Гүлжан Абдуахитова

КӨП ӨЛШЕМДІ КОМПЛЕКСТІ ТАЛДАУ

Алматы 2014

Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультетінің Ғылыми кеңесі мен Редакцияның баспа кеңесі шешімімен ұсынылған.

Пікір жазғандар:

1. Тунгатаров А.Б. - физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;
2. Қалимолдаев М.Н. - Информатика проблемалары және басқару институтының директоры, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;
3. Қошанов Б.Д. - физика-математика ғылымдарының докторы.

Абдуахитова Г.Е.-к.ф-м.н., доцент; Көп өлшемді комплексті талдау.-Алматы: Қазақ университеті, 2014ж. - 112бет.

Оқу құралында бір комплекс айнымалыдан тәуелді аналитикалық функциялардың классикалық теориясын негізге ала отырып, көп айнымалыдан тәуелді комплексті талдау қарастырылады. Бұл пән көп айнымалыдан тәуелді голоморфты функциялар теориясын және комплексті көпбейнелілік теориясының голоморфты бейнелеулерін зерттеуге, сонымен қатар комплекс сандар өрісіндегі көп айнымалы шамалардың фундаментальды әдістерімен таныстыруға арналған.

Алғы сөз

«Көп өлшемді комплексті талдау» оқу әдістемелік құралы математика мамандығының студенттеріне және магистранттарына арналған. Бұл әдістемелік оқу құралында көп комплекс айнымалыдан тәуелді функциялар теориясы қысқаша баяндалған. «Көп өлшемді комплексті талдау» оқу құралының жазылу мақсаты - студенттер мен магистранттарды көп айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясының негізгі элементтерімен таныстыру.

Оқу құралында көп комплекс айнымалыдан тәуелді аналитикалық функциялар теориясымен және көпөлшемді евклид кеңістіктеріндегі конформды бейнелеумен, үшөлшемді евклид кеңістігіндегі Коши-Риман жүйесімен және қатарларға жіктеу теориясының алғашқы түсініктерімен таныстыруға арналған бөлімдер қарастырылған. Табиғаттағы кейбір заңдылықтырды және техникадағы әртүрлі процестерді түсіндіруде комплекс айнымалы функциялар теориясының елеулі көмегі болғандықтан оларды қарастыру маңызды.

Көп өлшемді комплексті талдау пәні бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар классикалық теориясын және оның қолдануларын кеңейтуге (жалпылауға) негізделген. Сонымен қатар бұл теория қазіргі заманғы математиканың маңызды салаларының бірі болғандықтан, бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясын зерделей отырып, қазіргі таңда интенсивті даму үстінде.

I бөлім

Көп комплекс айнымалыдан тәуелді аналитикалық функциялар

1.1.1. Кіріспе. Бір комплекс айнымалы функциялар теориясындағы келесі анықтамалар көп өлшемді комплексті талдауда сақталады.

Анықтама. Комплекс жазықтықтағы z_0 *нүктесінің маңайы* деп $|z - z_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын z нүктелер жиынын айтады, мұндағы δ - берілген оң сан және z_0 нүктесінің маңайын $C(\delta, z_0)$ арқылы белгілейді. $C(\delta, z_0)$ - центрі z_0 нүктесіндегі, радиусы δ болатын дөңгелек. Ал $|z| > \delta$ шартын қанағаттандыратын кеңейтілген комплекс жазықтықтың нүктелер жиыны *шексіз алыстатылған нүктенің маңайы* деп аталады және $C(\delta, \infty)$ арқылы белгіленеді.

E – кеңейтілген комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны болсын. E жиынын кеңейтілген комплекс жазықтыққа дейін толықтыруды CE деп белгілейік.

Анықтама. Егер δ оң саны табылып, E жиыны $C(\delta, 0)$ дөңгелегінде жатса, онда E жиыны *шектелген* деп аталады.

Анықтама. Егер $\delta > 0$ саны табылып, $E \cap C(\delta, z_0)$ қиылысуында жалғыз ғана z_0 нүктесі болса, онда z_0 нүктесі E жиынының *оқшауланған нүктесі* деп аталады. Егер кез келген $\delta > 0$ саны үшін $E \cap C(\delta, z_0)$ қиылысуында E жиынының шексіз көп нүктелер жиыны жатса, онда кеңейтілген комплекс жазықтықтың z_0 нүктесі E жиынының *шектік нүктесі* деп аталады. E жиынының барлық шектік нүктелер жиыны *туынды жиын* деп аталады, оны E' арқылы белгілейік. Егер $E' \subseteq E$ орындалса, онда E жиыны *тұйық жиын* деп аталады. $E \cup E' = \overline{E}$ бірігуі (қосындысы) E жиынының *тұйықтауы* деп аталады. $E \cap \overline{CE}$ қиылысуы E жиынының *шекарасы* деп аталады. Әрбір $z_0 \in \Gamma$ нүктесі E жиынның *шекаралық нүктесі* болады. Шекаралық нүктенің қасиеті: $\forall \delta > 0$ үшін $E \cap C(\delta, z_0)$ және $CE \cap C(\delta, z_0)$ жиындары $\varnothing$ болмайды.

Анықтама. Егер $\delta > 0$ саны табылып, $C(\delta, z_0) \subset E$ орындалса, онда z_0 нүктесі E жиынының *ішкі нүктесі* деп аталады. Егер E жиынының әрбір нүктесі ішкі нүкте болса, онда E жиыны *ашық жиын* деп аталады. Кез келген $\delta > 0$ үшін $C(\delta, z_0)$ маңайы ашық жиын болады.

Ашық жиындардың ақырлы немесе ақырсыз жүйесі O берілген. Егер әрбір $z \in E$ нүктесі O жүйесінің ең болмағанда бір жиынында жатса, онда O

жүйесі E жиынының бүркеуі болады. Егер $E \subset O_1 \bigcup O_2$, $E \subset O_1 \bigcup O_2 = \varnothing$, $E \bigcap O_1 \neq \varnothing$, $E \bigcap O_2 \neq \varnothing$ шарттарын қанағаттандыратын екі ашық жиын O_1 және O_2 табылмаса, онда E жиыны *байланысты жиын* болады.

Егер E бос емес ашық жиын болса, онда байланысты жиын анықтамасын келесі түрде анықтауға болады: E жиынының кез келген екі нүктесін үзіліссіз сынықтармен қосуға болса, онда Е жиыны байланысты жиын болады. Кеңейтілген комплекс жазықтықтың E жиынында $W = f(z)$ функциясы берілсін. Егер $f(z_0) \neq \infty$ және $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, $z \in E$ орындалса, онда $f(z)$ функциясы $z_0 \in E$ *нүктесінде үзіліссіз* деп аталады.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $|z' - z''| < \delta$ шартын қанағаттандыратын кез келген $z', z'' \in E$ үшін

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(z)$ функциясы E жиынында *бірқалыпты үзіліссіз* деп аталады. Басқа анықтамаларды кездесу ретімен қолданатын боламыз.

1.1.2 Негізгі түсініктер мен кейбір бейнелеулер. C^m кеңістігі m өлшемді комплексті векторлық кеңістік болсын.

Анықтама. $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1,2,\dots,m$ комплекс айнымалысының $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ мәндерінің реттелген жүйесін C^m *кеңістігінің нүктесі* деп атаймыз. C^mкеңістігін $2m$ өлшемді $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m$ нақты айнымалы евклид кеңістігі ретінде қарастыруға болады.

Анықтама.$\left|z_k - z_k^{(0)}\right| < r_k$, $k = 1,2,\dots,m$, (мұндағы $r_k -$ оң сандар) шартын қанағаттандыратын $z \in C^m$ нүктелер жиынын радиусы $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$, ал центрі $z^{(0)}$ нүктесіндегі *ашық полицилиндр* деп атап, $C(r, z^{(0)})$ арқылы белгілейді, ал $\left|z_k - z_k^{(0)}\right| \leq r_k$, $k = 1,2,\dots,m$ шартын қанағаттандыратын $z \in C^m$ нүктелер жиынын *тұйық полицилиндр* деп атап, $\overline{C(r, z^{(0)})}$ арқылы белгілейді.$\left|z_k - z_k^{(0)}\right| = r_k$, $k = 1,2,\dots,m$ теңдігі орындалатын $z \in C^m$ нүктелер жиынын $C(r, z^{(0)})$ полицилиндрінің тірегі деп атайды.

C^m кеңістігінен E нүктелер жиынын және w комплекс жазықтығынан E_1 нүктелер жиынын қарастырайық. Жоғарыда айтылған полицилиндр түсінігін қолданып нүктенің маңайы, оқшауланған нүктелер, шектік нүктелер және E

жиынының ішкі нүктелері деген түсініктерді, сонымен қатар C^m кеңістігінің ашық, тұйық, шектелген және компактты жиын мағлұматтарын енгізуге болады. Комплекс айнымалы функциялар теориясында маңызды роль атқаратын: *Кеңейтілген комплекс жазықтықтағы E жиынының кез келген шексіз ашық O бүркеуінен ақырлы жабық бүркеу бөліп алуға болса, осы шарт E жиынының компактты жиын болуының қажетті және жеткілікті шарты болып саналады*, дейтін Гейне-Борель-Лебега леммасы белгілі. Бұл леммадан шығатын маңызды тұжырымдардың бірі: *E компактты жиынының кез келген шексіз нүктелер тізбегінің $\{z_k\}$, $k = 1,2,\dots$ кеңейтілген комплекс жазықтықта ең болмағанда бір шектік нүктесі болады*, деген Больцано-Вейерштрасс принципі сияқты ұйғарымдар бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағыдай дәлелденеді.

$\lim\limits_{n\to\infty} z^{(n)} = z^{(o)}$ теңдігі $\lim\limits_{n\to\infty} z_k^{(n)} = z_k^{(o)}$, $k = 1,2,\dots,m$ теңдіктер жүйесін білдіреді.

Егер әрбір $z \in E$ мәніне $w \in E_1$ жалғыз мәні ғана сәйкес қойылатын f заңдылық берілсе, онда z айнымалысынан тәуелді w *бірмәнді функция* берілген деп, $(z_1, z_2, \dots, z_m$ комплекс айнымалыларынан тәуелді функция) оны $w = f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_m)$ арқылы белгілейді.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \delta$ оң сандар жүйесі табылса және кез келген $z', z'' \in E \cap C(\delta, z^{(0)})$ шартын қанағаттандыратын нүктелер үшін $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда берілген E жиынында жатқан $f(z)$ функциясы E жиынының $z^{(0)}$ шектік нүктесінде *барлық айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз* деп аталады.

E жиынында берілген $f(z)$ функциясының *бірқалыпты үзіліссіздігі*, сонымен қатар E жиынында берілген $f_n(z)$, $n = 1,2,\dots$ функциялар тізбегінің *жинақтылығы* және *бірқалыпты жинақтылығы* сияқты басқа да түсініктер бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар жағдайындағыдай енгізіледі.

Анықтама. Егер

$P_k(z) = \sum a_{k_1,k_2\dots,k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}$, мұндағы $k_1, k_2, \dots, k_m$ теріс емес бүтін сандар болып және $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = k$ теңдігі орындалса, онда $P_k(z)$ ақырлы қосындысы

k *дәрежелі біртекті полином* деп аталады. $P_k(z)$ полиномы z ақырлы мәндерінің бәрінде де үзіліссіз болады.

Көп комплекс айнымалыдан тәуелді үзіліссіз функциялардың қасиеттері бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағыдай дәлелденеді:

1. Шектелген тұйық $E \subset C^m$ жиынында берілген үзіліссіз функция E жиынында бірқалыпты үзіліссіз болады.
2. Шектелген тұйық $E \subset C^m$ жиынында берілген үзіліссіз функция E жиынында шектелген.
3. $\alpha_n(z)$ үзіліссіз функциялар қатары $E \subset C^m$ жиынында бірқалыпты жинақты болсын, онда оның $s(z)$ қосындысы E жиынында үзіліссіз болады,

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z).$$

1.1.3 Комплекс мүшелі еселі қатарлар. Келесі қатар

$$\sum \alpha_{k_1,k_2,\dots,k_m} \quad , \tag{1.1.1}$$

мұндағы m-натурал сан, ал $k_1, k_2, \dots, k_m$ теріс емес бүтін мәндер қабылдайды. (1.1.1) өрнегін $\alpha_{k_1,k_2,\dots,k_m}$ комплекс мүшелі m - *еселі қатар* деп атайды.

$S_{n_1,n_2,\dots,n_m}$ арқылы m - еселі қосындыны белгілейік:

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \alpha_{k_1,k_2,\dots,k_m}$$

Анықтама. Егер кез келген алдын-ала берілген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N_1, N_2, \dots, N_m$ натурал сандар табылып,

$$\left| S_{n_1,n_2,\dots,n_m} - S \right| < \varepsilon$$

теңсіздігі барлық $n_k > N_k, \quad k = 1,2, \dots, m$ үшін орындалса, онда (1.1.1) қатар *жинақты* деп аталады және оның *қосындысы* S болады.

$$\lim_{\substack{k_1 \to \infty \\ k_2 \to \infty \\ \dots\dots\dots \\ k_m \to \infty}} \alpha_{k_1,k_2,\dots,k_m} = 0$$

теңдігі (1.1.1) қатар жинақтылығының *қажетті шарты* деп аталады. Бұл теңдік

$$\alpha_{n_1,n_2,\dots,n_m} = \sum_{j_1=0}^{1} \sum_{j_2=0}^{1} \dots \sum_{j_m=0}^{1} (-1)^{j_1+j_2+\dots+j_m} s_{n_1-j_1, n_2-j_2, \dots, n_m-j_m}$$

формуласынан шығады.

Анықтама. Егер

$$\sum_{k_1,k_2,\dots,k_m\geq 0}\left|\alpha_{k_1,k_2,\dots,k_m}\right|$$

қатары жинақты болса, онда (1.1.1) қатар *абсолют жинақты* деп аталады.

1.1.4 Көп айнымалы дәрежелік қатарлар. Келесі

$$\sum_{k_1,k_2,\dots,k_m\geq 0}\alpha_{k_1,k_2,\dots,k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2}\dots z_m^{k_m} \tag{1.1.2}$$

түріндегі функционалдық қатары $z_1, z_2, \dots, z_m$ бірнеше айнымалыдан тәуелді *дәрежелік қатар* деп аталады.

$m=1$ болғанда (1.1.2) қатардың $z^{(0)}=z_1^{(o)}$ нүктесіндегі жинақтылығынан k_1 индексінің барлық мәндері үшін $\left|\alpha_{k_1}\right|\cdot\left|z_1^{(0)}\right|^{k_1}\leq g$, мұндағы g-оң сан, теңсіздігінің орындалатыны шығады.

Қос дәрежелік қатардың қарапайым мысалы

$$\sum_{k_1,k_2\geq 0} a_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$
$$a_{0,0}=-a_{0,1}=1,$$
$$a_{k_1,0}=-a_{k_1,1}=k_1^{k_1},\ \ k_1\geq 1,$$
$$a_{k_1,k_2}=0,\ \ k_2>1$$

қатары $z^{(0)}=(z_1^{(o)},1)$, $z_1^{(o)}\neq\infty$ және $z^{(0)}=(0,z_2^{(o)})$, $z_2^{(o)}\neq\infty$ нүктелерінде жинақты, бұдан $m>1$ болғанда (1.1.2) қатардың $z^{(0)}=(z_1^{(o)},\dots,z_m^{(0)})$, $z_k^{(o)}\neq 0$, $k=1,2,\dots,m$ нүктелерінде жинақтылығынан , жалпы айтқанда, индекстердің барлық мәндері үшін

$$\left|a_{k_1,k_2,\dots,k_m}\right|\cdot\left|z_1^{(0)}\right|^{k_1}\left|z_2^{(0)}\right|^{k_2}\dots\left|z_m^{(0)}\right|^{k_m}\leq g$$

(мұндағы g саны $k_1, k_2, \dots, k_m$ барлығы үшін бірдей оң сан), теңсіздігінің орындалмайтыны шығады. Сондықтан Абельдің бірінші теоремасына сәйкес келесі тұжырымды алуға болады: *егер (1.1.2) дәрежелік қатардың* $a_{k_1,k_2,\dots,k_m}$ *коэффициенттері индекстердің барлық мәндері үшін*

$$\left|\alpha_{k_1,k_2,\dots,k_m}\right|\leq\frac{g}{r_1^{\kappa_1}r_2^{\kappa_2}\dots r_m^{\kappa_m}} \tag{1.1.3}$$

(мұндағы g *саны* $k_1, k_2, \dots, k_m$ *сандарынан тәуелді емес оң сан) шартын қанағаттандырса, онда (1.1.2) қатар* $C(r,0)$, $r=(r_1, r_2, \dots, r_m)$ *ашық полицилиндрінің әрбір нүктесінде абсолют жинақты болады және* $C(r,0)$

полицилиндрінің әрбір компактты ішкі жиынында бірқалыпты жинақты болады.

Бұл тұжырымның дұрыстығы $z \in C(r,0)$ болғанда

$$\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m \geq 0} g\left|\frac{z_1}{r_1}\right|^{k_1}\left|\frac{z_2}{r_2}\right|^{k_2}\cdots\left|\frac{z_m}{r_m}\right|^{k_m}$$

қатары еселі геометриялық прогрессия құрайтындығынан шығады. Бұл прогрессияның қосындысы

$$g\left(1-\frac{|z_1|}{r_1}\right)^{-1}\left(1-\frac{|z_2|}{r_2}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{|z_m|}{r_m}\right)^{-1}$$

өрнегі арқылы анықталады.

(1.1.3) шарт әруақытта орындалады, мысалы, егер (1.1.2) қатары $C(r,0)$ полицилиндрінің тұлғасының $r=(r_1,r_2,\ldots,r_m)$ нүктесінде абсолют жинақты болса, (1.1.3) шарт орындалады. (1.1.2) қатар абсолют жинақты болғандықтан $C(r,0)$ полицилиндрінің ішінде бұл қатардың мүшелерін

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$$

болатындай орындарын ауыстыруға болады, мұндағы $P_n(z)$ дәрежесі n болатын $z_1,z_2,\ldots,z_m$ айнымалыларының біртекті полиномы. Әрбір $P_n(z)$ полиномы үзіліссіз функция болғандықтан және қатар $C(r,0)$ полицилиндрінің әрбір компактты ішкі жиынында бірқалыпты жинақты болғандықтан, бұл қатардың $S(z)$ қосындысы $C(r,0)$ полицилиндрінің ішінде үзіліссіз болады.

1.1.5 Көп комплекс айнымалы аналитикалық функция туралы түсінік. Айталық C^m кеңістігінің D облысында анықталған $w=f(z)=u+iv$ функциясының нақты және жорамал бөліктері $x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_m,y_m$ нақты айнымалылар функциясы ретінде өздерінің бірінші ретті туындыларымен бірге әрбір $z \in D$ нүктесінде үзіліссіз болсын. z_k айнымалыларына Δz_k, $k=1,2,\ldots,m$ өсімше бергенде w функциясының Δw өсімшесін

$$\Delta w=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\Delta z_k+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\Delta \bar{z}_k\right)+o(|\Delta z|), \qquad (1.1.4)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы

$$\frac{\partial}{\partial z_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

$$\Delta z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k, \qquad \Delta\overline{z_k}=\Delta x_k-i\Delta y_k,$$

ал $o(|\Delta z|)$ өрнегі $|\Delta z| = \sum_{k=1}^{m} |\Delta z_k|$ өрнегімен салыстырғанда жоғарғы ретті шексіз аз шама.

Анықтама. Егер $f(z)$ функциясының әрбір нүктесі $z \in D$ нүктесіндегі (1.1.4) өсімшесінің

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} \Delta z_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Delta \bar{z}_k \right),$$

бөлігі Δz_k-ке $k = 1,2,\dots,m$ қарағанда сызықтық форма болса, яғни әрбір $z \in D$ нүктеде

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1,2,\dots,m \tag{1.1.5}$$

теңдігі орындалса, онда $f(z)$ функциясы D *облысында аналитикалық функция* деп аталады.

$$dw = df = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \right) \tag{1.1.6}$$

өрнегі $f(z)$ аналитикалық функциясының *толық дифференциалы* деп аталады.

$f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_m)$ аналитикалық фунциясының анықтамасынан оның барлық айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіздігі және әрбір z_k айнымалылары бойынша жеке аналитикалық функция екендігі шығады. (1.1.6) формуланың оң жағындағы dz_k-ның $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ коэффициенті $f(z)$ функциясының z_k айнымалыларына байланысты дербес туындысы. Ол дербес туынды

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \lim_{\Delta z_k \to 0} \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_k + \Delta z_k, \dots, z_m) - f(z_1, z_{2,\dots,} z_{k,\dots,} z_m)}{\Delta z_k} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k} = -i\frac{\partial u}{\partial y_k} + \frac{\partial v}{\partial y_k} \tag{1.1.7}$$

формуласымен анықталады.

Коэффициенттері (1.1.3) шартты қанағаттандыратын (1.1.2) дәрежелік қатардың $S(z)$ қосындысы $C(r, 0)$ полицилиндрінде үзіліссіз функция болады. (1.1.2) дәрежелік қатарды

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_1, z_2, ..., z_m) = s(z) \qquad (1.1.8)$$

түрінде жаза отырып және $P_n(z)$ біртекті полиномы $n = 0,1, \ldots$ Вейерштрасстың белгілі теоремасы бойынша $z_k,\ k = 1,2, \ldots, m$ айнымалыларының әрбіреуі бойынша аналитикалық функция болады деп тұжырымдаймыз, себебі е*гер D облысында $f_k(z)$ аналитикалық функциялардан құралған*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

қатары D облысының кез келген K ішкі компактты жиынында бірқалыпты жинақты болса, онда бұл қатардың қосындысы $f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық болады деген Вейерштрасс теоремасы бойынша келесі ұйғарымға келеміз: $S(z)$ функциясы осы айнымалылардың кез келгені бойынша аналитикалық функция болады, және сонымен қатар (1.1.8) қатардың дифференциалданған әрбір мүшесі (мысалы z_k айнымалысы бойынша дифференциалданған) абсолют шамасы бойынша сәйкес геометриялық прогрессияның мүшелерінен артпайды. Ол геометриялық прогрессияның қосындысы

$$\frac{g}{r_k}\left(1-\frac{|z_1|}{r_1}\right)^{-1}\left(1-\frac{|z_2|}{r_2}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{|z_k|}{r_k}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{|z_m|}{r_m}\right)^{-1}$$

арқылы анықталады.

Демек, $S(z)$ функциясы $C(r,0)$ полицилиндрінде әрбір $z_k,\ k = 1,2, \ldots, m$ айнымалылары бойынша кез келген ретті үзіліссіз дифференциалданады және (1.1.5) теңдіктің шарттарын қанағаттандырады, яғни $S(z)$ функциясы $C(r,0)$ полицилиндрінде аналитикалық функция болады. Сонымен қатар индекстердің барлық мәндері үшін

$$k_1!k_2! \ldots k_m!\alpha_{k_1k_2\ldots k_m} = \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_m} s(z)}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}\ldots\ \partial z_m^{k_m}}\right]_{z=0} \qquad (1.1.9)$$

теңдігі орындалады.

1.1.6 Тейлор қатары. Бір комплекс айнымалыдан тәуелді функциялар теориясында

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

дәрежелік қатардың қосындысы $S(z)$ функциясы $|z-z_0| < R$ жинақталу радиусында аналитикалық функция болатыны белгілі. Сонымен қатар өзімізге таныс Тейлор теоремасын еске түсірсек: D облысында аналитикалық $f(z)$ функциясын әрбір $z_0 \in D$ нүктесінің маңайында дәрежелік қатар түрінде жазуға болады:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

оның $R-$ жинақталу радиусы z_0 нүктесінен D облысының Γ шекарасына дейінгі d қашықтығынан кем болмайды.

Көп комплекс айнымалыдан тәуелді функциялар теориясында бұл теорема келесі түрде пайымдалады: $D \subset C^m$ облысында $f(z)$ аналитикалық функция болсын. Әрбір $z^{(0)} \in D$ нүктесі үшін центрі осы нүктедегі полицилиндр табылады және полицилиндр ішінде $f(z)$ функциясы абсолют жинақты қатардың

$$f(z) = \sum_{K_1, K_2, \ldots, K_m} a_{K_1, k_2, \ldots, K_m} (z_1 - z_1^{(0)})^{K_1} (z_2 - z_2^{(0)})^{K_2} \ldots (z_m - z_m^{(0)})^{k_m}$$

қосындысы ретінде бейнеленеді.

$z^{(0)} = 0$ деп есептейік. $r_1, r_2, \ldots, r_m$ шексіз аз шамалар үшін $\overline{C(r,0)}$ полицилиндрі D облысының ішінде жатыр. $|z_k| \le r_k$ дөңгелектеріндегі z_k, $k = 2,3,\ldots,m$ мәндерін тағайындап алып, z_1 айнымалысы бойынша аналитикалық функция болып тұрған $f(z)$ функциясын $|z_1| \le r_1$ дөңгелегінің әрбір нүктесінде Коши интегралдық формуласымен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z} = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \in \overline{D} \end{cases}$$

бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағы сияқты

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t_1| = \gamma_1} \frac{f(t_1, z_2, \ldots, z_m) dt_1}{t_1 - z_1} \qquad (1.1.10)$$

көп комплекс айнымалы функция үшін бейнелеуге болады.

Сол сияқты келесі өрнекті аламыз:

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, z_k, \ldots, z_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t_k| = r_k} \frac{f(t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k, z_{k+1}, \ldots, z_m) dt_k}{t_k - z_k} \qquad (1.1.11)$$

$$|z_k| \le r_k\,,\ \ k = 2,3,...,m\,.$$

(1.1.10) және (1.1.11) теңдіктерден

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{|t_1|=r_1} \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \int\limits_{|t_2|=r_2} \frac{dt_2}{t_2 - z_2} \ \ ... \int\limits_{|t_m|=r_m} \frac{f(t_1, t_2, ..., \ t_m) dt_m}{t_m - z_m} \qquad (1.1.12)$$

теңдігі шығады. (1.1.12) теңдіктің оң жағындағы интеграл астындағы функциялардың барлық айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз екенін ескеріп, интегралдау амалын кез келген ретпен жүргізуге болады.

