ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТІРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF
THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

«Eurasian Mathematical Journal» журналының шығарыла бастағанына 10 жыл толуына арналған

«АНАЛИЗДІҢ, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ЖӘНЕ АЛГЕБРАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» (EMJ-2019)

атты халықаралық конференция

ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ

International Conference

INTERNATIONAL CONFERENCE «ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA» (EMJ-2019)

dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal

THE ABSTRACT BOOK

16-19 қазан 2019
Нұр-Сұлтан, Қазақстан

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТІРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF
THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

«Eurasian Mathematical Journal» журналының
шығарыла бастағанына 10 жыл толуына арналған

«АНАЛИЗДІҢ, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ЖӘНЕ АЛГЕБРАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ »(EMJ-2019)
атты халықаралық конференция

ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ

International Conference
«ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA» (EMJ-2019)
dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal

THE ABSTRACT BOOK

16-19 қазан 2019
Нұр-Сұлтан, Қазақстан

ӘОЖ 51
КБЖ 22.1
А 56

«Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019): «Eurasian Mathematical Journal» журналының шығарыла бастағанына 10 жыл толуына арналған халықаралық конференцияның тезистер жинағы.-Нұр-Сұлтан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2019. -183 б.

«Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры»(EMJ-2019): Сборник тезисов международной конференции, посвященной 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal».–Нур-Слтан: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, 2019. -183 с.

International Conference «Actual problems of analysis, differential equations and algebra» (EMJ-2019) dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. –Nur-Sultan: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2019. -183 p.

ӘОЖ 51
КБЖ 22.1
ISBN 978-601-7590-58-1

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ КОМИТЕТ:

Төраға: Сыдыков Ерлан Батташевич, ректор ЕНУ им. Л.Н. Гумилева
Тең төрағалар: Буренков Виктор Иванович, РУДН (Россия)
Отелбаев Мухтарбай, академик НАН РК (Казахстан)
Садовничий Виктор Антонович, М.В. Ломоносов ат. ММУ ректоры, (Ресей)

Бағдарламалық комитеттің мүшелері:
H. Begehr (Германия), Ш.А. Алимов (Өзбекстан), О.В.Бесов(Ресей), А.А. Борубаев (Қырғызстан), G. Bourdaud (Франция), Б.Т. Жұмағұлов (Қазақстан), А.С. Жұмаділдаев (Қазақстан), V. Goldshtein (Израиль), М.Л. Гольдман (Ресей), В. Гулиев (Әзірбайжан), P. Jain (Индия), Т.Ш. Қалменов(Қазақстан), Г. Казарян (Армения), E. Kissin (Ұлыбритания), M. Lanza de Cristoforis (Италия), Р. Ойнаров (Қазақстан), С.А. Плакса (Украина), L.-E. Persson (Швеция), M.A. Ragusa (Italy), М.Д. Рамазанов (Ресей), M. Reissig (Германия), M. Ружанский (Бельгия), С.М. Сағитов (Швеция),
G. Sinnamon (Канада), Е.С. Смаилов (Қазақстан), В.Д. Степанов (Ресей), Я.Т. Султанаев (Ресей), И.А. Тайманов (Ресей), С.Н. Харин (Қазақстан), D.D. Haroske (Германия), А. Хасаноглы (Түркия), В.Н. Чубариков (Ресей), А.А. Шкаликов (Ресей), D. Yang (ҚХР).

ҰЙЫМДАСТЫРУ КОМИТЕТІ

Төраға: Молдажанова Әсемгүл Александровна, ЕҰУ бірінші проректоры - оқу ісі жөніндегі проректор.
Төрағаның орынбасарлары: Жолдасбекова Ақбота Ниязовна, ЕҰУ халықаралық байланыстар және инновация жөніндегі проректоры
Мерзадинова Гульнара Тынышбайқызы, ЕҰУ ғылыми-зерттеу жұмыстары жөніндегі проректор
Дихан Қамзабекұлы, ЕҰУ әлеуметтік-мәдени даму жөніндегі проректор, ҚР ҰҒА академигі
Айдарғалиева Назгүл Ғазизоллаевна, ЕҰУ қаржы-шаруа жұмыстары жөніндегі проректор м.а.
Қозыбаев Данияр Хайбилдаұлы, ЕҰУ механика-математика факультетінің деканы
Оспанов Қордан Наурызханұлы, ЕҰУ «Іргелі математика» кафедрасының профессоры

Ұйымдастыру комитетінің мүшелері:
А.М. Абылаева (Қазақстан), А. Алдай (Қазақстан), Т. Бекжан (ҚХР), Н.Ә. Боқаев (Қазақстан), Д.Б. Жакебаев (Қазақстан), А.Ж. Жұбанышева (Қазақстан),
Б.Е. Қанғожин (Қазақстан), К.К. Кенжебаев (Қазақстан), Л.Қ. Құсайынова (Қазақстан), P.D. Lamberti (Италия), М.Б. Мұратбеков (Қазақстан), Е.Е. Нұрмолдин (Қазақстан), Е.Д. Нұрсұлтанов (Қазақстан), У.У. Өмірбаев (Қазақстан), I.N. Parasidis (Грекия), М.И. Рамазанов (Қазақстан), М.А. Садыбеков (Қазақстан), Ә.М. Сарсенбі (Қазақстан), Д. Сұраған (Қазақстан), Т.В. Тарарыкова (Россия) , Б.Х. Тұрметов (Қазақстан), Ж.А. Түсіпов (Қазақстан).

Жауапты хатшы: А.М. Темірханова
Хатшылар алқасы: Р.Д. Ахметкалиева, А.Н. Бесжанова, А.А. Джумабаева,
Ж.Б. Ескабылова, Д.С.Қаратаева, А.Н. Копежанова, Д. Матин, Ж.Б. Муканов,
М. Райхан, Б. Сейлбек, Н. Токмаганбетов, С. Шаймардан, А. Хайркулова.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель: Сыдыков Ерлан Батташевич, ректор ЕНУ им. Л.Н. Гумилева
Со-председатели: Буренков Виктор Иванович, профессор, РУДН (Россия)
Отелбаев Мухтарбай, академик НАН РК (Казахстан)
Садовничий Виктор Антонович, ректор МГУ им. М.В. Ломоносова (Россия)

