шешіп мына шешімді аламыз:

$$p_1 = \frac{2}{3}, p_2 = \frac{1}{3}, q_2 = \frac{2}{3}; q_3 = \frac{1}{3}; v = \frac{7}{3}$$

Жауабы. Ойыншылардың тиімді аралас стратегиялары:

$$p\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); q\left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0\right).$$

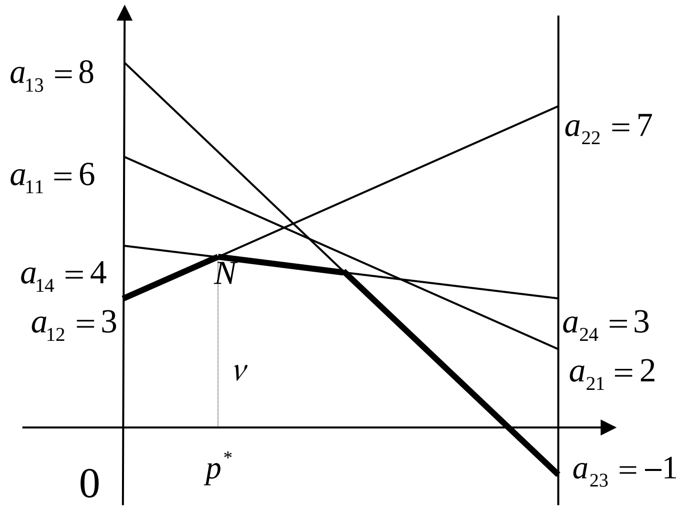
Ойынның құны: $v = \frac{7}{3}$.

1.15-мысал.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

матрицасымен берілген ойынның шешімін табу керек.

Шығарылуы. А алгоритмі бойынша берілген ойынның геометриялық бейнесін тұрғызамыз (1.24-сурет).



1.24-сурет.

Кесінділердің төменгі орайжанауышы қалыңдатылып боялған. Оның максимал нүктесі – N. N нүктесінің - абсциссасын табу үшін қиылысуында осы нүкте жатқан екі түзуді жүйе ретінде шешеміз. Сонда (1.31) формулада $j_1 = 2$ және $j_2 = 4$ мәндерінде

$$p_2^* = p^* = \frac{a_{12}-a_{14}}{(a_{12}+a_{24})-(a_{14}+a_{22})} = \frac{3-4}{6-11} = \frac{1}{5}.$$

Осыдан

$$p_1^* = 1 - p_2^* = \frac{4}{5}.$$

(1.33) формула бойынша ойынның құны

$$V = \frac{a_{12}\cdot a_{24}-a_{14}\cdot a_{22}}{(a_{12}+a_{24})-(a_{14}+a_{22})} = \frac{3\cdot 3-4\cdot 7}{6-11} = \frac{19}{5}.$$

Төменгі орайжанауыштың перпендикулярлардағы екі төменгі мәндердің ($a_{12} = 3$ және $a_{23} = -1$) жоғарғысы $a_{12} = 3$, сондықтан таза стратегиялардағы ойынның төменгі құны

$$\underline{v} = a_{12} = 3.$$

Жоғарғы ұштардың ($a_{13} = 8,\ \ a_{11} = 6,\ \ a_{14} = 4,\ \ a_{22} = 7$) арасындағы ең төменгі нүкте $a_{14} = 4$. Сондықтан таза стратегиялардағы ойынның жоғарғы құны $\overline{v} = a_{14} = 4$.

Сонымен,

$$\underline{v} = 3 < V = \frac{19}{5} < \overline{v} = 4.$$

Ойында ер нүкте жоқ.

Жауабы. $P^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right), V = \frac{19}{5}$.

1.10 Матрицалық $\boldsymbol{m} \times \mathbf{2}$ ойындардың геометриялық шешімі

A ойыншының - m таза стратегиясы, B ойыншының B_1, B_2 - екі таза стратегиясы бар $m \times 2$ ойынды қарастырайық.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \end{array}$$

B ойыншының $Q = (q_1, q_2),\ \ q_1 \geq 0,\ \ q_2 \geq 0,\ \ q_1 + q_2 = 1$ стратегиясының $\overline{v}(Q)$ тиімділік емес көрсеткіші мына формуламен өрнектеледі:

$$\overline{v}(Q) = \max_{1 \leq i \leq m} H(A_i, Q) = \max_{1 \leq i \leq m} (q_1 a_{i1} + q_2 a_{i2}).$$

Егер q_2=q белгілеуін енгізсек, онда q_1=1-q және

$$\overline{v}(Q) = \max_{1 \leq i \leq m} \big((1 - q) a_{i1} + q a_{i2}\big) = \max_{1 \leq i \leq m} \big((a_{i2} - a_{i1}) q + a_{i1}\big). \tag{1.37}$$

Сонымен, Q стратегиясының $\overline{v}(Q)$ тиімділік емес көрсеткіші $q \in [0, 1]$ ықтималдығына тәуелді,

$$H(A_i, Q) = \left((a_{i2} - a_{i1})q + a_{i1}\right), i = 1, 2, \ldots, m$$

- m сызықтық функцияның *жоғарғы орайжанауышы* болып табылады, және әрқайсысының графигі осы функцияның $k_i = a_{i2} - a_{i1}$ бұрыштық коэффициентінн тәуелді белгілі бір көлбеудегі кесіндіні береді.

Егер $Q^* = (1 - q^*, q^*)$ стратегиясы

$$\min_{Q \in S_B} \overline{v}(Q) = \overline{v}(Q^*) \leq \max_{1 \leq i \leq m}\left((a_{i2} - a_{i1})q^* + a_{i1}\right) \qquad (1.38)$$

теңсіздігін қанағаттандырса, онда негізгі фон Нейман теоремасы бойынша ол тиімді болып табылады, мұндағы, S_B - B ойыншының барлық аралас стратегиялар жиыны. Сонымен, $q^* \in [0, 1]$ абсциссасы $\overline{v}(Q)$ жоғарғы орайжанауыштың минимал (ең төменгі) нүктесі $Q^* = (1 - q^*, q^*)$ тиімді стратегиясын анықтайды, бұл стратегия бойынша B ойыншы сәйкес $1 - q^*$ және q^* ықтималдықтарымен өзінің B_1 мен B_2 таза стратегияларын кездейсоқ таңдайды.

Фон Нейман теоремасы бойынша

$$V = \overline{v}(Q^*),$$

яғни V ойынның құны жоғарғы орайжанауыштың минимал нүктесінің ординатасына тең.

Енді осыларды ескере отырып, B ойыншының тиімді стратегиялары мен ойынның V құнын (1.23-сурет) геометриялық табудың «B» алгоритмін қарастырайық.

Алгоритм «B»

1. $[0, 1]$ горизонталь кесіндісін қарастырамыз.

2. $[0, 1]$ кесінділерінің ұштары арқылы екі: сол жақ және оң жақ перпендикуляр жүргіземіз.

3. 0 нүктесінен $[0, 1]$ кесіндісімен қиылысқандағы вертикаль сандық остің бойында жататын сол жақ перпендикулярдың

бойынан $\boldsymbol{A}$ матрицасының бірінші бағанының барлық элементтерін белгілейміз.

4. 1 нүктесінен $[0, 1]$ кесіндісімен қиылысқандағы (вертикаль сандық осьтегі сияқты) жүргізілген оң жақ перпендикулярдың бойынан $\boldsymbol{A}$ матрицасының екінші бағанының барлық элементтерін белгілейміз.

5. $\boldsymbol{A}$ матрицасының i-ші, $i = 1, 2, \dots, m$ жолында орналасқан a_{i1} және a_{i2} элементтерін бейнелейтін нүктелердің әрбір жұбын $a_{i1}a_{i2}$ кесіндісімен қосамыз, нәтижесінде келесі m-сызықтық функциялардың графигін беретін m кесіндіні аламыз:

$$H(A_i, Q) = \left((a_{i2} - a_{i1})q + a_{i1}\right), q \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m \text{ -} \quad (1.39)$$

n сызықтық функцияның графигін беретін n кесінділер тұрғызылады.

6. Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$ барлық кесінділердің теріс емес, яғни оң немесе нөлдік көлбеуі (басқаша айтқанда, барлық $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$ кесінділері – кемімелі емес) бар болса, онда B_1 стратегиясы B_2 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$ барлық кесінділердің оң көлбеуі бар, яғни өспелі болса, онда B_1 стратегиясы B_2 стратегиясын қатаң доминациялайды

7. Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$ барлық кесінділердің оң емес, яғни, теріс немесе нөлдік көлбеуі (басқаша айтқанда, барлық $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$ кесінділері – өспелі емес) бар болса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$ барлық кесінділердің теріс көлбеуі бар, яғни кемімелі болса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын қатаң доминациялайды

8. Егер $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$ кесіндісінен төмен емес орналасса, онда A_{i_1} стратегиясы A_{i_2} стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$, кесіндісінен жоғары орналасса, онда A_{i_1} стратегиясы A_{i_2} стратегиясын қатаң доминациялайды.

9. (1.39) кесінділер үйірінің дербес жағдайда кесінді де болуы мүмкін, жалпы жағдайда төмен дөңес қисықты беретін (1.37) жоғарғы орайжанауышын табамыз.

10. Жоғарғы орайжанауышта минимал (ең төменгі) нүктені (нүктелерді) табамыз.

11. Минимал нүктенің q^* абсциссасы ((1.38) теңдікті қанағаттандыратын) B ойыншының $Q^* = (1 - q^*, q^*)$ тиімді аралас стратегиясындағы таза B_2 стратегиясын таңдау ықтималдығы болып табылады.

12. Жоғарғы орайжанауыштың минимал нүктесінің ординатасы V ойынның құны болып табылады.

13. $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$ кесінділер шеттерінің төменгілерінің ішіндегі ең жоғарғысы ойынның таза стратегиялардағы $\underline{v}$ төменгі құны болып табылады.

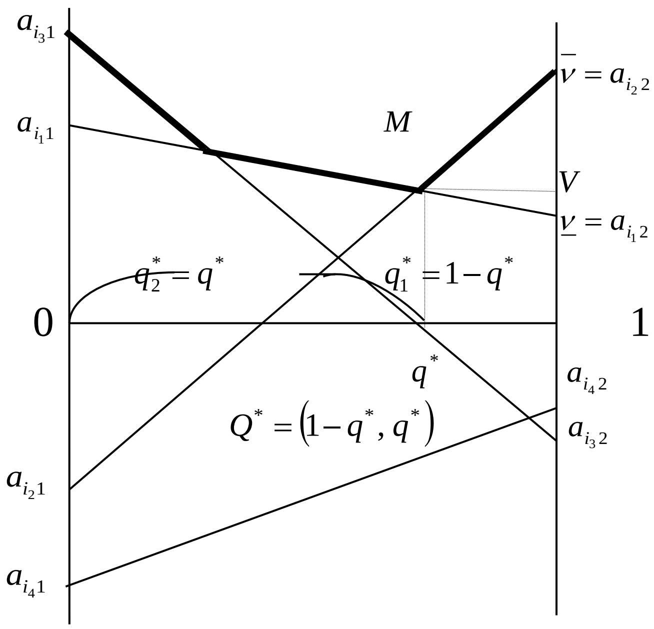
14. Жоғарғы орайжанауыштың шеттерінің төменгісі (перпендикулярларда жатқан) ойынның таза стратегиялардағы $\overline{v}$ жоғарғы құны болып табылады.