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{|t_1|=r_1} \int\limits_{|t_2|=r_2} \int\limits_{|t_3|=r_3} ... \int\limits_{|t_m|=r_m} \frac{f(t) dt_1, dt_2, ..., dt_m}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)(t_3 - z_3) \cdots (t_m - z_m)}, \qquad (1.1.13)$$

Кез келген тағайындалған $z \in C(r,0)$ үшін

$$\frac{1}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)(t_3 - z_3) \cdots (t_m - z_m)}$$

функциясы абсолют жинақты және $|t_k| = r_k, \quad k = 1,2,3,...,m$ болғанда t_k –ға байланысты бірқалыпты жинақты болатын

$$\sum_{k_1, k_2, ..., k_m \ge 0} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}}{t_1^{k_1+1} t_2^{k_2+1} \cdots t_m^{k_m+1}}$$

қатарының қосындысы ретінде бейнеленетіндіктен (1.1.13) өрнегінен

$$f(z) = \sum_{k_1, k_2, ... k_m} \alpha_{k_1, k_2, ..., k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m} \qquad (1.1.14)$$

өрнегін аламыз, мұндағы

$$\alpha_{k_1, k_2, ... k_m} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{|t_1|=r_1} \int\limits_{|t_2|=r_2} \int\limits_{|t_3|=r_3} \cdots \int\limits_{|t_m|=r_m} \frac{f(t) dt_1 dt_2 dt_3 ... \ dt_m}{t_1^{k_1+1} t_2^{k_2+1} \cdots \ t_m^{k_m+1}}. \qquad (1.1.15)$$

(1.1.15) формуладан

$$\left|\alpha_{k_1,k_2,\ldots k_m}\right| \le \frac{M}{r_1^{k_1} r_2^{k_2} \cdots r_m^{k_m}}$$

теңдігін аламыз, мұндағы $M = \max f(x), \quad z \in \overline{C(r,0)}.$ Бұдан (1.1.14) формуланың оң жағындағы қатардың $C(\tau,0)$ полицилиндрінде $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m), \quad 0 < \tau_k < r_k$, $k = 1,2,...m$ болғанда абсолют және бірқалыпты жинақты екені шығады. (1.1.9) теңдік бойынша (1.1.14) дәрежелік қатардың коэффициенттерін (1.1.15) өрнекті ескере отырып есептеуге болады және ол коэффициенттерді келесі формуламен есептейміз:

$$\alpha_{k_1,k_2,\ldots k_m} = \frac{1}{k_1! k_2! \cdots k_m!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_m} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_m^{k_m}}\right]_{z=0} \tag{1.1.16}$$

(1.1.16) формуланы негізге ала отырып, $C(r,0)$ полицилиндрінде $f(z)$ функциясының z_k, $k = 1,2,...,m$ дәрежелері бойынша жіктелуі жалғыз ғана болатынын ұйғарамыз. $f(z)$ функциясының (1.1.13) формула бойынша жіктелуі үшін $f(z)$ функциясының z_k, $k = 1,2,...,m$ барлық айнымалылар жиынтығы бойынша D облысында үзіліссіз және z_k, $k = 1,2,...,m$ айнымалыларының әрқайсысы бойынша аналитикалық болуы жеткілікті. Осыдан, егер $f(z)$ функциясы D облысында z_k, $k = 1,2,...,m$ айнымалыларының әрқайсысы бойынша аналитикалық және осы айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз болса, онда мынадай қорытынды шығаруға болады: z_k, $k = 1,2,...,m$ *айнымалыларының әрқайсысы бойынша аналитикалық функция болатын* $f(z)$ *функциясы* D *облысында аналитикалық функция болады.* Бұл келтірілген қорытынды Хартогстың негізгі теоремасы деп аталады. Оның дәлелдеуі С. Бохнер және У.Т. Мартин «Көп комплекс айнымалы функциялар» оқулығында келтірілген.

1.1.7 Нақты айнымалыдан тәуелді нақты аналитикалық функцияның аналитикалық жалғастырылуы. Айталық $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ бірмәнді функциясы нақты айнымалылар $x_k, (k = 1,2,...,m)$ кеңістігіндегі d облысында берілсін.

Анықтама. Егер әрбір $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ нүктесі үшін $\left|x_k - x_k^{(0)}\right| < \delta_k$ $(k = 1,2,...,m)$ шартын қанағаттандыратын П-параллелепипеді табылып және әрбір x нүктеде $f(x)$ функциясы абсолют жинақты қатар

$$f(x)=\sum_{k_1,k_2,..k_m\ge 0} a_{k_1,k_2,...k_m}(x_1-x_1^{(0)})^{k_1}(x_2-x_2^{(0)})^{k_2}\cdot...\cdot(x_m-x_m^{(0)})^{k_m} \quad (1.1.17)$$

түрінде жіктелсе, онда $f(x)$ функциясы d *облысында аналитикалық функция* деп аталады.

d облысын C^m комплекс айнымалылар $z_k = x_k + iy_k$ кеңістігінде жатыр деп есептеуге де болады және d аймағында $y_k = 0, \quad k = 1,2,...,m$ теңдіктері орындалады. (1.1.17) қатардың П - параллелепипедіндегі абсолют жинақтылығынан

$$\sum_{k_1,k_2,..,k_m\ge 0} a_{k_1,k_2,...k_m}(z_1-x_1^{(0)})^{k_1}(z_2-x_2^{(0)})^{k_2}\cdot...\cdot(z_m-x_m^{(0)})^{k_m} \quad (1.1.18)$$

қатардың $C(\delta, x^{(0)}): \left|z_k - x_k^{(0)}\right| < \delta_k, \quad k = 1,2,...,m$-полицилиндрінде абсолют жинақтылығы шығады. (1.1.18) қатардың қосындысы $S(z)$ функциясы $C(\delta, x^{(0)})$ полицилиндрінде аналитикалық функция болады және бұл функция $y_k = 0$, $k = 1,2,...,m$ шарты орындалғанда $f(x)$ функциясымен беттеседі. (1.1.16) формуланы қолданып (1.1.18) қатардың коэффициенттерін есептегенде

$$a_{k_1,k_2,...k_m} = \frac{1}{k_1!k_2!\ ...\ k_m!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_m} s(z)}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}...\ \partial z_m^{k_m}}\right]_{z=x^{(0)}}$$

(1.1.17) формуланы ескере отырып $S(x) = f(x)$ деп алуға болады, сонымен $C(\delta, x^{(0)})$ полицилиндрінде z_k $(k = 1,2,...,m)$ айнымалыларынан тәуелді жалғыз ғана $S(z)$ аналитикалық функциясы табылатыны және бұл айнымалылардың нақты мәндерінде $f(x)$ функциясымен беттесетіні дәлелденді. $S(z)$ функциясын $f(z)$ деп белгілеп және оны $f(x)$ функциясының П-параллелепипедінен $C(\delta, x^{(0)})$ полицилиндріне *аналитикалық жалғастыруы* деп атаймыз. Сонымен комплекс z_k, $k = 1,2,...,m$ айнымалылар C^m кеңістігінде қандай да бір D ішкі облысы табылады және бұл D ішкі облысында $x_k = 0, k = 1,2,...,m$ айнымалы d аймағы бар және осы d аймағында берілген $f(x)$ аналитикалық функциясы D облысында аналитикалық жалғастырылады.

1.1.8 Гармоникалық функцияның аргументінің комплекс мәндері үшін таратылуы. Гурс формуласы. D облысында бірмәнді және нақты айнымалы $x, y-$ке қатысты $u(x, y)$ функциясының үзіліссіз екінші ретті туындылары бар болса, сонымен қатар

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (*)$$

теңдеуін қанағаттандырса, онда $u(x,y)$ функциясы гармоникалық функция деп аталатыны белгілі. (*) теңдеуі *Лаплас теңдеуі* деп, ал дифференциалды оператор $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - *Лаплас операторы* деп аталады.

Бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі тұжырым бар: бірбайланысты D облысында аналитикалық $f(z)$ функциясы оның нақты бөлігімен анықталады:

$$f(z)=u(x,y)+i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c$$

Бұл тұжырым бойынша $z=x+iy$ комплекс айнымалы жазықтықтың $f(z)$ функциясы оның нақты бөлігі $u(x,y)$ бойынша өрнектеледі.

$f(z)$ функциясын $z_0=x_0+iy_0\in D$ нүктесінің маңайында дәрежелік қатарға

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

жіктей отырып және

$$\overline{f(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{a}_k(\bar{z}-\bar{z}_0)^k$$

екенін ескере отырып, келесі тұжырымның дұрыстығына көз жеткіземіз:

Бірбайланысты D облысында гармоникалық функция

$$2u(x,y)=f(z)+\overline{f(z)} \qquad (1.1.19)$$

$C(\varepsilon,z_0)$ *дөңгелегінде* (мұндағы ε - z_0 нүктесінен D облысының шекарасына дейінгі қашықтық *) абсолют жинақты екі еселі дәрежелік қатарға жіктеледі:*

$$2u(x,y)=\sum_{k_1,k_2\geq 0}b_{k_1,k_2}(x-x_0)^{k_1}(y-y_0)^{k_2} \qquad (1.1.20)$$

мұндағы $u-$ нақты коэффициентті және аналитикалық функция. (1.1.20) формуланың оң жағындағы екі еселі дәрежелік қатар $C(r,z^{(0)})$ полицилиндрінде абсолют жинақты, бұл полицилиндр

$$z_1 = x + ix',$$
$$z_2 = y + iy',$$

айнымалыларынан тәуелді және келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$r = (r_1, r_2), \quad r_1 + r_2 < \varepsilon,$$
$$z^{(0)} = (x_0, y_0).$$

$u(x, y)$ функциясының $C(r, z^{(0)})$ полицилиндрінде аналитикалық жалғасуын $u(z_1, z_2)$ арқылы белгілейік. (1.1.19) және (1.1.20) өрнектерді ескере отырып келесі теңдікті аламыз:

$$2u(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \ge 0} b_{k_1, k_2} (z_1 - x_0)^{k_1} (z_2 - y_0)^{k_2} = f(z_1 + iz_2) + \bar{f}(z_1 - iz_2). \tag{1.1.21}$$

z_1 және z_2- нің комплекс мәндерінде айнымалылар $z = z_1 + iz_2$ және $\bar{z} = z_1 - iz_2$ бір-біріне тәуелсіз. Сондықтан (1.1.21) формуласын

$$2u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = f(z) + \bar{f}(\bar{z})$$

түрінде жазып, $\bar{z} = \bar{z}_0 = x_0 - iy_0$, деп есептеуге болады, яғни

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{f}(\bar{z}_0)$$

немесе

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - u(x_0, y_0) + iC_0 \tag{G}$$

түрінде жазуға болады, мұндағы $C_0 -$ кез келген нақты тұрақты. (G) формуласы

$$z_1 + iz_2 = z$$
$$z_1 - iz_2 = \bar{z}_0$$

болғанда $|z_1 - x_0| < r_1$ және $|z_2 - y_0| < r_2$ дөңгелектеріндегі барлық z_1 және z_2 мәндері үшін орындалады және дербес жағдайда бұл дөңгелектерде z_1 мен z_2 нақты мәндер қабылдағанда да орындалады. Сондықтан әрбір $z_0 \in D$ нүктесінің $C(\varepsilon, z_0) -$маңайында $f(z)$ аналитикалық функциясы өзінің нақты бөлігімен бейнеледі және бұл нақты бөлігі (G) формуласы бойынша тәуелсіз айнымалының комплекс мәндері бойынша таратылады. (G) формуласы Гурс формуласы деп аталады.

$$\left[2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)-u(x_0,y_0)+iC_0,\ C(\varepsilon,z_0)\right]$$

элементтерінің көмегімен $f(z)$ функциясы анлитикалық жалғастырылады және монодромия теоремасы бойынша D облысында бірмәнді жалғасады.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Ашық полицилиндр дегеніміз не?
2. Барлық айнымалылар бойынша үзіліссіздік нені білдіреді?
3. k-дәрежелі біртекті полином қалай жазылады?
4. k-еселі қатар және оның жинақтылығы, қосындысы.
5. k-еселі қатар және оның жинақтылығының қажетті шарты.
6. Көп айнымалы дәрежелік қатарлар және оның абсолют жинақтылығы мен бірқалыпты жинақтылығы.
7. Көп комплекс айнымалы аналитикалық функция дегеніміз не?
8. Көп комплекс айнымалы аналитикалық функция үшін Коши интегралдық формуласы.
9. Гурс формуласы қалай жазылады?

1.2. Көпөлшемді евклид кеңістіктеріндегі конформды бейнелеу.

1.2.1 Кейбір анықтамалар мен белгілеулер. Енді матрицалық түрдегі жазуды қолданамыз, $(n\times n)-$квадратты матрицалар және n-компонентті векторларды сәйкес үлкен және кіші әріптермен белгілейміз.

$A\cdot p-$көбейтіндісі деп өлшемі $(n\times n)$ квадратты $A=\|A_{ik}\|$ матрицаларды n-компонентті вектор $p=(p_1,p_2,...,p_n)-$ға көбейткенде шығатын $q-(q_1,q_2,...,q_n)-$ векторын айтамыз және бұл вектордың компоненттері p векторының компоненттерін A матрицасымен сызықты түрлендіру нәтижесінде

$$q=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}p_k \qquad i=1,2,...,n \tag{1.2.1}$$

алынады.

Анықтама. Егер

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ji}A_{jk}=\delta_{ik}, \quad (\text{мұндағы } \delta_{ii}=1,\ \delta_{ik}=0,\ i\neq k,\ i,k=1,2,...,n)$$

орындалса, онда $A-$матрицасы *ортогональды* деп аталады.

$\lambda \cdot A$ *көбейтіндісі* деп ($\lambda-$скаляр шамасын квадратты $A=\|A_{ik}\|$ матрицасына көбейту) $B=\|B_{ik}\|$ матрицасын айтады, мұндағы $B_{ik}=\lambda A_{ik}, \quad i,k=1,2,...,n.$

A матрицасы немесе p векторы үзіліссіз және Гельдер шартын қанағатандырады және дифференциалданады деген талаптар әрбір A элементі немесе әрбір p компоненті айтылған талаптарды қанағаттандырады дегенді білдіреді.

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k = pq = (p \cdot q) \tag{1.2.2}$$

өрнегі p және q векторларының *скаляр көбейтіндісін* білдіреді. Ал егер p векторының барлық компоненттері нақты болса

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = (pp)^{\frac{1}{2}} = |p| \tag{1.2.3}$$

өрнегі p векторының *ұзындығы* деп аталады.

E_n-декартты $x_1, x_2,..., x_n$ ортогональ координаталары бар x - нақты нүктелі евклид кеңістігі болсын. x және y нүктелері үшін $x=(x_1, x_2,..., x_n)$, $y=(y_1, y_2,..., y_n)-$векторлық белгілеулерді қолдана отырып, олардың ара қашықтығын

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} = |x-y| \tag{1.2.4}$$

түрінде жазуға болады.

Анықтама. $a \in E$ нүктесінің $C(\delta, a)$ *маңайы* деп $|x-a|<\delta$ шартын қанағаттандыратын $x \in E_n$ нүктелер жиынын айтады, мұндағы $\delta-$берілген оң сан; $C(\delta, a)-$радиусы δ центрі a нүктесіндегі n-өлшемді шар.

E_n кеңестігіндегі нүктенің маңайы анықтамасынан кейін шектік нүктелер, ішкі нүктелер, шекаралық нүктелер, шектелген жиындар, тұйық жиындар, ашық жиындар, байланысты жиындар сияқты түсініктер кіріспедегідей анықталады.

1.2.2 Бейнелеудің Гаусс бойынша конформдылығы. E_n - евклид кеңістігінде $x_1, x_2, ..., x_n$ – декарттық ортогональды координаталы x нүктелер жиынынан тұратын Ω облысын алайық. Осы Ω облысында нақты функциялар жүйесін $y_i = y_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $i = 1,2,...,n$ қарастырайық. Бұл функциялар өзінің бірінші туындыларымен бірге үзіліссіз және E_n кеңістігінде Ω облысын Ω_1 облысына өзара бірмәнді бейнелейді.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ векторлары арқылы бұл бейнелеуді

$$y = y(x) \tag{1.2.5}$$

деп жазуға болады.

Сызықтық элементтер, яғни $x, x + dx$ және $y, y + dy$ нүктелер арасындағы $dxdx$ және $dydy$ қашықтықтарының квадраттарын сәйкес ds^2 және $d\delta^2$ деп белгілейік. Егер $\lambda(x)$ – оң скаляр функциясы табылып

$$d\delta^2 = \lambda(x) ds^2 \tag{1.2.6}$$

орындалса, онда (1.2.5) – бейнелеуді Гаусс бойынша конформды деп атайды. Басқаша айтқанда (1.2.5) – бейнелеудің конформды болуы дегеніміз x нүктесінен шығатын сызықтық элементтің барлық бағыт бойынша масштабының өзгеруінің тұрақталуы әруақытта орын алады.

(1.2.6) шарт келесі теңдіктермен пара-пар:

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lambda(x), \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \\ i \neq k, \quad i, k = 1,2,...n. \end{gathered} \tag{1.2.7}$$

(1.2.5) – бейнелеуі бойынша x нүктесінен шыққан dx және δx векторларына y нүктесінен шыққан dy және δy векторлары сәйкес келеді.

$$dy_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k, \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \delta x_k$$

болғандықтан, (1.2.7) өрнекті ескере отырып

$$\cos dy^{\wedge}\delta y = \frac{dy\delta y}{|dy| \cdot |\delta y|} = \frac{\lambda(x)(dx \cdot \delta x)}{\lambda(x)|dx| \cdot |\delta x|} = \cos dx^{\wedge}\delta x$$

өрнектерін аламыз.

Сонымен, конформды бейнелеу барысында бір комплекс айнымалыдан тәуелді функциялар теориясындағыдай бұрыштар сақталады (консерватизм).

1.2.3 Конформды бейнелеу мысалдары. $E_n -$ кеңістігінде конформды бейнелеу мысалдары: $y = x + h -$параллель көшіру, $y = \mu x -$ұқсас түрлендіруі және ортогональды түрлендіру $y = Cx$, мұндағы $h = (h_1, h_2, ..., h_n) -$тұрақты вектор, $\mu -$скаляр тұрақты, ал C - тұрақты ортогональды матрица. Параллель көшіру мен ортогональды түрлендіру жағдайларында $\lambda = 1$, ал екінші жағдайда $\lambda = \mu^2$.

Келесі түрдегі түрлендіру

$$y = \frac{x}{(x \cdot x)} \tag{1.2.8}$$

$x \neq 0$ және x барлық ақырлы мәндер қабылдағанда орындалады және бұл түрлендіру *инверсия* деп немесе $|x| = 1$ сферасына қатысты E_n кеңістігінің *айналы бейнелеуі* деп аталады.

(1.2.8) теңдіктің екі жағын да x шамасына скаляр көбейтіндісін жазсақ

$$(x \cdot y) = 1 \tag{1.2.9}$$

теңдігін аламыз. (1.2.8) және (1.2.9) теңдіктерінен $|x| \cdot |y| = 1,$ шығады, яғни инверсия жасағанда бір біріне сәйкес келетін x және y нүктелері $x = 0$ нүктесінен шығатын сәуледе жатады және бұл нүктелердің $x = 0$ нүктесіне дейінгі қашықтықтарының көбейтіндісі 1-ге тең. (1.2.8) формуладан керісінше x - ті y арқылы өрнектеуге болады. Ол үшін (1.2.8) теңдіктің екі жағын да y-ке скаляр көбейтіп және (1.2.9) теңдікті ескере отырып

$$(y \cdot y) = \frac{1}{(x \cdot x)}$$

теңдігін аламыз.

Сонымен (1.2.8) теңдікті келесі түрде жазуға болады:

$$x = \frac{y}{(y \cdot y)}. \tag{1.2.10}$$

E_n кеңістігінде $x = \infty$ шексіз алыстатылған нүктені енгізіп және (1.2.8) түрлендіруді барлық E_n кеңістігінде 0 мен ∞ нүктелерін бір-біріне сәйкес қою арқылы алдын-ала анықтаймыз.

Инверсияның келесі өте маңызды қасиеттері бар:

а) Инверсия кезінде сфера (жазықтықты да радиусы шексіз сфера деп қарастыруға болады) сфераға бейнеленеді.
б) Инверсия конформды бейнелеу болады.

(а) ұйғарымның дұрыстығы оңай дәлелденеді: сфераның теңдеуін $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалылары арқылы жазайық:

$$A(x \cdot x) + (h \cdot x) + B = 0 \qquad (1.2.11)$$

мұндағы A және B- скаляр тұрақты шамалар, ал $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$- тұрақты вектор. (1.2.11) теңдіктің сол жағындағы x векторын оның (1.2.10) теңдігімен алмастырсақ келесі теңдеуді аламыз:

$$B(y \cdot y) + (h \cdot y) + A = 0.$$

Бұл теңдік сфераның $y_1, y_2, ..., y_n$ айнымалылары арқылы өрнектелуі, демек инверсия кезінде сфера сфераға көшеді.

(b) қасиетін дәлелдеу үшін $x \neq 0$ болғанда (1.2.8) теңдікті дифференциалдау керек:

$$dy = \frac{(x \cdot x)dx - 2(x \cdot dx)x}{(x \cdot x)^2} \qquad (1.2.12)$$

dy шамасын өзіне-өзін скаляр көбейтіп және (1.2.12) өрнегін ескере отырып, (1.2.6) шарт орындалатынын, яғни бейнелеудің конформдығы сақталғандығын байқауға болады және

$$\lambda(x) = \frac{1}{(x \cdot x)^2}.$$

Инверсияда бұрыштар да сақталатыны белгілі. $y = \infty$ нүктесінен шығатын екі бағыттар арасындағы бұрыш деп $x = 0$ нүктесінен шығатын және (1.2.8) бейнелеу арқылы оларға сәйкес бағыттар арасындағы бұрышты алсақ, E_n кеңістігінде инверсия кезінде бұрыштар сақталатынын атап айтуға болады.

1.2.4 **Лиувилль теоремасы**. (1.2.5) бейнелеудің конформды шарты (1.2.7) теңдіктері $y_1, y_2, ..., y_n$ функцияларына қатысты сызықтық емес бірінші ретті дербес туындысы бар дифференциалдық теңдеулер жүйесін бейнелейді.

(1.2.7) жүйе $n = 2$ болғанда келесі екі сызықтық жүйеге пара-пар:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

немесе

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

Сонымен $n = 2$ жағдайда конформды бейнелеу теориясы

$$z = x_1 + ix_2$$
$$\bar{z} = x_1 - ix_2$$

айнымалыларына байланысты бір комплекс айнымалыдан тәуелді біржақты аналитикалық функциялар теориясымен толықтай сәйкес келеді.

Ал $n > 2$ болған жағдайда (1.2.7) жүйедегі теңдеулер саны $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялар санынан артық болады. Бұл $n > 2$ жағдайда Лиувилль теоремасын қолдану керек.

Лиувилль теоремасы**:** *E_n евклид кеңестігінде $n > 2$ болғанда конформды бейнелеу жалпы бейнелеудің төрт түрін: параллель көшіру, ұқсастық түрлендірулері, ортогональ түрлендірулері және инверсияны бірнеше рет суперпозиция жасағанда анықталады.*

Лиувилль теоремасын (1.2.7) жүйенің шешімдерінің көпбейнелілігін қарастыру арқылы дәлелдеуге болады. (L.Bianchi, Lezioni di Geometria Diffrenziale, Pisa, 1894). Біз Лиувилль теоремасының $n = 3$ жағдайындағы Капелли дәлелдеуін қарастырамыз. Ол үшін алдымен дифференциалдық геометриядан белгілі келесі жайттарға тоқталайық:

1) Егер S бетінің теңдеуі

$$x = x(u_1, u_2) \tag{1.2.13}$$

түрінде берілсе, мұндағы $u_2 = const$ және $u_1 = const$, бұлар S бетіндегі қисықтық сызықтары болсын, онда осы беттің әрбір нүктесіндегі x векторы мен S бетінің ν бірлік нормаль векторы арасындағы байланыс Родрига формулаларымен анықталады:

$$\frac{\partial \nu}{\partial u_1} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial u_2} = -\frac{1}{R_2}\frac{\partial x}{\partial u_2} \tag{1.2.14}$$

мұндағы $\frac{1}{R_1}$ және $\frac{1}{R_2}$ - шамалары S бетінің басты қисықтықтары;

2) Дюпен теоремасы: беттердің үшортогональды жүйелерінің әрбір жұбы қисықтық сызықтары бойымен қиылысады.
3) Сфераның басқа беттерде жоқ қасиеті: сфераның әрбір сызықтары қисықтық сызығы болады.

Бұл тұжырымдарды дәлелдеуде $x_i = x_i(u_1, u_2),\ i = 1,2,3$ функцияларының үзіліссіз үшінші ретті туындыларының болуы жеткілікті.

Біз (1.2.5) бейнелеуді бұдан былай конформды және аналитикалық бейнелеу деп есептейміз, яғни $y_i(x_1, x_2, x_3),\quad i = 1,2,3$ функциялары x_1, x_2, x_3 айнымалыларынан тәуелді аналитикалық функциялар. Әрбір нүктесінде жоғарыда айтылған тұжырымдарды қанағаттандыратын кез келген S бетін 1) тұжырым бойынша үшортогональды беттер жүйесіне енгізуге болады.

Шынында да, S бетінің теңдеуін (1.2.13) түрде жазамыз, мұндағы $u_2 = const$ және $u_1 = const$ - қисықтық сызықтары.

$$\bar{x} = x(u_1, u_2) + u_3 v(u_1, u_2) \tag{1.2.15}$$

теңдеуінен шығатын беттердің үштігі, сәйкес $u_1 = const$, $u_2 = const, u_3 = const$ болғанда, үшортогонольды жүйелер құрайды. Себебі (1.2.15) теңдікті (1.2.14) формулаларды қолдана отырып дифференциалдасақ және $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}$ және v векторларының өзара ортогональды екенін ескерсек

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} = \left(1 - \frac{u_3}{R_1}\right)\frac{\partial x}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_2} = \left(1 - \frac{u_3}{R_2}\right)\frac{\partial x}{\partial u_2},$$
$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_3} = v(u_1, u_2)$$

теңдіктері шығады.

Енді келесі тұжырымды оңай дәлелдеуге болады: конформды бейнелеу жасағанда қисықтық сызықтары қисықтық сызықтарына бейнеленеді.