Члены программного комитета:
H. Begehr (Германия), Ш.А. Алимов (Узбекистан), О.В. Бесов (Россия), А.А. Борубаев (Кыргызстан), G. Bourdaud (Франция), Б.Т. Жумагулов (Казахстан), А.С. Жумадильдаев (Казахстан), М.Л. Гольдман (Россия), V. Goldshtein (Израиль), В. Гулиев (Азербайджан), P. Jain (Индия), Т.Ш. Кальменов (Казахстан), Г. Казарян (Армения) , E. Kissin (Великобритания), M. Lanza de Cristoforis (Италия), Р. Ойнаров (Казахстан), С.А. Плакса (Украина), L.-E. Persson (Швеция), M.A. Ragusa (Italy), М.Д. Рамазанов (Россия), M. Reissig (Германия), М. Ружанский (Бельгия), С.М. Сагитов (Швеция), G. Sinnamon (Канада), Е.С. Смаилов (Казахстан), В.Д. Степанов (Россия), Я.Т. Султанаев (Россия), И.А. Тайманов (Россия), С.Н. Харин (Казахстан), D.D. Haroske (Германия), А. Хасаноглы (Турция), В.Н. Чубариков (Россия), А.А. Шкаликов (Россия), D. Yang (КНР).

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель: Молдажанова Асемгуль Александровна, первый проректор-проректор по учебной работе ЕНУ
Заместители председателя: Жолдасбекова Ақбота Ниязовна, проректор по международным связям и инновациям ЕНУ
Мерзадинова Гульнара Тынышбаевна, проректор по научно-исследовательской работе ЕНУ
Қамзабекұлы Дихан, проректор по социально-культурному развитию ЕНУ, академик НАН РК
Айдаргалиева Назгуль Газизоллаевна, проректор по финансово-хозяйственным вопросам ЕНУ
Қозыбаев Данияр. Хаибилдаевич, декан механико-математического факультета ЕНУ
Оспанов Кордан Наурызханович, профессор кафедры «Фундаментальная математика» ЕНУ

Члены организационного комитета:
А.М. Абылаева (Қазақстан), М. Алдай (Казахстан), Т. Бекжан (КНР), Н.А. Бокаев (Казахстан), Д.Б. Жакебаев (Казахстан), А.Ж. Жубанышева (Казахстан), Б.Е. Кангужин (Казахстан), К.К. Кенжебаев (Казахстан), Л.Қ. Кусаинова (Казахстан), P.D. Lamberti (Италия), М.Б. Муратбеков (Казахстан), Е.Е. Нурмолдин (Казахстан), Е.Д. Нурсултанов (Казахстан), I.N. Parasidis (Греция), М.И. Рамазанов (Казахстан), М.А. Садыбеков (Казахстан), А.М. Сарсенби (Казахстан), Д. Сураган (Казахстан), Т.В. Тарарыкова (Россия), Б.Х. Турметов (Казахстан), Ж.А. Тусупов (Казахстан), У.У. Умирбаев (Казахстан),

Ответственный секретарь: А.М. Темірханова
Секретариат: Р.Д. Ахметкалиева, А.Н. Бесжанова, А.А. Джумабаева, Ж.Б. Ескабылова, Д.С.Қаратаева, А.Н. Копежанова, Д. Матин, Ж.Б. Муканов, М. Райхан,
Б. Сейлбек, Н. Токмаганбетов, С. Шаймардан, А. Хайркулова.

INTERNATIONAL PROGRAMME COMMITTEE

Chairman: Sydykov Yerlan Battashevich, Rector of the L.N. Gumilyov ENU
Co-chairs: Burenkov Victor Ivanovich, Professor of the RUDN University (Russia)
Otelbayev Mukhtarbay, Academician of NAS RK (Kazakhstan)
Sadovnichii Victor Antonovich, Rector of the M.V. Lomonosov MSU,(Russia).

Members of programme committee:
H. Begehr (Germany), Sh.A. Alimov (Uzbekistan), O.V. Besov (Russia), A.A. Borubaev (Kyrgyzstan), G. Bourdaud (France), V.N. Chubarikov (Russia), H. Ghazaryan (Armenia), M.L. Goldman (Russia) , V. Goldshtein (Israel), V. Guliyev (Azerbaijan), D.D. Haroske (Germany), A. Hasanoglu (Turkey), P. Jain (India), T.Sh. Kalmenov (Kazakhstan), S.N. Kharin (Kazakhstan), E. Kissin (Great Britain), M. Lanza de Cristoforis (Italy), R. Oinarov Kazakhstan), S.A. Plaksa (Ukraine), L.-E. Persson (Sweden), M.D. Ramazanov (Russia), M.A. Ragusa (Italy), M. Reissig (Germany), M. Ruzhansky (Belgium), S.M. Sagitov (Sweden), A.A. Shkalikov (Russia), G. Sinnamon (Canada), E.S. Smailov (Kazakhstan), V.D. Stepanov (Russia), Ya.T. Sultanaev (Russia), I.A. Taimanov (Russia), D. Yang (China), B.T. Zhumagulov (Kazakhstan),
A.S. Zhumadildaev (Kazakhstan).

ORGANIZING COMMITTEE

Chair: Moldazhanova Asemgul Aleksandrovna, First Vice-Rector, Vice-Rector for Academic Works of ENU
Co-chairs: Zholdasbekova Aқbota Niyazovna, Vice-Rector for International Cooperation and Innovations of ENU
Merzadinova Gulnara Tynyshpaevna, Vice-Rector for Research Work of ENU
Kamzabekuly Dikhan, Vice-Rector for Welfare Development of ENU, Academician of NAN RK
Aydargalieva Nazgul Gazizollayevna, Acting Vice-Rector for Financial and Economic Affairs of ENU
Dzhachibekov Nurbolat Zhumabekovich, Dean of the Faculty of Mechanics and Mathematics of ENU
Ospanov Kordan Nauryzkhanovich, Professor of the Department of Fundamental Mathematics of ENU

Members of organizing committee:
A.M. Abylayeva (Kazakhstan), A.Alday (Kazakhstan), T. Bekjan (Kazakhstan), N.A. Bokayev (Kazakhstan), B.E. Kangyzhin (Kazakhstan), K.K. Kenzhebaev (Kazakhstan), L.K. Kussainova (Kazakhstan), P.D. Lamberti (Italy), M.B. Muratbekov (Kazakhstan), E.E. Nurmoldin (Kazakhstan), E.D. Nursultanov (Kazakhstan), I.N. Parasidis (Greece), M.I. Ramazanov (Kazakhstan), M.A. Sadybekov (Kazakhstan), A.M Sarsenbi (Kazakhstan), D. Suragan (Kazakhstan), T.V. Tararykova (Россия), B.Kh. Turmetov (Kazakhstan), J.A. Tussupov (Kazakhstan) , U.U. Umirbaev (Kazakhstan), D.B. Zhakebayev (Kazakhstan), A.Zh. Zhubanysheva (Kazakhstan).