15. Суретте өзі орналасқан перпендикулярда кесіндінің төменгі шеті болып табылатын және перпендикулярдағы жоғарғы нүктемен берілген $\boldsymbol{A}$ матрицасының элементі ойынның ер нүктесі болып табылады. Бұл жағдайда нөмірі ер нүктенің бірінші индексімен беттесетін A ойыншының таза стратегиясы тиімді болып табылады.

1.25-суретте $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \dots, m$, - m кесінділерінен

$$a_{i_1 1}a_{i_1 2},\ a_{i_2 1}a_{i_2 2},\ a_{i_3 1}a_{i_3 2},\ a_{i_4 1}a_{i_4 2}$$

төртеуі көрсетілген, олардың алғашқы үшеуі жоғарғы орайжанауышты анықтауға қатысты. M нүктесі - осы жоғарғы орайжанауыштың минимал нүктесі; q^* - M нүктесінің абсциссасы Сондықтан, $Q^* = (1 - q^*, q^*)$ - B ойыншының тиімді аралас стратегиясы. M нүктесінің ординатасы V ойын құны. Таза стратегиялардағы ойынның төменгі құны: $\underline{v} = a_{i_1 2}$, ал жоғарғы құны - $\overline{v} = a_{i_2 2}$.



1.25-сурет

$a_{i1}\ a_{i2},\ i = 1, 2, \ldots, m,$ - кесінділерінің арасында оң және теріс көлбеулері (мысалы, $a_{i_2 1} a_{i_2 2}$ кесіндісінің оң көлбеуі, ал $a_{i_3 1} a_{i_3 2}$ кесіндісінің теріс көлбеуі) бар кесінділер болғандықтан, B_2 стратегиясы доминацияламайды және B_1 стратегиясымен доминацияланбайды. $a_{i_1 1} a_{i_1 2}$ және $a_{i_2 1} a_{i_2 2}$, кесінділері $a_{i_4 1} a_{i_4 2}$ кесіндісінен жоғары орналасқандықтан, A_{i_1} және A_{i_2} стратегияларының әрқайсысы A_{i_4} стратегиясын қатаң доминациялайды.

B ойыншының $Q^* = (1 - q^*, q^*)$ тиімді стратегиясы мен ойынның V құнын келесі теоремадағы формулалардың көмегімен есептеуге болады.

Теорема 1.14. Егер $a_{1j} a_{2j},\ j = 1, 2, \ldots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының A ойыншының $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ таза стратегияларымен жасақталатын максимал M нүктесі арқылы қандай да бір $a_{i_1 1} a_{i_1 2}$ мен $a_{i_2 1} a_{i_2 2},\ i_1 \neq i_2,\ i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ кесінділері өтсе, онда M нүктесінің абсциссасы

$$q_2^* = q^* = \frac{a_{i_2 1} - a_{i_1 1}}{(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}) - (a_{i_1 1} + a_{i_2 2})} \tag{1.40}$$

және, демек

$$q_1^* = 1 - q_2^* = 1 - q^* = \frac{a_{i_1 2} - a_{i_2 2}}{(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}) - (a_{i_1 1} + a_{i_2 2})}, \tag{1.41}$$

ал ойынның құны

$$V = \frac{a_{i_1 2} \cdot a_{i_2 1} - a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2}}{(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}) - (a_{i_1 1} + a_{i_2 2})}. \tag{1.42}$$

Теорема 1.15. $a_{1j}a_{2j},\ j = 1, 2, \dots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының A ойыншының $A_i,\ \ i = 1, 2, \dots, m$ таза стратегияларымен жасақталатын максимал M нүктесі арқылы қандай да бір $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ мен $a_{i_2 1}a_{i_2 2},\ i_1 \neq i_2,\ i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$ кесінділері өтсін.

A ойыншының $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0)$ аралас стратегисы тиімді болу үшін $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ мен $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесінділерінің көлбеулері әр түрлі болу керек, мұндағы

$$p_{i_1}^0 = \frac{a_{i_2 2} - a_{i_2 1}}{(a_{i_2 2} - a_{i_2 1}) - (a_{i_1 2} - a_{i_1 1})} \tag{1.43}$$

және, демек,

$$p_{i_2}^0 = 1 - p_{i_1}^0 = \frac{-(a_{i_1 2} - a_{i_1 1})}{(a_{i_2 2} - a_{i_2 1}) - (a_{i_1 2} - a_{i_1 1})}, \tag{1.44}$$

$$p_i = 0,\ i \in \{1, 2, \dots, m\} \backslash \{i_1, i_2\}.$$

(1.31), (1.32), (1.33), (1.35) және (1.34) формулаларында j_1 индексін i_2 индексімен, j_2 индексін i_1 индексімен, p мәнін q мәнімен алмастыру нәтижесінде сәйкес (1.40), (1.41), (1.42), (1.43) және (1.44) формулаларын алуға болады.

$i_1 = 1$ және i_2=2 болған кезде (1.40), (1.41), (1.42), (1.43) және (1.44) формулалары (1.42) қатынастың екінші формуласына, (1.42) қатынасының бірінші формуласына, (1.43) формуласына, (1.42) қатынасының бірінші формуласына, (1.42) қатынастың екінші формуласына айналады.

Салдар 1.3. Егер 1.15-теореманың шартынан $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі горизонталь болмаса, яғни, нөлдік емес көлбеуі болса, онда A ойыншының A_{i_2} стратегиясы белсенді болып табылады.

Егер 1.15-теореманың шартынан $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесіндісі горизонталь болса, яғни, нөлдік көлбеуі болса, онда A ойыншының A_{i_1} стратегиясы белсенді болып табылады.

Егер 1.15-теореманың шартынан $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ және $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесінділерінің біреуі де горизонталь болмаса, онда A_{i_1} және A_{i_2} стратегиялары белсенді болып табылады.

Салдар 1.4. Егер 1.15-теореманың шарттарындағы $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі горизонталь болса, онда A_{i_1} стратегиясы тиімді.

Егер 1.15-теореманың шарттарындағы $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесіндісі горизонталь болса, онда A_{i_2} стратегиясы тиімді.

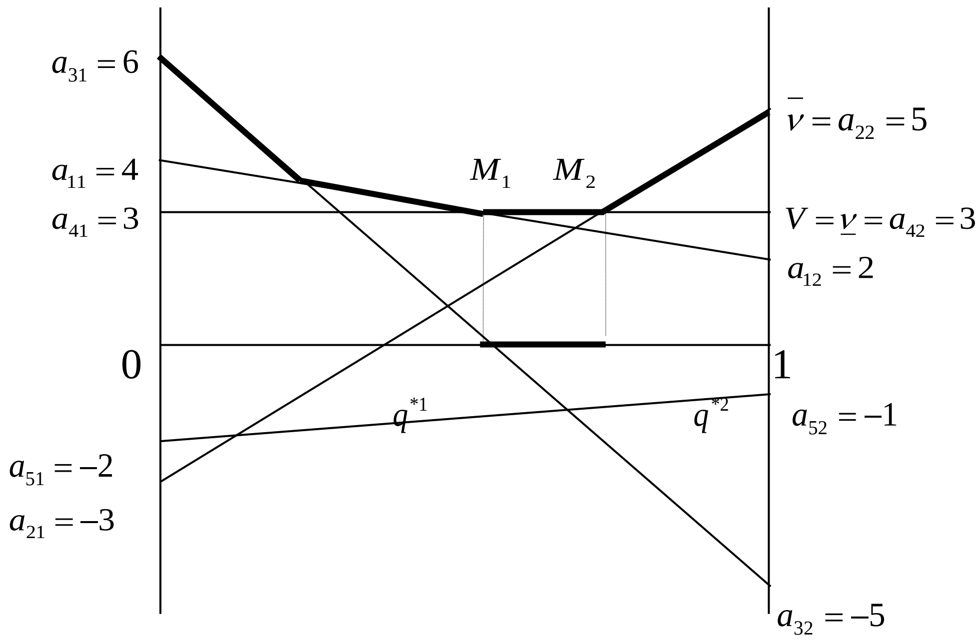
1.16-мысал.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \\ 6 & -5 \\ 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ұтыс матрицасымен берілген 5×2 ойынының шешімін табу керек.

Шығарылуы.

B алгоритмі бойынша осы ойынның геометриялық интерпретациясын берейік (1.26-сурет).



1.26-сурет

$[M_1, M_2]$ кесіндісінің барлық нүктелері жоғарғы орайжанауыштың минималды нүктелерін береді. Сондықтан B ойыншының тиімді аралас стратегиялар жиыны

$$S_B^O = \left\{Q^* = (1 - q^*, q^*): q^{*1} = \frac{1}{2} \leq q^* \leq \frac{3}{4} = q^{*2}\right\},$$

және геометриялық интерпретациясы $\left[q^{*1} = \frac{1}{2}, q^{*2} = \frac{3}{4}\right]$ кесіндісімен бейнеленеді. Бұл кесінді $[0, 1]$ кесіндісінің бірде бір ұшын қамтымайтындықтан B ойыншының таза стратегиялары тиімді болмайды.

$$Q^{*1} = (1 - q^{*1}, q^{*1}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

және

$$Q^{*2} = (1 - q^{*2}, q^{*2}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

стратегиялары шеткі тиімді стратегиялар болып табылады.

Ойынның V құны $M \in [M_1, M_2]$ нүктесінің ординатасына тең: $V = 3$.

Графикалық жолдармен алынған осы мәндердің ақиқаттығына (1.40), (1.41) және (1.42) формулалардың көмегімен есептеп көз жеткізуге болады.

Жоғарғы орайжанауыштың минималды M_1 нүктесі арқылы $a_{11}a_{12}$ және $a_{41}a_{42}$ екі кесінділері өтетіндіктен (1.40) формулада $i_1 = 1$ және $i_2 = 4$ мәндерінде:

$$q^{*1} = \frac{a_{41} - a_{11}}{(a_{12} + a_{41}) - (a_{11} + a_{42})} = \frac{3-4}{5-7} = \frac{1}{2}.$$

Жоғарғы орайжанауыштың минималды M_2 нүктесі арқылы $a_{21}a_{22}$ және $a_{41}a_{42}$ $a_{41}a_{42}$ екі кесінділері өтетіндіктен (1.40) формулада i_1 =2 және $i_2 = 4$ мәндерінде:

$$q^{*2} = \frac{a_{41} - a_{21}}{(a_{22} + a_{41}) - (a_{21} + a_{42})} = \frac{3-(-3)}{8-0} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

(1.42) формула бойынша $i_1 = 1$ және $i_2 = 4$ мәндерінде:

$$V = \frac{a_{12} \cdot a_{41} - a_{11} \cdot a_{42}}{(a_{12} + a_{41}) - (a_{11} + a_{42})} = \frac{6-12}{5-7} = 3.$$

Жауабы. Ойынның құны: $V = 3$. $[M_1, M_2]$ кесіндісінің барлық нүктелері жоғарғы орайжанауыштың минималды нүктелерін беретіндіктен B ойыншының тиімді аралас стратегиялар жиыны

$$S_B^O = \left\{Q^* = (1 - q^*, q^*): q^{*1} = \frac{1}{2} \le q^* \le \frac{3}{4} = q^{*2}\right\}.$$

$$Q^{*1} = (1 - q^{*1}, q^{*1}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

және

$$Q^{*2} = (1 - q^{*2}, q^{*2}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

стратегиялары шеткі тиімді стратегиялар.