Шынында да S_1 беті S бетінің конформды бейнелеудегі бейнесі болсын дейік, ал Γ - осы S бетіндегі қисықтық сызығы болсын. Γ_1 арқылы Γ қисықтық сызығының конформды бейнесін белгілейміз. Γ қисықтық сызығын $u_i = const,\ i = 1,2$ координаталық сызықтардың бірі деп есептеп, S бетін үшортогоналды жүйеге T енгіземіз. Конформды бейнелеуде бұрыштар сақталатын болғандықтан T үшортогоналды жүйенің конформды бейнесі үшортогоналды жүйе болады және Дюпен теоремасын ескерсек қисықтық сызығы болу керек. Жоғарыдағы дәлелдеген тұжырым мен 3) тұжырым бойынша сфераның конформды бейнесі де сфера болады.

Шынымен де, S беті σ сфераның конформды бейнесі болсын делік. S бетінде жатқан әрбір Г қисығының түпбейнесі γ 3) тұжырым бойынша қисықтық сызығы болады және Г сызығы өзі де қисықтық сызығы болады. Осыдан 3) тұжырым негізінде S сфера болады.

Енді Ливилль теоремасының дәлелдеуіне көшейік. Айталық x^0 нүктесі Ω облысының кез келген нүктесі, ал $y^0 = y(x^0)$ нүктесі (1.2.5) конформды бейнелеуін қолданғандағы Ω_1 облысындағы оған сәйкес нүкте болсын.

Т арқылы x^0 нүктесі арқылы өтетін $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ үшортогональды сфералар жүйесін белгілейік. Бұл сфералар жүйесі Ω облысында жатады. x^0 нүктесіне жанама жазықтықтар ретінде сәйкес $x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0$ жазықтықтарды аламыз.

(1.2.5) конформды бейнелеу нәтижесінде Т үшортогонольды жүйеге y^0 нүктесі арқылы өтетін T_1 ортогональды сфералар жүйесі сәйкес келеді.

Айталық, $x^* = l_1(x)$ және $y^* = l_2(y)$ өрнектері $\left|x - x^0\right| = r$ және $\left|y - y^0\right| = r_1$ сфераларына қатысты және сәйкес Т және T_1 үшортогональды жүйелері жатқан инверсиялар болсын.

Инверсия конформды бейнелеу болатындықтан $x^* = l_1(x)$ және $y^* = l_2(y)$ бейнелеулері нәтижесінде Т және T_1 жүйелерінің бейнелері келесі сәйкес жазықтықтар жүйесі болады:

$$x_i^* = a_i^* \quad \text{және} \quad \sum_{k=1}^{3} C_{ik}(y_k^* - b_k^*) = 0,\ i = 1,2,3,$$

мұндағы C_{ik} – өлшемі 3×3 болатын ортогональды матрица. Егер екі рет параллель көшіру және ортогональды түрлендіру қолдансақ $a^* = 0,\ b^* = 0$ және С=Е, (мұндағы Е – бірлік матрица) алуға болады.

Бірнеше рет конформды бейнелеуді суперпозиция жасасақ, қайтадан конформды бейнелеу шығатын болғандықтан

$$y^* = l_2[y(l_1^{-1}(x^*))] = y^*(x^*) \qquad (1.2.16)$$

$x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 0$ үшортогональды жазықтықтар жүйесін $y_1^* = 0,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 0$ үшортогональды жазықтықтар жүйесіне көшіретін бейнелеуі конформды бейнелеу болады. Сонымен (1.2.16) бейнелеуі $y_i^* = y_i^*(x_i^*),\ i = 1,2,3$ түріне келеді, мұндағы y_i^* формуласы тек қана x_i^* айнымалысына тәуелді болады. Бұдан әрбір $y_i^*,\ i = 1,2,3$ формуласы x_i^* айнымалысына тәуелді аналитикалық функция болатынын ескере отырып, ал (1.2.16) бейнелеуді келесі түрде жазуға болатынын байқаймыз:

$y^* = \mu x^*$, мұндағы $\mu -$ скаляр тұрақты. Онда, (1.2.5) бейнелеуді келесі түрде жазуға болады:

$$y = l_2^{-1}[\mu l_1(x)], \tag{1.2.17}$$

сонымен Лиувилль теоремасы дәлелденді. (1.2.17) түрлендіруі Мёбиус түрлендіруі деп те аталады.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1) Ортогональды матрица дегеніміз не?
2) Бейнелеудің Гаусс бойынша конформдылығы.
3) Конформды бейнелеуде бұрыштың сақталуы.
4) Инверсия дегеніміз не?
5) Инверсияның қасиеттері.
6) Лиувилль теоремасы.
7) Родрига формуласы қалай жазылады?
8) Дюпен теоремасы.

1.3 Үшөлшемді евклид кеңістігіндегі Коши-Риман жүйесі

1.3.1 Тегіс және құрама-тегіс шекаралы облыстар.

Анықтама. Егер

a) S бетінің нүктеден нүктеге үзіліссіз өзгеріп отыратын жанама жазықтығы болса,
b) $\exists \delta_0 > 0,\ y_0 \in S,\ C(\delta, y)$ шарының ішінде жатқан S бетінің бөлігі S_1 және $0 < \delta < \delta_0$ S бетінің нормасы параллель әрбір түзу y нүктесінде бір рет қиылысса, онда E_3 кеңістігінде S беті *тегіс* деп аталады.

S тегіс беті *Ляпунов беті* деп аталады, егер а) $\vartheta \le L|x-y|^h$ шарты орындалса, $\vartheta -$ дегеніміз S бетіне x және y нүктелерінде жүргізілген бірлік нормальдар ν_x және ν_y арасындағы бұрыш, ал L және h - оң сандар, мұндағы $0 < h \le 1$.

Анықтама. Егер S - тұйық, тегіс $S_1, S_2, ..., S_m$ өзара ортақ нүктелері жоқ Ляпунов беттерінің жиынтығы болса, онда шектелген $\Omega^+ \subset E_3$ аймағы *Ляпунов бойынша тегіс* S *шекарасы бар аймақ* деп аталады.

Анықтама. Егер S_i тұйық беті $S_{i\ j}$, $j = 1,2,...k,$ саны ақырлы тегіс беттерден құралған болса және ең болмағанда екі $S_{i\ j}$, бетінде жатқан нүктелер жиынында S_i бетінің нүктесі жоқ болса, онда S_i тұйық бетін *Ляпунов бойынша құрама-тегіс бет* деп атаймыз.

Анықтама. Егер $\Omega^+ \subset E_3$ аймағының S шекарасы $S\ , S_2, ..., S_m$ беттерінің жиынтығы болса, олардың ішінде $(m-k)$ беті Ляпунов бойынша құрама-тегіс, ал k беті тұйық, тегіс Ляпунов беті болса, мұндағы $k < m$, онда Ω^+ аймағы *Ляпунов бойынша құрама-тегіс шекарасы бар аймақ* деп аталады. $\Omega^+ \bigcup S$ аймағын E_3 кеңістігіне дейін толықтыруды Ω^- деп белгілейік.

Егер тұйық $\overline{\Omega^+} = \Omega^+ \bigcup S$ аймағында берілген нақты бірмәнді $A(x) = A(x_1, x_2, x_3)$ функциясы Ω^+ аймағында $\dfrac{\partial A}{\partial x_i}$, $i = 1,2,3$ туындылары бар болса, әрбір $y \in S$ нүктесінде

$$\lim \frac{\partial A}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ 2\ ,3, \tag{1.3.1}$$

(мұнда $x \in \Omega^+$ нүктесі y нүктесіне кез келген жолмен ұмтылады) шегі бар болса, онда $\dfrac{\partial A}{\partial x_i}$ мәнін $x = y$ болғанда $B_i(y)$ деп алып, $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_i}$ мәні тұйық $\overline{\Omega^+}$ аймағында анықталған деуге болады.

Математикалық талдау курсынан белгілі Гаусс-Остроградский формуласын қарастырайық: $A_i(x), i = 1,2,3$ нақты айнымалы функциясы өзінің бірінші ретті туындыларымен тегіс S шекарасы бар Ω^+ тұйық аймағында үзіліссіз болса, онда

$$\iiint\limits_{\Omega^+} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i} d\tau_x = \iint\limits_{S} \sum_{i=1}^{3} A_i(y) \cdot \nu_i(y) ds_\nu \tag{1.3.2}$$

орындалады, мұндағы $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – шамасы S бетіне $y \in S$ нүктесінде жүргізілген сыртқы нормальдың бірлік векторы (яғни, нормаль Ω^- жаққа бағытталған).

(1.3.2) формула Ω^+ аймағының шекарасы құрама-тегіс болса да орындалады. (1.3.2) формуласының оң жағындағы (Ω^+ аймағынан алынған S шекарасының S_i құрама-тегіс бөліктері бойынша) алынған интеграл S бетін құрап тұрған барлық бөліктер $S_{i\ j}$, $j = 1,2,...k$ бойынша алынған интегралдардың қосындысына тең.

1.3.2 Гаусс-Остроградский формуласынан шығатын кейбір интегралдық теңдіктер. Айталық S құрама-тегіс шекарасы бар $\overline{\Omega^+}$ – тұйық аймағында $q(x) = (q_1, q_2, q_3, q_i)$ векторы берілсін. $q(x)$ өзінің бірінші ретті туындыларымен $\overline{\Omega^+}$ аймағында үзіліссіз деп ұйғарайық. Онда (1.3.2) формула бойынша

$$\iiint\limits_{\Omega^+} D\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right) q(z) d\tau_z = \iint\limits_{S} D(\nu_1, \nu_2, \nu_3) q(y) ds_y \ , \qquad (1.3.3)$$

өрнегін аламыз, мұндағы $D(X_1, X_2, X_3)$ келесі матрица:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & 0 & -X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & 0 & -X_1 \\ X_3 & -X_2 & X_1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (1.3.4)$$

$N(x, y)$ арқылы матрицалық дифференциалдық операторды белгілейік:

$$N(x, y) = -D^*\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right) \frac{1}{|x - y|} D\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right),$$

мұндағы $D^*(X_1, X_2, X_3)$ матрица:

$$D^* = \begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & 0 & X_3 & -X_2 \\ X_2 & -X_3 & 0 & X_1 \\ X_3 & X_2 & -X_1 & 0 \end{vmatrix},$$

ал $|x - y|$ – шамасы E_3 кеңістігіндегі x және y нүктелерінің ара қашықтығы.

Барлық $y \in S$ үшін матрицаны қарастырайық:

$$M(x,y) = -D^*\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{1}{|x-y|}D(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \tag{1.3.5}$$

мұндағы D матрицасы (1.3.4) формуламен анықталады, ал ν_1,ν_2,ν_3 шамалары S бетіне y нүктесінде жүргізілген сыртқы нормальдың косинустары. Кез келген $x\in\Omega^+$ нүктесі үшін

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4\pi}\iint_{|x-y|=\delta} M(x,y)q(y)ds_y = q(x) \tag{1.3.6}$$

орындалады.

$$u = \frac{1}{|x-y|}$$

функциясы $y\neq x$ болғанда

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = 0$$

Лаплас теңдеуінің шешімі болғандықтан, Ω^+ аймағының кез келген x және y нүктелері үшін $y\neq x$ болғанда келесі теңдік орындалады:

$$N(x,y)q(y) = -\frac{\partial}{\partial y_1}\left[D^*\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{1}{|x-y|}(q_2,q_1,-q_4,q_3)\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_2}\left[D^*\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{1}{|x-y|}(q_3,q_4,q_1,-q_2)\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_3}\left[D^*\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\frac{1}{|x-y|}(q_4,-q_3,q_2,q_1)\right]. \tag{1.3.7}$$

Ω^+ аймағынан x нүктесін оның $C(\delta,x)\subset\Omega^+$ маңайымен қоса алып тастап, Ω^+ аймағының қалған бөлігін Ω_1 арқылы белгілейміз. (1.3.7) теңдігін Ω_1 аймағы бойынша интегралдап және (1.3.2) Гаусс-Остроградский формуласын қолданып, (1.3.6) бойынша $\delta\to 0$ шегін алсақ

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y - \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega^+} N(x,y)q(y)d\tau_y = q(x),\ , \quad x\in\Omega^+ \tag{1.3.8}$$

теңдігіне келеміз.

Егер $x \in \Omega^-$, онда (1.3.7) теңдігін интегралдап, (1.3.2) бойынша

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y - \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega^+} N(x,y)q(y)d\tau_y = 0 \qquad (1.3.9)$$

теңдігін аламыз.

(1.3.8) және (1.3.9) формулалар комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі Коши теоремасы мен Коши интегралдық формуласының кеңейтілуі.

1.3.3 Коши-Риман жүйесінің үшөлшемді түрі. $z = x + iy$ комплекс айнымалы жазықтықтың белгілі бір аймағында аналитикалық $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функциясының нақты және жорамал бөліктері осы аймақтың әрбір нүктесінде бірінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеулерден тұратын Коши-Риман жүйесінің шешімі болады.

E_3 кеңістігінде Коши-Риман жүйесі орындалады. Оны румын математиктері К.Моисил және Н.Теодореско зерттеген. Ол жүйе бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің сызықтық жүйесі

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)q(x) = 0, \qquad \text{(M-T)}$$

мұндағы D - дифференциалдық операторы (1.3.4) формуламен беріледі, $x_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,2,3,$ ал $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) -$ ізделінді вектор.

Егер $q(x)$ векторының құрама-тегіс S шекарасы бар $\Omega^+ \subset E_3$ аймағында бірінші ретті үзіліссіз туындылары бар болса және Моисил-Теодорско жүйесін қанағаттандырса, онда (1.3.3) , (1.3.8) және (1.3.9) формулалардан

$$\iint_S D(\nu_1, \nu_2, \nu_3)q(y)ds_y = 0 \qquad (1.3.10)$$

және

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y = \begin{cases} q(x), & x \in \Omega^+ \\ 0, & x \in \Omega^- \end{cases} \qquad (1.3.11)$$

өрнектерін аламыз. (1.3.10) формула бір комплекс айнымалы функциялар курсынан белгілі

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f(z)dz = 0$$

(мұндағы $f(z)$ – функциясы аналитикалық функция, $\overline{D}$ аймағында, ал $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$ – өзара қиылыспайтын тұйық құрама – тегіс Жордан қисықтары; бұл $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ – қисықтары Γ_0 қисығымен шектелген ақырлы аймақта жатыр; D аймағы $(m+1)$ байланысты аймақ) формуласының E_3 кеңістігіндегі жазылуы, ал (1.3.11) формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \in C\overline{D} \end{cases}$$

Кошидың интегралдық формуласының жазылуы, (мұндағы $f(z)$ – функциясы құрама – тегіс Γ шекарасы бар D аймағында аналитикалық және үзіліссіз функция).

Егер $q(y) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ векторы тек қана S шекарасында ғана берілген болса, онда

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} M(x,y)q(y)ds_y \qquad (1.3.12)$$

өрнегінің E_3 кеңістігінің S шекарасында жатпайтын әрбір x нүктесінде мәні бар және бұл өрнек бірнеше рет дифференциалданатын төрткомпонентті вектор болып табылады.

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) D^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \begin{Vmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{Vmatrix}$$

болғандықтан (мұнда Δ – Лаплас операторы және $\frac{1}{|x-y|}$ өрнегі $x \neq y$ болғанда Лаплас теңдеуін қанағаттандырады) (1.3.12) формуламен анықталатын $p(x)$ векторы әрбір $x \in E_3$ нүктесінде $(x \notin S)$ Моисил-Теодореско жүйесін қанағаттандырады. Сондықтан (1.3.12) өрнекті бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі Коши-типтес интегралдың кеңейтілуі деп қарастыруға болады. Коши типтес интегралды еске алсақ: Г - тұйық немесе құрама-тегіс Жордан қисығы болсын және $f(t)$ функциясы Г қисығында берілген үзіліссіз функция болсын. Комплекс жазықтықтың Г қисығында жатпайтын кез келген z нүктесінде $\frac{f(t)}{t-z}$ өрнегі үзіліссіз, және

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

интегралы бар болады. Бұл интеграл Коши типтес интеграл деп аталатыны белгілі, ал (1.3.12) формула Коши типтес интегралдың аналогы.

Енді бір комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі Морер теоремасын есімізге түсірейік: егер $f(z)$ функциясы бірбайланысты D облысында және D облысында жатқан Г кез келген тұйық құрама-тегіс контур бойында үзіліссіз болса, сонымен қатар

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=0$$

орындалса, онда $f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық функция болады. Бұл Морер теоремасының кеңейтілуі ретінде келесі тұжырымды алуға болады: егер $q(x)$ векторы Ω^{+} аймағында үзіліссіз болса және осы Ω^{+} облысында жатқан тұйық, құрама – тегіс σ бетінде

$$\iint_{\sigma}D(\nu_1,\nu_2,\nu_3)q(y)ds_y=0 \qquad (1.3.13)$$

теңдігі орындалса, онда $q(x)$ функциясы әрбір $x\in\Omega^{+}$ нүктесінде Моисил-Теодореско жүйесінің шешімі болады. Бұл тұжырымның дұрыстығына көз жеткізу үшін К – кубын қарастырайық. К кубының шекарасы S болсын және ішінде x нүктесі бар дейік. К кубы Ω^{+} аймағында жатыр. К кубының қырлары координаталық жазықтықтарға параллель деп ұйғарайық.

$q(x)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ және

$$|q(x)-q(y)|<\varepsilon \qquad (1.3.14)$$

теңсіздігі К кубында жатқан $|y-x|\le\delta$ тұйық шарының барлық y нүктелері үшін орындалады.

$|y-x|\le\delta$ шарды іштей сызылған, қырлары К кубының жақтарына параллель кубты K_0 деп белгілейік. К кубының K_0 кубының сыртында жатқан бөлігін $x_i=c_i$, $i=1,2,3$ жазықтықтармен K_j кубиктеріне бөлеміз, бұл K_j диагональдары өте аз $h>0$ санынан аспайды.

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_0} M(x,y)q(y)ds_y+\sum_j\iint_{S_j} M(x,y)q(y)ds_y, \quad (1.3.15)$$

мұндағы S_0 және S_j сәйкес K_0 және K_j кубтарының беттері.

$q(x)$ бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан өте аз $h>0$ болғанда барлық $y\in S_j$ үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|q(y)-q(y^j)\right|<\varepsilon\left|y-y^j\right|^3, \quad (1.3.16)$$

мұндағы y^j – нүктесі K_j кубының центрі.

$$|x-y|^2=\left|x-y^j\right|^2+\left|y-y^j\right|^2-$$
$$-2\left|x-y^j\right|\cdot\left|y-y^j\right|\cdot\cos\overline{(x-y^j)}\,\hat{}\,\overline{(y-y^j)}\ , \quad y\in S_j$$

теңдігінен

$$\frac{|x-y|^3}{\left|x-y^j\right|^3}=\left(1+\gamma\frac{\left|y-y^j\right|}{\left|x-y^j\right|}\right)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}\left(1+\gamma\theta\frac{\left|y-y^j\right|}{\left|x-y^j\right|}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left|y-y^j\right|}{\left|x-y^j\right|}, \quad (1.3.17)$$

мұндағы $|\gamma|<4,\ 0<\theta<1$, өрнегін аламыз. (1.3.17) формуланы ескере отырып,

$$\frac{y-x}{|y-x|^3}=-\frac{x-y^j}{\left|x-y^j\right|^3}+\frac{y-x}{|y-x|^3}+\frac{x-y^j}{|y-x|^3}\frac{|y-x|^3}{\left|x-y^j\right|^3}=$$

$$=-\frac{x-y^j}{\left|x-y^j\right|^3}+\frac{y-x}{|y-x|^3}+$$

$$+\frac{x-y^j}{|y-x|^3}\left[1+\frac{3}{2}\left(1+\gamma\theta\frac{y-y^j}{x-y^j}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{y-y^j}{x-y^j}\right],$$

деп жазуға болады немесе

$$\frac{y-x}{|y-x|^3} = -\frac{x-y^j}{|x-y^j|^3} + \frac{y-y^j}{|y-x|^3} +$$
$$+\frac{3}{2}\left(1+\gamma\theta\frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|y-y^j|}{|x-y^j|}\frac{x-y^j}{|y-x|^3} \tag{1.3.18}$$

өрнегін аламыз. (1.3.11) теңдігін ескеріп, (1.3.15) теңдігін

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y - q(x) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\iint_{S_0} M(x,y)[q(y)-q(x)]ds_y + \frac{1}{4\pi}\sum_j \iint_{S_j} M(x,y)[q(y)-q(y^j)]ds_y, \tag{1.3.19}$$

түрінде жазуға болады. (1.3.13) шарттан

$$\iint_{S_j} D^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\frac{1}{|x-y^j|}\cdot D(\nu_1,\nu_2,\nu_3)[q(y)-q(y^j)]ds_y = 0 \tag{1.3.20}$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ мәндері $y \in S_j$ интегралдау нүктелерінде алынады.

(1.3.18), (1.3.20), (1.3.14) және (1.3.16) өрнектерін ескеріп, (1.3.19) өрнектен келесі бағалауды аламыз:

$$\left|\frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y - q(x)\right| < (c_0 + c\vartheta)\varepsilon,$$

мұндағы c_0 және c тұрақтылары ε және h шамаларынан байланысты емес оң анықталған тұрақтылар, ал ϑ арқылы K кубының көлемі белгіленген.

Сонымен, $q(x)$ векторы

$$q(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y$$

өрнегімен анықталады және жоғарыда айтылған тұжырымның дұрыстығы осылай дәлелденеді.

1.3.4 Интегралдың Коши бойынша басты мәні болуы. Егер $x = x^0$ нүктесі S бетінде жатса, (1.3.12) өрнектің оң жағындағы интегралдың мағынасы жоқ. Бірақ егер S бетінде берілген $q(y)$ векторы Гёльдер шартын қанағаттандырса,

$$|q(y') - q(y'')| < L_1 |y' - y''|^{h_1} \qquad (1.3.21)$$

онда бұл интегралдың мағынасы бар деуге болады.

Шынында да S бетінен центрі x^0 нүктесінде жатқан радиусы өте аз ε болатын σ сфераны алып, келесі интегралды қарастырайық:

$$I_\varepsilon(x^0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y) q(y) ds_y, \qquad (1.3.22)$$

мұндағы S_ε шамасы σ сфераның сыртында жатқан S бетінің бөлігі.

Егер $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(x^0) = I(x_0)$ шегі бар болса, осы шекті *Коши бойынша басты мәні бар сингуляр интеграл* деп атаймыз.

Егер S - тұйық, тегіс бет болса және онда берілген $q(y)$ векторы (1.3.21) шартты қанағаттандырса, онда бұл шек бар.

Шынында да, (1.3.22) интегралды келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x^0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M\left(x^0, y\right)\left[q(y) - q(x^0)\right] ds_y + q(x^0) - \\ - \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_1} M\left(x^0, y\right) q(x^0) ds_y, \end{aligned} \qquad (1.3.23)$$

мұндағы σ_1 шамасы Ω^+ аймағының сыртында жатқан σ сферасының бөлігі. Бұдан

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_1} M(x^0, y) q(x^0) ds_y = \frac{1}{2} q(x^0). \qquad (1.3.24)$$

өрнегі шығады. Келесі теңдік

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y)(q(y) - q(x^0)) ds_y = \frac{1}{4\pi}\iint_{S} M(x^0, y)(q(y) - q(x^0)) ds_y$$

меншіксіз интеграл болғандықтан (1.3.24) өрнекті ескере отырып, (1.3.23) өрнектегі шек $I(x^0)$ табылады деп ұйғаруға болады. Бұл шекті бұдан былай келесі интеграл символымен белгілейміз:

$$
\begin{aligned}
I(x^0) &= \frac{1}{4\pi}\iint_S M\left(x^0, y\right)q(y)ds_y = \\
&= \frac{1}{2}q\left(x^0\right) + \frac{1}{4\pi}\iint_S M\left(x^0, y\right)\left[q(y) - q\left(x^0\right)\right]ds_y.
\end{aligned}
\tag{1.3.25}
$$

S беті тегіс болған жағдайда (x^0 нүктесі S бетінің ішкі нүктесі) S_ε арқылы $C(\varepsilon, x^0)$ шарының сыртындағы S бетінің бөлігін бейнелеп, интегралдың Коши бойынша басты мәнін тағы да шек арқылы $\varepsilon \to 0$ ұмтылғанда өрнектеуге болады:

$$
I_\varepsilon(x^0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y)(q(y) - q(x^0))ds_y + \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(x^0, y)q(x^0)ds_y.
$$

Егер q векторы (1.3.21) Гельдер шартын қанағаттандыратын болса, бұл шек әрқашанда табылады.

1.3.5 Сохоцкий – Племель формуласы. Айталық S - тұйық Ляпунов беті болсын және $q(y)$- шамасы (1.3.12) формуланың оң жағындағы интегралдың векторлық тығыздығы. $q(y)$ - векторлық тығыздығы (1.3.21) Гельдер шартын қанағаттандырсын делік. (1.3.12) өрнекті келесі түрде жазуға болады:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{4\pi}\iint_S M(x, y)(q(y) - q(x^0))ds_y + \\
&+ \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(x, y)q\left(x^0\right)ds_y,
\end{aligned}
\tag{1.3.26}
$$

мұндағы x^0– нүктесі S бетінің кез келген тағайындап алған нүктесі. (1.3.26) формуладан

$$
\begin{aligned}
&p(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_S M(x, y)(q(y) - q(x^0))ds_y + q(x^0), \\
&x \in \Omega^+,
\end{aligned}
\tag{1.3.27}
$$

және

$$p(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)(q(y) - q(x^0))ds_y, \quad x \in \Omega^-, \tag{1.3.28}$$

формуласы шығады, мұндағы Ω^+ аймағы S бетімен шектелген ақырлы аймақ, ал $\Omega^- = C\overline{\Omega^+}$.

Бір комплекс айнымалыдан тәуелді функциялар теориясындағыдай (1.3.27) және (1.3.28) формулаларымен берілген $p^+(x^0)$ және $p^-(x^0)$ функцияларының шектері бар екені дәлелденеді ($x \to x^0$, $x \in \Omega^+$ және $x \to x^0$, $x \in \Omega^-$). Сондықтан (1.3.25) формуласының негізінде

$$p^+(x^0) = \frac{1}{2}q(x^0) + \frac{1}{4\pi}\iint_S M(x^0,y)q(y)ds_y, \tag{1.3.29}$$

және

$$p^-(x^0) = -\frac{1}{2}q(x^0) + \frac{1}{4\pi}\iint_S M(x^0,y)q(y)ds_y, \tag{1.3.30}$$

өрнектерін аламыз. (1.3.29) және (1.3.30) формулаларды *Сохоцкий – Племель формулалары* деп атайды.