Executive secretary: A.M. Temirkhanova
Secretary: R.D. Akhmetkaliyeva, A. Beszhanova, A.A. Dzhumabayeva,
Zh.B. Yeskabylova, D. Karatayeva, A.N. Kopezhanova, D. Matin, Zh.B. Mukanov,
M. Raikhan, B. Seilbek, S. Shaimardan, N. Tokmaganbetov, A. Hairkulova.

СЕКЦИЯЛАР

1. Функциялар теориясы және функционалдық талдау
2. Дифференциалдық теңдеулер және математикалық физиканың теңдеулері
3. Алгебра және модельдер теориясы

СЕКЦИИ

1. Теория функций и функциональный анализ
2. Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики
3. Алгебра и теория моделей

MAIN TOPICS

1. Theory of functions and functional analysis
2. Differential equations and equations of mathematical physics
3. Algebra and theory of models

Мазмұны/Contents/Содержание

ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ТАЛДАУ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

THEORY OF FUNCTIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS

ДВУХВЕСОВАЯ ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

А.М. Абылаева

Евразийский национальный университет им Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: abylayeva_ b@mail.ru

Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $0 < \alpha < 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Весовые функции $v, w : I \to I$ неотрицательные локально интегрируемые и u - не возрастающая функция на $I = (0; \infty)$ такие, что $v \in L_1^{loc}(I)$, $w \in L_1(0, t)$, $\forall t > 0$.

Положим, что $\frac{dW(x)}{dx} \equiv w(x)$ почти всюду на $x \in I$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности из $L_{p,w} = L_{p,w}(I)$ в $L_{q,\nu} = L_{q,\nu}(I)$ интегрального оператор вида

$$K_{\alpha\gamma} f(x) = \int_0^x \ln \frac{W(x)}{W(x) - W(s)} \cdot \frac{u(s) W^{\gamma-1}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}}, \;\; x \in I,$$

где $L_{p,w}-$ пространство всех измеримых функций f на I для которых конечен следующий функционал

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(s) ds \right)^{\frac{1}{p}}, \;\; 0 < p < \infty.$$

При $\ln = 1$ критерии ограниченности и компактности из $L_{p,w} = L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} = L_{q,v}(I)$ оператора $K_{\alpha\gamma}$ получены в работе [1]. А в случае когда $W(x) = x$ двухвесовая оценка и компактность вытекает из результатов работы [2].

Наряду с оператором $K_{\alpha\gamma}$ рассмотрим оператор

$$H_{\alpha\gamma} f(x) = \frac{1}{W^{1-\alpha}(x)} \int_0^x u(s) W^{\gamma-1}(s) f(s) w(s) ds, \;\; x \in I.$$

Теорема 1 *Пусть* $0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} < p \leqslant q < \infty$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

$i)$ *оператор* $K_{\alpha\gamma}$ *ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,v}$;

$ii)$ *оператор* $H_{\alpha\gamma}$ *ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,v}$;

$iii)$ $A_{\alpha\gamma} = \sup\limits_{z \in I} \left(\int_0^z u^{p'}(t) W^{(\gamma-1)p'}(t) w^{p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty W^{q(\alpha-2)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$,

при этом $\|K_{\alpha\gamma}\| \approx \|H_{\alpha\gamma}\| \approx A_{\alpha\gamma}$.

Список литературы

[1] A.M. Abylayeva, R.Oinarov and L.-E.Persson. *Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators.* Journal of inequal. and Appl. (JIA), № 324, 2016.

[2] A.M. Abylayeva, L.-E. Persson. *Hardy type inequalities and compactness of a class of integral operators with logarithmic singularities*. Math. Inequal. Appl. (MIA), V.21, № 1, 2018, P.201-215.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

А.Н. Адилханов, Ж.М. Онербек

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур - Султан, Казахстан
E-mails: adilkhanov@mail.ru, onerbek.93@mail.ru

В данной работе определяется глобальное пространство типа Морри с переменным показателем и приводятся условия ограниченности потенциала Рисса в этих пространствах.

Определение 1 *Потенциал Рисса определяется как*

$$I^{\alpha(x)} f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy,$$

где $0 < \alpha(x) < n$. При $\alpha = const$ этот оператор совпадает с классическим потенциалом Рисса I^{α}.

Пусть $p(x)$-измеримая функция на открытом ограниченном множестве $\Omega \subset R^n$ со значениями в $(1, \infty)$. Предположим

$$1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty,$$

$p_- = p_-(\Omega) = \inf_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ = p_+(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} p(x)$. *$P^{\log}(\Omega)$-это множество функций $p(x)$, для которых*

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{-ln\,|x-y|}, |x-y| \leqslant \frac{1}{2}, |p(x) - p(\infty)| \leqslant A_\infty \ln(2 + |x|)$$

для всех $x, y \in \Omega$. Обозначим через $L_{p(.)}(\Omega)$ пространство всех измеримых функций $f(x)$ на Ω, таких, что

$$J_{p(.)}(f) = \int_\Omega [f(x)]^{p(x)}\, dx < \infty,$$

где норма определяется следующим образом

$$\|f\| = \inf\{\eta > 0, J_{p(.)}\frac{f}{\eta} \leqslant 1\}.$$

Пусть $w(x, r)$-неотрицательная измеримая функция на $\Omega \times [0, l]$, $\Omega \subset R^n$, $l = diam\Omega, 1 \leqslant \theta < \infty$. Глобальные пространства типа Морри с переменным показателем $GM_{p(.),w(.),\theta}$ - это множество функций с конечной квазинормой:

$$\|f\|_{GM_{p(.),w(.),\theta}} = \sup_{x\in R^n} ||w^{-1}(x,r)\, r^{-\theta_{p(x,r)}}||f||_{L_{p(.)(B(x,r))}}||_{L_{\theta(0,\infty)}} < \infty,$$

где $B(x, r)$-шар в n-мерном пространстве с центром в точке x и радиусом $r > 0$.Пусть $\theta_{p(x,r)} = \frac{n}{p(x)}$, при $r \leqslant 1$; $\theta_{p(x,r)} = \frac{n}{p(\infty)}$,при $r > 1$.