.

1.11 Матрицалық ойын мен сызықтық программалау септерінің арасындағы өзара байланыс

Матрицалық ойын мен сызықтық программалаудың арасында өзара байланыс бар – бір жағынан кез келген матрицалық ойынды бір-біріне қосжақты болатын сызықтық программалаудың есептер жұбына келтіруге болады, бір жағынан керісінше, кез келген шешімі бар сызықтық программалау есебін арнайы түрдегі матрицалық ойынға келтіруге болады. Сонымен, осы мағынада сызықтық программалау теориясы матрицалық ойындармен пара-пар.

$m \times n$ ойыны $p = \left(a_{ij}\right), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ ұтыс матрицасымен берілсін. A ойыншының $A_1, A_2, \dots, A_m$, B ойыншының $B_1, B_2, \dots, B_n$ стратегиялары бар болсын. $S_A^* = (p_1^*, \dots, p_m^*)$ және $S_B^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ тиімді стратегияларын табу қажет, мұндағы p_i^*, q_j^* - сәйкес A_i, B_j таза стратегияларын қолдану ықтималдықтары, $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$, $\sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1$.

S_A^* тиімді стратегиясы келесі талаптарды қанағаттандырады. Ол B ойыншының кез келген стратегиясында A ойыншыға ойынның v құнынан кем емес орташа ұтыспен және B ойыншының тиімді стратегиясында ойынның v құнына тең ұтыспен қамтамасыз етеді. $v > 0$ деп қабылдаймыз (ол үшін барлық $a_{ij} \geq 0$ келтіреміз). Егер A ойыншы B ойыншының кез келген B_j таза стратегиясына қарсы $S_A^* = (p_1^*, \dots, p_m^*)$ аралас стратегиясын қолданса, онда ол орташа ұтысты немесе ұтыстың математикалық күтімін $a_{ij} = a_{1j}p_1 + \dots + a_{mj}p_m$, $j = 1, 2, \dots, n$ иемденеді.

S_A^* тиімді стратегиясы үшін барлық орташа ұтыстар ойынның v құнынан кем емес, яғни:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + \dots + a_{m1}p_m \geq v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}p_1 + \dots + a_{mn}p_m \geq v \end{cases} \qquad (1.45)$$

Осы теңсіздіктердің әрқайсысын v>0 санына бөліп, жаңа айнымалылар енгіземіз:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \dots, x_m = \frac{p_m}{v} \qquad (1.46)$$

Сонда (1.45) жүйе мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \qquad (1.47)$$

A ойыншының мақсаты - өзінің кепілденген ұтысын, яғни ойынның v құнын максимизациялау.

$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$ теңдігін $v \neq 0$ шамасына бөліп $x_i \ (i = 1, 2, \dots, m)$ айнымалысына қатысты шарт аламыз: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \frac{1}{v}$. Ойынның v құнын максимизациялау $\frac{1}{v}$ шамасын минимизациялаумен пара-пар. Сондықтан есепті былайша құрастыруға болады: (1.47) сызықтық шектеулерді қанағаттандыратын және

$$F = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \qquad (1.48)$$

сызықтық функция минимум мәнін қабылдайтындай $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ айнымалыларының мәндерін анықтау керек. Бұл сызықтық программалау есебі. (1.47)-(1.48) есепті шешіп $p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$ тиімді шешімді және S_A^* тиімді стратегияны аламыз.

$S_B^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ тиімді стратегияны анықтау үшін B ойыншы кепілденген ұтысты минимизациялау керек, яғни $\max \frac{1}{v}$ табу керек.

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \leq v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_m \leq v. \end{cases} \qquad (1.49)$$

$q_1, q_2, \dots, q_n$ айнымалылары A ойыншының кез келген таза стратегиясында B ойыншының орташа ұтысы ойынның құнынан артпайтындығынан алынатын (1.49) теңсіздіктер жүйесін қанағаттандырады.

$$y_1 = \frac{q_1}{v}, \dots, y_m = \frac{q_n}{v} \tag{1.50}$$

белгілеулерін енгізіп келесі теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \leq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq 1 \end{cases} \tag{1.51}$$

y_j $(j = \overline{1, n})$ айнымалылары $y_1 + \cdots + y_n = \frac{1}{v}$ шартын қанағаттандырады.

Ойын келесі есепке келтірілді.

(1.51) теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын және

$$F' = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \tag{1.52}$$

сызықтық функция максимум мәнін қабылдайтындай $y_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ айнымалыларының мәндерін анықтау керек.

(1.50), (1.51) сызықтық программалау есебінің шешімі тиімді стратегияны анықтайды. Бұл жерде ойынның құны:

$$v = \frac{1}{\max F\prime} = \frac{1}{\min F\prime}.$$

(1.47), (1.48) және (1.51), (1.52) есептер үшін кеңейтілген матрицаларды құру барысында бір матрицаны транспонирлеу нәтижесінде екіншісін алуға болатынына көз жеткізуге болады. Сонымен, сызықтық программалаудың (1.47), (1.48) және (1.51), (1.52) есептері өзара қосжақты болып табылады.

Матрицалық ойынды сызықтық программалау есебіне келтіріп, шығару алгоритмі

1. егер ойынның ұтыс матрицасында теріс элемент кездессе, онда осы матрицаның барлық элементтері қатаң оң болатындай оң μ санын қосамыз;

2. сызықтық программалдаудың (1.47), (1.48) және (1.51), (1.52) қос жақты есептерін симплекс әдісімен шығарамыз. $v' = \frac{1}{\max F'} = \frac{1}{\min F'}$ мәнін анықтаймыз;

3. A және B ойыншыларының сәйкес тиімді аралас стратегиясын құрамыз

$$p_i = \frac{x_i}{v}, i = 1, 2, \dots, m, y_j = \frac{q_j}{v}, j = 1, 2, \dots, n;$$

4. ойынның құнын есептейміз:

$$v = v' - \mu.$$

Практикада сызықтық программалаудың өзара қосжақты есебін ойындар теориясының есебіне келтіруге қарағанда, ойындар теориясының есебін сызықтық программалаудың өзара қосжақты есебіне келтіру көп кездеседі.

Сызықтық программалау әдістерімен шығаруға болатын, $m \times n$ ойын модельдерімен сипатталған мысалды қарастырайық.

1.17-мысал.

Кредиттік оқыту жүйесінің талабы бойынша оқу жүктемесін бөлу барысында оқытушы 4 мамандыққа өзінің әр түрлі үш пәндерін таңдауға ұсынады және мамандықтың сұранысы бойынша қандай да бір мағынада пайда түсіреді. Әрбір мамандық өзіне ұсынылған пәндерді қажеттілігі бойынша бағалап, кестеге (ұтыс матрицасы) енгізеді. Кестедегі a_{ij} элементі i-ші пәнді j-ші мамандық таңдағандағы бір бірлік пайданы сипаттайды.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	3	6	2
A_2	4	5	6	5
A_3	1	7	4	7

Кез келген сұраныста пайданың кепілденген орташа ұтысына ие болатын өткізілетін пәннің тиімді пропорциясын анықтау керек.

Шығарылуы. Есепті шығармастан бұрын ұтыс матрицасына талдау жүргізе отырып доминацияланатын (қолайлы емес) немесе дубльдейтін (қайталанатын) стратегияларды жазбай тастап кетіп ойын матрицасын редуциялауға болады. B ойыншының мақсаты - A ойыншының ұтысын азайту болғандықтан екінші стратегия (матрицаның екінші бағаны) төртінші стратегиямен салыстырғанда B ойыншы үшін қолайсыз (екінші бағанның элементтері төртінші бағанның элементтерінен үлкен). Сондықтан екінші бағанды жазбай тастап кетуге болады. 3×3 өлшемді матрица аламыз:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 37 & 64 & 82 \\ 91 & 46 & 28 \\ 73 & 55 & 46 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ойынның төменгі және жоғарғы құндарын анықтаймыз:

$\underline{v} = \max\{37, 28, 46\} = 46;$

$\overline{v} = \min\{91, 64, 82\} = 64.$

Ойынның төменгі және жоғарғы құндары өзара тең емес болғандықтан ер нүкте жоқ және тиімді шешімді аралас стратегияларда іздеу керек:

$S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$ және $S_B^* = (q_1, q_2, q_3)$.

I есеп

$$\begin{cases} 37p_1 + 91p_2 + 73p_3 \geq v \\ 64p_1 + 46p_2 + 55p_3 \geq v \\ 82p_1 + 28p_2 + 46p_3 \geq v \end{cases}$$

II есеп

$$\begin{cases} 37q_1 + 64q_2 + 82q_3 \leq v \\ 91q_1 + 46q_2 + 28q_3 \leq v \\ 73q_1 + 55q_2 + 46q_3 \leq v \end{cases}$$

I және II есептердегі барлық теңсіздіктердің екі жағын да v санына бөліп $x_i = \frac{p_i}{v}$, $i = 1, 2, 3$, $y_j = \frac{q_j}{v}$, $j = 1, 2, 3$ белгілеулерін енгіземіз. Нәтижесінде сызықтық программалаудың өзара қосжақты есебін аламыз:

$$\begin{cases} 37x_1 + 91x_2 + 73x_3 \geq 1 \\ 64x_1 + 46x_2 + 55x_3 \geq 1 \\ 82x_1 + 28x_2 + 46x_3 \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 37y_1 + 64y_2 + 82y_3 \leq 1 \\ 91y_1 + 46y_2 + 28y_3 \leq 1 \\ 73y_1 + 55y_2 + 46y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3; \qquad y_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to min \qquad Z = y_1 + y_2 + y_3 \to max$$

II-есепті симплекс кестенің көмегімен шығару нәтижесінде $Y_3 = \left(\frac{1}{293}, \frac{4}{293}, 0, 0, \frac{3393}{15728}, 0\right)$ базистік шешімінде мәні $Z_{max} = \frac{5}{293}$ тиімді болып табылады.

Қосжақтылық теоремаларының көмегімен өзара қосжақты есептердегі айнымалылардың арасында өзара байланысты орнатамыз және I есептің базистік шешімін анықтаймыз.