(1.3.29) және (1.3.30) формулаларды қоссақ және азайтсақ:

$$p^+(x^0) + p^-(x^0) = \frac{1}{2\pi}\iint_S M(x^0,y)q(y)ds_y,$$

және

$$p^+(x^0) - p^-(x^0) = q(x^0).$$

теңдіктерін аламыз.

1.3.6 Гармоникалық функциялар.

Анықтама. Ω^+ аймағында бірмәнді нақты функцияның $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ үзіліссіз екінші ретті туындылары бар болса және $\Delta u = 0$ Лаплас теңдеуін қанағаттандырса, онда ол *гармоникалық функция* деп аталады. $q(x) = (0, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3})$ векторы, мұндағы $u(x)$ функциясы Ω^+ аймағында гармоникалық функция, Моисил – Теодореско жүйесінің шешімі болады.

Айталық $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ - нүктесі Ω^+ аймағының кез келген нүктесі болсын. Ω^+ аймағында $\left|x - x^0\right| = r$ шекарасымен бірге жатқан $C(r, x^0)$шарының әрбір x нүктесінде (1.3.11) өрнекті ескере отырып,

$$q(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\left|y - x^0\right| = r} M(x, y) q(y) ds_y, \qquad (1.3.31)$$

өрнегін аламыз, демек $u(x)$ гармоникалық функциясының x нүктесінде барлық ретті туындысы бар.

Егер $u(x)$ функциясы Ω^+ аймағында берілген гармоникалық функция болса, онда оны бірінші ретті дербес туындылардың бірі ретінде алып, мысалы Ω^+ аймағында гармоникалық функция $\vartheta(x)$ туындысы $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_3}$ ретінде алсақ, онда (1.3.31) формуладан

$$u(x^0) = \frac{1}{4\pi \cdot r^2} \iint_{\left|y - x^0\right| = r} u(y) ds_y, \qquad (1.3.32)$$

екені шығады.

Бір комплекс айнымалыдан тәуелді функциялар теориясы сияқты, (1.3.32) формуланы қолданып келесі тұжырымға келеміз: Ω^+ аймағында гармоникалық $u(x)$ функциясының (тұрақты емес) бұл аймақтың бірде-бір ішкі нүктесінде ешқандай максимум немесе минимум нүктесі болмайды. (гармоникалық функция үшін экстремум принципі).

Шар үшін *Дирихле есебі*: $C(r, x^0)$ шарында гармоникалық функция болатын, ал тұйық $\overline{C(r, x^0)}$ шарда үзіліссіз функция болатын, ал $\left|y - x^0\right| = r$ сферасында берілген үзіліссіз $f(y)$ мәндер қабылдайтын $u(x)$ функциясын табу керек.

Функцияның гармоникалық қасиеті параллель көшу жасағанда және ұқсас түрлендірулер кезінде сақталатын болғандықтан $x^0 = 0$ және $r = 1$ деп есептейміз.

Гармоникалық функцияның экстремум принципі бойынша Дирихле есебінің бір шешімнен артық шешімі болмайды (Дирихле есебінің шешімінің жалғыздық қасиеті). Келесі өрнектер

$$\frac{1}{|y-x|}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|y-x|} = \frac{y_i - x_i}{|y-x|^3}, \quad i = 1,2,3$$

$x \neq y$ болғанда x_1, x_2, x_3 айнымалыларының функциясы бола отырып Лаплас теңдеуінің шешімдері болады. Онда келесі

$$\frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^3} = -\frac{1}{|y-x|} + \frac{2}{|y-x|^3} y(y-x) \tag{1.3.33}$$

теңдіктің нәтижесінде

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^3} f(y) ds_y \tag{1.3.34}$$

функциясы $|x| < 1$ шарында гармоникалық функция болатынын көреміз. (1.3.11), (1.3.29) және (1.3.33) формулаларынан Моисил – Теодореско жүйесінің шешімі болып түрған $q(x) = (0,0,0,1)$ векторы үшін

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1} \frac{y(y-x)}{|y-x|^3} ds_y = 1 \tag{1.3.35}$$

теңдеуінің $|x| < 1$ шарының әрбір x нүктесінде орындалатыны және

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x^0} \frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1} \frac{y(y-x)}{|y-x|^3} ds_y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1} \frac{y(y-x^0)}{|y-x^0|^3} ds_y = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x^0|} = 1 \end{aligned} \tag{1.3.36}$$

теңдігінің $|y| = 1$ сфераның әрбір x^0 нүктесінде орындалатыны шығады.

$$\iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x|}$$

меншікті интегралы бірқалыпты жинақты болғандықтан (1.3.36) теңдікті ескере отырып,

$$\lim_{x \to x^0} \frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x|} = \frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1} \frac{ds_y}{|y-x^0|} = 1,$$

және бұдан Дирихле есебінің шешімінің жалғыздығын ескере отырып

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1}\frac{ds_y}{|y-x|}=1, \qquad (1.3.37)$$
$$|x|\le 1,$$

теңдігін аламыз. (1.3.33), (1.3.35) және (1.3.37) теңдіктердің негізінде

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{|y|=1}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^3}ds_y=1 \qquad (1.3.38)$$

теңдігі $|x|\le 1$ тұйық шардың әрбір нүктесінде орындалады. (1.3.38) теңдікті қолдана отырып, (1.3.34) формуламен анықталатын $u(x)$ функциясы $|x|<1$ шардың ішіндегі $|y|=1$ сферасындағы x^0 нүктесіне ұмтылғанда $f(x^0)$ мәніне ұмтылатынын байқауға болады.

Сондықтан (1.3.34) формула жоғарыда айтылған Дирихле есебінің шешімі болады. Бұл формула *Пуассон формуласы* деп аталады. $|x|=1$ теңдігімен анықталған S сферасында $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_S=\varphi$ шекаралық шартын қанағаттандыратын, $\overline{C(1,0)}$ тұйық шарда бірінші ретті үзіліссіз туындылары бар, $C(1,0)$ шарында гармоникалық болатын $u(x)$ функциясы үшін келесі интегралдық формула орындалады:

$$u(x)=\int_0^{x_1}\vartheta(t,x_2,x_3)dt+\omega(x_2,x_3), \qquad (1.3.39)$$

мұндағы $\vartheta(x)$ функциясы $C(1,0)$ шарында гармоникалық функция болады және S сферасында φ шекаралық мәндер қабылдайды, ал $\omega(x_2,x_3)-$бұл келесі теңдеудің жалпы шешімі:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x_3^2}=-\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} \qquad (1.3.40)$$

$\vartheta(x)$ функциясын (1.3.34) Пуассон формуласымен анықтап, (1.3.39) формуладан (1.3.40) өрнегін ескере отырып

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{(1-y_1^2-x_2^2-x_3^2)(x_1-y_1)}{\delta R^{\frac{1}{2}}}+\frac{x_1+y_1}{R^{\frac{1}{2}}}-\right.$$
$$\left.-arsh\frac{x_1-y_1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)_S ds_y+\gamma(x_2,x_3) \tag{1.3.41}$$

өрнегін аламыз, мұндағы $\delta=(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$, $R=|x-y|^2$, ал $\gamma(x_2,x_3)$ функциясы $x_2^2+x_3^2<1$ цилиндрінде гармоникалық функция болады. Ол $u(x)$ функциясымен келесі өрнек арқылы байланысады:

$$\gamma(x_2,x_3)+u(0,0,0)+2\operatorname{Re}u\left(0,\ \frac{x_2+ix_3}{2},\ \frac{x_2+ix_3}{2i}\right)=0.$$

1.3.7 Гармоникалық функциялардың градиенттер тізбегінің жинақтылық белгісі. Бір комплекс айнымалыдан тәуелді функциялар теориясындағы аналитикалық функциялар тізбегінің жинақтылығын келесі теорема түрінде жазуға болады: $D\subset E_2$ аймағындағы гармоникалық $u_n(x_1,x_2)$ функциясының дербес туындылар $\left\{\frac{\partial u_n(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі D аймағында нольге бірқалыпты жинақты болса, ал $\left\{\frac{\partial u_n(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right\}$ тізбегі $x_1^0+ix_2^0\in D$ тағайындалған нүктесінде нольге жинақталатын болса, онда $\{grad\ u_n(x_1,x_2)\}$ тізбегі D аймағында жатқан кез келген тұйық облыста нольге бірқалыпты ұмтылады.

Бұл теореманы үөлшемді кеңістікте келесі тұжырым түрінде айтуға болады: Егер $D\subset E_3$ облысында гармоникалық $\{u_n(x_1,x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялар тізбегі келесі қасиеттерді қанағаттандырса

a) $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right\}$ тізбегі Ω облысында x_1,x_2,x_3 айнымалыларына қатысты нольге бірқалыпты жинақталса,

b) $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right\}$ тізбегі Ω облысында x_2,x_3 айнымалыларына қатысты нольге бірқалыпты жинақталса,

c) $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_3}\right\}$ тізбегі Ω облысында тағайындалған нүктесінде нольге жинақталса, мысалы $(0,0,0)$ нүктесіне, онда Ω облысында жатқан шектелген, тұйық $\overline{\Omega^*}$ облысында $\{grad\ u_n(x)\}$ тізбегі x_1, x_2, x_3 айнымалылары бойынша нольге бірқалыпты жинақталады.

Бұл тұжырымды дәлелдеу үшін радиусы r, центрі $x^0 \in \Omega^*$ болатын $\overline{C(r, x^0)}$ тұйық шары Ω облысында жататындай r оң санын табуға болатынын байқаймыз. $C(r, x^0)$ шарының ішінде $\{u_n(x)\}$ тізбегінен алынған әрбір гармоникалық функция үшін (1.3.41) формула негізінде келесі өрнекті жазуға болады;

$$u_n(x) = \frac{1}{4\pi r}\iint\limits_S \left[\frac{r^2 - (y_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0) - (x_3 - x_3^0)^2}{\delta R^{\frac{1}{2}}}(x_1 - y_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{x_1 + 2x_1^0 + y_1}{R^{\frac{1}{2}}} - arsh\frac{x_1 - y_1}{\delta^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{\partial u_n}{\partial y_1}\partial s_y + +\gamma_n\left(x_2, x_3;\ x^0\right), \qquad (1.3.42)$$

мұндағы $S-$дегеніміз $\left|y - x^0\right| = r$ сферасы, ал γ_n-функциясы $(x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 < r^2$ цилиндрінде x_2, x_3 айнымалыларына қатысты анықталған гармоникалық функция.

δ және δ_1 сандары арқылы $\delta < \delta_1 < r$ шартын қанағаттандыратын оң сандарды алайық. (1.3.42) формуламен берілген $u_n(x_1, x_2, x_3)$ функциясының $(0, x_2, x_3)$ және $(0,0,0)$ нүктелеріндегі сәйкес $\frac{\partial u_n}{\partial x_2}$ және $\frac{\partial u_n}{\partial x_3}$ дербес туындыларын тауып, а), b) және с) шарттары бойынша $\left\{\frac{\partial \gamma_n(x_2, x_3;\ 0)}{\partial x_2}\right\}$ тізбегі $x_2^2 + x_3^2 \le \delta_1$ болғанда нольге бірқалыпты жинақталатынын және $\left\{\frac{\partial \gamma_n(x_2, x_3, 0)}{\partial x_3}\right\}$ тізбегі $x_2 = 0,$ $x_3 = 0$ болғанда нольге жинақталатынын байқауға болады. Бұдан жоғарыдағы теорема бойынша $\{grad\ \gamma_n(x_2, x_3;\ 0)\}$ тізбегінің $x_2^2 + x_3^2 < \delta$ болғанда нольге бірқалыпты жинақталатыны шығады. Онда (1.3.42) формула мен а), b) және с) шарттары бойынша $\{grad\ u_n(x)\}$ тізбегі $C(\delta, 0)$ шарында нольге бірқалыпты жинақталатыны шығады. $C(\delta, 0)$ шарының центрін Ω^* аймағында жатқан үзіліссіз жол L бойынша x^0 нүктесіне көшіріп және b) шарты x^0 нүктесінде орындалады деп есептеп, алдыңғы талдауларды қайталасақ $C(\delta, x^0)$ шарында

$\{grad\ u_n(x)\}$ тізбегі нольге бірқалыпты жинақталатыны көрінеді. Осыдан Гейне – Борель – Лебег леммасы бойынша жоғарыдағы тұжырым дәлелденді.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Ляпунов беті дегеніміз не?
2. Ляпунов бойынша құрама-тегіс бет деген не?
3. Гаусс-Остроградский формуласы қалай жазылады?
4. Коши-Риман жүйесінің үшөлшемді түрі.
5. Моисил-Теодореско формуласы.
6. Интегралдың басты мәнінің бар болуы.
7. Сохоцкий-Племель формуласы.
8. Гармоникалық функция дегеніміз не?
9. Пуассон формуласы.
10. Гармоникалық функциялардың градиенттер тізбегінің жинақтылық белгісі.

Жаттығулар.

1) Қос қатардың жинақтылығын тексеру керек:

$$\sum_{n,m\geq 0}\frac{m-n}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)},\qquad m+n>2.$$

2) Келесі тұжырымның дұрыстығын дәлелдеу керек: $\{S_{n_1,n_2,\dots,n_m}\},\ n_1,n_2,\dots,n_m\geq 0$ тізбегі жинақты болу үшін $\forall\varepsilon>0$ санына сәйкес $\left|S_{N_1+p_1,N_2+p_2,\dots,N_m+p_m}-S_{N_1,N_2,\dots,N_m}\right|<\varepsilon$ теңсіздігі кез келген $p_1,p_2,\dots,p_m$ теріс емес бүтін сандары үшін орындалатындай натурал сандар жүйесі $N_1,N_2,\dots,N_m$ табылуы қажетті және жеткілікті.

3) $\sum\limits_{n,m\geq 0}\frac{(m+n)!}{m!n!}z_1^m z_2^m$ дәрежелік қатары $|z_1|+|z_2|<1$ орындалғанда ғана абсалют жинақты екенін дәлелдеу керек.

4) Егер $\operatorname{Re} f(z)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ болса, онда $f(z)$ аналитикалық функциясын табу керек.

5) $\operatorname{Re} f(z)=x\log\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot arctg\,\frac{y}{x}$, бойынша $f(z)$ көпмәнді функцияның z жазықтығында нақты осьтің оң жарты осі бойынша қиылған бұтағын табу керек және $z>0$ болғанда қиықтың жоғарғы бөлігінде $f(z)$ функциясы нақты мән қабылдайтын болсын.

6) Гурс формуласын қолданып

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot e^{i\varphi} + r \cdot e^{i\varphi_0}}{R \cdot e^{i\varphi} - r \cdot e^{i\varphi_0}} \operatorname{Re} f\left(z_0 + R \cdot e^{i\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi_0 - \varphi)} h\left(z_0 + R \cdot e^{i\varphi}\right) d\varphi,$$

мұндағы $h\left(z_0 + R \cdot e^{i\varphi}\right) = u\left(x_0 + R\cos\varphi,\ y_0 + R\sin\varphi\right)$, және

$$t - z_0 = R \cdot e^{i\varphi},$$

$$z - z_0 = r \cdot e^{i\varphi_0}$$

өрнектерін қолданып, келесі Шварц формуласын

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{u(t)dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(t)dt}{t - z_0} + ic =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{t - 2z_0 + z}{(t - z_0)(t - z)} u(t)dt + ic,$$

(мұндағы $c = \operatorname{Im} f(z_0)$ тұрақты нақты шама) шығару керек.

7) Айталық $q = (q_1, q_2, q_3)$ үшкомпонентті векторы құрама – тегіс S шекарасы бар $\overline{\Omega^+}$ тұйық облысында дифференциалдансын және әрбір $x \in \Omega^+$ нүктесінде $div\ q = 0,\ \ rot\ q = 0$ жүйелерін қанағаттандырсын. Онда

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S M_*(x,y) q(y) ds_y = \begin{cases} q(x), & x \in \Omega^+ \\ 0, & x \in \Omega^- \end{cases}$$

мұндағы $M_*(x,y)$ матрицасы $M(x,y)$ матрицасынан бірінші жол мен бірінші бағанды сызып тастағанда шыққан матрица. Егер q векторы S шекарасында берілсе және үзіліссіз болса, онда

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S M_*(x,y) q(y) ds_y$$

векторы $(x \in \Omega^+)$ $div\ q = 0$, $rot\ p = 0$ жүйелерінің шешімі болатынын дәлелдеу керек, егер

$$\iint_S \{[\nu_3(y_2 - x_2) - \nu_2(y_3 - x_3)]q_1 + [\nu_1(y_3 - x_3) - \nu_3(y_1 - x_1)]q_2 +$$

$$+ [\nu_2(y_1 - x_1) - \nu_1(y_2 - x_2)]q_3\} \frac{1}{|x - y|^3} ds_y = const.$$

8) Егер $u(x)$ функциясы $\Omega \in E_3$ облысында гармоникалық болса, онда

$$u(x^0)=\frac{3}{4\pi\rho^3}\iiint\limits_{|y-x^0|<\rho}u(y)d\tau_y$$

болатынын дәлелдеу керек, мұндағы $x^0\in\Omega$, ал шар $C(\rho,x^0)\subset\Omega$.

9) Пуассон формуласын (1.3.34) қолданып Ω аймағындағы $u(x)$ гармоникалық функциясы аналитикалық болатынын дәлелдеу керек.

10) $|x|<1$ дөңгелегінде $u(x)=u(x_1,x_2)$ гармоникалық функциясы үшін Шварц леммасы: Егер $|x|<1$ болғанда $|grad\ u(x)|<1$ және $x=0$ болғанда $grad\ u(x)=0$, болса, онда $|grad\ u(x)|\le|x|$. Осы тұжырым $u(x)$ гармоникалық функциясының тәуелсіз айнымалылырының саны екіден көп болса орындала ма?

11)

$$P_\alpha=\sum_{n\ge0}(-1)^n\frac{x_3^{2n}}{(2n)!}\Delta^n(x_1^\alpha x_2^{m-\alpha}),\quad \alpha=0,1,\ldots,m$$

$$Q_\beta=\sum_{n\ge0}(-1)^n\frac{x_3^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n(x_1^\beta x_2^{m-\beta-1}),\quad \beta=0,1,\ldots,m-1.$$

мұндағы $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, өрнектері x_1,x_2,x_3 тәуелсіз айнымалыларына байланысты, m дәрежелі барлық сызықты тәуелсіз біртекті гармоникалық полиномдарды бейнелейтінін дәлелдеу керек.

II.бөлім

2.1 Комплекс кеңістіктегі облыстар

2.1.1 Кейбір қарапайым облыстар. C^m кеңістігінің қарапайым облыстарын қарастырайық. Облыс деп ашық, байланысты жиынды айтатын боламыз. Кез-келген нүкте өзінің маңайымен қоса осы жиынға жататын болса, оны ашық жиын деп, ал $\forall z', z'' \epsilon D$ нүктелерін осы жиында жататын үзіліссіз сынықтармен қосуға болатын болса, онда ол жиынды байланысты жиын деп атаймыз, яғни байланысты жиын үшін үзіліссіз жол $\gamma: [0,1] \to D$ табылып, бұл үшін

$$\gamma(0) = z', \gamma(1) = z'' \tag{2.1.1}$$

орындалады. Көп өлшемді комплекс талдаудағы қарапайым облыстардың бірі - шар.

Шар. Центрі $a \in C^n$ нүктесі , радиусы r болатын шар келесі түрде жазылады:

$$B(a,r) = \{z \in C^n: |z-a| < r\}. \tag{2.1.2}$$

(2.1.2) кәдімгі евклид шары, оның шекарасы $(2n-1)$ - өлшемді сфера болады:

$$S^{2n-1} = \{z \in C^n: |z-a| = r\}. \tag{2.1.3}$$

Полидөңгелек (немесе полицилиндр). Центрі $a \in C^n$ нүктесі радиусы r полидөңгелек келесі түрде анықталады :

$$U(a,r) = \{z \in C^n: \|z-a\| < r\}. \tag{2.1.4}$$

(2.1.4) – центрі a нүктесіндегі p полидөңгелекті метрикадағы шар. Бұл центрлері a_υ нүктесіндегі радиусы r болатын тең n жазық дөңгелектердің көбейтіндісі болады.

Полидөңгелектің жалпы жағдайын қарастыруға болады: центрі a нүктесінде және векторлық радиусы $r = (r_1, \dots, r_n)$ болатын полидөңгелекті келесі түрде жазуға болады:

$$U(a,r) = \{z \in C^n: |z_\upsilon - a_\upsilon| < r_\upsilon \ \upsilon = 1, \dots, n\}. \tag{2.1.5}$$

(2.1.5) полидөңгелектің шекарасы ∂U ең болмағанда бір координатасы z_υ берілген υ-шы дөңгелектің шекарасында жататын, ал қалған координаталары

z_μ $(\mu \neq \upsilon)$ тұйық дөңгелектерде өзгеретін нүктелер жиыны. Бұл шекара n жиынға бөлінеді:

$$= \{z: |z_\upsilon - a_\upsilon| = r_\upsilon,\ |z_\mu - a_\mu| \leq r_\mu \quad (\mu \neq \upsilon)\}. \qquad (2.1.6)$$

(2.1.6) жиындарының әрқайсысының өлшемі $2n-1$. Сондықтан полидөңгелектің барлық шекарасының $dU = \bigcup_{\upsilon=1}^{n} \Gamma^\upsilon$ өлшемі $(2n-1)$ болады. Барлық Γ^υ жиындар өлшемі n болатын жиын

$$\Gamma = \{z: |z_\upsilon - a_\upsilon| = r_\upsilon, \quad \upsilon = 1,2,\dots,n\} \qquad (2.1.7)$$

бойынша қиылысады. (2.1.7) жиынды полидөңгелектің тұлғасы деп атайды және бұл n шеңбердің көбейтіндісіне тең.

Бидөңгелекті қарастырайық: Центрі бас нүктеде, ал радиусы 1-ге тең бидөңгелекті келесі түрде жазамыз:

$$U = \{z \in C^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}. \qquad (2.1.8)$$

(2.1.8) - төрт өлшемді дене, екі цилиндрдің қиылысынан шығады:

$$x_1^2 + x_3^2 < 1 \quad \text{және} \quad x_2^2 + x_4^2 < 1. \qquad (2.1.9)$$

Ол дененің шекарасы үш өлшемді дене

$$\partial U = \Gamma^1 \cup \Gamma^2, \qquad (2.1.10)$$

(2.1.10) формуласындағы $\Gamma^1: \{|z_1| = 1, |z_2| \leq 1\}$ – бұл да үш өлшемді дене. Бұл үш өлшемді дене бірпараметрлі дөңгелектер үйіріне бөлінеді:

$$\Gamma^1 = \bigcup_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ z_1 = e^{i\theta},\ |z_2| \leq 1 \right\}$$

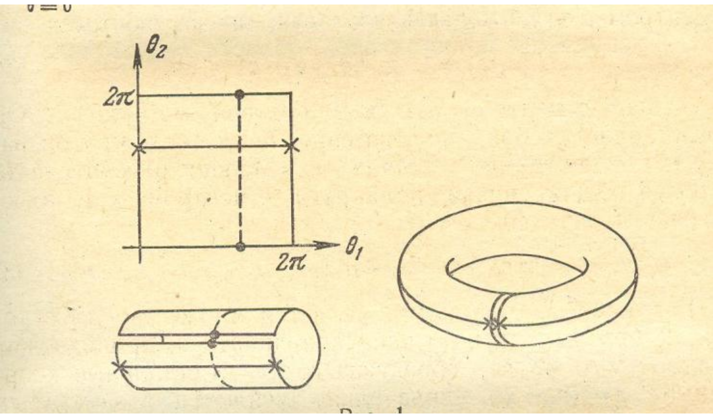
және Γ^2- осы сияқты дене. Бидөңгелектің тұлғасы $\Gamma = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$ екі өлшемді тор $\Gamma = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$; шынында да $z_1 = e^{i\theta_1}; z_2 = e^{i\theta_2}$ бейнелеуі

$$\{0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi\}$$

квадратын Г - торға гомеоморфты 1-суреттегідей бейнелейді. Г - торы бірпараметрлі шеңберлер үйіріне бөлінеді:

$$\{z_1 = e^{i\varphi_1},\ |z_2| = 1\} \quad \text{және} \quad \{|z_1| = 1,\ z_2 = e^{i\varphi_2}\}, \qquad (2.1.11)$$

$0 \leq \theta_1,\ \ \theta_2 < 2\pi$, 1-суретте әр үйірдің бір мүшелері көрсетілген.



1-сурет

Тор екі үшөлшемді цилиндрдің $\{x_1^2 + x_3^2 = 1\}$ және $\{x_2^2 + x_4^2 = 1\}$ қиылысы болады және R^4 – кеңістігінде

$$\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2\} \qquad (2.1.12)$$

сферасында жатады.

Сонымен бидөңгелек дегенді геометриялық түрде былай түсіндіруге болады: C^2 – де үшөлшемді сфера $\{|z| = \sqrt{2}\}$ аламыз. Бұл сферада тор таңдап алуға болады. Тор $\Gamma = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$ болсын. Бұл торға екі үшөлшемді денені жабуға болады: $\Gamma^1 = \{|z_1| = 1, |z_2| \le 1\}$ және $\Gamma^2 = \{|z_1| \le 1, |z_2| = 1\}$. Бұл денелер шардың қабатында $\{1 \le |z| \le \sqrt{2}\}$ жатыр. Бұл екі дененің бірігуі $\Gamma^1 \cup \Gamma^2$ бидөңгелекті шектейді.

Полидөңгелекті облыстар (немесе **полицилиндрлік облыстар**). C^n-кеңістігінде полицилиндрлік облыстар n жазық облыстың көбейтіндісі ретінде

$$D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \qquad (2.1.13)$$

анықталады. Егер барлық D_υ - бір байланысты аудандар болса, онда (2.1.13) ауданы шарға гомеоморфты болады. (2.1.13) полидөңгелек облыстың шекарасы ∂D өлшемі $(2n - 1)$ болатын n жиынға бөлінеді:

$$\Gamma^\upsilon = \{z\colon\ z_\upsilon \in \partial D_\upsilon, \quad z_\mu \in \overline{D}_\mu, \mu \ne \upsilon\}. \qquad (2.1.14)$$

(2.1.14) формуласындағы барлық Γ^υ-дің ортақ бөлігі n өлшемді жиын

$$\Gamma = \{z\colon \quad z_\upsilon \in \partial D_\upsilon, \quad \upsilon = 1, \ldots, n\}. \qquad (2.1.15)$$

(2.1.15) өрнекті D- полидөңгелекті облыстың тұлғасы деп атайды.