Теорема 1 *Пусть $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$, $2 < \theta < \infty$ и $w(x, r)$ удовлетворяют следующим условиям*

$$\left(\int_t^l \left(r^{\alpha(x)-1} w(x,r)\right)^{\theta'} dr\right)^{\frac{1}{\theta'}} \leqslant r^{-\frac{\alpha(x)p(x)}{q(x)-p(x)}},$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{r^{\frac{n}{p(x)} - \frac{n}{q(x)}}}{(w(x,r))^{\frac{p(x)}{q(x)} - 1}} \right)^{\frac{\theta}{\theta - \theta'}} dr < C.$$

Тогда $I^{\alpha(.)}$ *является ограниченным оператором из* $GM_{p(.),w_1,(.)\theta}$ *в* $GM_{p(.),w_2(.),\theta}$.

В следующей теореме $\alpha = const$.

Теорема 2 *Предположим, что* $p(x) \in P^{log}(\Omega)$ *и функция* $w_1(x,t)$ *удовлетворяют условиям:*

$$\int_r^l w_1(x,t) \frac{dt}{t} < C w_1(x,r);$$

$$\left(\int_t^l \left(r^{\alpha(x)-1} w_1(x,r) \right)^{\theta'} dr \right)^{\frac{1}{\theta'}} \leqslant r^{-\frac{\alpha(x)p(x)}{q(x)-p(x)}};$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{r^{\frac{n}{p(x)} - \frac{n}{q(x)}}}{(w_1(x,r))^{\frac{p(x)}{q(x)} - 1}} \right)^{\frac{\theta}{\theta - \theta'}} dr < C,$$

где C *не зависит от* $x \in \Omega$ *и* $r \in (0,l]$.*Пусть* $w_2(x,t) = (w_1(x,t))^{\frac{p(.)}{q(.)}}$.*Тогда оператор* I^α *ограничен из* $GM_{p(.),w_1,(.)\theta}$ *в* $GM_{p(.),w_2(.),\theta}$.

Для обобщенных пространств типа Морри с переменным показателем подобные результаты получены в [1], [2].

Список литературы

[1] V.S.Guliyev,J.J.Hasanov,S.G.Samko *Boundedness of the Maximal,Potential and Singular operators in the generalized variable expontnt Morrey spaces.* MATH.SCAND,107(2010),pp285-304.

[2] V.S.Guliyev,S.G.Samko
Maximal,Potential,and Singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbonded sets. Journal of Mathematical Sciences, Vol.193,No.2,August,2013, pp. 228 - 246.

ОБ ОДНОМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОМ ВЕСОВОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХАРДИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

А.Ж. Адиева, А.О. Байарыстанов

Евразийский национальный университет имени Л.Гумилева,
Нур-Султан, Казахстан
E-mails: a.aina70@mail.ru, oskar-62@mail.ru

Пусть $I = (0, \infty)$, u - непрерывная и неотрицательная функция, а положительные функции v, r достаточно раз непрерывно дифференцируемые на интервале I и для любого $a > 0$ функции $v^{1-p'}, r^{-1}$ интегрируемые на интервале $(0, a)$, где $1 < p' < \infty$.

Пусть $D_r^2y(t)=\frac{d}{dt}r(t)\frac{dy(t)}{dt}$ и $D_r^1y(t)=r(t)\frac{dy(t)}{dt}$.

Пусть $1<p<\infty$ и $W_{p,v}^2(r)\equiv W_{p,v}^2(r;I)$ пространство функции $f:I\to R$ локально абсолютно непрерывных на I вместе с функцией D_r^1f и для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_{p,v}^2(r)}=\|D_r^2f\|_{p,v}+|D_r^1f(0)|+|f(0)|, \tag{1}$$

где $\|g\|_{p,v}=\left(\int\limits_0^\infty v(t)|g(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}$ - норма весового пространства $L_{p,v}(I)\equiv L_{p,v}$.

Положим

$$LR'W_{p,v}^2(r)=\left\{f\in W_{p,v}^2(r):f(0)=0,D_r^1f(0)=D_r^1f(\infty)=0\right\}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\int\limits_0^\infty u(t)|f(t)|^pdt\leqslant C\int\limits_0^\infty v(t)|D_r^2f(t)|^pdt,\ \ f\in LR'W_{p,v}^2(r). \tag{2}$$

Неравенство при $r\equiv 1$ имеет вид

$$\int\limits_0^\infty u(t)|f(t)|^pdt\leqslant C\int\limits_0^\infty v(t)|f''(t)|^pdt,\ \ f\in LR'W_{p,v}^2(1). \tag{3}$$

Неравенство вида (3) имеет самостоятельное значение и рассматривалось во многих работах (см., например [1],[2],[3] и приведенные там ссылки).

В работе [2] неравенство (3) исследовано при различных соотношениях граничных значений функции f: $f(0)$, $f'(0)$, $f(\infty)$, $f'(\infty)$. Как видно из $LR'W_{p,v}^2(r)$, мы будем исследовать неравенство (2) только при следующих граничных значениях $f(0)=D_r^1f(0)=0,\ D_r^1f(\infty)=0$ функции $f\in W_{p,v}^2(r)$. Пусть $\int\limits_0^\sigma v^{1-p'}(t)dt=\int\limits_\sigma^\infty v^{1-p'}(t)dt$.

Введем обозначения

$$A_{1,1}(p,\sigma)=\sup_{0<y<\sigma}\int\limits_y^\sigma u(z)dz\left(\int\limits_0^y v^{1-p'}(t)\left(\int\limits_t^y r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right)^{p-1},$$

$$A_{1,2}(p,\sigma)=\sup_{0<y<\sigma}\int\limits_0^y u(z)\left(\int\limits_z^y r^{-1}(x)dx\right)^{p}dz\left(\int\limits_y^\sigma v^{1-p'}(t)dt\right)^{p-1},$$

$$\widehat{A}_{1,2}(p,\sigma)=\sup_{0<y<\sigma}\int\limits_0^y u(z)\left(\int\limits_z^\sigma r^{-1}(x)dx\right)^{p}dz\left(\int\limits_y^\sigma v^{1-p'}(t)dt\right)^{p-1},$$

$$A_{2,1}(p,\sigma)=\left(\int\limits_0^\sigma v^{1-p'}(t)\left(\int\limits_t^\sigma r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right)^{p-1}\int\limits_\sigma^\infty u(z)dz,$$

$$A_{2,2}(p,\sigma)=\sup_{y>\sigma}\int\limits_y^\infty u(z)dz\left(\int\limits_\sigma^y v^{1-p'}(t)\left(\int\limits_\sigma^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt\right)^{p-1},$$

$$A_{2,3}(p,\sigma) = \sup_{y>\sigma} \int_{\sigma}^{y} u(z) \left(\int_{\sigma}^{z} r^{-1}(x)dx \right)^{p} dz \left(\int_{y}^{\infty} v^{1-p'}(t)dt \right)^{p-1},$$

$$A(p,\sigma) = \max\left\{A_{1,1}(p,\sigma), A_{1,2}(p,\sigma), A_{2,1}(p,\sigma), A_{2,2}(p,\sigma), A_{2,3}(p,\sigma)\right\}.$$

$$\widehat{A}(p,\sigma) = \max\left\{\widehat{A}_{1,2}(p,\sigma), A_{2,1}(p,\sigma), A_{2,2}(p,\sigma), A_{2,3}(p,\sigma)\right\}.$$