	I есептің бастапқы айнымалылары	I есептің қосымша айнымалылары
Айнымалылар арасындағы сәйкестік	x_1 x_2 x_3 $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ y_4 y_5 y_6	x_4 x_5 x_6 $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ y_1 y_2 y_3
	II есептің қосымша айнымалылары	II есептің бастапқы айнымалылары
	II есептің айнымалыларының мәндері	
	$\frac{2}{293}$ 0 $\frac{3}{293}$	0 0 $\frac{9}{293}$

Осыдан I есептің тиімді базистік шешімін аламыз:

$$X = \left(\frac{2}{293}, 0, \frac{3}{293}, 0, 0, \frac{9}{293}\right)$$

және

$$F_{min} = Z_{max} = \frac{5}{293}.\ S_A^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$$

тиімді стратегияны (1.46) формулалардың көмегімен табамыз:

$$p_1^* = x_1 \cdot v = \frac{2}{293} \cdot \frac{293}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4;$$

$$p_2^* = x_2 \cdot v = 0 \cdot \frac{293}{5} = 0;$$

$$p_3^* = x_3 \cdot v = \frac{3}{293} \cdot \frac{293}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6;$$

$$S_A^* = (0{,}4; 0; 0{,}6).$$

Демек, оқытушының 40% - A_1 пәні, 60% - A_3 пәні оқытылған тиімді болады, ал A_2 пәнінің берілген мамандықтарға қажеттілігі жоқ болып табылады.

Сұраныстың S_B^* тиімді стратегиясы осыған ұқсас анықталады:

$q_1^* = 0{,}2;$ $q_2^* = 0;$ $q_3^* = 0{,}8.$

$$S_B^* = (0{,}2; 0; 0{,}8)7$$

Бұл жерде бастапқы матрицаның екінші бағанын қолайлы емес деп жазбай тастап кеткеніміз ескерілді.

Сонымен, тиімді сұраныс B_1 мамандығына 20%, B_3 мамандығына 80%.

Жауабы. оқытушының 40% - A_1 пәні, 60% - A_3 пәні оқытылған тиімді болады, ал A_2 пәнінің берілген мамандықтарға қажеттілігі жоқ болып табылады. Тиімді сұраныс B_1 мамандығына 20%, B_3 мамандығына 80%.

Енді сызықтық программалау есебінің кез келген өзара қосжақты жұбын шығаруды симметриялы түрдегі матрицалық ойынды шығаруға келтіруді қарастырайық.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

квадраттық матрицасында

$$a_{ij} = a_{ji},\ i,j = 1, 2, \dots, n$$

болса, онда $\boldsymbol{A}$ матрицасы *симметриялы*,

$$a_{ij} = -a_{ji},\ i,j = 1, 2, \dots, n$$

болса, яғни егер $\boldsymbol{A}$ матрицасы қарама-қарсы таңбамен өзінің транспонирленген матрицасына, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-T}$ тең болса онда $\boldsymbol{A}$ матрицасы *қиғаш симметриялы* деп аталады.

Осы анықтамадан қиғаш симметриялы матрица квадраттық және оның бас диагоналының барлық элементтері нөлге тең $(i = j)$ болуы қажет.

Егер матрицалық ойынның ұтыс матрицасы қиғаш симметриялы болса, онда матрицалық ойын *симметриялы* деп аталады.

Симметриялы ойындардың қасиеттері

1^0. A ойыншының m таза стратегиялар саны B ойыншының n таза стратегиялар санымен беттеседі: $m = n$;

2^0. A ойыншы мен B ойыншының аралас стратегиялар векторының өлшемділігі бірдей;

3^0. A ойыншының S_A аралас стратегиялар жиыны B ойыншының S_B аралас стратегиялар жиынымен беттеседі;

4^0. Симметриялы ұтыс матрицасы ақиқат, яғни оның құны $V = 0$;

5^0. A ойыншының S_A^O тиімді аралас стратегиялар жиыны B ойыншының S_B^O тиімді аралас стратегиялар жиынымен беттеседі:

$$S_A^O = S_B^O.$$

Теорема 1.16. Сызықтық программалаудың

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m, \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n \qquad (1.53)$$

шектеулерінде $max \sum_{j=1}^{m} c_j\, x_j$ мәнін табу керек

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\,, \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, m \qquad (1.54)$$

шектеулерінде $\max \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$ мәнін табу керек.

Өзара қосжақты есебінің жұбы

$$D = \begin{pmatrix} O_{m\times m} & (-A^T)_{m\times n} & (C^T)_{m\times 1} \\ A_{n\times m} & O_{n\times n} & (-B)_{n\times 1} \\ (-C)_{1\times m} & (B^T)_{1\times n} & O_{1\times 1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{11} & \dots & -a_{n1} & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{1m} & \dots & -a_{nm} & c_m \\ a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & 0 & \dots & 0 & -b_n \\ -c_1 & \dots & -c_m & b_1 & \dots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

матрицасымен берілген симметриялы матрицалық ойынның шешімімен пара-пар, мұндағы $O_{k\times k}$ – k-ретті нөлдік матрица (барлық элементтері 0-ге тең), $k = 1, n, m$;

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ және } B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ - сәйкес}$$

(1.53) есебіндегі шектеулер жүйесінің белгісіздер коэффициенттерінің матрицасы мен бос мүшелердің вектор-бағаны;

$C_{1\times m} = (c_1, c_2, \dots, c_{1m})$ (1.53) есебіндегі мақсат функциясының белгісіздер коэффициенттерінің вектор-жолы;

A^T, B^T, C^T - транспонирленген матрицалар.

Дәлірек айтқанда, егер

$$F^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0, q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0, \lambda^0) \tag{1.55}$$

D матрицасымен берілген ойындағы кез келген ойыншының тиімді стратегиясы және $\lambda^0 > 0$ болса, онда

$$x^0 = \left({p_1^0}/{\lambda^0}, {p_2^0}/{\lambda^0}, \dots, {p_m^0}/{\lambda^0}\right)$$

- (1.53) есебінің тиімді шешімі, ал

$$y^0 = \left({q_1^0}/{\lambda^0}, {q_2^0}/{\lambda^0}, \dots, {q_n^0}/{\lambda^0}\right)$$

- (1.54) есебінің тиімді шешімі.

Керісінше, егер $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ (1.53) есебінің тиімді шешімі, ал $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ (1.54) есебінің тиімді шешімі болса, онда

$$F^0 = (\lambda^0 x_1^0, \lambda^0 x_2^0, \dots, \lambda^0 x_m^0, \lambda^0 y_1^0, \lambda^0 y_2^0, \dots, \lambda^0 y_n^0, \lambda^0), \tag{1.56}$$

D матрицасымен берілген ойындағы кез келген ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады, мұндағы

$$\lambda^0 = \left(1 + \sum_{j=1}^m x_j^0 + \sum_{i=1}^n y_i^0\right)^{-1} \tag{1.57}$$

Сонымен, сызықтық программалаудың өзара қосжақты (1.53) және (1.54) есептерінің жұбының тиімді шешімі болуы үшін

D матрицасымен берілген ойында $\lambda^0 > 0$ болатын (1.55) тиімді стратегиясының бар болуы қажетті және жеткілікті.

1.18- мысал

Қандай да бір өнеркәсіп екі түрлі технологиялық тәсілмен үш түрлі өнім шығарады. i-ші технологиялық тәсілмен шығарылған j-ші түрлі өнімнің саны келесі мәндермен беріледі:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Өнімді өндіру тапсырмасы: $c = (1, 6, 9)$ бір өнімділікті технологиялық тәсілдермен шығаруға байланысты шығындар: $b = (10, 6)$.

Шығарылуы. Келесі сызықтық программалау есептерін аламыз:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ 3y_1 + y_2 \geq 9 \end{cases} \tag{1.58}$$

шектеулер жүйесінде, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ теріс еместік шартында $Z = 10y_1 + 6y_2 \to min$ мәнін табу керек.

(1.58) есебіне қосжақты есеп құрамыз: $=$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ \;\; x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases} \tag{1.59}$$

шектеулер жүйесінде $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ теріс еместік шартында $F = x_1 + 6x_2 + 9x_3 \to max$ мәнін табу керек.

Өзара қосжақты (1.58) және (1.59) есептер жұбының шешімі D матрицасымен (1.54) берілген матрицалық ойынды шығарумен пара-пар. Берілген есепте D матрицасының түрі:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & -9 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.60)$$

Өзара қосжақты (1.58) және (1.59) есептерді шығара отырып олардың тиімді шешімдерін табамыз: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ және $y_1 = \frac{21}{8}$, $y_2 = \frac{9}{8}$ немесе $X = (0, 1, 3)$, $Y = \left(\frac{21}{8}, \frac{9}{8}\right)$. Сонда (1.57) формула бойынша

$$\lambda = (1 + x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 0 + 1 + 3 + \frac{21}{8} + \frac{9}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{35}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{35}$$

және (1.38) формула бойынша

$$F = \left(\frac{4}{35} \cdot 0, \frac{4}{35} \cdot 1, \frac{4}{35} \cdot 3, \frac{4}{35} \cdot \frac{21}{8}, \frac{4}{35} \cdot \frac{9}{8}, \frac{4}{35}\right) = \left(0, \frac{4}{35}, \frac{12}{35}, \frac{3}{10}, \frac{9}{70}, \frac{4}{35}\right).$$

(1.60) матрицасымен берілген ойындағы кез келген ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

Бақылау сұрақтары және тапсырмалар

1. Ойындардың жіктелуі.

2. Тактика, стратегия, тиімді стратегиялар ұғымы.

3. Ойынның төменгі құны, жоғарғы құны.

4. Таза стратегиялардағы ойын құнының бар болу критерийі.

5. Ойындар теориясының негізгі теоремасы – Нейман теоремасы.

6. Белсенді стратегиялар туралы теорема.

7. Ойынды редуциялау тәсілдері.

8. 2x2 ойынының аналитикалық, геометриялық шығарылуы.

9. Қиғаш симметриялы матрицаның, симметриялы ойынның анықтамасын беріңіз. Симметриялы матрицаның қасиеттері.

10. Сызықтық программалаудың қосжақты есептер жұбына пара-пар симметриялы ойынның матрицасының құрылымы.

11-15 Есептердегі ұтыс матрицаларымен берілген ойындардың таза стратегиялардағы

а) төменгі және жоғарғы құндарын анықтаңыздар;

ә) ер нүктесінің бар жоғын анықтаңыздар;

б) егер ойынның ер нүктесі бар болса, ойыншылардың тиімді стратегиясын анықтаңыздар;

в) егер ойынның ер нүктесі бар болса, онда ойынның құнын анықтаңыздар.

$$11.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 112 & 4 & 5 & 56 \\ 22 & 44 & 67 & 121 \\ 523 & 22 & 16 & 14 \\ 478 & 121 & 75 & 748 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$12.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$13.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$14.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 14 & 17 & 20 & 23 & 26 & 29 \\ 19 & 19 & 22 & 25 & 28 & 31 \\ 13 & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 \\ 10 & 14 & 18 & 15 & 12 & 22 \\ 25 & 18 & 15 & 15 & 18 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$15.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 12 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

16-20 есептерде ойын $n \times m$ – өлшемді ұтыс матрицасымен берілген және ойыншылардың сәйкес P және Q аралас стратегиялары берілсін:

а) A ойыншының (P^0, Q^0), $\left(P^0, B_j\right)$ (j-баған нөмірі) жағдайындағы ұтысын;

ә) A ойыншының P^0 аралас стратегиясының тиімділік көрсеткішін;

б) B ойыншының (A_i, Q^0) (i-жол нөмірі) жағдайындағы ұтылысын;

в) B ойыншының Q^0 аралас стратегиясының тиімді емес көрсеткішін анықтау керек.

16. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 4 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$,

$P = (0{,}2; 0{,}3; 0{,}5)$, $Q = (0{,}5; 0{,}3; 0{,}2)$.

17. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1/5 & 1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 1/5 & 0{,}8 \\ 2 & 1/4 & 1/3 & 1/7 \end{pmatrix}$**,**

$P = (0{,}9; 0{,}1; 0)$, $Q = (0{,}4; 0{,}4; 0{,}2; 0)$.

18. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$**,**

$P = (0{,}8; 0{,}1; 0{,}1)$, $Q = (0{,}1; 0{,}7; 0{,}2; 0; 0)$.

19. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 3/4 & 4/5 & 5/6 \\ 2/5 & 4/5 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$**,**

$P = (0{,}3; 0{,}7)$, $Q = (0{,}2; 0{,}2; 0{,}2; 0{,}2; 0{,}2)$.

20. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 95 & 5 \\ 20 & 20 & 85 & 15 \\ 30 & 40 & 75 & 25 \\ 40 & 60 & 65 & 35 \\ 50 & 80 & 55 & 45 \end{pmatrix}$**,**

$P^0 = (0{,}4; 0;\ 0{,}2; 0; 0{,}4)$, $Q^0 = \left(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

21-25 есептерде ойын $n \times m$ – өлшемді ұтыс матрицасымен берілген. Ойыншылардың доминацияланбайтын және дубльденетін стратегияларын жазбай тастап кетіп, ойын матрицасын редуцияланыз.

$$21.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & -10 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$22.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$23.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 5 & 11 & 2 & 5 \\ -1 & -10 & 8 & -1 & -10 \\ 8 & -13 & 20 & 11 & -13 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$24.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & -1 \\ -7 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -5 & -7 \\ -5 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$25.\ \boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Белсенді стратегиялар теормасын пайдаланып **26-30** есептерде берілген матрицалық ойындардың аралас стратегиялардағы құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

26. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

31-35 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін геометриялық әдіспен табу керек.

31. $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

32. $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

33. $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

34. $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

35. $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

36-40 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын геометриялық әдіспен табу керек.

36. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

39. $\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

41-45 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойындарды сызықтық программалау есептеріне келтіріп ойынның шешімін табу керек.

41. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 12 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

42. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

43. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 17 & 4 & 9 \\ 14 & 11 & 10 \\ 9 & 2 & 15 \end{pmatrix}$.

44. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 & 10 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 7 & 11 \\ 7 & 11 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$.

45. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 12 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 7 & 13 \\ 8 & 1 & 7 & 10 & 4 \\ 5 & 11 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

46-50 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, A ойыншының тиімді стратегиясын геометриялық әдіспен, таза стратегиядағы ойынның төменгі және жоғарғы құндарын табу керек.

46. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

47. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

48. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

49. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

50. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

51-55 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, B ойыншының тиімді стратегиясын геометриялық әдіспен, таза стратегиядағы ойынның төменгі және жоғарғы құндарын табу керек.

51. $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

52. $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \\ 7 & -4 \\ 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & -4 \\ -2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

55. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

2-ТАРАУ. ПОЗИЦИЯЛЫҚ ОЙЫНДАР

2.1 Ойындардың позициялық және қалыпты формалары

Кез келген ойынды зерттеу мақсатына тәуелді ойындарды *позициялық* немесе *қалыпты* формада қарастыруға болады. Қалыпты формадағы ойындарды біз қарастырдық, ол :

1) I ойыншылардың (k ойыншылар өздерінің нөмірлерімен берілді деп есептеуге болады, яғни $I = \{1, 2, \dots, k\}$) жиынымен беріледі;

2) әрбір $i \in I$ ойыншы үшін мүмкін болатын $\{x_i\}$ стратегиясы беріледі;

3) әрбір жағдай (яғни, ойыншылардың бірге таңдаған өздерінің стратегиялары: x_1 - бірінші ойыншы, x_2 - екінші ойыншы, ..., x_k - k-шы ойыншы) үшін $F_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$ - бірінші, $F_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$ - екінші, ..., $F_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ - k-шы ойыншылардың ұтыстары, яғни ұтыс функциялары беріледі.

Сонымен, әрбір i-ші ойыншы өзінің U_i стратегиялар жиынынан өзінің бір u_i стратегиясын таңдайды. Нәтижесінде ойынды анықтайтын $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ жағдайы алынады, яғни $J_i(u_1) = J_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ұтысы алынады.

Сонымен,

$$\Gamma = \langle U_1, U_2, \dots, U_n; J_1, J_2, \dots, J_n \rangle$$

$2n$ элементтің жиынтығы *ойынның қалыпты формасы* деп аталады.

Қалыпты формада берілген ойын партиясы – ойыншылардың бір мезгілде өздерінің стратегияларын таңдаудан тұрады. Соған қарамастан, көп жағдайда ойыншылар стратегияларын біртіндеп таңдайды. Осындай ойындар *позициялық ойындар* деп аталады. Позициялық формада оқиғалар тізбегі жақсырақ ашылады және ол көрнекті болып келеді.

Позициялық ойындар – бұл ойыншылар уақыт бойынша өзгеріп отыратын жағдайда шешімді біртіндеп қабылдау үрдісін модельдейтін коалициясыз ойын.

Ойынның өзінің үрдісі не ойынның ережелеріне сәйкес мүмкін болатын әрекеттерді таңдау жолымен, не кездейсоқ түрде (кездейсоқ жүріс) ойынның бір күйінен екінші күйіне біртіндеп өту жолымен жүзеге асырылады.

Позициялық ойындарға мысал ретінде крестик-нолик, шашка, шахмат, карта ойындары, домино және т.б. ойындарды жатқызуға болады. Бұл ойындарда бірінші жүрісті таңдау көбінесе кездейсоқ түрде анықталады.

Ойынның жағдайын *позиция* деп атау қабылданған (осыдан позициялық ойын деген атау алынды), ал әрбір позициядағы мүмкін болатын таңдаулар – *балама* деп аталады.

Ойыншы орналасқан және орналаса алатын позициялар жиыны *ақпараттық жиын* деп аталады.

Ойын бұтағының анықтамасын беру үшін графтар теориясынан келесі ұғымдарды қарастырайық.

X - қандай да бір ақырлы жиын болсын. Әрбір $x \in X$ элементін $g(x) \in X$ элементіне сәйкес қоятын g ережесі X-ті X-ке *бірмәнді бейнелеу* немесе X-те анықталған және X-те мәнді қабылдайтын функция деп аталады.

G - X-ті X-ке бейнелеу болсын.

Егер X - қандай да бір ақырлы жиын (төбелердің ақырлы жиыны), ал G - X-ті X-ке бейнелеу болса, онда (X, G) - жұбы *граф* деп аталады.

Цикл - бұл бір төбеден шығып сол төбеде аяқталатын ақырлы тізбек. Егер графтың кез келген екі төбесін тізбекпен байланыстыруға болса, онда граф *байланысқан* деп аталады.

Кем дегенде екі төбесі бар циклсыз байланысқан граф *бұтақ* немесе *бұтақ тәріздес граф* деп аталады.

Позициялар жиынын бұтақ тәріздес реттелген жиынмен беру мүмкіндігі позициялық ойынның сипаттық ерекшелігі болып табылады.

2.2 Позициялық ойынның құрылымы

а) 0 *бастапқы нүктесі*;

ә) бір төбеден шығатын қабырғалар, олар *балама* деп аталады және нөмірленеді;

б) кем дегенде бір баламасы бар төбелер, олар *аралық* позициялар деп аталады, ал қалған төбелері – *соңғы* деп аталады;

в) әрбір соңғы позицияға берілген позициядағы ойыншылардың ұтысы сәйкес қойылады;

г) барлық аралық төбелер (бұтақ басы да кіреді) жиыны *кезектілік жиындары* деп аталатын I_0, I_1, …, I_n - $n+1$ (n - ойыншылар саны) жиынға бөлінеді; J_i жиынына i, $i = 1, 2, \dots, n$ ойыншы кіреді, I_0 - жағдайдың жүріс кезегі, әрбір позиция үшін I_0 - ден баламаны таңдау ықтималдығы көрсетіледі.

д) I_1, …, I_n жиынының әрқайсысы өз кезегінде *ақпараттық жиындар* деп аталатын I_i^k ішкі жиынға бөлінеді; бұл жерде бір ақпараттық жиындағы позициялардың бірдей баламасы болады;

е) бұтақ басынан кез келген соңғы позицияға дейінгі циклдық емес жол *партия* деп аталады; әрбір партияның әрбір ақпараттық жиында бірден артық емес төбесі болады.

Ақпараттық жиынның мағынасы мынада: ойыншы өзінің қандай ақпараттық жиында екенін біледі, бірақ қандай позицияда (егер, әрине ол бірнеше позициядан тұрса) екенін білмейді. Бұл – ойыншы алдыңғы жүрістің нәтижесін білмейтінін көрсетеді.

2.3 Толық ақпаратты позициялық ойын

Позициялық ойындар толық ақпаратты және толық емес ақпаратты деп екіге бөлінеді.

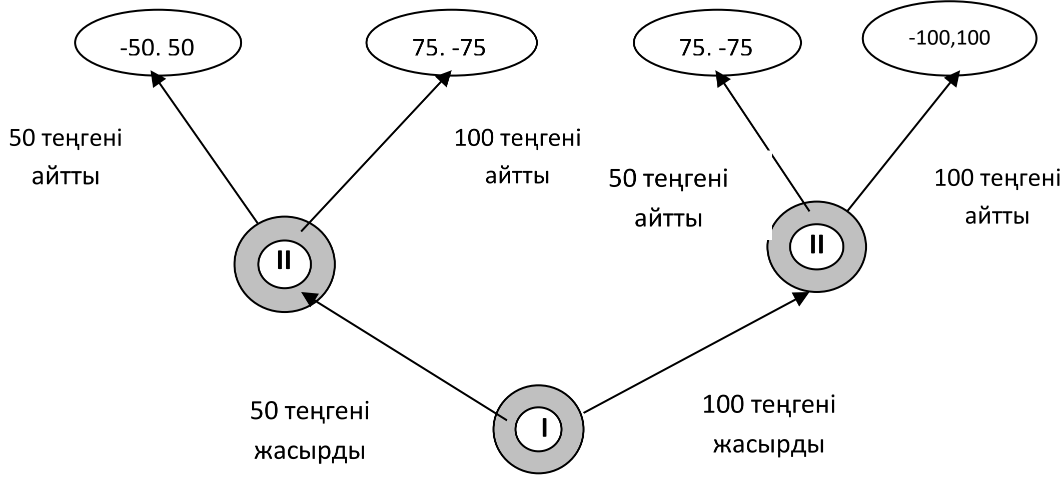
Егер ойыншының әрбір ақпараттық жиыны бұтақтың тек қана бір төбесін қамтыса, онда бұл *толық ақпаратты ойыншы* деп аталады. Егер ойында әрбір ойыншының толық ақпараты бар болса, онда ойынды *толық ақпаратты ойын* деп айтады. Сонымен толық ақпаратты ойында әрбір ойыншы өзінің жүрісінде ол бұтақтың қандай позициясында екенін біледі. Шахмат, шашка ойындары және «крестик-нолик» ойындары – толық ақпаратты ойындарға жатады.