2.1.2 Рейнхарт және Хартогс облыстары. Рейнхарт облысы центрі $a \in C^n$ нүктесіндегі келесі қасиеті бар облыс ретінде анықталады: $z^0 = \{z_\upsilon^0\}$ нүктесімен қоса облысқа кез-келген $z = \{a_\upsilon + (z_\upsilon^0 - a_\upsilon)e^{i\theta_\upsilon}\}, \quad 0 < \theta_\upsilon < 2\pi$

нүктесі де тиісті болу керек.

Анықтама. Егер z^0 нүктесімен қоса облысқа барлық $z = \{z_\upsilon\}$ нүктелері жатса (бұл нүктелер $|z_\upsilon - a_\upsilon| \leq |z_\upsilon^0 - a_\upsilon|$ шартын қанағаттандырады), онда центрі а нүктесінде тұрған Рейнхарт облысы *толық* облыс деп аталады.

Шарлар және полицилиндрлер толық Рейнхарт облысы бола алады. $n = 1$ болса, сақина $r < |z - a| < R$ толық емес Рейнхарт облысы болады, ал дөңгелек $\{|z - a| < R\}$ толық Рейнхарт облысы болады.

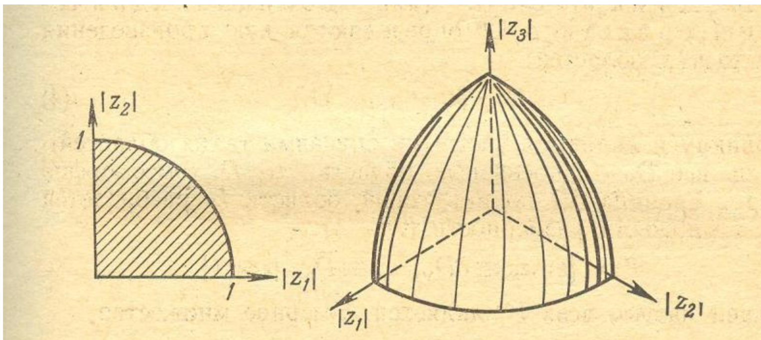
Жылжыту арқылы Рейнхарт облысының центрін $a = 0$ нүктесіне ауыстыруға болады. Мұндай облыста кез келген $\{z_\upsilon\}$ нүктесімен қоса барлық $|z_\upsilon|$, $(\upsilon = \overline{1, n})$ нүктелер де жатады. Осыны ескере отырып , біз

$$z \to \alpha(z)=(|z_1|, \dots, |z_n|) \tag{2.1.16}$$

бейнелеуін, яғни $2n$ өлшемді C^n кеңістігінің n өлшемді R^n кеңістігіне бейнелеуін қарастырайық. n өлшемді R^n кеңістігін абсолют октант деп атайды.

$$R_+^n = R_+ \times \dots \times R_+, \tag{2.1.17}$$

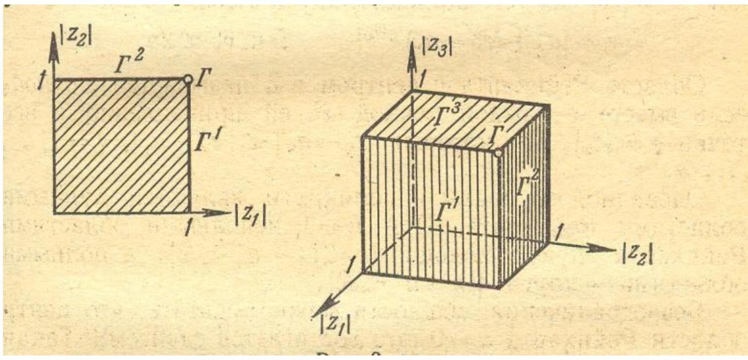
(2.1.17) формуласындағы $R_+ = [0, \infty)$ - теріс емес сандардың жарты осі. (2.1.16) өрнегімен берілген α бейнелеуі: $C^n \to R_+^n$ D Рейнхарт облысын нүктелер жиынына $D_+ \to R_+^n$ да бейнелейді. Нүктелер жиынын D Рейнхарт облысының диаграммасы деп атайды. Егер D - толық Рейнхарт облысы болса, онда D_+ облысы өзінің әрбір $\{|z_\upsilon^0|\}$ нүктесімен тікбұрышты параллелепипедте $\{|z_\upsilon| \leq |z_\upsilon^0|, (\upsilon = \overline{1, n})\}$ жатады.



2-сурет

Рейнхарт облысының диаграммасы $n = 2$ жағдайда.

2 –ші және 3 суреттерде сәйкес $\{|z| < 1\}$ шары мен $\{|z_\upsilon| < 1\}$ полидөңгелегінің Рейнхарт диаграммасы $n = 2$ және $n = 3$ жағдайында көрсетілген. 3 - суретте Γ^υ жиындары мен Γ - тұлғасы көрсетілген.



3-сурет

Хартогс облысы. $\{z_n = a_n\}$ симметрия жазықтығы бар Хартогс облысының келесі қасиеті бар: Әрбір $z^0 = \{z_\upsilon^0\}$ нүктесімен қоса кез келген

$$\forall z = \left(z_1^0, z_2^0, \dots, z_{n-1}^0,\ a_n + (z_n^0 - a_n)e^{i\theta_n}\right),\ 0 < \theta_n < 2\pi$$

нүктесі де осы облыста жату керек.

Анықтама. Егер әрбір z^0 нүктесімен қоса барлық $z_\upsilon = \upsilon_\upsilon^0$, $(\upsilon = \overline{1, n-1})$ нүктелері облыста жатса, ал

$$|z_n - a_n| \le |z_n^0 - a_n| \tag{2.1.18}$$

орындалса, онда Хартогс облысы *толық* деп аталады.

(2.1.18) Хартогс облысы Рейнхарт облысына қарағанда кең.

$\{z_n = 0\}$ симметрия жазықтығы бар Хартогс облысын $(2n-1)$-өлшемді кеңістікте β бейнелеуімен

$$\beta: \mathrm{C}^n \to C^{n-1} \times R_+$$

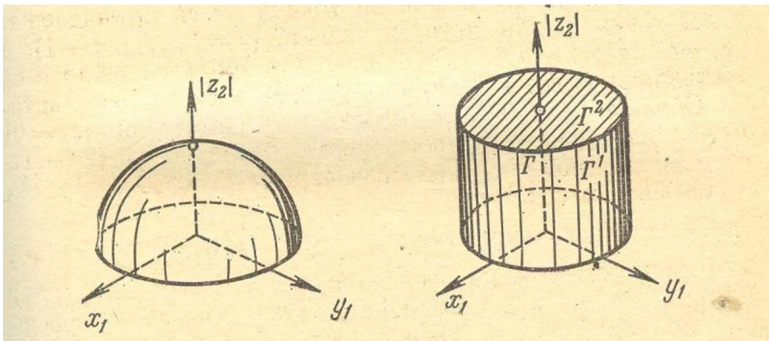
бейнелеуге болады:

$$z \to \beta(z) = \{z_1, \dots, z_{n-1}, |z_n|\} \tag{2.1.19}$$

Қысқаша, $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ арқылы z нүктесінің C^{n-1} кеңістігіне проекциясын белгілейік, ал D' бұл D облысының C^{n-1}-ге проекциясы болсын, яғни $z \in D$ үшін z' нүктелердің жиынтығы. Хартогс толық облысында әрбір $\left(z'^0, |z_n^0|\right)$ нүктесімен қоса

$$\left\{\left(z'^0, |z_n|\right): |z_n| \le |z_n^0|\right\}$$

кесіндісі де жатады.



4-сурет

4-суретте C^2 кеңістігінен шар мен бидөңгелек бейнеленген, мұндағы Γ^1 және Γ^2 шекараның үш өлшемді бөліктері, ал Γ- бидөңгелектің тұлғасы.

2.1.3 Дөңгелекті облыстар және трубалы облыстар. Дөңгелекті облыстар дегеніміз центрі $a \in C^n$ нүктесінде жатқан облыстар, олар z нүктесімен қоса $a + (z - a)e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi$ нүктелерін де алып жатыр, яғни центрі a нүктесінде, радиусы $|z - a|$ болатын және z пен a нүктелері арқылы өтетін комплекс түзудегі шеңбер. Ал *толық* дөңгелек облыстарда z пен қоса $\{a + (z - a)\xi, |\xi| \leq 1\}$ дөңгелегі де жатады.

Егер $a = 0$ болса, онда

$$(z_1, \dots, z_n) \to \left(\frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, z_n\right) \qquad (2.1.20)$$

түрлендіруі дөңгелекті облысты Хартогс облысына көшіреді. (2.1.20) түрлендіруі $z_n = 0$ болғанда ерекшелігі бар және $D \backslash \{z_n = 0\}$ анықталған.

Трубалы (немесе цилиндрлі) **облыстар** келесі қасиеті бар облыс ретінде анықталады: әрбір $z^0 = \{z_v^0\}$ нүктесімен қоса, кез-келген $z = \{z_v^0 + iy_v\}$, $-\infty < y_v < \infty, (v = \overline{1, n})$ нүктесі де осы облыста жатады. Кез-келген трубалы облысты көбейтінді түрінде

$$B \times R^n(y) \qquad (2.1.21)$$

бейнелеуге болады, (2.1.21) формуласындағы B - облыстың негізі, яғни $R^n(x), x = (x_1, \dots, x_n)$ n-өлшемді нақты кеңістіктің қандай да бір облысы, ал $R^n(y)$ кеңістігі $y = (y_1, \dots, y_n)$ нүктелерінің нақты кеңістігі. Сонымен трубалы облыс өзінің негізі B облысымен, яғни n-өлшемді нақты кеңістіктің облысымен анықталады.

$z = x + iy$, мұндағы x, y дегеніміз n- өлшемді нақты векторлар, деп алсақ трубалы облысты

$$T = B + iR^n(y)$$

немесе

$$T = \{x + iy: x \in B, y \in R^n\}$$

түрінде жазуға болады. $n = 1$ болғанда трубалы облыс $\{\alpha < x < \beta, -\infty < y < \infty\}$ жолағы болады, сонымен қатар $\{x > \alpha\}$ немесе $\{x < \alpha\}$ жартыжазықтықтары да болады.

φ: $z_v \to e^{z_v}$ $(v = 1, \dots, n)$ бейнелеуі Т трубалы ауданын Рейнхард облысының қандай да бір D облысына бейнелейді.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. C^n кеңістігіндегі шар.
2. C^n кеңістігіндегі полидөңгелек.
3. Полицилиндрлік облыстар.
4. Рейнхарт облысы.
5. Хартогс облысы.
6. Дөңгелекті облыстар.
7. Трубалы облыстар.

2.2 Голоморфты функциялар

2.2.1. Функцияның голоморфтығы туралы. Көп комплекс айнымалыдан тәуелді функцияның голоморфты болу түсінігі бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функцияның голоморфтығы туралы ұғымды кеңейтеді.

Анықтама. $l: C^n \to C$ функциясы R-сызықты (сәйкес С —сызықты) функция деп аталады, егер

а) $l(z' + z'') = l(z') + l(z''),\ \forall z', z'' \in C^n$,

б) $l(\lambda z) = \lambda l(z)$ $\forall z \in C^n$ және $\forall \lambda \in R$ (сәйкес $\forall \lambda \in C$).

C^n кеңістігіндегі кез келген $R-$сызықты функция келесі түрде жазылады:

$$l(z) = \sum_{v=1}^{n} (a_v z_v + b_v \bar{z}_v), \quad (a_v\ b_v \in C), \tag{2.2.1}$$

ал C- сызықты функция келесі түрде жазылады:

$$l(z) = \sum_{v=1}^{n} (a_v z_v), \quad (a_v \in C). \tag{2.2.2}$$

R-сызықты l функциясы

$$l(iz) = iL(z) \qquad (2.2.3)$$

(2.2.3) шарты орындалса C- сызықты функция болады.

Анықтама. f: ∪→ C функциясы, (мұндағы ∪ арқылы $z \in C^n$ нүктесінің маңайы белгіленген)

$$f(z+h) = f(z) + l(h) + \bar{\bar{o}}(h) \qquad (2.2.4)$$

шартын қанағаттандырса, онда бұл функция $z \in C^n$ нүктесінде $R-$ дифференциалданады (сәйкес С дифференциалданады), мұндағы l функциясы R-сызықты функция (сәйкес С - сызықты функция). (2.2.4) формуласында

$$\frac{\bar{\bar{o}}(h)}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \qquad (2.2.5)$$

l функциясы f функциясының z нүктесіндегі *дифференциалы* деп аталады және df символымен белгіленеді.

$$h = dz = dx + idy \qquad (2.2.6)$$

болсын, (2.2.6) формуласындағы $dz = (dz_1, \dots, dz_n)$- комплекс вектор, ал $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$ және $dy = (dy_1, \dots, dy_n)$ нақты шамалар. Жалпы айтсақ, R - дифференциалдану жағдайында дифференциалды былай жазуға болады:

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f}{\partial y_\nu} dy_\nu \right)$$

немесе комплекс координатаға көшіп, келесі түрде жазуға болады:

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu \right) \qquad (2.2.7)$$

мұндағы

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} - i\frac{\partial f}{\partial y_\nu} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + i\frac{\partial f}{\partial y_\nu} \right), \quad \nu - 1, \; \dots \; , n. \qquad (2.2.8)$$

(2.2.7) формуладағы бірінші қосынды ∂f арқылы белгіленеді, ал екінші қосынды $\bar{\partial} f$ символымен белгіленеді, сонда

$$\partial = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_\nu} dz_\nu; \quad \bar{\partial} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu; \qquad d = \partial + \bar{\partial} \qquad (2.2.9)$$

Теорема. $z \in C^n$ нүктесінде R –дифференциалданатын f функциясы C-дифференциалданатын функция болуы үшін Коши-Риман шарты орындалуы

$$\bar{\partial} f = 0 \qquad (2.2.10)$$

қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі: (2.2.7) формуласынан

$$df(ih) = i\partial f(h) - i\bar{\partial} f(h)$$

және

$$idf(h) = i\partial f(h) + i\bar{\partial} f(h)$$

екені шығады. Сондықтан C - дифференциалдану шарты: $df(ih) = idf(h)$ келесі $\bar{\partial} f(h) = 0$ шартымен пара-пар болады, $\forall h \in C^n$. Теорема дәлелденді.

(2.2.8) Коши-Риман шарты n комплекс теңдеулер жүйесімен пара-пар:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z_\nu}} = 0, \qquad v = 1, \dots, n \qquad (2.2.11)$$

Анықтама. f функциясы $z = C^n$ нүктесінің маңайында C - дифференциалданатын болса, онда f функциясы $z = C^n$ нүктесінде *голоморфты* деп аталады.

Ашық жиында C - дифференциалдану түсінігі мен функцияның голоморфтығы ұғымы екеуі беттеседі.

Функцияның голоморфтығы туралы анықтаманың кез келген M ашық емес жиынында аздаған өзгешелегі бар. Оны келесі мысалдан байқауға болады.

Мысал. $M \in C^2$ жиыны екі тұйық шардан

$B_1 = \left\{|z - (0,1)| \le \frac{1}{2}\right\}$ және $B_2 = \left\{|z + (0,1)| \le \frac{1}{2}\right\}$

тұрады делік. Бұл екі шар

$$L = \left\{z_1 = 0,\ z_2 = x_2, \qquad |x_2| \le \frac{1}{2}\right\}$$

кесіндісімен жалғастырылған. М жиынында $f(z)$ функциясы берілген:

$$f(z) = \begin{cases} z_1, & z \in \bar{B}_1, \\ 0, & z \in L, \\ -z_1, & z \in \bar{B}_2. \end{cases}$$

$f(z)$ функциясы М жиынында үзіліссіз функция және $\forall z^0 \in M$ нүктесі үшін оның маңайы U_{z^0} бар, осы маңайда f функциясы голоморфты функция болып жалғасады. Шынында да, $\bar{B}_1$ нүктелері үшін $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ нүктесін қоса алғанда (бұл нүкте $\overline{B}_1$ мен L-дің қиылысу нүктесі) осындай маңайлар ретінде $\overline{B}_2$-мен қиылыспайтын шарларды алуға болады және бұл маңайларда f функциясы z_1 мәнін қабылдайды деп жалғастыруға болады. Ал $\overline{B}_2$ нүктелері үшін осындай маңайлар тек қана $f(z) = -z_1$ деп алып, жасауға болады. Ал L ішкі нүктелері үшін бұл кесіндінің шеткі нүктелері жоқ шарларды аламыз және бұл шарларда $f = 0$ дейміз. Бірақ шешімнің бар болуы жалғыз ғана екендігі туралы теорема бойынша (ол теореманы 2.2.3 бөлімінде дәлелдейміз) f функциясын голоморфты функция етіп М жиынының Ω- байланысты маңайында жалғастыруға болмайды. Шынында да, шешімнің жалғыз екені туралы теоремадан Ω маңайында бір шарда z_1 мәнін қабалдайтын, ал екінші шарда $-z_1$ мәнін қабылдайтын голоморфты функцияның болмайтыны шығады.

Бұл мысалдан жиында локальды голоморфты функция (оларды жиынның әр нүктесінде голоморфты функция етіп локальды жалғастыруға болады) және глобальды голоморфты функция (оларды сол жиынның маңайында да голоморфты функция етіп жалғастыруға болады) болатынын, және оларды ажырата білу керек екені көрінеді. Бұдан былай функцияны глобальды голоморфты функия деп есептейміз.

$z \in C^n$ нүктесінде голоморфты функциялардың қосындысы да, көбейтіндісі де осы нүктеде голоморфты функция болады. Сондықтан z нүктесінде голоморфты функциялардың жиынтығы сақина құрайды, оны G_z арқылы белгілейді. $D \subset C^n$ облысында голоморфты функциялардың сақинасы $G(D)$ арқылы белгіленеді.

Анықтама. Айталық U маңайы $z \in C^m$ нүктесінің маңайы болсын. $f = (f_1, \dots, f_m)$: $U \to C^n$ бейнелеуінің барлық f_μ $(\mu = 1, \dots, m)$ компоненттері

z нүктесінде голоморфты болса, онда $f = (f_1, \dots, f_n)$ *бейнелеуі голоморфты* деп аталады.

Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша, егер $f = (f_1, \dots, f_m)$ бейнелеуі $z \in C^n$ нүктесінде голоморфты болса, ал $g = (g_1, \dots, g_l)$ бейнелеуі $f(z) \in C^m$ нүктесінде голоморфты болса, онда $g \cdot f$ композициясы да z нүктесінде голоморфты болады.

Дербес жағдайда, егер f функциясы $D \subset C^n$ облысында голоморфты болса және L комплексті түзу D облысымен қиылысса (яғни $L(\xi) = z^0 + \omega\xi : \ C \to C^n$ сызықтық бейнелеуі ең болмағанда бір нүктеде $L(\xi) \in D$ шартын қанағаттандырса), онда f функциясының осы түзуде қысылуы, яғни $f \cdot L$ композициясы да голоморфты функция болады.

Егер ν-ншы оське параллель комплекс түзулерді қарастырсақ, яғни $z_\nu = \xi, \ z_\mu = z_\mu^{(0)} \quad (\mu \neq \nu)$**,** онда тағы бір дербес жағдай аламыз. Бұл жағдайда жоғарыда айтылған тұжырым мынаны білдіреді: егер f функциясы $D \subset C^n$ облысында голоморфты болса, онда $f(z_1^0, \dots, z_{\nu-1}^0, \xi, z_{\nu+1}^0, \dots, z_n^0)$ функциясы ξ жазықтығының ашық жиынында бір айнымалыдан тәуелді комплекс функция ретінде голоморфты болады. Басқаша айтқанда, $D \subset C^n$ облысында голоморфты функция, әр координата z_ν бойынша голоморфты функция болады. Бұл тұжырым (2.2.11) шарттарынан шығады.

Кері тұжырым да дұрыс: егер f функциясы $D \subset C^n$ облысында әр координатасы бойынша жеке-жеке голоморфты функция болса, онда f функциясы R-мағынасында дифференциалданатын функция болады. Онда жоғарыда айтылған теорема бойынша және (2.2.11) теңдеуі бойынша D облысында голоморфты функция болады.

Бұл тұжырым Хартогс теоремасының негізі болады. Мысалы оның нақты анализ жағдайында орындалмайтынын көруге болады:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \ f(0,0) = 0$$

функциясы егер y айнымалысын тағайындап алсақ x айнымалысы бойынша дифференциалданады, немесе x айнымалысын тағайындап алсақ y бойынша дифференциалданады, бірақ $(0,0) \in R^2$ нүктесінде тіпті үзіліссіз функция да болмайды.

Хартогс теоремасын 2.2.4 бөлімде дәлелдейміз.

Енді C^n кеңістігінің және CP^n комплекс проективті кеңістігінің нүктелеріндегі функцияның голоморфтығына тоқталайық. C^n кеңістігінде функцияның голоморфтығы шексіз көп нүктелерде анықтауға болады, ал оны бір айнымалыдан тәуелді функция жағдайындай жасаймыз:

$$f\left(\frac{1}{\xi_1}, \dots, \frac{1}{\xi_m}, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n\right) = \varphi\left(\xi_1, \dots, \xi_n\right)$$

функциясы $(0, \dots ,0, z_{m+1}^0, \dots , z_n^0) \in C^n$ нүктесінде голоморфты болса, онда $z^0 = (\infty, \dots ,\infty, z_{m+1}^0, \dots , z_n^0)$ шексіз нүктеде голоморфты болады.

CP^n комплекс проективті кеңістігінің нүктелеріндегі функция біртекті $\xi = (\xi_0, \dots , \xi_n)$ координаталарымен $f(\xi)$ функция болады. Бұл функциялар ξ шамасын $\lambda\xi$ шамасына $\lambda \in C \setminus \{0\}$ ауыстырғанда өзгермейді, яғни ξ шамасына байланысты емес, $[\xi]$ эквиваленттік класына байланысты болады. f функциясының $[\xi]$ нүктесіндегі голоморфтығы $f(\xi)$ функциясының қандай да бір $\xi \in [\xi]$ нүктесіндегі голоморфтығын білдіреді. Мұнда ξ нүктесі $C^{n+1} \setminus \{0\}$ нүктесі деп алынады. Дербес жағдайда, егер $[\xi]$ нүктесі CP^n комплекс проективті кеңістігінің ақырлы нүктесі болса, яғни $\xi_0 \neq 0$, онда бұл шарт $f(1, z)$ функциясының $z = \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots , \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)$ нүктесінде голоморфты болуымен пара-пар.

2.2.2 Плюригармоникалық функциялар. Қарапайым ескертуден бастайық: егер $f = u + iv$ фунциясы $z \in C^n$- нүктесінде голоморфты болса, онда $\bar{f} = u - iv$ функциясы бұл нүктенің маңайында R-мағынасында дифференциалданатын болады және $\forall \nu = 1, \dots n$ үшін

$$\frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_\nu} - i\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_\nu}\right) = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu}}\right) = 0 \qquad (2.2.12)$$

Мұндай шартты қанағаттандыратын $\bar{f}$ функцияларды z нүктесінде антиголоморфты функциялар дейміз.

Айталық, f функциясы $z \in C^n$ нүктесінде голоморфты болсын. Онда ескерту бойынша оның нақты бөлігі $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ үшін z нүктесінің маңайында

$$\frac{\partial u}{\partial z_\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_\upsilon}$$

орындалады. Бұған қоса голоморфты функцияның барлық ретті дербес туындысы бар екенін және ол дербес туындылар әр айнымалы бойынша үзіліссіз екенін ескерсек, онда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_\mu \partial z_\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_\mu \partial z_\upsilon}$$

туындылары бар болады және олардың дифференциалдау ретін өзгертуге болады; яғни

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_\mu \partial z_\upsilon} = \frac{\partial}{\partial z_\upsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\mu}\right) = 0.$$

Сонымен $\forall \mu, \upsilon = 1, \dots, n$ үшін

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_\mu \partial z_\upsilon} = 0. \qquad (2.2.13)$$

(2.2.13) теңдігінің сол жағындағы оператордың нақты және жорамал бөлігін бөле отырып:

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z_\upsilon} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\upsilon} + \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\upsilon}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\upsilon \partial y_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\upsilon}\right),$$

(2.2.13) шарты екінші ретті дербес туындылы n^2 теңдеулерге бөлінетінін байқаймыз.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\upsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial y_\upsilon} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial y_\upsilon} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_\upsilon \partial y_\mu} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.14)$$

($\mu, \upsilon = 1, \dots, n$; ал жүйедегі екінші теңдеулері $\mu = \upsilon$ болғанда тривиальды).

Анықтама. Берілген $u(x, y) \in C^2$ функциясы $D \subset R^{2n}$ облысының әрбір $(x, y) \in D$ нүктесінде (2.2.13) немесе (2.2.14) теңдеулерін қанағаттандырса, онда $u(x, y)$ функциясы осы D облысында *плюригармоникалық функция* деп аталады.

Плюригармоникалық функциялар көп айнымалы голоморфты функциялармен тығыз байланысты. Бұл байланыс гармоникалық функциялардың $R^2 -$ кеңістігіндегі бір айнымалыдан тәуелді голоморфты функциялармен байланысы сияқты. Келесі екі теореманы қарастырайық:

Теорема 1. $D \subset \mathbb{C}^n$ облысында голоморфты f функцияның нақты және жорамал бөліктері осы D облысында плюригармоникалық функциялар болады.

Дәлелдеуі. $u = Ref$ нақты бөлігі үшін теорема дәлелденген. f функциясымен бірге $-if \epsilon G(D)$ функциясы да сақинада жатыр, ал $Imf = Re(-if)$ болғандықтан, теорема жорамал бөлігі үшін де дұрыс. Теорема дәлелденді.

Кері теорема локальды ғана орындалады.

Теорема 2. Берілген $(x^0, y^0) \in R^{2n}$ нүктесінің U маңайында плюригармоникалық функция болатын кез келген u функциясы үшін $z^0 = x^0 + iy^0$ нүктесінде голоморфты болатын f функциясы табылады және f функциясының нақты (немесе жорамал) бөлігі u функциясына тең.

Дәлелдеуі: Егер R^{2n} кеңістігінен алынған облыста дифференциалдық форма

$$\omega = \sum_{v=1}^{2n} P_v dx_v$$

бұл облыста барлық $P_v \in C^1$ шартын қанағаттандырса және оның (сыртқы) дифференциалы $d\omega = 0$ болса, яғни мына шарт орындалса

$$\frac{\partial P_\mu}{\partial x_v} = \frac{\partial P_v}{\partial x_\mu} \qquad (\mu, v = \overline{1,2n}), \tag{2.2.15}$$

онда дифференциалдық форма тұйық деп аталады.