Теорема 1 *Пусть* $1 < p < \infty$ *. Тогда неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда* $A(p,\sigma) < \infty$ *и при этом имеет место оценки*

$$A(p,\sigma) \leqslant C \leqslant 2 \cdot 8^{p} p(p')^{p-1} \cdot A(p,\sigma), \tag{4}$$

$$C \leqslant 2 \cdot 3^{p-1} p(p')^{p-1} \cdot \widehat{A}(p,\sigma), \tag{5}$$

где C *- наилучшая постоянная в (2).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования Казахстана, Грант № AP05130975.

Список литературы

[1] A. Kufner, L.-E. Persson, *Weighted inequalities of Hardy type.* World Scientific., New Jersey-London-Singapore-Hong Kong, 2003.

[2] M. Nasyrova, V.D. Stepanov, *On weighted Hardy on semiaxis for functions vanishing at the endpoints*, J. Ineq. Appl., 1997, Vol. 1,no. 3, 223–238.

[3] M. Nasyrova, *Weighted inequalities involving Hardy-type and limiting Geometric Mean Operators*, Doctorol thesis,Depatment of Mathematics, Lulea University of Technology,Sweeden, 2002.

ВЕСОВОЕ НЕРАВЕНСТВО И ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА ПОЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.Ж. Адиева[1], Р. Ойнаров[2], Я.Т. Султанаев[3]

[1,2]*Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
[3]*Башкирский государственный педагогический институт имени М.Акмуллы, Уфа, Башкирия*
E-mails: [1]a.aina70@mail.ru, [2]o_ryskul@mail.ru, [3]sultanaevyt@gmail.com

Пусть u, v - положительные функции на интервале $(0,\infty)$.
Пусть $v^{-1} \equiv \frac{1}{v}$ и

$$\int_0^{\infty} v^{-1}(t)dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} v^{-1}(t)t^2 dt = \infty. \tag{1}$$

При условии (1) получен критерий выполнения неравенства

$$\int_0^\infty u(x)|f(x)|^2 dx \leqslant C \int_0^\infty v(t)|f^{(n)}(t)|^2 dt, \quad n > 1 \tag{2}$$

для функции $f \in W_2^n(0,\infty)$ с компактными носителями. Наилучшая константа C в (2) найдена точная по порядку.

При выполнении (1) на основе результатов по неравенству (2) получены критерии сильной осцилляторности и неосцилляторности дифференциального уравнения

$$(-1)^n (v(t)y^{(n)})^{(n)} - \lambda u(t)y = 0, \quad t > 0, \quad \lambda > 0. \tag{3}$$

На основе этих результатов получены критерии ограниченности снизу и дискретности спектра самосопряженного оператора L, порожденного дифференциальным выражением

$$ly = \frac{1}{u(t)}(v(t)y^n)^{(n)}.$$

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Г. Акишев

ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: akishev_g@mail.ru

В докладе рассматриваются $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ – пространство Лоренца периодических функций m переменных и функциональный класс Никольского - Бесова $B^r_{p,\tau,\theta}$. В докладе будут представлены оценки наилучших приближений функций из класса $B^r_{p,\tau,\theta}$ в различных соотношениях между параметрами τ, θ.

ESSENTIAL SELF-ADJOINTNESS OF THE MAGNETIC HELMHOLTZ OPERATOR

A.R. Aliev[1,2], Sh.Sh. Rajabov[2]

[1]*Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan*
[2]*Institute of Mathematics and Mechanics*
of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan
E-mails: alievaraz@yahoo.com, shahin.racabov.88@mail.ru

Let's consider a multi-dimensional Helmholtz equation

$$\nabla_A^2 u(x) + \lambda u(x) := \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + iA_k(x)\right)^2 u(x) + \lambda u(x) = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n,$$

where $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$ is the magnetic potential, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ the gradient, $\nabla_A := \nabla + iA$ the magnetic gradient, $f(x)$ the known function, $\lambda > 0$, and i the imaginary unit.

We note that Helmholtz magnetic operators play an important role in quantum mechanics and quantum chemistry.

Let $A_j(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n),\ j = 1, 2, ..., n$. Consider in $L_2(\mathbb{R}^n)$ symmetric differential operator H_A^0, generated by an elliptic differential expression $H_A = (\nabla + iA)^2$, with the domain $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. In studying the solvability of the magnetic Helmholtz equation, the essential self-adjointness of the operator H_A^0 is extremely important.

The following theorem is true.

Theorem 1 $A_j(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n),\ j = 1, 2, ..., n$, *the operator* H_A^0 *is essentially self-adjoint on* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

The authors, in their opinion, have managed to prove this theorem in a simple way.

This study was supported by the Azerbaijan State Oil and Industry University, project no. ADNSU-2018-1-01.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КЛАССАХ ГЛАДКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д.Б. Базарханов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: dauren.mirza@gmail.com

В докладе формулируется и обсуждается задача оптимального восстановления значений псевдодифференциальных операторов

$$T_a f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$$

на $m-$мерном торе $\mathbb{T}^m$ с символами a из классов $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$, на распределениях f из классов $\mathrm{B}^{s\mathtt{m}}_{pq}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского — Бесова и $\mathrm{L}^{s\mathtt{m}}_{pq}(\mathbb{T}^m)$ типа Лизоркина — Трибеля по конечной спектральной информации о символе оператора и о распределении (конечные наборы коэффициентов Фурье символа оператора и распределения).