2.1-мысал.

«*Теңгені болжап анықтау*» ойынын қарастырайық.

Бұл жерде екінші ойыншы бірінші ойыншының жасырған теңгесін астыртын қарауға мүмкіндігі бар болсын. Ойын бұтағын тұрғызу керек. Ойынды талдап, құнын анықтау керек.

Шығарылуы. Осы ойынның бұтағы 8.1-суретте келтірілген.



2.1-сурет. Толық ақпаратты «Теңгені болжап анықтау» позициялық ойынының бұтағы

2.1-суретте сұр түспен ойыншылардың ақпараттық жиыны боялған.

Бірінші ойыншының стратегиясы:

$x_1^1 =$ «50 теңгені жасыру», $x_1^2 =$«100 теңгені жасыру».

Екінші ойыншының стратегиясын $[y_1, y_2]$ балама жұбы түрінде берген қолайлы, мұндағы

$y_1, y_2 \in \{x_2^1 =$ «50 теңгені айтады», $x_2^2 =$«100 теңгені айтады»$\}$.

Осы баламалардың біріншісі y_1 бірінші ойыншы екінші ойыншының бірінші баламасын таңдаған жағдайдағы оның таңдауына, ал екінші балама y_2 - бірінші ойыншы екінші ойыншының екінші баламасын таңдаған жағдайдағы оның таңдауына сәйкес келеді.

Екінші ойыншының төрт таза стратегиясы бар екенін көруге болады:

$$[x_2^1, x_2^1],\ [x_2^1, x_2^2],\ [x_2^2, x_2^1],\ [x_2^2, x_2^2].$$

Ойыншылардың ұтыстарын матрицаға жазайық:

$$\begin{pmatrix} -50 & -50 & 75 & 75 \\ 75 & -100 & 75 & -100 \end{pmatrix}.$$

Бұл матрицаның жолдары бірінші ойыншының өзінің x_1^1 және x_1^2 стратегияларын таңдауға, ал бағандары - екінші ойыншының өзінің $[x_2^1, x_2^1]$, $[x_2^1, x_2^2]$, $[x_2^2, x_2^1]$, $[x_2^2, x_2^2]$ стратегияларын таңдауға сәйкес келеді. Матрицаның элементтері бірінші ойыншының сәйкес ұтыстарына (бұл ойында екінші ойыншының ұтысы бірінші ойыншының ұтысына қарама-қарсы) тең.

Мысалы, егер бірінші ойыншы $x_1^1 =$ «50 теңгені жасыру» стратегиясын, екінші ойыншы $[x_2^1, x_2^1]$ стратегиясын таңдаған жағдайда матрицаның сол жақ жоғарғы ұяшығында бірінші ойыншының ұтысы орналасады, яғни, бірінші ойыншы қандай баламаны таңдаса да, екінші ойыншы 50 теңгені айтады. Сонымен, бірінші ойыншы 50 теңгені жасырды, екінші ойыншы 50 теңгені айтты, демек бірінші ойыншының ұтысы -50 теңге. Қалған жағдайлардағы ұтыс та осылайша анықталады.

Берілген матрицалық ойынның ер нүктесі бар, ол -50-ге тең, және ұтыс матрицасының бірінші жолымен екінші бағанына сәйкес келеді, яғни, бірінші ойыншы $x_1^1 =$«50 теңгені жасыру», ал екінші ойыншы $[x_2^1, x_2^2]$ стратегиясын таңдайды, немесе, егер бірінші ойыншы 50 теңгені жасырған жағдайда 50 теңгені айтса, және бірінші ойыншы 100 теңгені жасырған жағдайда 100 теңгені айтқан жағдайда ойынның ер нүктесі бар.

Жауабы. Ойынның ер нүктесі бар, $v = 50$.

Осы қарастырылған мысалдың негізінде келесі теореманы дәлелдеуге болады.

Теорема 2.1. Толық ақпаратты кез келген позициялық ойын таза стратегияларда ер нүктесі бар қандай да бір матрицалық ойынға пара-пар.

2.4 Толық емес ақпаратты позициялық ойын

Толық емес ақпаратты ойындарда жүретін ойыншы бұтақтың қандай позициясында екенін білмейді. Ойыншыға тек қана ақпараттық жиын – өзі тұрған позиция ғана емес, сонымен қатар өзі болуы мүмкін позицияларды қамтитын позициялардың кейбір жиындары белгілі болады.

Мұндай ойындарға домино ойыны, кейбір карта ойындары жатады.

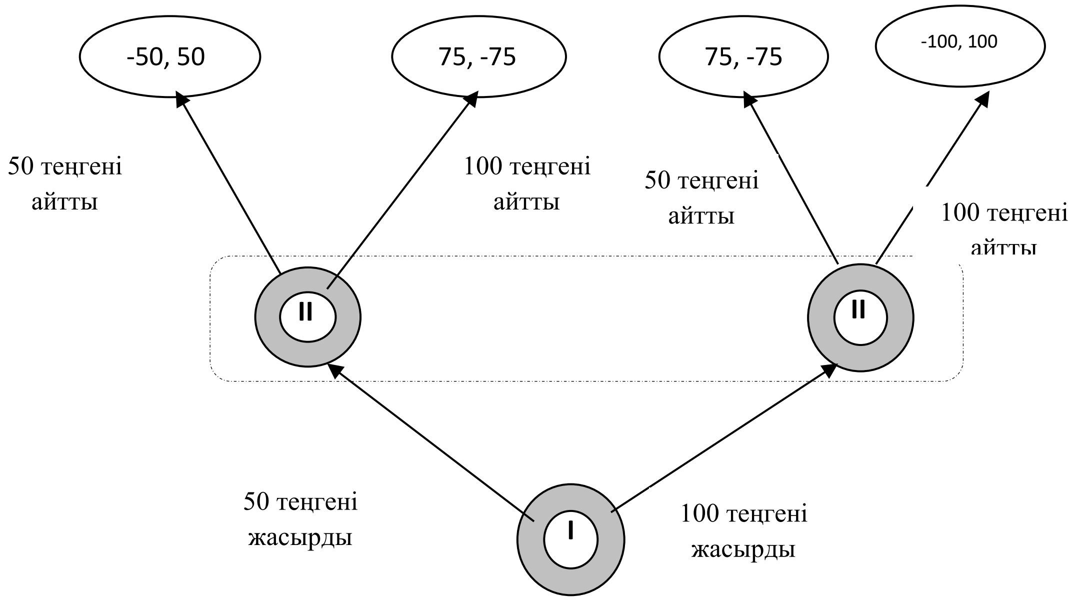
2.2-мысал.

«*Теңгені болжап анықтау*» ойынын қарастырайық.

Бұл жерде екінші ойыншы бірінші ойыншының қандай теңгені жасырғанын білмейді. Ойын бұтағын тұрғызу керек. Ойынды талдап, құнын анықтау керек.

Шығарылуы. Осы ойынның бұтағы 2.2-суретте келтірілген.

Осындай жағдайдағы ойыншының ақпараттық жиыны пунктирмен белгіленген.



2.2-сурет. Толық емес ақпаратты «Теңгені болжап табу» позициялық ойынының бұтағы

Біз толық емес ақпаратты позициялық ойын алдық. Екінші ойыншыға өзінің жүрісінде ақпараттық жиын белгілі, бірақ, ақпараттық жиындардағы өзі орналасқан накты позиция белгісіз (2.2-суретте сол жағы немесе оң жағы).

Бұл жағдайда бірінші ойыншының екі стратегиясы бар:

$x_1^1 =$ «50 теңгені жасыру», $x_1^2 =$ «100 теңгені жасыру».

Екінші ойыншыға бірінші ойыншының таңдауы белгісіз болғандықтан, екінші ойыншыда да екі стратегия бар:

$x_2^1 =$ «50 теңгені айтады», $x_2^2 =$ «100 теңгені айтады».

Бұл жағдайдағы ойынның ұтыс матрицасы:

$$\begin{pmatrix} -50 & 75 \\ 75 & -100 \end{pmatrix}.$$

ойынның төменгі құны:

$$\underline{v} = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = \max\{-50, -100\} = -50,$$

ойынның жоғарғы құны:

$$\overline{v} = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} a_{ij} = \max\{75, 75\} = 75,$$

яғни, $\overline{v} \neq \underline{v}$, және берілген матрицаның таза стратегияларда ер нүктесі жоқ. Енді ойынның аралас стратегиядағы шешімін іздейік.

Бірінші ойыншы өзінің бірінші стратегиясын $p \in [0, 1]$ ықтималдығымен, екінші стратегиясын $(1 - p)$ ықтималдығымен таңдайды, яғни, бірінші ойыншы $P = (p, 1 - p)$ аралас стратегиясымен ойнайды.

Егер екінші ойыншы өзінің j-ші стратегиясын таңдағандағы оның күтілетін ұтысын, яғни ұтыстың математикалық күтуін $v_j(p)$ арқылы белгілесек, онда

$$v_1(p) = -50p + 75(1 - p),$$

$$v_2(p) = 75p - 100(1 - p).$$

Екінші ойыншы бірінші ойыншының ұтысы минималды болатындай өзінің стратегияларын таңдайды:

$$v(p) = \min\{v_1(p), v_2(p)\}.$$

Басқаша айтқанда, екінші ойыншы кез келген жағдайда бірінші ойыншыны мүмкіндігінше аз ұтысқа жетуге мәжбүр етеді, яғни қарастырылып отырған ойында $p \leq p^*$ (p^* - $v(p)$ функциясының максимум мәні) болған кезде екінші ойыншы өзінің екінші стратегиясын таңдайды және бірінші ойыншы $v_2(p)$ ұтады, $p \geq p^*$ болған кезде екінші ойыншы бірінші стратегияны таңдайды және бірінші ойыншы $v_1(p)$ ұтады. Бірінші ойыншы үшін тиімді таңдау $v = \max\limits_{p\in[0,1]} v(p)$ шамасына сәйкес келеді, яғни $p = p^*$, бұл жерде ойынның құны v мәніне тең.

$$v_1(p) = v_2(p):$$

$$-50p + 75(1-p) = 75p - 100(1-p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -50p + 75 - 75p = 75p - 100 + 100p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -125p + 75 = 175p - 100 \Rightarrow 300p = 175 \Rightarrow p = \frac{175}{300}$$

$p = \frac{7}{12}$ немесе $p^* = \frac{7}{12}$.