U маңайында дифференциалдық форманы қарастырайық:

$$\omega = \sum_{v=1}^{n} \left(-\frac{\partial u}{\partial y_v} dx_v + \frac{\partial u}{\partial x_v} dy_v \right). \tag{2.2.16}$$

$u \in C^2$ болғандықтан оның коэффициенттері C^1 класына тиісті болады. Бұл форманың тұйықтық шарты мына түрде жазылады:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial y_v} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_v \partial y_\mu} \ ;$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial y_v} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_v} \quad (\mu, v = \overline{1, n})$$

және (2.2.14) плюригармоникалық шартымен беттеседі.

Сонымен, (2.2.16) дифференциалдық форма U маңайында тұйық. Бірақ нақты анализде әрбір тұйық дифференциалдық форма

$$\omega = \sum_{\upsilon=1}^{2n} P_\upsilon dx_\upsilon$$

локальды түрде дәл бейнеленеді, яғни $v \in C^1$ функциясы табылып, $\omega = dv$, орындалады, немесе

$$P_\upsilon = \frac{\partial v}{\partial x_\upsilon} \qquad (\upsilon = \overline{1,2n}) \tag{2.2.17}$$

екені дәлелденеді; бұл функция интеграл арқылы жазылады:

$$v(x) = \int_{x^0}^{x} \omega.$$

Бұл интеграл интегралдау жолына байланысты емес және тағайындалған x^0 нүктесі үшін x айнымалысына байланысты функция болады.
(2.2.16) дифференциалдық форма жағдайында $v(x, y)$ функциясы

$$v(x,y) = \int_{(x^0,y^0)}^{(x,y)} \sum_{\upsilon=1}^{n} \left(-\frac{\partial u}{\partial y_\upsilon} dx_\upsilon + \frac{\partial u}{dx_\upsilon} dy_\upsilon\right) \tag{2.2.18}$$

түрінде жазылады және (2.2.17) формуласы $f = u + iv$ функцияның комплексті дифференциалдану шартымен беттеседі. Сонымен қатар $z^0 = x^0 + iy^0$ нүктесінің маңайында $f \in C^1$ болғандықтан, f функциясы осы нүктеде голоморфты функция болады және $u = Ref$ шарты орындалады. z^0 нүктесінде голоморфты $if = iu - v$ функциясының жорамал бөлігінде u бар.
Теорема 2 дәлелденді.
(2.2.14) теңдеуінің алғашқысы $\mu = \upsilon$ болғанда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\upsilon^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\upsilon^2} = 0 \tag{2.2.19}$$

формуласын береді.
$\upsilon = 1, \dots, n$ болғандағы бұл теңдеулерді қосып, u функциясының $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ айнымалылары бойынша Лаплас операторын табамыз:

$$\Delta u = \sum_{\upsilon=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\upsilon^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\upsilon^2}\right) = 0.$$

Сонымен, *плюригармоникалық функциялар R^{2n} кеңістігінде гармоникалық функциялар класының ішкі класын құрайды.*

$D \subset R^{2n}$ облысында берілген шекаралық мәндер бойынша плюригармоникалық функцияны қалай анықтауға болады деген сұрақты қарастырайық (Дирихле есебі). Бұл сұрақ гармоникалық функция жағдайы сияқты оңай шешілмейді. Бұл сұрақ бойынша пайда болатын қиындықтарды қарапайым облыстардың бірі полидөңгелекте $U = \{z \in C^n: |z_v| < 1\}$ қарастырайық. (2.2.19) формула бойынша $\{|z_v| < 1\}$ дөңгелегінде плюригармоникалық функция әр айнымалы бойынша $z_v = x_v + iy_v$ гармоникалық функция болады, сондықтан біз Пуассон интегралын біртіндеп қолданамыз.

Кез келген $z \in U$ үшін

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(\xi_1, z_1)dt_1 \dots \int_0^{2\pi} u(\xi)P(\xi_n, z_n)dt_n$$

мұндағы

$$\xi_v = e^{it_v} \quad , \xi = \{\xi_v\}$$

және

$$P(\xi_v, z_v) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z_v|^2}{|\xi_v - z_v|^2} \tag{2.2.20}$$

(2.2.20) - Пуассон ядросы. Мынадай белгілеулер енгіземіз:

$$P_n(\xi, z) = \prod_{v=1}^{n} P(\xi_v, z_v) \tag{2.2.21}$$

(2.2.21) - n өлшемді Пуассон ядросы, ал

$$Q_n = [0,2\pi] \times \dots \times [0,2\pi] \tag{2.2.22}$$

(2.2.22) - n өлшемді куб және

$$dt = dt_1 \dots dt_n \tag{2.2.23}$$

(2.2.23) - көлем элементі. Сонда Пуассон формуласын келесі қысқартылған түрде жазуға болады:

$$\mathrm{u(z)} = \int_{\mathrm{Q_n}} \mathrm{u(\xi)P_n(\xi, z)dt} \tag{2.2.24}$$

(2.2.24) формуласының оң жағында u функциясының Γ полидөңгелектің тұлғасындағы мәні , яғни ∂U шекарасының n өлшемді бөлігіндегі u функциясының мәні жазылған (жалпы шекара $(2n-1)$-өлшемді). Плюригармоникалық функцияның мәнін полидөңгелектің барлық шекарасында беруге болмайтыны осыдан көрінеді. Егер (2.2.24) формуласының оң жағына $u(\xi)$ −үзіліссіз функцияның (Γ шекарасында үзіліссіз) мәнін қойсақ, онда $u(z)$ функциясы (бұл функция U полидөңгелекте осы формуламен анықталады) барлық $v = 1, \dots, n$ үшін (2.2.19) теңдеуді қанағаттандырады. Бірақ бұл функция (2.2.14) формуласының басқа теңдіктерін қанағаттандырмайды, яғни U полидөңгелегінде плюригармоникалық функция болмайды. $u(z)$ функциясының плюригармоникалық функция болуы үшін $u(\xi)$ мәндеріне қосымша шарттар қойылуы керек.

2.2.3 Голоморфты функциялардың қарапайым қасиеттері. Көп айнымалыдан тәуелді голоморфты функциялардың бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясына ұқсас кейбір қасиеттеріне тоқталайық.

Центрі a нүктесінде, вектор радиусы $r = (r_1, \dots, r_n)$ полидөңгелекті қысқаша былай белгілейік:

$$U = \{z \in C^n : |z_\upsilon - a_\upsilon| < r_\upsilon, \upsilon = \overline{1, n}\}$$

Ал $G(U) \cap C(\overline{U})$ арқылы U полидөңгелегінде голоморфты және $\overline{U}$ тұйық полидөңгелегінде үзіліссіз функциялардың жиынын белгілейік.

Теорема 1. Кез келген $f \in G(U) \cap C(\overline{U})$ функциясы кез келген $z \in U$ нүктесінде еселі Коши интегралымен жазылады:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)}, \tag{2.2.25}$$

мұндағы Γ арқылы U полидөңгелегінің тұлғасы (шекарасы), яғни шекаралық шеңберлердің көбейтіндісі

$$\gamma_\upsilon = \{|z_\upsilon - a_\upsilon| = r_\upsilon\} \qquad (\upsilon = \overline{1, n})$$

белгіленген.

Дәлелдеуі: Айталық z' және U' бұлар C^{n-1} кеңістігіне түсірілген z пен U полидөңгелегінің проекциясы болсын. $z' \in U'$ болғандықтан $f(z) = f(z', z_n)$ функциясы z_n бойынша $\{|z_n - a_n| < r_n\}$ дөңгелегінде голоморфты функция болады және оның тұйықталуында онда үзіліссіз болады. Онда бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі Кошидың интегралдық формасы бойынша

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(z', \xi_n)}{\xi_n - z_n} d\xi_n,$$

өрнегін аламыз. Кез келген $\xi_n \in \gamma_n$ және $z' \in U'$ орындалғанда интеграл астында тұрған функцияны z_{n-1} айнымалысы бойынша Коши интегралы ретінде жазуға болады. Сонымен қатар f функциясы айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз болғандықтан қайталанбалы интегралды $\gamma_{n-1} \times \gamma_n$ көбейтіндісі бойынша еселі интеграл ретінде жазуға болады. Осы тұжырымдаманы жалғастыра отырып, (2.2.25) еселі интегралына келеміз. Теорема дәлелденді.

Бұдан былай (2.2.25) еселі интегралын қысқаша келесі түрде жазуға болады.

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z'}, \tag{2.2.26}$$

мұндағы $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$ және

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2) \cdot \ldots \cdot (\xi_n - z_n)}$$

Ескерту. Жоғарыда дәлелденген теореманың дәлелдемесінен байқағандай, f функциясын (2.2.25) Коши еселі интегралы түрінде жазу үшін f функциясының әрбір айнымалы z_v бойынша $\{|z_v - a_v| < r_v\}$ дөңгелегінде голоморфты болуы және $\overline{U}$ тұйық полидөңгелегінде барлық айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз болуы жеткілікті.

Бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар курсындағы сияқты функцияны Коши интегралы арқылы жазудан ол функцияны дәрежелік қатарға жіктеуді шығарып аламыз. Ол үшін (2.2.26) интегралының өзегін геометриялық прогрессия түрінде жазайық:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z_1 - a_1}{\xi_1 - a_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{z_n - a_n}{\xi_n - a_n}\right)} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{|k|=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\xi - a}\right)^k$$

мұндағы $k = (k_1, \ldots, k_n)$ бүтін мәнді вектор, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ және

$$\left(\frac{z - a}{\xi - a}\right)^k = \left(\frac{z_1 - a_1}{\xi_1 - a_1}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - a_2}{\xi_2 - a_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{z_n - a_n}{\xi_n - a_n}\right)^{k_n}.$$

Бұл жіктелуді келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{|z|=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\xi - a)^{k+1}},$$

мұндағы $k + 1 = (k_1 + 1,\ k_2 + 1, \cdots\ k_n + 1)$; кез келген $z \in U$ үшін бұл жіктелу абсолют жинақты және ξ бойынша Γ тұлғасында бірқалыпты жинақты болады. Бұл жіктелуді Γ тұлғасында үзіліссіз және шектелген

$$\frac{f(z)}{(2\pi i)^n}$$

функциясына көбейтіп және Γ тұлғасында мүшелеп интегралдасақ, керекті тұжырымдаманы аламыз:

Теорема 2. Егер $f \in G(U) \cap C(\overline{U})$, онда $z \in U$ әрбір нүктесінде бұл функция еселі дәрежелік қатарға жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} C_k (z - a)^k \qquad (2.2.27)$$

мұндағы

$$C_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{k+1}}. \qquad (2.2.28)$$

Ескерту. Кез келген $f \in G(U)$ функциясын $z \in U$ әрбір нүктесінде (2.2.27) қатардың қосындысы ретінде жазуға болады. Мұны дәлелдеу үшін z нүктесінің $U' \subset U$ полидөңгелекте жатқанын байқау жеткілікті және U' полидөңгелегіне теорема 2 қолдану керек.

Абель леммасы. Егер еселі дәрежелік қатардың

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

мүшелері қандай да бір $\xi \in C^n$ нүктесінде шектелген болса, онда бұл қатар $U(a,P)$ полидөңгелегінің (бұл полидөңгелектің центрі a нүктесінде, ал вектор радиусы $p = (p_1, \dots, p_n)$ және $p_v = |\xi_v - a_v|$) К - компактты ішкі жиынында абсолют және бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі: Айталық $\left|C_k(\xi - a)^k\right| = |C_k| \cdot p^k \leq M$ болсын, мұндағы $p^k = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$. Барлық $p_v > 0$ деп есептейміз, әйтпесе K бос жиын болып шығады. $K \subset U(a,p)$ шартынан

$$q_v = \max_{z \in K} \frac{1}{p_v} |z_v - a_v| < 1 \qquad (v = \overline{1,n})$$

шығады және сондықтан кез келген $z \in K$ нүктесінде

$$\left|C_k(z-a)^k\right| \leq |C_k| p^k q^k \leq M q^k,$$

теңсіздігі шығады, мұндағы $q^k = q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n}$. Еселі геометриялық прогрессия

$$\sum_{k=1}^{\infty} M q^k$$

жинақты екенін байқаймыз, себебі $q_v < 1$. Абель леммасы дәлелденді.

Теорема 3. Егер $f \in G(U)$, онда кез келген $z \in U$ нүктесінде f функциясының барлық ретті дербес туындылары бар және олар да $G(U)$ шартын қанағаттандырады.

Дәлелдеуі: Теорема 2 бойынша $z \in U$ нүктесінде f функциясын (2.2.27) дәрежелік қатардың қосындысы ретінде жазуға болады. Абель леммасы бойынша және бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясының тұжырымдарын қолданып, дәрежелік қатардың мүшелерінің орнын ауыстырсақ, онда f функциясының барлық ретті дербес туындыларының бар екенін дәлелдеуге болады. Ол дербес туындыларды (2.2.27) қатарды бөліктеп дифференциалдағанда алуға болады және қатар түрінде жазуға болады.

Бұл қатарлар Абель леммасы бойынша U компактты ішкі жиындарда бірқалыпты жинақты болады. Ал бұл қатардың мүшелері барлық айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз. Сондықтан бұл дербес туындылар U

полидөңгелегінде R мағынасында дифференциалданады және сондықтан бұл туындылардың әр айнымалы бойынша голоморфты болуынан бұл туындылардың U полидөңгелегінде голоморфтығы шығады. Теорема 3 дәлелденді.

Ескерту. Айталық f функциясы $\overline{U}$ тұйық полидөңгелегінде үзіліссіз және әр айнымалы бойынша голоморфты болсын. Онда f функциясын Коши интегралы арқылы жазуға болады (теорема1, ескерту бойынша). Ал теорема2 бойынша бұл функцияны дәрежелік қатар түрінде де жазуға болады. Теорема3 дәлелдеуінен байқағандай f функциясы С-мағынасында дифференциалданатынын, демек U полидөңгелегінде голоморфты екенін білеміз. Сонымен 2.2.3 пунктінде айтылған Хартогстың негізгі теоремасын дәлелдеуде f функциясының $\overline{U}$ тұйық полидөңгелегінде әр айнымалы бойынша голоморфтылығынан оның $\overline{U}$ тұйық полидөңгелегінде үзіліссіздігі шығатынын дәлелдеу жеткілікті.

Функцияны берілген центрі бойынша дәрежелік қатарға жалғыз ғана жолмен жіктеуге болатыны туралы теореманы дәлелдеу қиын емес.

Теорема 4. Егер a нүктесінде голоморфты болатын f функциясы (2.2.27) түрдегі дәрежелік қатарға жіктелсе, онда бұл қатардың коэффициенттері Тейлор формуласымен анықталады:

$$C_k = \frac{1}{k_1!\dots k_n!} \cdot \left.\frac{\partial^{k_1+\cdots k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}\right|_{z=a} = \frac{1}{k!} \cdot \left.\frac{\partial^{|k|}}{\partial z^k}\right|_{z=a} \tag{2.2.29}$$

мұндағы $k! = k_1!\dots k_n!$

(2.2.28) формуланы коэффициенттерге қолданып және ондағы интегралды бағалап, келесі Коши теңсіздігін аламыз.

Коши теңсіздігі: Егер $f \in G(U) \cap C(\overline{U})$ болса және Г тұлғасында $|f| \leq M$ шарты орындалса, онда f функциясының a нүктесінде Тейлор қатарына жіктелу коэффициенттері

$$|C_k| \leq \frac{M}{r^k} \tag{2.2.30}$$

шартын қанағаттандырады, мұндағы $r^k = r_1^{k_1}\dots r_n^{k_n}$.

Шешімнің жалғыздығы туралы теорема кеңістіктегі жағдайға таралмайды, яғни кеңістікте қарастырылмайды. Себебі C^2 класында голоморфты болатын және нөлге тең емес болатын $z_1 z_2$ функциясы шектік нүктелері бар жиында 0-ге айналады ($\{z_1 = 0\}$ және $\{z_2 = 0\}$ комплекс түзулерде нөлге айналады).

Теорема 5 (шешімнің жалғыздығы туралы). Егер $f \in G(D)$ функциясы $a \in D$ нүктесінде өзінің дербес туындыларымен нольге айналса, онда D облысында $f \equiv 0$.

Дәлелдеуі: f функциясының Тейлор қатарына жіктелу коэффициенттері a нүктесінде нөлге тең, демек осы нүктенің маңайында $f \equiv 0$.

$$E = \{z \in D: f(z) = 0\}$$

және E^0 арқылы E жиынының ашық өзегін (осы жиынның барлық ішкі нүктелер жиынтығы) белгілейік. E^0 жиыны ашық жиын және бос жиын емес (бұл жиында a бар); бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясында дәлелденгендей E^0 жиыны D облысында тұйық жиын; сондықтан $E^0 = D$. Теорема 5 дәлелденді.

Дәлелденген теоремада a нүктесінің $2n$-өлшемді маңайында f функциясының 0-ге айналатыны теореманың шарты. Тіпті a нүктесінің $(2n - 2)$-өлшемді маңайында f функциясы нольге айналса да, облыста функцияның нольге тепе-тең болуы шықпайды. Бірақ кейбір жағдайларда нүктенің n-өлшемді маңайында нольге айналуынан облыста функцияның нольге тепе-теңдігі шығады.

Егер $f \in G(D)$ функциясы $a \in D$ нүктесінің нақты маңайында нольге айналса, яғни $\{z = x + iy \in C^n: |x - x^0| < r, y = y^0\}$ жиында нольге айналса, онда D облысында $f \equiv 0$.

Дәлелдеуі: Центрі z^0 нүктесіндегі полидөңгелекте f функциясы қатарға жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} C_k (z - z^0)^k.$$

Мұнда $y = y^0$ десек, онда барлық $x \in \{]x - x^0[< r\}$ үшін

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} C_k (x - x^0)^k \equiv 0.$$

Бұл теңдікті $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ бойынша дифференциалдап, $x = x^0$ екенін ұйғарып, барлық $c_k = 0$ екенін табамыз. Теорема 5 бойынша, онда D облысында $f \equiv 0$. Тұжырым дәлелденді.

Теорема 6 (Модульдың максимум принципі). Егер $f \in G(D)$ және $|f|$ функциясы $a \in D$ нүктесінде максимум қабылдаса, онда D облысында $f \equiv const$.

Дәлелдеуі: a нүктесі арқылы өтетін $l(\xi) = a + \omega\xi$ комплекс түзуді қарастырайық: f функциясының осы түзуге қысылуы $\varphi_\omega(\xi) = f \cdot l(\xi)$ бұл функция $\{|\xi| < p\}$ дөңгелегінде голоморфты функция болады, ал $|\varphi_\omega|$ шамасы $\xi = 0$ нүктесінде максимум мәнін қабылдайды. Бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі модульдің максимум принципі бойынша $\varphi_\omega(\xi) = c(\omega)$. $c(\omega)$ шамасы ω-дан байланысты тұрақты. Бірақ $\varphi_\omega(0) = f(a)$ өрнегі ω шамасынан байланысты емес, сондықтан $c(\omega) = const$ және a нүктесінің маңайында $f = const$. Сонымен теорема 5 бойынша D облысында $f = const$. Теорема 6 дәлелденді.

Егер f функциясы $D \subset \mathbb{C}^n$ облысында голоморфты болса және $\overline{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда $|f|$ өзінің максимум мәнін ∂D шекарасында қабылдайды. Бірақ C^n кеңістігінде $n > 1$ жағдайда кез келген $f \in G(D)$ функциясы үшін $max|f|$ барлық ∂D шекарасында емес, оның қандай да бір ішкі жиынында ғана максимум мәнін қабылдайтын облыстар бар. Осындай ең кіші, тұйық ішкі жиынды D облысының *Шилов шекарасы* деп атайды. Дәлірек айтқанда D облысының Шилов шекарасы деп тұйық $S \subset \partial D$ жиынын айтады, ол жиын келесі 2 шартты қанағаттандырады:

1. Кез келген $f \in G(D)$ функциясы $\overline{D}$ облысында үзіліссіз және

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in S} |f(z)| \qquad (2.2.31)$$

2. Кез келген тұйық және 1-шартты қанағаттандыратын $\bar{S}$ жиынының ішінде S жиыны жатыр.

Мысалдар.

1. Шар: $B = \{z \in C^n : |z| < 1\}$. Мұнда Шилов шекарасы топологиялық шекарасымен беттесетінін көрсетейік. Ол үшін кез келген $\xi \in \partial B$ нүктесін аламыз және $\bar{B}$ облысында үзіліссіз, ал В шарында голоморфты f функциясын құрайық. Ол функция $z \in \bar{B} \backslash \xi$ нүктелері үшін $|f(\xi)| > |f(z)|$ шартын қанағаттандырады. Буняковский-Шварц теңсіздігі бойынша (z, ξ) эрмит скаляр көбейтіндісі үшін

$$Re(z, \xi) \leq |(z, \xi)| \leq |z|,$$

теңсіздігі орындалады, себебі $|\xi| = 1$ және $Re(z, \xi) = |z| = 1$ теңдігі $\bar{B}$ облысында $z = \xi$ болғанда ғана орындалады. Сондықтан $f(z) = e^{(z,\xi)}$ функциясының жоғарыда аталған қасиеттері бар.

2. Полидөңгелек: $U = \{z \in C^n: \ \|z\| < 1\}$. Бұл жағдайда Шилов шекарасы $(2n-1)$ - өлшемді топологиялық шекараның n - өлшемді бөлігін ғана қамтиды, дәлірек айтқанда полидөңгелектің тұлғасымен беттеседі. Мұны дәлелдеу үшін U полидөңгелегінде голоморфты және $\bar{U}$ тұйық облысында үзіліссіз f функциясын қарастырамыз. $f(z', \xi_n)$ функциясы кезкелген тағайындалған $\xi_n, (|\xi_n| = 1)$ үшін $U' \in C^{n-1}$ полидөңгелегінде z' бойынша голоморфты функция болады. Бұл функцияны $\varphi_\mu(z') = f(z', z_n^{(\mu)})$ функцияларының тізбегінің шегі ретінде жазуға болады, мұндағы $z_n^{(\mu)}$- дегеніміз $\{|z_n| < 1\}$ дөңгелегінің нүктелерінің тізбегі, бұл тізбек ξ_n нүктесіне жинақталады. $\left(z', z_n^{(\mu)}\right) \in U$ болғандықтан барлық φ_μ функциялары U' облысында голоморфты. $\bar{U}$ тұйық облысында f функциясы бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан φ_μ тізбегі $\bar{U}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақты. Вейерштрасс теоремасы бойынша (теорема8 төменде) осыдан дәлелдеу керегін аламыз. Осылайша барлық функциялар $f(z_1, \dots, z_m, \xi_{m+1}, \dots \xi_n)$, мұндағы $m = 1, \dots \ , n-1$, модулі 1-ге тең тағайындалған $\xi_{m+1}, \dots \xi_n$ мәндерде $z_1, \dots, z_m$ бойынша сәйкес полидөңгелектерде голоморфты болатыны дәлелденеді.

Айталық $M = max|f(z)|, \ z \in \bar{U}$ қандай да бір $\xi \in \partial U$ нүктесінде болсын. $\xi \in \partial U$ нүктесі келесі $\Gamma^v = \{|\xi_v| = 1|, \ \xi_\mu| \le 1 , \mu \ne v \}$ жиындардың біреуіне тиісті болсын делік. Айнымалыларды қайтадан номерлеп, Γ^v жиыны Γ^n жиынымен беттеседі деп айтуымызға болады. Сонда $|\xi_{n-1}| = 1$ немесе модульдің максимум принципі бойынша f функциясы z_{n-1} айнымалысы бойынша тұрақты және M мәні екі соңғы координатасы модулі бойынша 1-ге тең нүктеде болады. Осылайша жалғастыра беріп, M мәні полидөңгелектің $\Gamma = \{|z_v| = 1, \ v = 1, \dots, n\}$ тұлғасында болатынындығын білеміз.

Сонымен, $\xi \in \Gamma$ нүктесі үшін U полидөңгелегінде голоморфты, ал $\bar{U}$ тұйық облысында үзіліссіз f функциясы табылады және ол функция $z \in \bar{B} \backslash \xi$ нүктелері үшін $|f(\xi)| > |f(z)|$ шартын қанағаттандырады; мұндай функция ретінде $\prod_{v=1}^{n} \left(1 + \bar{\xi}_v \cdot z_v\right)$ көбейтіндісін алуға болады. Сонымен, бұл жағдайда Шилов шекарасы Г тұлғасымен беттеседі.

Теорема 7 (Лиувилль теоремасы). Егер f функциясы C^n кеңістігінде голоморфты болса және шектелген болса, онда ол тұрақты функция болады.

Дәлелдеуі: n бойынша индукцияны қолданамыз. (математикалық индукция әдісі). $n = 1$ жағдайында теорема бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясында дәлелденген. $(n-1)$ айнымалы үшін дұрыс деп жорамалдаймыз. n айнымалы үшін дәлелдейміз.

Кез келген $a, b \in C^n$ нүктелерін аламыз. $f(z', a_n)$ функциясы индуктивті жорымалдау бойынша тұрақты функция болғандықтан $f(a) = f(b', a_n)$. Бірақ $f(b', z_n)$ функциясы да тұрақты болғандықтан, демек $f(b', a_n) = f(b)$. Сонымен $f(a) = f(b)$ шықты, яғни айтылған теорема n айнымалы үшін де дұрыс. Лиувилль теоремасы дәлелденді.

Теорема 8 (Вейерштрасс теоремасы). Айталық $f_\mu \in G(D)$ функциялар тізбегі D жиынының компактты ішкі жиынында f функциясына бірқалыпты жинақталады дейік:

$$\frac{\partial^{|k|} f_\mu}{\partial z^k} \to \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} \tag{2.2.32}$$

Сонда кез келген $К \subset D$ жиынында $f \in G(D)$ және $k = (k_1, \dots, k_n)$.