ОБ ОЦЕНКЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ СМЕШАННЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В АНИЗОТРОПНОЙ МЕТРИКЕ

К.А. Бекмаганбетов, Е. Толеугазы

МГУ имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.ru

Пусть $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $\mathbb{T}^{\mathbf{d}} = \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) : \mathbf{x}_i = (x_1^i, \ldots, x_{d_i}^i) \in [0, 1)^{d_i}, i = 1, \ldots, n\}$.

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$-измеримая функция на $\mathbb{T}^{\mathbf{d}}$, $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n)$-повторная невозрастающая перестановка функции $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ удовлетворяют следующим условиям, если $1 \leqslant p_j < \infty$, тогда $1 \leqslant q_j \leqslant \infty$, если же $p_j = \infty$, тогда и $q_j = \infty$ для $j = 1, \ldots, n$, и $\star = \{j_1, \ldots, j_n\}$-некоторая фиксированная перестановка множества $\{1, \ldots, n\}$. Будем говорить, что функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит анизотропному пространству Лоренца $L_{\mathbf{pq}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ (см. [2]) если конечна следующая величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} =$$

$$\left(\int_0^1 \left(t_{j_n}^{1/p_{j_n}} \ldots \left(\int_0^1 \left(t_{j_1}^{1/p_{j_1}} f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1,\ldots,t_n)\right)^{q_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}}\right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \ldots\right)^{q_{j_n}/q_{j_{n-1}}} \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}}\right)^{1/q_{j_n}}.$$

Пусть функция $f \in L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ представима рядом Фурье

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} a_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

где $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}}$ – коэффициенты Фурье функции f по кратной тригонометрической системе, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d_j} k_i^j x_i^j$ – скалярное произведение.

Пусть, далее $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > \mathbf{0}$, $I = (i_1, \ldots, i_n)$, где $i_j \in \{1, \ldots, d_j\}$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Ряд (в случае если он сходится)

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} \Lambda_{\mathbf{k}}(\alpha; I) a_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

где $\Lambda_{\mathbf{k}}(\alpha; I) = \prod_{j=1}^{n} \max\left(1, |k_{i_j}^j|^{\alpha_j}\right)$, назовем производной Вейля порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ по переменным $x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n$ и обозначим $f^{(\alpha;I)}(\mathbf{x})$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$. Множество

$$\Gamma(N, \gamma\mathbf{d}) = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{d}} : \prod_{j=1}^{n} \bar{k}_j^{\gamma_j d_j} \leqslant N\right\},$$

где $\bar{k}_j = \max\{1, |k_1^j|, \ldots, |k_{d_j}^j|\}$, называется гиперболическим крестом порядка N, соответствующим γ и $\mathbf{d}$. Обозначим через

$$E_{N,\gamma\mathbf{d}}(f)_{L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \inf_{T\in T_{\Gamma(N,\gamma\mathbf{d})}} \|f - T\|_{L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}$$

наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром из $\Gamma(N, \gamma\mathbf{d})$ в метрике анизотропного пространства Лоренца $L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$.

Нами получены оценки наилучших приближений производных Вейля $f^{(\alpha;I)}(\mathbf{x})$ посредством наилучших приближении исходной функции $f(\mathbf{x})$ в другой метрике (аналоги теорем Конюшкова-Стечкина [1] в стиле теоремы Темлякова [3]).

Теорема 1 *Пусть даны* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > \mathbf{0}$, $I = (i_1, \ldots, i_n)$ *и* $\star = \{j_1, \ldots, j_n\}$ *– некоторая перестановка множества* $\{1, \ldots, n\}$. *Пусть, далее* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leqslant \infty$,

$$\zeta = \max\left\{(\alpha_j/d_j + 1/p_j)/\gamma_j : j = 1, \ldots, n\right\}$$

, $B = \{\nu \in \{1, \dots, n\} : (\alpha_{j_\nu}/d_{j_\nu} + 1/p_{j_\nu})/\gamma_{j_\nu} = \zeta\}$, $\nu_0 = \min\{\nu : \nu \in B\}$, *функция* $f(\mathbf{x})$ *из* $L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ *и*

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{\nu \in B\setminus\{\nu_0\}} 1/q'_{j_\nu}} E_{2^l,\gamma\mathbf{d}}(f)_{L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} < \infty.$$

Тогда функция $f(\mathbf{x})$ *имеет непрерывную производную* $f^{(\alpha;I)}(\mathbf{x})$ *и справедлива оценка*

$$E_{2^N,\gamma\mathbf{d}}(f^{(\alpha;I)})_{L_\infty(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leqslant C_1 \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{\nu \in B\setminus\{\nu_0\}} 1/q'_{j_\nu}} E_{2^l,\gamma\mathbf{d}}(f)_{L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}.$$

Теорема 2 *Пусть даны* $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > \mathbf{0}$, $I = (i_1, \dots, i_n)$ *и* $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ *– некоторая перестановка множества* $\{1, \dots, n\}$. *Пусть, далее* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \leqslant \infty$, $\zeta = \max\{(\alpha_j/d_j + 1/p_j - 1/q_j)/\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$,

$$B = \{\nu \in \{1, \dots, n\} : (\alpha_{j_\nu}/d_{j_\nu} + 1/p_{j_\nu} - 1/q_{j_\nu})/\gamma_{j_\nu} = \zeta\}$$

, $\nu_0 = \min\{\nu : \nu \in B\}$, *функция* $f(\mathbf{x})$ *из* $L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ *и*

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{\nu \in B\setminus\{\nu_0\}} 1/\theta_{j_\nu}} E_{2^l,\gamma\mathbf{d}}(f)_{L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} < \infty,$$

здесь $1/\theta_j = (1/h_j - 1/r_j)_+$ *для всех* $j = 1, \dots, n$ *и* $(a)_+ = \max\{a, 0\}$. *Тогда функция* $f(\mathbf{x})$ *имеет производную* $f^{(\alpha;I)}(\mathbf{x})$, *принадлежащую* $L_{\mathbf{qh}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ *и справедлива оценка*

$$E_{2^N,\gamma\mathbf{d}}(f^{(\alpha;I)})_{L_{\mathbf{qh}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leqslant C_1 \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{\nu \in B\setminus\{\nu_0\}} 1/\theta_{j_\nu}} E_{2^l,\gamma\mathbf{d}}(f)_{L_{\mathbf{pr}^\star}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}.$$

Список литературы

[1] А.А. Конюшков, *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье.* Матем. сб., 44 (1958), № 1, 53–84.