Сонымен, $p^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$ және ойынның құны

$$v = v_1\left(\frac{7}{12}\right) = v_2\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{25}{12},$$

яғни екінші ойыншының қандай стратегия таңдағанына тәуелсіз бірінші ойыншы көп партияда бір партия үшін $\frac{25}{12}$ орташа ұтысқа жетеді.

Осылайша, екінші ойыншының тиімді аралас стратегиясын табамыз. Ол бірінші стратегиясын $q \in [0, 1]$ ықтималдығымен, екінші стратегиясын $(1 - q)$ ықтималдығымен таңдайды, яғни екінші ойыншы $q = (q, 1 - q)$ аралас стратегиясымен ойнайды.

Егер бірінші ойыншы өзінің i-ші стратегиясын таңдағандағы оның күтілетін ұтысын, яғни ұтыстың математикалық күтілуін $\mu_i(q)$ арқылы белгілесек, онда

$$\mu_1(p) = -50q + 75(1 - q),$$

$$\mu_2(p) = 75q - 100(1 - q).$$

$$\mu_1(q) = \mu_2(q): q = \frac{7}{12}, q^* = \frac{7}{12}.$$

$$q^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right).$$

$$v = \mu_1\left(\frac{7}{12}\right) = \mu_2\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{25}{12}.$$

Сондықтан екінші ойыншының тиімді аралас стратегиясы:

$$q^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right).$$

Жауабы: Берілген матрицаның ер нүктесі жоқ, ал тиімді аралас стратегиялары:

$$p^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right), q^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

және ойынның құны

$$v = \frac{25}{12}.$$

2.5 Позициялық ойынды қалыптастыру

Позициялық ойынды ойынның қалыпты түрінде жазу *позициялық ойынды қалыптастыру* деп айтады.

Бұл тақырыпты нақты мысалда қарастырайық.

2.3-мысал.

«*Теңгені болжап анықтау*» ойынын қарастырайық. Осы ойынды қалыпты формада жазу керек.

Шығарылуы.

Бірінші ойыншының стратегиялары:

$x_1^1 =$ «50 теңгені жасыру», $x_1^2 =$«100 теңгені жасыру».

Екінші ойыншының стратегиялары:

$x_2^1 =$«50 теңгені айтады», $x_2^2 =$«100 теңгені айтады».

Ойынның қалыпты формасының анықтамасынан:

$$\Gamma = \langle U_1 = \{x_1^1, x_1^2\}, U_2 = \{x_2^1, x_2^2\},$$

$$F_1(x_1^1, x_2^1) = -50,$$

$$F_1(x_1^1, x_2^2) = F_1(x_1^2, x_2^1) = 75,\ F_1(x_1^2, x_2^2) = -100,$$

$$F_2(x_1^1, x_2^1) = 50,$$

$$F_2(x_1^1, x_2^2) = F_2(x_1^2, x_2^1) = -75,\ F_2(x_1^2, x_2^2) = 100\rangle$$

$$F_1(u_1, u_2) = (-1)^{u_1 + u_2 + 1} \cdot 25 \cdot (u_1 + u_2)$$

заңдылығын байқауға болады, мұндағы u_1, u_2 – сәйкес $\left(x_i^{u_1}, x_j^{u_2}\right)$ стратегиялар жұбының жоғарғы индекстері.

Ойын антагонистикалық болғандықтан,

$$\Gamma = \langle \{1,2\}, \{1,2\}, (-1)^{u_1 + u_2 + 1} \cdot 25 \cdot (u_1 + u_2)\rangle.$$

Ойынның қалыпты формасын кесте түрінде де жазуға болады:

		II	
		1	2
I	1	(-50, 50)	(75, -75)
	2	(75, -75)	(-100, 100)

Осы кестеде артық нәрсе көп:

1) әрбір ұяшықта тек қана бірінші ойыншының ұтысын қалдыруға болады, себебі, екінші ойыншының ұтысы бірінші ойыншының ұтысына қарама-қарсы;

2) стратегиялардың атын жазудың қажеті жоқ: жолдар – бірінші ойыншының стратегиялары, бағандар – екінші ойыншының стратегиялары. Сонда ықшамдалған кестеден матрица аламыз:

$$\begin{pmatrix} -10 & 15 \\ 15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Жауабы: $\Gamma = \langle \{1,2\}, \{1,2\}, (-1)^{u_1+u_2+1} \cdot 25 \cdot (u_1 + u_2) \rangle$.

2.4-мысал. «Крестик-нолик» ойынын 3х3 шаршыда қарастырайық. Үш белгіні (крестикті немесе ноликті) қатар қойған ойыншы ұтады. Ойыншылар кезектесіп жүреді. Ұтқан ойыншы +1 бірлік өлшемінде сый ақы алады, ұтылған ойыншы -1 бірлік бірлігінде айыппұл төлейді. Басқа жағдайда тепе-теңдік болады да, ойыншылар ештеңе алмайды (бермейді). Ойынның бұтағын тұрғызайық.

2.1-кесте.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

а)

х	0	х
0	0	●
0	х	●

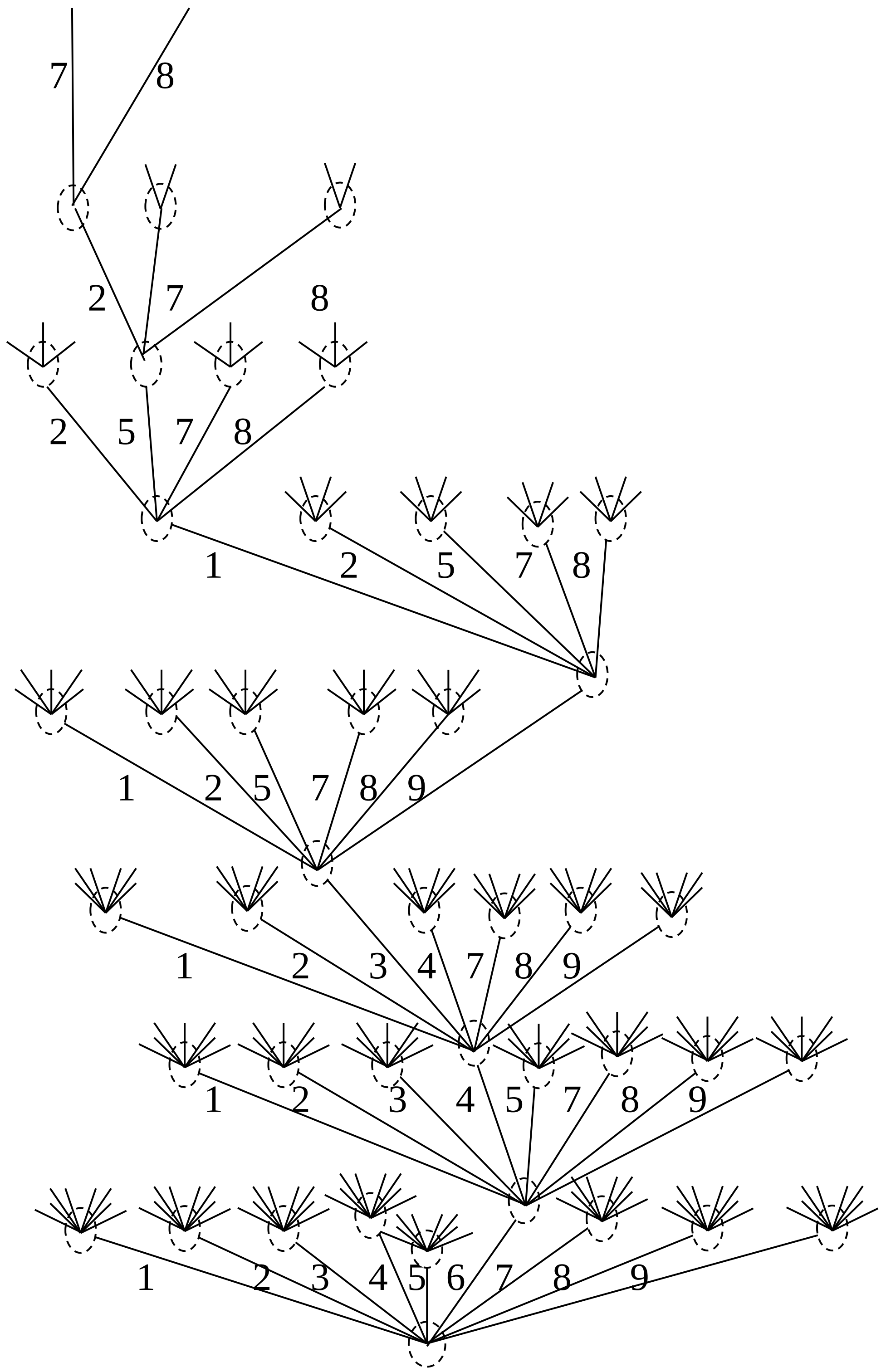
ә)

Шығарылуы.

Торларды нөмірлеу 2.1 а-кестеде көрсетілген. 2.1 ә- кестеде ойынның екі партиясы (жағдайы) келтірілген:

6 – 4 – 3 – 9 – 1 – 5 – 2 – 7;
6 – 4 – 3 – 9 – 1 – 5 – 2 – 8.

Осы ойынның сәйкес жүрістері 2.3-суретте көрсетілген.



2.3 -сурет

2.4-мысалдан стратегиялар саны көп болған жағдайда ойын бұтағын құрудың күрделілігін (мүмкін еместігін) байқауға болады.

Позициялық ойындар *толық ақпаратты* және *толық емес ақпаратты* болып екіге бөлінеді.

Толық ақпаратты позициялық ойында (шашка, шахмат ойындары) әрбір ойыншы өзінің жүрісінде ойын бұтағының қандай позициясында тұрғанын біледі.

Толық емес ақпаратты позициялық ойында (домино, көптеген карта ойындары) ойыншының өзінің жүрісінде өзі тұрған ойын бұтағының позициясы белгілі емес. Ойыншыға тек ақпараттық жиын белгілі болады.

2.5-мысал. Екі ойыншы $\{1, 2\}$ жиынынан сан таңдайды.

1-жүріс. A ойыншы $\{1, 2\}$ екі сандар жиынынан x санын таңдайды.

2-жүріс. B ойыншы $\{1, 2\}$ екі сандар жиынынан A ойыншының таңдаған x санын біле отырып, y санын таңдайды.

B ойыншының есебінен A ойыншының ұтыс функциясы мына түрде берілсін:

$$F(1, 1) = 1; F(1, 2) = -1; F(2, 1) = -2; F(2, 2) = 2.$$

Ойынның бұтағын тұрғызып, ақпараттық жиынды көрсету керек.

Шығарылуы. 2.4-суретте ойынның бұтағы тұрғызылды. Үзілісті сызықтармен ойынның ақпараттық жиыны көрсетілді.