Дәлелдеуі: Бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі теорема бойынша f функциясы кез келген $z \in D$ нүктесінде әрбір айнымалы бойынша голоморфты және f функциясы D облысында барлық айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз болғандықтан теорема 3-тен кейінгі ескерту бойынша бұл функция D облысында голоморфты болады. Теореманың екінші бөлігін кез келген $z^0 \in D$ нүктесінің маңайы үшін және z_υ айнымалылардың біреуінің туындысы үшін дәлелдеу жеткілікті. $U = U(z^0, r) \subset D$ полидөңгелегін аламыз және Коши формуласын қолданамыз, яғни кез келген $z \in D$ нүктесі бойынша

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\upsilon} - \frac{\partial f}{\partial z_\upsilon} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f_\mu(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)(\xi_\upsilon - z_\upsilon)} d\xi, \tag{2.2.33}$$

мұндағы Г интегралдау контуры U полидөңгелегінің тұлғасы. Г тұлғасында $f_\mu \to f$ бірқалыпты жинақталады , сондықтан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін , $\|f_\mu - f\|_\Gamma < \varepsilon$ шарты орындалатындай μ_0 саны табылады, барлық $\forall \mu \geq \mu_0$ үшін. Егер $K \subset U$ орындалса, онда (2.2.33) формуласынан, кез келген $z \in K$ және $\mu \geq \mu_0$ үшін

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\upsilon} - \frac{\partial f}{\partial z_\upsilon}\right| < \frac{\varepsilon}{(2\pi)^n} \frac{(2\pi)^n r_1 \dots r_n}{\min\limits_{z \in K, \xi \in \Gamma} |\xi - z||\xi_\upsilon - z_\upsilon|};$$

мұндағы $z \in K$ және $\xi \in \Gamma$. Бұдан

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial z_v} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z_v}$$

К жиынында бірқалыпты жинақталатыны шығады. Вейерштрасс теоремасы дәлелденді.

Енді интегралдың параметрден тәуелділігі туралы лемманы дәлелдейік.

Лемма. Айталық $\gamma_\mu: \xi_\mu = \xi_\mu(t)$ - түзуленетін қисық. Бұл қисық ξ_μ $(\mu = 1, \dots, m)$, $\gamma = \gamma_1 \times \dots \times \gamma_m$ жазықтықтарында жатыр және $D \subset C^n$ болсын және $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ және $z = (z_1, \dots, z_n)$ болсын. Егер $g(\xi, z)$ функциясы $\gamma \times D$ аймағында үзіліссіз, z бойынша D облысында голоморфты функция кез келген $\xi \in \gamma$ және $\gamma \times D$ аймағында үзіліссіз дербес $\frac{\partial g}{\partial z_v}$ туындысы бар болса, онда интеграл

$$G(z) = \int_{\gamma_1} d\xi_1 \dots \int_{\gamma_m} g(\xi, z) d\xi_m = \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi \qquad (2.2.34)$$

D-облысында голоморфты болады және

$$\frac{\partial G}{\partial z_v} = \int_{\gamma} \frac{\partial g(\xi, z)}{\partial z_v} \qquad (v = \overline{1, n}) \qquad (2.2.35)$$

Дәлелдеуі: Кез келген $z \in D$ үшін $r > 0$ санын $U(z, r) \subset D$ шарты орындалатындай етіп таңдап аламыз. Айталық $|h_v| < r$ және $h = (0, \dots, h_v, \dots, 0) \in C^n$ векторы υ-ншы координатасынан басқа координаталары 0 болатын вектор делік.

$$\frac{1}{h_v}\{G(z + h\_ - G(z)\} = \frac{1}{h_v}\int_{\gamma} |g(\xi, z + h) - g(\xi, z)| d\xi =$$

$$\int_{\gamma} d\xi \int_0^1 \frac{\partial g(\xi, z + \theta h)}{\partial z_v} d\theta$$

және бұдан

$$\frac{1}{h_v}\{G(z + h) - G(z)\} - \int_{\gamma} \frac{\partial g(\xi, z)}{\partial z_v} d\xi = \qquad (2.2.36)$$

$$= \int_{\gamma} d\xi \int_0^1 \left\{ \frac{\partial g(\xi, z+\theta h)}{\partial z_v} - \frac{\partial g(\xi, z)}{\partial z_v} \right\} d\theta.$$

$\frac{\partial g(\xi, z+\theta h)}{\partial z_v}$ туындысы тағайындалған z бойынша $\gamma \times [0,1]$ компактты жиынында бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ санын өте аз етіп таңдап алсақ, барлық $(\xi, \theta) \in \gamma \times [0,1]$ үшін $|h| < \delta$ болғанда

$$\left| \frac{\partial g(\xi, z+\theta h)}{\partial z_v} - \frac{\partial g(\xi, z)}{\partial z_v} \right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады.

Сондықтан (2.2.36) формуласының оң жағындағы интегралды бағалай отырып, теңдіктің сол жағы $|h| < \delta$ болғанда модулі бойынша $\varepsilon|\gamma_1| \dots |\gamma_n|$ шамасынан артпайды екенін табамыз. Сонымен әрбір $x \in D$ нүктесінде барлық дербес туындылар $\frac{\partial G}{\partial z_v}$ бар болады және оларды (2.2.35) формуласымен жазуға болады. Лемма дәлелденді.

2.2.4 Хортогстың негізгі теоремасы. Бұл пунктте егер функция әр айнымалы бойынша голоморфты болса, онда функция айнымалылар жиынтығы бойынша голоморфты болатыны туралы теореманы дәлелдейміз. Ол теорема туралы 2.2.1 пунктінде айтылды. Ал 2.2.3 пуктінде бұл теореманы дәлелдеу үшін: әр айнымалы бойынша голоморфты функция айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз екенін дәлелдеу жеткілікті екені айтылды.

Дәлелдеу алдында бірнеше леммаларды қарастырайық. Бірінші лемма бойынша функцияның шектелгендігін дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағы Шварц леммасын кеңейтіп, жалпылап қолданамыз.

Айталық φ функциясы $U_r = \{|z| < r\} \subset C$ дөңгелегінде голоморфты болсын және $z_0 \in U_r$ нүктесінде $\varphi = 0$, сонымен қатар U_r дөңгелегінде $|\varphi| \le M$ болсын. Онда U_r дөңгелегінде

$$|\varphi(z)| \le M \cdot r \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \bar{z}_0 z|} \qquad (2.2.37)$$

(егер $r = M = 1$ және $z_0 = 0$ болса, бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағы белгілі Шварц леммасы шығады).

(2.2.37) формуланы дәлелдеу үшін U_r дөңгелегін U бірлік дөңгелекке бейнелейтін бөлшекті-сызықты бейнелеу λ аламыз:

$$\lambda: z \to r\frac{z - z_0}{r^2 - \bar{z}_0 z}$$

Ал λ^{-1} арқылы кері бейнелеуді белгілейік: $U \to U_r$ және $\psi = \frac{1}{M}\varphi \cdot \lambda^{-1}$ функциясын қарастырайық. Бұл функция бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі Шварц леммасының шарттарын қанағаттандырады және бұл лемма бойынша U бірлік дөңгелегінде $|\psi(z)| \leq |z|$. Мұндағы z айнымалысын $\lambda(z)$ - ке айырбастап (2.2.37) теңсіздігін аламыз.

Лемма 1. Егер f функциясы әрбір айнымалы z_υ бойынша $U = U(a, r)$ полидөңгелегінде голоморфты болса және U полидөңгелегінде шектелген болса, онда U полидөңгелегінің әрбір нүктесінде айнымалылар жиынтығы бойынша үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі: Айталық $z^0, z \in U$-кез келген нүктелер болсын. f функциясының өсімшесін жеке координаталар өсімшесінің қосындысы ретінде жазайық:

$$f(z) - f(z^0) = \\ = \sum_{v=1}^{n}\left\{f\left(z_1^0,\ \ldots,\ z_{v-1}^0,\ z_v\ \ldots,\ z_n\right) - f\left(z_1^0,\ \ldots,\ z_v^0,\ z_{v+1}\ \ldots,\ z_n\right)\right\} \qquad (2.2.38)$$

бұдан υ-ншы қосылғышты z_υ айнымалыдан тәуелді φ_υ функциясы ретінде қарастырайық (аргументтің қалған мәндері тағайындалған).

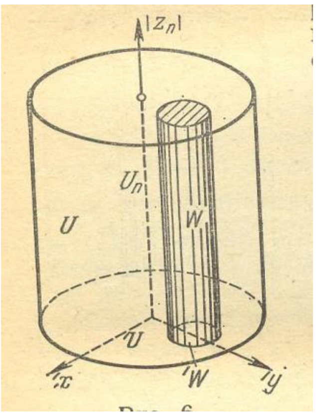
Егер U полидөңгелегінде $|f| \leq \frac{M}{2}$ болса , онда φ_υ функциясы Шварц леммасының шартын қанағаттандырады және (2.2.37) теңсіздікті (2.2.38) өрнегінің әрбір қосылғышына қолданып

$$|f(z) - f(z^0)| \leq M\sum_{\upsilon=1}^{n} r_\upsilon \frac{|z_\upsilon - z_\upsilon^0|}{r_\upsilon^2 - \bar{z}_\upsilon^0 z_\upsilon}$$

екенін табамыз. Лемма 1 дәлелденді.

Енді Хартогс теоремасын дәлелдеу үшін алдымен центрі a нүктесіндегі полидөңгелекте әрбір айнымалысы бойынша голоморфты функцияның шектелгендігін дәлелдеуіміз керек. Центрі a нүктесінде болуы міндетті емес, қандай да бір полидөңгелекте функцияның шектелгендігі осы функцияның әр айнымалы бойынша үзіліссіздігінен шығатынын байқаймыз. Осы туралы Осгуд леммасын қарастырайық:

Лемма 2 (*Осгуд леммасы*). $U = \{z \in C^n;\ |z| < R\}$ полидөңгелекті $U' = \{z' \in C^{n-1}: \|z'\| < R\}$ және $U_n = \{z_n \in C^n: |z_n| < R\}$ дөңгелегінің көбейтіндісі ретінде қарастырайық ($z' = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ арқылы $z \in C^n$ нүктесінің C^{n-1} кеңістігіндегі проекциясы белгіленген). Егер $f(z', z_n)$ функциясы z' бойынша $\overline{U}'$ полидөңгелегінде кез келген $z_n \in U_n$ үшін үзіліссіз, ал z_n бойынша $\overline{U}_n$ полидөңгелегінде кез келген $z' \in U'$ үшін үзіліссіз болса, онда $W = W' \times U_n \subset U$ полидөңгелегі табылып, f функциясы осында шектелген болады (6-сурет).



6-сурет

Дәлелдеуі: Тағайындалған $z' \in U'$ үшін

$$M(z') = \max_{z_n \in \overline{U}_n} |f(z', z_n)|$$

арқылы белгілейміз және

$$E_m = \{z' \in U': M(z') \le m\}$$

жиынын қарастырайық. Бұл жиындар тұйық жиындар, себебі егер $z'^{(\mu)} \in E_m$ $(\mu = 1,2,\dots)$ және $z'^{(\mu)} \to z'$, онда $z' \in E_m$ (шынында да f функциясының z' бойынша үзіліссіздігінен кез келген $z_n \in \overline{U}_n$ үшін $\left|f\left(z'^{(\mu)}, z_n\right)\right| \le m$, онда $|f(z', z_n)| \le m$ кез келген $z_n \in \overline{U}_n$ үшін, яғни $M(z') \le m$). E_m - өспелі тізбек құрайды және $z' \in U'$ нүктесі белгілі бір номерден бастап барлық E_m тізбегінің элементі болады. E_{M} аймағы табылады. G' облысы осы E_{M} аймағында жатыр $G' \subset U'$. Шынында да, олай болмаған жағдайда барлық E_m тізбегі еш жерде тығыз болмаған болар еді, бірақ онда U' ішінде $B^1 \subset C^{n-1}$ шары жатар еді. B^1 шарында E_1 нүктелері болмас еді, B^1 шарында $\overline{B^2}$ жатады, онда E_2 нүктелері болмайды, т.с.с. Осылайша біз ортақ $z'^{(0)} \in \overline{U}'$

нүктесі бар $B^{к} \subset C^{n-1}$ шарлар тізбегін құрар едік. Бұл нүкте ешқандай E_m тізбегінде жатпайтын еді.

Сонымен G' облысы табылып кез келген $z_n \in U_n$ үшін $|f(z', z_n)| \leq M$ орындалады. Енді G' облысынан $W' = \{z': |z' - z'^0| < r\}$ полидөңгелегін таңдап аламыз және сонда $W = W' \times U_n$ полидөңгелегінде $|f| \leq M$ болады. Осгуд леммасы дәлелденді.

Ал енді центрі a нүктесіндегі полидөңгелекте f функциясының шектелгендігін дәлелдеу үшін біз f функциясының әрбір айнымалы бойынша голоморфтылығын қолданамыз. Ол үшін бізге Хартогс леммасы керек, ол лемма субгармоникалық функциялардың қасиетіне сүйенеді. Келесі белгілеулер енгізейік:

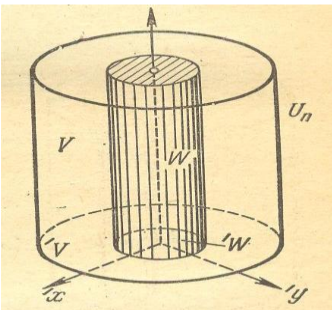
$V' = U(a', R),$

$W' = U(a', r), \quad (r < R)$ r және R скаляр шамалар,

$U_n = \{|z_n| < R\},$

$V = V' \times U_n,$

$W = W' \times U_n.$ (7- сурет)



7- сурет

Лемма 3 (Хартогс леммасы). Егер $f(z', z_n)$ функциясы кез келген $z_n \in \bar{U}_n$ үшін z' бойынша $\bar{V}'$ облысында голоморфты болса және z бойынша $\bar{W}$ аймағында голоморфты болса, онда функция $\bar{V}$ полидөңгелегінде голоморфты болады.

Дәлелдеуі: $a' = 0'$ деп белгілейік. Кез келген тағайындалған $z_n \in U_n$ және кез келген $z' \in V'$ үшін f функциясы (z' бойынша голоморфты функция болғандықтан) жинақты дәрежелік қатар ретінде жазылады:

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} C_k\,(z_n)(z')^k \tag{2.2.39}$$

мұндағы $k = (k_1, \ldots, k_{n-1})$. Бұл қатардың коэффициенттері

$$C_k(z_n) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f(0', z_n)}{(\partial z')^k}$$

U_n дөңгелегінде голоморфты болады, себебі бұлар z_n бойынша голоморфты функциялардың туындылары. $((0', z_n) \in W)$. Сондықтан $\frac{1}{|k|} ln|c_k(z_n)|$ шамасы U_n дөңгелегінде субгармоникалық функция болады.

$\rho < R$ кез келген санын таңдап аламыз. Кез келген $z_n \in U_n$ үшін $|\mathrm{C}_k(z_n)|\rho^{(k)} \xrightarrow[|k| \to \infty]{} 0$

болғандықтан, кез келген $z_n \in U_n$ үшін $|k|$ саны табылып, осыдан бастап $\frac{1}{|k|} ln|C_k(z_n)| + ln\rho \leq 0$,

яғни

$$\lim_{|k| \to \infty} \frac{1}{|k|} ln|C_k(z_n)| \leq ln\frac{1}{\rho}\,. \qquad (2.2.40)$$

Енді f функциясының $\overline{W}$ аймағында голоморфты екенін қолданамыз: f функциясы $\overline{W}$ аймағында шектелген (айталық $|f| \leq M$ болсын) және Коши теңсіздігі орындалады:

$$|C_k(z_n)|r^{(k)} \leq M, \qquad \forall z_n \in U_n.$$

Сондықтан кез келген $z_n \in U_n$ үшін және кез келген $|k|$ үшін

$$\frac{1}{|k|} ln|C_k(z_n)| \leq ln\frac{M^{\frac{1}{|k|}}}{r} \leq A \qquad (2.2.41)$$

орындалады.

Сонымен қарастырылып отырған субгармоникалық функциялар бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағы жоғарғы шек туралы теореманың шарттарын қанағаттандырады. Бұл теорема бойынша кез келген $\sigma < \rho$ үшін k_0 номері табылып, барлық $|k| > k_0$ үшін және барлық z_n және $|z_n| \leq \sigma$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\frac{1}{|k|} ln|C_k(z_n)| \leq ln\frac{1}{\sigma},$$

яғни $|C_k(z_n)|\sigma^{|k|} \leq 1$.

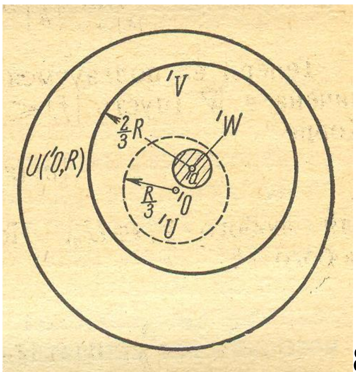
Бұдан (2.2.39) қатар кез келген $U(0,\sigma')$, $\sigma' < \sigma$ полидөңгелегінде бірқалыпты жинақты екені шығады, бірақ бұл қатардың мүшелері z бойынша үзіліссіз. Сондықтан оның қосындысы да үзіліссіз, демек ол $U(0,\sigma')$ полидөңгелегінде шектелген. Бұл полидөңгелекті V полидөңгелегіне өте жақын деп есептеуге болады, себебі V полидөңгелегін ең басында берілген кезде үлкейтуге болатын. Демек f функциясы шектелген, демек лемма 1 бойынша және теорема3 соңындағы ескерту бойынша функция $\bar{V}$ тұйық полидөңгелегінде голоморфты функция болады. Лемма 3 дәлелденді.

Хартогс теоремасын дәлелдеуге керекті 3-лемманы қарастырып болдық. Енді Хартогс теоремасының өзіне тоқталайық.

Хартогс теоремасы. Егер f функциясы $D \subset C^n$ облысының кез-келген нүктесінде әрбір айнымалы z_v бойынша голоморфты болса, онда f функциясы D облысында голоморфты функция болады.

Дәлелдеуі: f функциясының $z^0 \in D$ нүктесінде голоморфты екенін дәлелдесек жеткілікті. $z^0 = 0$ деп алайық. Айталық f функциясы әрбір айнымалы бойынша $\overline{U(0,R)}$ полидөңгелегінде голоморфты болсын, енді бізге центрі 0 нүктедегі полидөңгелекте f функциясының голоморфты екенін дәлелдеу керек.

Мұны комплекс айнымалылар саны бойынша математикалық индукция әдісімен дәлелдейміз. Бір айнымалы үшін айқын орындалады. $(n-1)$ айнымалы функция үшін орындалады деп жорамалдаймыз. $U' = U(0', \frac{R}{3})$ белгілеуін енгізейік. Жорамалдауымыз бойынша $f(z', z_n)$ функциясы z' бойынша U' полидөңгелегінде үзіліссіз кез келген $z_0 \in \overline{U_n} = \{|z_n| \leq R\}$ үшін және z_n бойынша $\overline{U_n}$ тұйық полидөңгелегінде үзіліссіз болады кез келген $z' \in U'$ үшін. Остуд леммасы бойынша f функциясы шектелген, демек $\bar{W} = \bar{W}' \times \bar{U}_n$ полидөңгелегінде голоморфты болады, мұндағы $\bar{W}' = U(a', r) \subset U'$ (8-сурет).



8-сурет

Енді $V = V' \times V_n$ полидөңгелегін қарастырайық, мұндағы $V' = U(a', \frac{2}{3}R)$. $\bar{V} \subset \overline{V(0,R)}$ екені белгілі, онда f функциясы z' бойынша V' полидөңгелегінде голоморфты кез келген $z_n \in \bar{U}_n$ үшін, ал z бойынша $\bar{W}$ полидөңгелегінде голоморфты екені дәлелденді. Хартогс леммасы бойынша f функциясы z бойынша V полидөңгелегінде голоморфты екені шығады. Ал бұл V полидөңгелегі $z = 0$ нүктесін қамтып жатыр. Сонымен n айнымалы үшін f функциясының голоморфты екенін дәлелдедік. Хартогс теоремасы дәлелденді.

Хартогс теоремасының тағы бір айтылуын қарастырайық. Егер f функциясы әрбір айнымалы z_v бойынша $U(a,r)$ полидөңгелегінде голоморфты болса, ондаf функциясы $a \in C^n$ нүктесінде Риман мағынасында (R) голоморфты болады.

Егер f функциясы $U(a,r)$ полидөңгелегінде дәрежелік қатарға жіктелсе

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} C_k (z-a)^k,$$

онда f функциясы осы нүктеде Вейерштрасс мағынасында (W) голоморфты болады.

$(W) \Rightarrow (R)$ импликациясы анық орындалады, ал $(R) \Rightarrow (W)$ импликациясы Хартогс теоремасының негізі. Сондықтан Хартогс теоремасының басқаша айтылуы:

Функцияның Риман мағынасындағы голоморфтылығы мен Вейерштрасс мағынасындағы голоморфтылығы эквивалентті.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Коши-Риман шарты.
2. Голоморфты бейнелеу.
3. Плюригармоникалық функциялар.
4. Пуассон ядросы деген не?
5. Голоморфты функциялардың қасиеттері.
6. Коши интегралы.
7. Абель леммасы.
8. Коши теңсіздігі.
9. Модульдің максимум принципі.
10. Шилов шекарасы деген не?

11.Лиувилль теоремасы.
12.Вейерштрасс теоремасы.
13.Хартогстың негізгі теоремасы.
14.Осгуд леммасы.
15.Хартогс леммасы.

2.3 Қатарларға жіктеу.

2.3.1 Дәрежелік қатарлар. 2.2.3 пуктінде $U(a,r)$ полидөңгелегінде голоморфты кез келген функцияны центрі a нүктесіндегі еселі қатарға жіктеуге болатынынын дәлелдедік. Мұндай қатардың жинақталу нүктелерінің жиыны туралы сұрақтар туындайды. Бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағы сияқты мұндай жиын полидөңгелек болады, шекаралық нүктелері де кіреді деп есептеуге болады. Бірақ қарапайым мысалдардан аздаған өзгерістер болып олай болмайтынын байқаймыз.

Мысалдар. Келесі қатарды қарастырайық:

$$\frac{1}{1-\bar{z}_1\bar{z}_2}=\sum_{\mu=0}^{\infty} z_1^{\mu}\cdot z_2^{\mu}. \tag{2.3.1}$$

(2.3.1) дәрежелік қатарының C^2 кеңістігіндегі жинақталу жиыны Рейнхарттың толық облысы болады ($|z_1\cdot z_2|<1$). Ал келесі қатар үшін

$$\frac{z_1}{(1-z_1)(1-z_2)}=\sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1+1}+z_2^{k_2} \tag{2.3.2}$$

жинақталу жиыны C^2 кеңістігіндегі бидөңгелек $\{|z_1|<1,|z_2|<1\}$ және $\{z_1=0\}$ комплекс түзуімен толықтырылған болады.

Егер жинақталу жиынының орнына оның ашық өзегін қарастырсақ, яғни осы жиынның ішкі нүктелерінің жиынын қарастырсақ, онда қатардың жинақтылығын қарастыру жеңілдейді.

Анықтама. Келесі

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} C_k(z-a)^k \tag{2.3.3}$$

дәрежелік қатардың жинақталу облысы деп S^0 ашық өзегін айтады, бұл өзек $z\in C^n$ нүктелерінің S жиынының өзегі. Бұл өзекте (2.3.3) қатары жинақты.

Абель леммасынан келесі теорема шығады:

Теорема 1. Егер z^0 нүктесі (2.3.3) қатардың жинақталу облысында S^0 жатса, онда тұйық полидөңгелек

$$\overline{U} = \{z \in C^n : |z_v - a_v| \leq |z_v^0 - a_v|\}$$

бұл да S^0 жинақталу облысында жатады және (2.3.3) қатары $\overline{U}$ тұйық полидөңгелекте абсолют және бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі: $z^0 \in S^0$ және S^0 жинақталу облысы ашық жиын болғандықтан $|\xi_v - a_v| > |z_v^0 - a_v|$ $(v = \overline{1, n})$ шартын қанағаттандыратын $\xi \in S^0$ нүктесі табылып, (2.3.3) қатары бұл нүктеде жинақты болады.

$$U \subset \{z \in C^n : |z_v - a_v| < |\xi_v - a_v|\}$$

болғандықтан, жоғарыдағы лемма бойынша (2.3.3) қатар $\overline{U}$ тұйық полидөңгелегінде абсолют және бірқалыпты жинақты болады. Теорема1 дәлелденді.

Теорема 1 басқаша былай да айтылады: (2.3.3) *қатардың жинақталу облысы S^0 центрі a нүктесіндегі Рейнхарттың толық облысы болады.* Сонымен, көп айнымалы функциялар жағдайында Рейнхарттың толық облысы бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функция жағдайында дөңгелек қандай роль атқарса, бұл да сондай роль атқарады. Осы туралы келесі теорема:

Теорема 2. Кез келген f функциясы центрі a нүктесіндегі Рейнхарт толық облысында $(D \subset C^n)$ голоморфты болса, онда f функциясы осы облыста Тейлор қатарына жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} C_k (z-k)^k \tag{2.3.4}$$

Дәлелдеуі: Айталық z^0 нүктесі D облысының кез келген нүктесі болсын. Онда $\overline{U} = \{|z_v - a_v| \leq |z_v^0 - a_v|\} \subset D$ тұйық полидөңгелегі және 2.2.3 пунктіндегі теорема 2 бойынша f функциясы центрі a нүктесінде U полидөңгелегінде Тейлор қатарына жіктеледі. Ол қатардың коэффициенттері f функциясының a нүктесіндегі туындысы арқылы есептеледі, демек C_k коэффициенттерімен беттеседі, яғни бұл Тейлор қатарына жіктелу (2.3.4) жіктелуімен бірдей болады. Теорема 2 дәлелденді.

Кез келген Рейнхарттың толық облысы қандай да бір дәрежелік қатардың жинақталу облысы бола ма деген сұрақ туындайды. Жоқ, әр уақытта солай болмайды. Себебі жинақталу облысының қосымша қасиеті бар екенін дәлелдейміз.

Анықтама. Келесі белгілеуді енгізейік:

$$z \to \lambda(z) = (ln|z_1|, \dots, ln|z_n|) \qquad (2.3.5)$$

(2.3.5) арқылы $\{z \in C^n: z_1, \dots, z_n \neq 0\}$ жиынының R^n- кеңістігіне бейнелеуін белгілейік. $M \subset C^n$ жиынының *логарифмдік образы* деп $M^* = \lambda(M_0)$ жиынын айтады, мұндағы $M_0 = \{z \in M: z_1, \dots, z_n \neq 0\}$. Егер оның логарифмді образы M^* жиыны R^n кеңістігінде дөңес жиын болса, онда M жиыны логарифмді дөңес деп аталады.

Теорема 3. (2.3.3) дәрежелік қатардың S^0 жинақталу облысы логарифмді дөңес жиын болады.