[2] Е.Д. Нурсултанов, *О коэффициентах кратных рядов Фурье из* L_p *- пространств.* Известия РАН. Сер. матем., 64 (2000), № 1, 95–122.

[3] В.Н. Темляков, *Приближение функции с ограниченной смешанной производной.* Труды МИ АН СССР, 178 (1986), 1–112.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ СУММИРОВАНИЯ

А.Т. Бесжанова, А.М. Темирханова

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mails: beszhanova@mail.ru, ainura_t@yandex.kz

Пусть $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ -весовые последовательности, точнее, неотрицательные последовательности действительных чисел. Пусть l_{pv} - пространство последовательностей действительных чисел $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,v} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 < p < \infty$$

Рассмотрим матричный оператор

$$(Af)_n = \sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,k} f_k, n \geqslant 1 \tag{1}$$

из l_{pv} в l_{qu}, где $(a_{n,k})$- матрица оператора A с неотрицательными элементами $a_{n,k} \geqslant 0$, удовлетворяющие дискретному обобщенному условию Ойнарова: существует $d \geqslant 0$, неотрицательная матрица с элементами $b_{n,k}$ и неотрицательная последовательность $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$, что

$$\frac{1}{d}(b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}) \leqslant \ a_{n,m} \leqslant (b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}) \tag{2}$$

при $1 \leqslant k \leqslant n, \alpha(n) \leqslant m \leqslant \beta(k)$; где $\alpha(n)$, $\beta(n)$ - последовательности натуральных чисел, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ строго возрастают;

(ii) $\alpha(1) = \beta(1) = 1$ и $\alpha(n) < \beta(n), n \geqslant 2$.

При $a_{n,k} = 1$ оператор (1) является оператором Харди с переменными пределами следующего вида

$$(Hf)_n = \sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} f_k, \quad n \geqslant 1,$$

ограниченность которого из l_{pv} в l_{qu} исследована в работах [1], [2] при различных значениях параметров пространства.

В данной работе устанавливаются критерии ограниченности и компактности матричного оператора (1) из l_{pv} в l_{qu} при $1 < p \leqslant q < \infty$.

Положим

$$(F_1)_s = \sup_{\beta^{-1}(\alpha(s)) \leqslant m \leqslant s} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q b_{n,m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} \nu_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$(F_2)_s = \sup_{\beta^{-1}(\alpha(s)) \leqslant m \leqslant s} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} \nu_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_1 = \sup_{s\in N}(F_1)_s, F_2 = \sup_{s\in N}(F_2).$$

Теорема 1 *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$ и элементы матрицы $(a_{n,k})$ удовлетворяют условию (2). Тогда оператор (1) ограничен из l_{pv} в l_{qu} тогда и только тогда, когда $F = \max(F_1, F_2) < \infty$, при этом $\| A\|_{l_{p,v}\to l_{q,u}} \approx F$.*

Теорема 2 *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$ и элементы матрицы $(a_{n,k})$ удовлетворяют условию (2). Тогда оператор (1) компактен из l_{pv} в l_{qu} тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{m\to\infty}(F_1)_m = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty}(F_2)_m = 0,$$

где

$$(F_1)_m = \sup_{m\leqslant s\leqslant \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q b_{nm}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} \nu_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$(F_2)_m = \sup_{m\leqslant s\leqslant \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^{s} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{mk}^{p'} \nu_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отметим, что $F_1 = \sup_{m\in N}(F_1)_m, F_2 = \sup_{m\in N}(F_2)_m$.

Список литературы

[1] А. Альхалил. *Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования I.* Вестник РУДН. Серия "Математика. Информатика. Физика".-2010.-№4.-с.56-69.

[2] А. Альхалил. *Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования II.* Вестник РУДН. Серия "Математика. Информатика. Физика".-2011.-№1.-с.5-13.

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМЫ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕ ОРЛИЧА - МОРРИ

Н.А. Бокаев, А.А. Хайркулова

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур - Султан, Казахстан
E-mail: bokayev2011@yandex.ru, aitbekovna3@mail.ru

В данной работе определяется дискретное пространство Орлича-Морри и приводится оценка нормы элементов из этого пространства.

Обозначим через A класс функций, обладающих следующими свойствами: $\Phi \in A$ означает, что $\Phi \in [0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$; Φ строго возрастает. Через $M = M(R_+)$ обозначим множество измеримых по Лебегу функций на R_+, $M^+ = \{f \in M : f \geqslant 0\}$.

Для $f \in M$ определим функционал:

$$J_\lambda(f) := \int_0^\infty \Phi(\lambda^{-1}|f(t)|)\upsilon(t)dt.$$

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что весовая функция $\upsilon \in M^+$ удовлетворяет условиям: $0 < \upsilon < \infty$ почти всюду,

$$0 < V(t) := \int_0^t \upsilon(\tau)d\tau < \infty, t \in R_+.$$

Теперь для $f \in M$ определим функционал Люксембурга:

$$\|f\|_{\Phi,\upsilon} := \inf\{\lambda > 0 : J_\lambda(f) \leqslant 1\}.$$

Рассмотрим весовое пространство Орлича $L_{\Phi,\upsilon}$:

$$L_{\Phi,\upsilon} = \{f \in M : \|f\|_{\Phi,\upsilon} < \infty\}.$$

Сведения о пространстве Орлича можно найти в [1].

Функция $\Phi : [0, +\infty] \to [0, \infty]$ называется функцией Юнга [1], если Φ выпуклая функция, непрерывна слева и такая что

$$\lim_{r\to+0} \Phi(r) = \Phi(0) = 0, \lim_{r\to+\infty} \Phi(r) = \infty.$$

Определение 1 Пусть Φ функция Юнга и $0 \leqslant \lambda \leqslant n$. Пространство Орлича-Морри $M_{\Phi,\lambda}(R^n) = M_{\Phi,\lambda}$ определяется как множество всех функций $f \in L_{\Phi,\upsilon}$ с конечной квазинормой

$$\| f \|_{M_{\Phi,\lambda,\upsilon}} = \sup_{x\in R^n, r>0} \Phi^{-1}(r^{-\lambda}) \| f \|_{L_{\Phi,\upsilon}(B(x,r))} < \infty,$$

где $B = B(x, r)$-шар в n -мерном пространстве с центром в точке x и радиусом r,

$$\| f \|_{L_{\Phi,\upsilon}(B(x,r))} = \inf\{\mu > 0 : \int_B \Phi(\frac{f(t)}{\mu})\upsilon(t)dt\},$$

в которых

$$J_{\mu,B}(f) = \int_B \Phi(\frac{f(t)}{\mu})\upsilon(t)dt \leqslant 1.$$

Теперь определим дискретное весовое пространство Орлича-Морри.