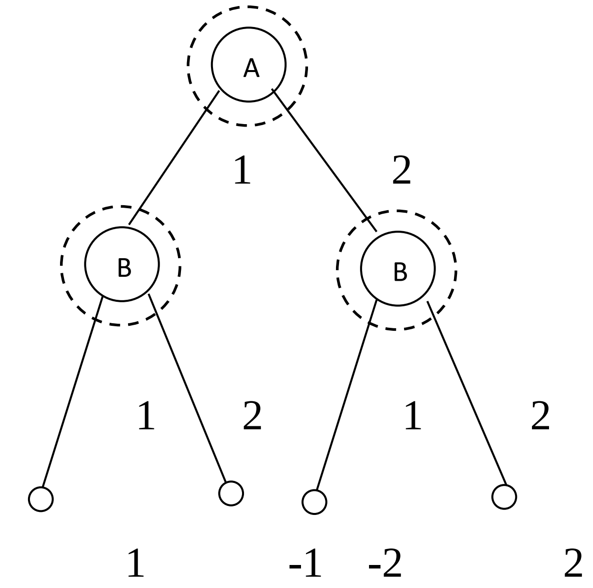
2.6-мысал. Екі ойыншы $\{1, 2\}$ жиынынан сан таңдайды.

1-жүріс. A ойыншы $\{1, 2\}$ екі сандар жиынынан x санын таңдайды.

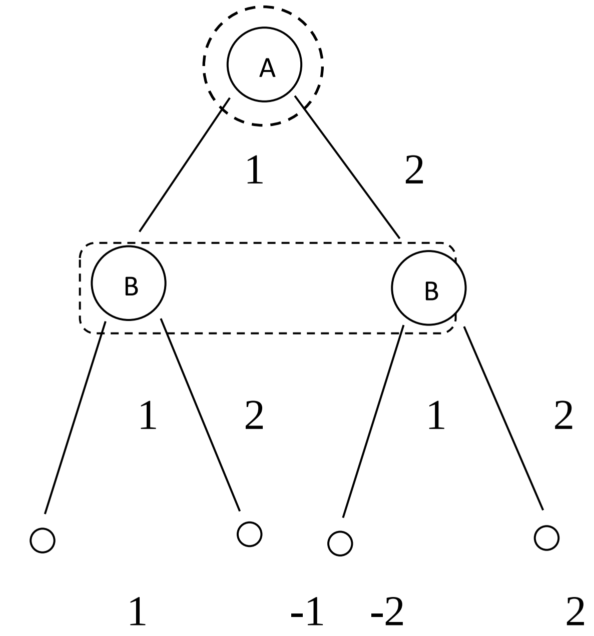
2-жүріс. B ойыншы $\{1, 2\}$ екі сандар жиынынан y санын таңдайды, A ойыншының қандай сан таңдағанын білмейді.

Ойынның бұтағын тұрғызып, ақпараттық жиынды көрсету керек.

Шығарылуы. 2.5-суретте ойынның бұтағы тұрғызылды. Үзілісті сызықтармен ойынның ақпараттық жиыны көрсетілді.



2.4-сурет



2.5-сурет

2.7-мысал. Екі ойыншы $\{1, 2\}$ жиынынан сан таңдайды.

1-жүріс. A ойыншы $\{1, 2\}$ екі сандар жиынынан x санын таңдайды.

2-жүріс. B ойыншы $\{1, 2\}$ екі сандар жиынынан A ойыншының таңдаған x санын біле отырып, y санын таңдайды.

A ойыншының ұтыс функциясы мына түрде берілсін:

$$F(1, 1) = 1; F(1, 2) = -1; F(2, 1) = -2; F(2, 2) = 2.$$

Берілген ойынды қалыпты формада жазу керек.

Шығарылуы. A ойыншыда екі стратегия бар:

A_1 стратегиясы - $x = 1$, A_2 стратегиясы - $x = 2$ сандарын таңдау.

A ойыншының 1-жүрісіндегі таңдауы B ойыншыға белгілі болғандықтан оның стратегиясын реттелген $[y_1, y_2]$ жұбы арқылы сипаттаған қолайлы.

Мұндағы y_1 ($y_1 = 1, 2$) - A ойыншы $x = 1$ бірінші баламасын таңдаған жағдайдағы B ойыншының таңдайтын баламасы, ал y_2 ($y_2 = 1, 2$) - A ойыншы $x =2$ екінші бірінші баламасын таңдаған жағдайдағы B ойыншының таңдайтын баламасы.

Мысалы, B ойыншының $[2, 1]$ стратегиясын таңдағаны егер 1-ші жүрісте A ойыншы $x = 1$ санын таңдаса, онда B ойыншы өзінің жүрісінде $y = 2$ санын таңдау керек екендігін білдіреді. Егер 1-жүрісте A ойыншы $x = 2$ санын таңдаса, онда осы стратегияға сәйкес B ойыншы өзінің жүрісінде $y = 1$ санын таңдау керек.

Сонымен, B ойыншыда 4 стратегия бар:

B_1 стратегиясы – $[1, 1]$, кез келген x-ті таңдауында $y = 1$ санын таңдау;

B_2 стратегиясы – $[1, 2]$, кез келген x-ті таңдауында $y = x$ санын таңдау;

B_3 стратегиясы – $[2, 1]$, кез келген x-ті таңдауында $y \neq x$ санын таңдау;

B_4 стратегиясы – $[2, 2]$, кез келген x-ті таңдауында $y = 2$ санын таңдау.

Енді A ойыншының ұтыстарын есептейік.

Айталық, A ойыншы A_1 стратегиясын (1) таңдасын, ал B ойыншы B_2 стратегиясы – $[1, 2]$ таңдасын. Сонда $x = 1$, ал $[1, 2]$ стратегиясынан $y = 1$ саны таңдалынатыны шығады. Осыдан

$$F(x; y) = F(1; 1) = 1.$$

Осылайша A ойыншының басқа ұтыстары есептелінеді.

Нәтижесінде төмендегі кестеде көрсетілген мәндерді аламыз:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$[1, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 1]$	$[2, 2]$
A_1	$x = 1$	$F(1; 1)$	$F(1; 1)$	$F(1; 2)$	$F(1; 2)$
A_2	$x = 2$	$F(2; 1)$	$F(2; 2)$	$F(2; 1)$	$F(2; 2)$

немесе матрица түрінде: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, мұндағы, жолдар A ойыншының стратегияларына, бағандар B ойыншының стратегияларына сәйкес келеді.

Алынған матрицаның ер нүктесі бар. Тиімді стратегия: A_1 - $x = 1$, B_3 - $[2, 1]$. Ойынның құны: $v = -1$.

Жауабы. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Бақылау сұрақтары және тапсырмалар

1. Ойынның қалыпты формасының ұғымы.
2. Позициялық ойындар деп қандай ойындарды айтамыз?
3. Позициялық ойындарға мысалдар келтіріңіз.
4. Ақпараттық жиын дегеніміз не?
5. Граф ұғымын түсіндіріңіз.
6. Позициялық ойындардың элементтері.
7. Позициялық ойындардың түрлері. Мысалдар келтіріңіз. Айырмашылықтарын атап айтыңыз.
8. Толық ақпаратты позициялық ойын.
9. Толық емес ақпаратты позициялық ойын.
10. Позициялық ойынды ойынның қалыпты түрінде жазуды мысал арқылы түсіндіріңіз.

11-13 есептерде келтірілген ойындардың бұтағын тұрғызу керек. Ойынның таза стратегиялардағы(бпр болса) немесе аралас стратегиялардағы шешімін табу керек. Ойынды қалыпты формада жазыңыз.

11. Екі жасөспірім өздерінің қалаулары бойынша 0, 1 немесе 2 кәмпитті жасырады. Олардың әрқайсысы өздері жасырған кәмпиттердің сандарын табуға тырысады. Әйтсе де, екінші табатын жасөспірімюірінші жасөспірімнің айтқанынан басқа санды айту керек. Дұрыс тапқан жасөспірім екіншісінен бір кәмпитті алады, кері жағдайда ештеңе алмайды.

12. 1, 2, 3, 4 және 5 сандарының бірі таңдалынады. Осы таңдалынған сан үшін ойыншылар жоғарғы шекарасын жорамалдап айту керек.

13. Екі ойыншы кезектесіп тиынды тастайды. Тиынның екі жағы түсуі мүмкін: «Ц»-цифр, «Г»-герб. 1-ші және 3-ші қадамдарда бірінші ойыншы, 2-ші және 4-ші қадамдарда екінші ойыншы жүреді. Әрбір гербке ойыншы 50 ұпайдан, ал цифрға 25 балдан ұпай жинай алады. Егер бір ойыншы ғана тапса, онда ол қарсыласынан бір бірлік алады. Егер екеуі де тапса, онда кімнің жоғарғы шекарасы қатаң кіші, сол ойыншы қарсыласынан бір бірлік алады. Басқа жағдайлардың бәрінде ойыншылардың бір дебіреуі ештеңе алмайды.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ф.Р. Гусманова. Амалдарды зерттеудің негіздері. Оқулық. Алматы, 2011.

2. Ф.Р. Гусманова. Оңтайландыру әдістері. Оқу құралы. Алматы, 2007.

3. Н.Ш.Кремер. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2006.

4. Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. Москва, 2001.

5. Н.Л. Леонова. Задачи линейного программирования и методы их решения. Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург, 2017.

6. Л.А. Петросян, Н.А. Зенкович, Е.А. Семина. Теория игр. Москва, 1998.

7. И.Д. Протасов. Теория игр и исследование операций. Москва, 2003.

Мазмұны

КІРІСПЕ 3
1-тарау Антагонистикалық ойындар 4
1.1 Ойындар теориясының негізгі ұғымдары 4
1.2 Ойындарды жіктеу 7
1.3 Матрицалық ойындар 9
1.4 Максимин, минимакс принциптері 11
1.5 Аралас стратегиялар 18
1.6 Аралас стратегиялардағы ұтыстар 20
1.7 Редуциялау тәсілі 26
1.8 Матрицалық 2×2 ойындарын шешудің элементарлық әдістері 31
1.8.1 Матрицалық 2×2 ойынының аналитикалық шығарылуы 31
1.8.2 Матрицалық 2×2 ойынының геометриялық шешімі 34
1.9 Матрицалық $2 \times n$ ойындардың геометриялық шешімі 44
1.10 Матрицалық $m \times 2$ ойындардың геометриялық шешімі 59
1.11 Матрицалық ойын мен сызықтық программалау септерінің арасындағы өзара байланыс 68
Бақылау сұрақтары және тапсырмалар 80
2-тарау Позициялық ойындар 87
2.1 Ойындардың позициялық және қалыпты формалары 87
2.2 Позициялық ойынның құрылымы 89
2.3 Толық ақпаратты позициялық ойын 89
2.4 Толық емес ақпаратты позициялық ойын 92
2.5 Позициялық ойынды қалыптастыру 96
Бақылау сұрақтары және тапсырмалар 102
Пайдаланылған әдебиеттер 103

М.А. Бектемесов,
Ф.Р. Гусманова,
М.А. Скиба

Ойындар теориясы

Оқу құралы

Басуға 26.04.2021 ж. қол қойылды. Пішімі 60x90$^{1}/_{16}$.
Офсеттік басылыс. Қаріп түрі «Times». Көлемі 6,75 б.т.
Таралымы 500 дана. Тапсырыс № 291020-03.

Тапсырыс берушінің дайын файлдарынан басылып шықты.