Дәлелдеуі: $a = 0$ деп аламыз. Бізге $S^* = \lambda(S^0)$-дөңес жиын екенін дәлелдеу керек. Айталық $ln|z'|, ln|z''| \in S^*$ және $z \in \mathbb{C}^n$ нүктесі

$$ln|z| = tln|z'| + (1-t)ln|z''|, \quad 0 < t < 1,$$

яғни $|z| = |z'|^t \cdot |z''|^{1-t}$ шарттарын қанағаттандыратын болсын. $z', z'' \in S^0$ болғандықтан (2.3.3) дәрежелік қатар бұл нүктеде жинақты болады және оның мүшелері шектелген:

$$\left|C_k(z')^k\right| \leq M_1$$

$$\left|C_k(z'')^k\right| \leq M_2$$

болсын дейік. Бірақ онда

$$\left|C_k z^k\right| = |C_k(z')|^t \cdot |C_k(z'')|^{1-t} \leq M_1^t \cdot M_2^{1-t}$$

болады, яғни (2.3.3) дәрежелік қатардың мүшелері z нүктесінде шектелген. S^0 жинақталу облысы ашық жиын болғандықтан осы айтқандарымыз z' және z'' нүктелеріне жақын жатқан нүктелер үшін де орындалады. Демек

(3) қатар мүшелері z-ке жақын нүктелердің бәрінде де шектелген. Абель леммасы бойынша $z \in S^0$. Теорема 3 дәлелденді.

Осы қосымша қасиет жинақталу облысын суреттей алатынын кейін дәлелдейміз: Кез келген логарифмдік дөңес толық Рейнхарт облысы қандай да бір дәрежелік қатардың жинақталу облысы болады.

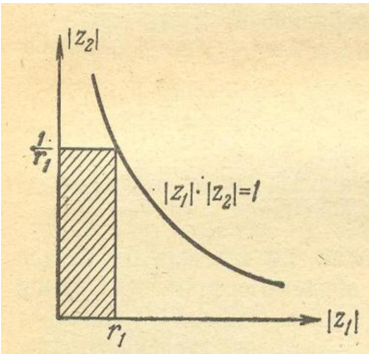
Ал қазір маңызды бір жағдайға тоқталайық. Толық бірақ логарифмдік дөңес емес Рейнхарт облысын қарастырайық. Теорема 2 бойынша кез келген $f \in G(D)$ функциясын D облысында дәрежелік қатарға жіктеуге болады. Бірақ теорема 3 бойынша бұл қатардың жинақталу облысы логарифмді дөңес, демек ол қатар ең болмағанда D облысының D_L^0 деген дөңес логарифмдік қабыршағында жинақты болады.

Қатардың қосындысы f функциясының D облысынан D_L^0 дөңес логарифмдік қабыршағында аналитикалық жалғасы болады. Сонымен біз жазықтықтағы жағдайдың кеңістіктегі жағдайдан айырмашылығы бар екенін байқаймыз: C^1 жазықтықта бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясы курсынан белгілі кез келген облыс қандай да бір функцияның голоморфты аймағы болса, ал C^n кеңістігінде голоморфты функция өзінің голоморфты облысынан одан да үлкен облысқа аналитикалық түрде жалғасады.

Енді (2.3.3) дәрежелік қатардың S^0 жинақталу облысын қарастырайық. Бұл жинақталу облысы полидөңгелектер болады, оларды жинақталу полидөңгелектері деп атайды. Мысалы (2.3.1) қатар үшін жинақталу облысы

$$S^0 = \{z \in C^2 : |z_1 z_2| < 1\}$$

болады, ал полидөңгелек $\left\{|z_1| < r_1, \quad |z_2| < \frac{1}{r_1}\right\}$ $(0 < r_1 < \infty)$ жиыны болады (9-сурет).



9-сурет

Анықтама. Егер $U \subset S^0$, онда $U(a, r)$ полидөңгелегі (2.3.3) дәрежелік қатардың жинақталу полидөңгелегі деп аталады. Бірақ кез келген полидөңгелекте

$$\{z \in C^n : |z_\upsilon - a_\upsilon| < r'_\upsilon\}$$

мұндағы $r'_\upsilon \geq r_\upsilon$ $(\upsilon = \overline{1, n})$ (2.3.3) дәрежелік қатардың жинақсыз болып қалатын нүктелер кездеседі. Мұндай полидөңгелектің радиусын r_υ *жинақталудың түйіндес радиусы* деп атайды.

Теорема 4. (2.3.3) дәрежелік қатардың жинақталудың түйіндес радиустары мына теңдікті қанағаттандырады:

$$\overline{\lim_{|k| \to \infty}} \sqrt[|k|]{|C_k| \cdot r^k} = 1 \qquad (2.3.6)$$

(Бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясындағы Коши-Адамар формуласының аналогы).

Дәлелдеуі: Айталық $z = a + \xi r$ (яғни $z_v = a_v + \xi r_v$) болсын. $|\xi| < 1$ болғанда z нүктесі U жинақталу полидөңгелегінде жатады. (2.3.3) дәрежелік қатар U жинақталу полидөңгелегінде абсолют жинақты болады. Мүшелерінің орнын ауыстырғаннан кейін

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |C_k|(z-a)^k = \sum_{|k|=0}^{\infty} |C_k|\, r^k \xi^{|k|} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{|k|=\mu} |C_k| r^k \right) \xi^{\mu}$$

ξ айнымалысының дәрежесіне байланысты қатар аламыз, бұл қатар $|\xi| < 1$ болғанда жинақты. Ал егер $|\xi| > 1$ болса қатар жинақсыз. Сондықтан бір айнымалыдан тәуелді комплекс айнымалы функциялар теориясынан белгілі Коши-Адамар формуласы бойынша

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{\sum_{|k|=\mu} |C_k| r^k} = 1. \qquad (2.3.7)$$

(2.3.3) дәрежелік қатардың мүшелерінің ішінде $|k| = \mu$ шартын қанағаттандыратын ең үлкен мүшесін таңдап аламыз:

$$|C_m|^{r^m} = max|C_k|r^k.$$

Мына бағалауларды қолданып

$$|c_m|^{r^m} \le \sum_{|k|=\mu} |C_k| r^k \le (\mu+1)^n |C_m| r^m$$

және $(\mu+1)^{\frac{n}{\mu}} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 1$ осы бағалауларды қолданып (2.3.7) өрнегін мына түрде жазуға болады:

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|C_m| r^m} = 1.$$

Бұл соңғы жазған өрнегіміз (2.3.6) пара-пар. Теорема 4 дәлелденді.

(2.3.6) өрнекті

$$\Phi(r_1, \dots, r_n) = 0 \qquad (2.3.8)$$

түрінде жазуға болады, бұл теңдеу (2.3.3) дәрежелік қатардың жинақталу түйіндес радиустарын байланыстыратын теңдеу. (2.3.8) теңдеуі $a(S^0)$ облысының шекарасын анықтайды. $a(S^0)$ облысы Рейнхарт диаграммасындағы S^0 жинақталу облысы. (2.3.8) теңдеуіне $r_v = e^{\xi_v}$ қоя отырып

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \qquad (2.3.9)$$

теңдеуін аламыз. (2.3.9) теңдеуі $\lambda(S^0)$ шекарасы, ал $\lambda(S^0)$-бұл S^0 жинақталу облысының логарифмдік бейнесі.

2.3.2 Басқа қатарлар. Көп айнымалы функциялар теориясында дәрежелік қатарлардан басқа қатарлар да қарастырылады. Солардың ішіндегі маңыздысы Хартогс қатары.

Дәрежелік қатар қарастырайық:

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} C_k(z-a)^k \tag{2.3.10}$$

Оның жинақталу облысы S^0 және қатар (2.3.10) абсолют жинақты. Абсолют жинақты болғандықтан бұл қатардың мүшелерін басқаша топтауға болады, дәлірек айтқанда $(z_v - a_v)$ айырмасының дәрежесі бойынша топтайық.

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(z')(z_n - a_n)^\mu \tag{2.3.11}$$

(2.3.11) – Хартогс қатары, μ -скалярный индекс. (2.3.11) қатарының g_μ коэффициенттері S'^0 облысында голоморфты. S'^0 облысы S^0 облысының $\mathbb{C}^{n-1}$ кеңістігіндегі проекциясы.

Мұндай топтаудан кейін қатардың жинақталу облысы кеңеюі мүмкін. Мысалы: келесі дәрежелік қатар

$$\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)} = \sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2}$$

$\{z_1 < 1, |z_2| < 1\}$ бидөңгелегінде жинақты. Ал басқаша топтаудан кейін

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1}\right) z_2^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z_2^\mu}{1-z_1}$$

қатары $\{z_1 \neq 1, |z_2| < 1\}$ облысында жинақты болады.

Анықтама. Коэффициенттері g_μ және $z' = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ бойынша голоморфты функция болып тұрған (2.3.11) қатар центрлері $\{z_n = a_n\}$ жазықтығы бар *Хартогс қатары* деп аталады. (2.3.11) қатардың жинақталу облысы деп H^0 ашық өзекті айтады. H^0 ашық өзегі (z', z_n) нүктелерінің жиынынан құралған және мынадай шартты қанағаттандырады: (2.3.11) қатары $g_\mu(z')$ коэффициенттерімен бірге z_n нүктесінде жинақты және z' нүктесінде коэффициенттері тек қана голоморфты.

Хартогс қатарының жинақталу облысына H^0 мына z^0 нүктесінен басқа $z = (z^{0\prime}, z_n)$ барлық нүктелер жатады, мұндағы $|z_n - a_n| \leq |z_n^0 - a_n|$. Сондықтан H^0 әр уақытта Хартогстың толық облысы бола алады, оның симметрия жазықтығы $\{z_n = a_n\}$, яғни $\{\ (z', z_n)$ нүктелер жиыны $z' \in D', |z_n - a_n| < R(z')\}$ түріндегі облыс. $R(z')$ функциясы Хартогс радиусы деп аталады. Хартогс радиусы $R(z')$ (2.3.11) қатарының радиусы $r(z')$-пен тең болмауы да мүмкін, себебі біз жинақталу облысы H-тан оның ашық ядросы H^0 -ге көштік. $r(z')$ функциясы Коши-Адамар формуласы бойынша анықталады

$$\frac{1}{r(z')} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|g_\mu(z')|}.$$

Бұл функция төменнен жартылай үзіліссіз болмауы мүмкін және онда $\{z' \in D': |z_n - a_n| < r(z')\}$ жиыны ашық жиын болмайды. Бірақ R регуляризациясы r бойынша төменнен жартылай үзіліссіз болатынын тексеру қиын емес:

$$R(z') = \lim_{\xi\to z'} r(\xi').$$

Дәрежелік қатар үшін Рейнхарт облысы қандай роль атқарса мұндай типтегі облыстар Хартогс қатары үшін сондай роль атқарады.

Теорема 1. Егер

1) f функциясы D-Хартогс толық облысында голоморфты функция,

2) D облысының $\{z_n = a_n\}$ симметрия жазықтығы болса, онда D облысында f функциясы қатарға жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(z')(z_n - a_n)^\mu, \tag{2.3.12}$$

мұндағы $g_\mu(z')$-коэффициенттері осы D облысының C^{n-1} кеңістігіндегі проекциясы D' облысында голоморфты болады.

Дәлелдеуі: Әрбір z нүктесімен қоса D облысына $U = U' \times U_n$ полидөңгелегі жатады, мұндағы $U' \subset C^{n-1}$-центрі z' нүктесіндегі (z' нүктесі z нүктесінің проекциясы) кішкентай полидөңгелек**,** ал $U_n \in C$- центрі a_n нүктесіндегі дөңгелек ($z_n \in U_n$).

U полидөңгелегінде f функциясы z_n бойынша голоморфты функция $\forall z' \in U'$ үшін және f функциясы $g_\mu(z')$ коэффициенттерімен (2.3.12) қатарға жіктеледі:

$$g_\mu(z') = \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu f(z', a_n)}{\partial z_n^\mu}$$

Бұл коэффициенттер U' полидөңгелегінде ғана емес, сонымен қатар D облысының проекциясы D' облысында да анықталған және голоморфты. Сондықтан (2.3.12) жіктелу барлық D облысында орындалады. Теорема 1 дәлелденді.

Ескеретін бір жағдай Хартогстың әрбір толық облысы Хартогс қатарының жинақталу облысы бола бермейді. Кейінірек біз жинақталу облысының тағы да бір қосымша шартты қанағаттандыру керек екенін, ол шарт радиус $R(z')$ -қа байланысты екенін көрсетеміз.

Енді Лоран қатарының көп өлшемді кеңістіктегі аналогын қарастырайық.

Теорема 2. $\Pi = \{z \in C^n: r_v < |z_v - a_v| < R_v\}$ арқылы сақиналардың көбейтіндісін белгілейік. П сақиналарында голоморфты кез келген f функциясын еселі Лоран қатары түрінде жазуға болады:

$$f(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k \qquad (2.3.13)$$

қосындылау барлық бүтінмәнді вектор $k = (k_1, \ldots, k_n)$ бойынша жүргізіледі, ал коэффициенттері

$$C_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{k+1}} \qquad (2.3.14)$$

мұндағы Г контуры γ_v шеңберлерінің көбейтіндісі

$$\xi_v = a_v + \rho_v e^{it} \qquad \begin{pmatrix} v = 1, \ldots, n \\ r_v < \rho_v < R_v \\ 0 \le t \le 2\pi \end{pmatrix}.$$

Дәлелдеуі: (2.3.13) жіктелу бұрынғыдай: біз $(\rho_{\overline{v}}^{-} \rho_{\overline{v}}^{+},) \subset (r_v, R_v)$ болатындай етіп $\rho_{\overline{v}}^{+}$ таңдап аламыз. f функциясын $\{\rho_v^- \le |z_v - a_v| \le \rho_v^+\}$ сақиналар көбейтіндісінде Кошидың интегралдық формасы түрінде жазамыз:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_\varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \qquad (2.3.15)$$

Мұнда $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ дегеніміз «+» және «-»-терден тұратын жиынтық, ал $\Gamma^\varepsilon = \gamma_1^{\varepsilon_1} \times \gamma_2^{\varepsilon_2} \times \ldots \times \gamma_n^{\varepsilon_n}$, мұндағы $\gamma_v^{\varepsilon_v} = \left\{|\xi_v - a_v| = \rho_v^{\varepsilon_v}\right\}$ - шеңбер. Егер $\varepsilon_v = +$ болса, онда шеңбер оң бағытталған , ал егер $\varepsilon_v = -$ болса, онда шеңбер теріс бағытталған. Қосындылау n таңбалы ε жиынтығы бойынша жүргізіледі.

Енді $\frac{1}{\xi - z}$ өрнегін сәйкес геометриялық прогрессияға жіктейміз, содан кейін жеке-жеке интегралдаймыз, содан соң $\gamma_v^{\varepsilon_v}$ бойынша интегралды γ_v бойынша интегралға алмастырамыз. Теорема 2 дәлелденді.

(2.3.13) Лоран қатарының жинақталу облысы - Рейнхарт облысы болады. Егер жинақталу облысында z^0 нүктесі $z_v^0 = a_v$ координаттармен болса, онда (2.3.13) жіктелуде $(z_v - a_v)$ теріс дәрежесі болмайды, яғни онда (2.3.13) қатары кәдімгі Тейлор жіктелуі болып қалады. Сондықтан Лоран қатарының жинақталу облысы салыстырмалы түрде толық Рейнхарт облысы болады. Рейнхарт облысы *салыстырмалы толық* деп аталады, егер ол тағайындалған v үшін $\{z_v = a_v\}$ жазықтығымен немесе қиылыспайды, немесе әрбір z^0 нүктесімен бірге $|z_v - a_v| \le |z_v^0 - a_v|$ шарты орындалатын барлық z нүктелерді қамтиды.

Сонымен , егер Рейнхарт облысы $\{z_v = a_v\}$ жазықтықтарының ешқайсысымен қиылыспаса, онда салыстырмалы толық шартына ешқандай шектеу жоқ, ал егер жазықтықтармен қиылысып жатса, онда қосымша шарттар қойылады.

Тейлор қатары сияқты, Лоран қатарының жинақталу облысы логарифмдік дөңес болатыны дәлелденеді. Кез келген f функциясы D – Рейнхарт толық облысында голоморфты болса, онда D облысында (2.3.13) Лоран қатарына жіктеледі.

Лоран қатарының басқа да аналогын қарастыруға болады:

$$\{z \in C^n : z' \in D', r(z') < |z_n, a_n| < R(z')\}$$

түріндегі Хартогс ауданында кез келген f голоморфты функцияны

$$f(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} g_\mu(z')(z_n - a_n)^\mu \qquad (2.3.16)$$

(2.3.16) - Хартогс-Лоран қатары түрінде жазуға болады, мұндағы $g_\mu \in G(D')$.

Енді *біртекті полином бойынша* қатарларды қарастырайық. Егер $P_\upsilon(\lambda z) = \lambda^\upsilon P_\upsilon(z)$ теңдігі орындалса, $\forall \lambda \in$ С, онда $P_\upsilon(z)$ полиномы υ дәрежесі бойынша *біртекті* деп аталады.

Мұндай біртекті полином бойынша қатарлар дәрежелік қатарды қайтадан топтастыру жасағанда шығады:

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} C_k z^k = \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\sum_{|k|=\upsilon} C_k z^k\right) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_\upsilon(z), \qquad (2.3.17)$$

мұндағы v – скаляр индекс. Хартогс қатары сияқты бұлайша дәрежелік қатарды қайтадан топтастыру жасағанда жинақталу облысы кеңеюі мүмкін.

Теорема 3. Центрі $z = 0$ толық дөңгелекті D облысында голоморфты кез келген f функциясын осы облыста біртекті полином бойынша қатарға жіктеуге болады:

$$f(z) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} p_\upsilon(z) \qquad (2.3.18)$$

мұндағы p_υ шамалары $|k| = \upsilon$ болған жағдайда f функциясының Тейлор қатарына жіктелуіндегі $C_k z^k$ мүшелерінен құрастырылған, және бұл қатар D облысының компактты ішкі жиындарында бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі: Айталық $z \in D\backslash 0$ және $w = \frac{z}{|z|}$ болсын. $\xi = \lambda w, \lambda \in C$ комплексті түзуі z нүктесі арқылы өтеді және D облысын $\{\lambda : |\lambda| < R(w)\}$ дөңгелегі бойынша қияды. 0∈ D болғандықтан

$$f(\xi) = \sum_{|k|=0}^{\infty} C_k \xi^k = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_\upsilon(\xi)$$

қатары бас нүкте маңайында жинақты болады және $\{\xi = \lambda w\}$ комплекс түзуіне қысылу нәтижесінде қатар пайда болады:

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda w) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_\upsilon(\lambda w) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} P_\upsilon(w)\lambda^\upsilon \qquad (2.3.19)$$

$f \in G(D)$ болғандықтан φ функциясы $\{|\lambda| < R(w)\}$ дөңгелегінде голоморфты және (2.3.19) өрнегі бұл функцияның Тейлор жіктеуі болады; бұл жіктелу бұл дөңгелекте жинақты болады, бізде $|z| < R(w)$ болғандықтан және $z = |z|w$ орындалғандықтан (2.3.18) қатар z нүктесінде жинақты.

Егер $K \subset D$ болса, онда $0 < r(w) < R(w)$ және q саны үшін $0 < q < 1$ болатын $r(w)$ функциясы табылады және $z \in K$ үшін $|z| \leq qr(w)$ мұндағы $w = \frac{z}{|z|}$.

Сондықтан барлық $z \in K$ үшін

$$|p_\upsilon(z)| = |P_\upsilon(w)| \cdot |z|^\upsilon \leq |p_\upsilon(w)| \cdot r^\upsilon(w) \cdot q^\upsilon \qquad (2.3.20)$$

Бірақ Тейлор жіктелуінің коэффициенттері үшін интегралдық формула бойынша

$$p_\upsilon(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r(w)} \frac{f(\lambda w)}{\lambda^{\upsilon+1}} d\lambda,$$

болғандықтан $\{\lambda w: |\lambda| = r(w)\} \subset D$ жиынын қолдана отырып және $|f(\lambda w)| \leq M$ ескеріп, біз $|p_\upsilon(w)| \leq \frac{M}{r^\upsilon(w)}$ екенін табамыз. Бұл соңғы теңсіздік Тейлор қатарының коэффициенттері үшін Коши теңсіздігі. Бұл Коши теңсіздігін (2.3.20) өрнегіне қойып, барлық $z \in K$ үшін $|p_\upsilon(z)| \leq Mq^\upsilon$ нәтижесін аламыз. $0 < q < 1$ болғандықтан бұл нәтиже K облысында (2.3.18) қатардың бірқалыпты жинақты екенін дәлелдейді. Теорема3 дәлелденді.

Кез келген толық дөңгелекті облыс біртекті полином бойынша құрылған қандай да болмасын қатардың жинақталу облысы бола бермейтінін байқауға болады. Бұл жағдай Хартогс қатарлары мен облыстары сияқты. Бұны келесі жайттан байқаймыз:

$(z', z_n) > (w', z_n)$, мұндағы $w_\upsilon = \frac{z_\upsilon}{z_n}$ $(\upsilon = 1, \dots, n-1)$, түрлендіруі дөңгелек облысты Хартогс ауданына көшіреді және бұл түрлендіру (2.3.18) жіктелуді

$$g(w'_n, z_n) = f(w' z_n, z_n) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} p_\upsilon(w', 1) z_n^\upsilon$$

жіктелуіне түрлендіреді, яғни f функциясының бейнесі үшін Хартогс жіктелуіне келтіреді.

Өзіндік бақылау сұрақтары

1. Дәрежелік қатарлар.
2. Дәрежелік қатарлардың жинақталу облысы.
3. Жиынның логарифмді образы деген не?
4. Логарифмді дөңес жиын деген не?
5. Коши-Адамар формуласының аналогы.
6. Лоран қатары.
7. Хартогс қатары.
8. Біртекті полином бойынша дәрежелік қатар.

Жаттығулар

1. Стереографиялық проекцияның кеңістіктік бейнесін құру керек және соның көмегімен C^n кеңістігінде сферикалық метриканы енгізу керек.

2. C^n кеңістігіндегі $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ біртекті координаталы сферикалық метрика $ds^2 = \frac{1}{(\xi,\xi)}\{(\xi,\xi)(d\xi,d\xi) - (\xi,d\xi)(d\xi,\xi)\}$ формуласымен анықтауға болатынын дәлелдеу керек, мұндағы жақшалар скаляр көбейтіндіні білдіреді.

3. C^n кеңістігіндегі әрбір комплекс түзу CP^n кеңістігінде бір шексіз нүктені алатынын дәлелдеу керек.

4. Рейнхарт түрлендіруі $\alpha(z) = (|z_1|, \dots, |z_n|)$ кез келген $D \in C^n$ облысын R^n кеңістігінің облысына көшіретінін дәлелдеу керек.
5. Егер $D \in C^n$ – толық Хартогс облысының $\beta(D)$ бейнесі $\beta(z) = (z', |z_n|)$ түрлендіруімен R^{2n-1} кеңістігінде дөңес облыс болса, онда $D \in C^n$ – толық Хартогс облысы дөңес болатынын дәлелдеу керек.
6. $D \in C^n$ облысында үзіліссіз функция плюригармоникалық функция болуы үшін оның l комплекс түзуіндегі қысылуы $l \cap D$ облысында гармоникалық болуы қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеу керек.
7. f функциясы $|f(z)| \le c(1 + |z|^m)$ шартын қанағаттандырса, мұндағы c және m-тұрақтылар, онда f функциясы дәрежесі m санынан аспайтын көпмүшелік болатынын дәлелдеу керек.
8. M жиыны F класының функциялар жиыны үшін жалғыздық жиыны болады, егер M жиынында нольге тең кез келген $f \in F$ функциясы

нольге тең болса. $G(C^2)$ класынан алынған функциялар үшін келесі жиындар жалғыздық жиыны болатынын дәлелдеу керек:

а) C^2 кеңістігінен алынған нақты гипержазықтық,

б) $\{z_1 = \overline{z_2}\}$ нақты екі өлшемді жазықтық,

с) $\left\{z_2 = \overline{z_1},\ \ y_1 = x_1 \cdot sin\frac{1}{x_1}\right\}$ - доғасы.

9. Жинақталу облысы

   а) $\{\, z \in C^2\colon\ |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ шар,

   б)$\{\, z \in C^2\colon |z_1| +\ |z_2| < 1\}$ ауданыболатын дәрежелік қатарлар құрастыру керек.

10. Кез келген Рейнхарт дөңес облысы логарифмді дөңес болатынын дәлелдеу керек.

11. $f\colon D \to C^n$ голоморфты қисығы үшін, мұндағы D жазық облыс, модульдің максимум принципін жазып, оны дәлелдеу керек:

    а) $|f|$ евклид метрикасында,

    б)$\big|\,|f|\big|$ - полидөңгелекті метрикада.

12. $f(z_1, z_2)$ функциясы z_1 айнымалысы бойынша $|z_1| < 1$ дөңгелегінде голоморфты болатын және z_2 айнымалысы бойынша $|z_2| < 1$ дөңгелегінде голоморфты болатын және z_2 айнымалысы бойынша $|z_2| < 1$ дөңгелегінде үзіліссіз болатын және берілген

$\{|z_1| < 1\ , |z_2| < 1\}$ бидөңгелегінде $z = (z_1, z_2)$ бойынша үзіліссіз болмайтын функцияға мысал келтіру керек.

13. Айталық U^n- полидөңгелек болсын, ал Г – оның тұлғасы. $f \in G(\,U^n) \cap C\overline{(U^n)}$ функциясы үшін Г тұлғасында $|f| = const$ болса, онда f функциясы рационал функция екенін дәлелдеу керек.

Негізгі әдебиеттер

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменого. – М. Наука, 1984.
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М. Наука, 1985.
3. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М. Наука, 1964.
4. Фукс Б.А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва.Гос.изд.физико-математической литературы, 1962.
5. М. Эрве. Функции многих комплексных переменных: локальная теория. – Москва, Издательство «Мир», 1985.

Қосымша әдебиеттер

1. Фукс Б.А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва, Издательство иностранной литературы, 1943.
2. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. – Москва, Издательство «Мир», 1969.
3. Бохнер С., Мартин У. Т. Функции многих комплексных переменных. – Москва, Издательство иностранной литературы, 1951.
4. Хуа-Ло-Кен. Гармонический анализ функции многих комплексных переменных. – Москва, Издательство иностранной литературы, 1959.

Мазмұны

I БӨЛІМ

II БӨЛІМ