Пусть задана весовая последовательность

$$\beta = \{\beta_m\}, \beta_m \in R_+ = [0, \infty), m \in Z = \{0, \pm1, \pm2, ...\},$$

для $\alpha = \{\alpha_m\}, \alpha_m \in R$ положим

$$j_\mu(\alpha) := \sum_m \Phi(\mu^{-1}|\alpha_m|)\beta_m, \| \alpha \|_{\widetilde{M}_{l_{\Phi,\beta}}} := \inf\{\mu > 0 : j_\mu(\alpha) \leqslant 1\}.$$

Для функция $\Phi \in A$ и для любого $c \in R_+$ введем величину:

$$d(c) := \inf\{d > 0 : \Phi(dt) \geqslant c\Phi(t), t \in R_+\} < \infty.$$

Следующая теорема показывает, что оценка значений $j_\mu(\alpha)$ влечет соответствующую оценку для $\| \alpha \|_{\widetilde{M_{\Phi,\lambda,\upsilon}}}$.

Теорема 1 *Пусть* $\Phi \in A$, $c \in R_+$ *и* $\alpha = \{\alpha_m\}$, $\gamma = \{\gamma_m\}$. *Если для любых* $\mu > 0$

$$j_\mu(\alpha) \leqslant c j_\mu(\gamma),$$

то

$$\| \alpha \|_{\widetilde{M_{\Phi,\lambda,\upsilon}}} \leqslant d(c) \| \gamma \|_{\widetilde{M_{\Phi,\lambda,\upsilon}}}$$

Следующая теорема полезна при вычисление нормы оператора на дискретном пространстве Орлича - Морри

Теорема 2 *Пусть* $\Phi \in [0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$; Φ *возрастает. Тогда для* $\alpha = \{\alpha_m\}$, $\beta = \{\beta_m\}$. $\beta_m \in B(x,r)$, *имеет место эквивалентность*

$$\| \alpha \|_{\widetilde{M}_{l_{\Phi,\beta}}} \leqslant 1 \Leftrightarrow j_1(\alpha) = \sum_m \Phi(|\alpha_m|)\beta_m \leqslant 1.$$

Отметим, что для дискретных пространств Орлича подобные результаты получены в [2].

Список литературы

[1] М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Современные проблемы математики, Физматтиз, М., 1958.

[2] M.L. Goldman, *Order sharp estimates for monotone operators on Orlicz - Lorentz classes.* Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2017, pp. 37 - 87.

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.К. Блиев

Институт Математики и Математического
Моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: bliev.nazarbay@mail.ru

В работе рассматриваются многомерные сингулярные операторы с характеристиками, не зависящими от полюса и соответствующие интегральные уравнения в пространствах Бесова. Получены условия ограниченности, дифференцируемости и обратимости рассматриваемых сингулярных операторов и разрешимости некоторых соответствующих интегральных уравнений.

Полученные результаты позволяют, при определенных условиях, описать локальные свойства сингулярных интегральных операторов с характеристиками зависящими от полюса и получить условия нетеровой разрешимости соответствующих сингулярных интегральных уравнений.

Это работа была частично поддержана грантом № AP05133283 Комитета науки МОН РК.

EMBEDDING THEOREMS FOR BESOV TYPE GENERELIZED SPACES WITH RESPECT TO MUTIPLICATIVE SYSTEMS

N.A. Bokayev[1], **E.S. Smailov**[2], **A.T. Syzdykova**[3]

[1]*L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
[2]*Institute of Applied Mathematics, Karaganda, Kazakhstan*
[3]*Pavlodar State University named after Toraigyrov, Pavlodar, Kazakhstan*
E-mails: bokayev2011@yandex.ru, esmailov@mail.ru, aizhan-syzdykova@yandex.ru

Let $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of natural numbers $p_k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$. By definition, set

$$m_0 = 1,\ m_n = p_1 p_2 \cdots p_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Let $\chi_n(x)$ is the Price multiplicative system with generative sequence $\{p_k\}$(see[2]).

We say that φ satisfies the condition S_1 (and write $\varphi \in S_1$), if $\varphi \in U$ and there exists a number $\alpha : 0 < \alpha < 1$ such that the function $\varphi(t)t^{-\alpha}$ is almost increasing.

And a function φ satisfies the condition S_2 (and write $\varphi \in S_2$), if $\varphi \in U$ and there exists a number $\delta :\ 0 < \delta < 1$ such that the function $\varphi(t)t^{-\delta}$ is almost decreasing.

By $E_n(f)_p$ we denote the best approximation of a function $f \in L^p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, by polynomials with respect to multiplicative system of degree $\leqslant n-1$.

Definition 1. Let $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ and $\varphi \in S_1$. We say that a function $f : G \longrightarrow R$ belongs to the Besov type space $B^{\varphi}_{p,\theta}(G)$, if $f \in L^p(G)$ and the quantity

$$\|f\|_{B^{\varphi}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi^{-1}(1/m_{k+1}) E_{m_k}(f)_p\right]^{\theta} \right\}^{1/\theta},\ 1 \leqslant \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\varphi}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \sup_{k \in Z_+} \left\{\varphi^{-1}(1/m_{k+1}) E_{m_k}(f)_p\right\},\ \theta = \infty,$$

is finite.

In the following theorem necessary and sufficient conditions of embedding of considered classes for given parameters p, q, θ, λ and functions φ, ψ are entered.For the case of a trigonometric system (see [1]).

Theorem 1. *Let* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \lambda < \theta \leqslant \infty$, *and* $\varphi, \psi \in S_1$. *Assume that* $\sigma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Then*

I. *If* $1 \leqslant \lambda < \theta \leqslant \infty$ *then*

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset B^{\psi}_{q,\lambda}(G)$$

if and only if

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi(1/m_k)\psi^{-1}(1/m_k) m_k^{\sigma}\right]^{\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}} < \infty,$$

where $\tau = \frac{\theta\lambda}{\theta-\lambda}$ *if* $\theta < \infty$, *and* $\tau = \lambda$ *if* $\theta = \infty$.

II. *If* $\theta \leqslant \lambda \leqslant \infty$ *then*

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset B^{\psi}_{q,\lambda}(G)$$

if and only if

$$A_2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \varphi(1/m_k)\psi^{-1}(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right\} < \infty.$$

Theorem 2. *Let* $1 \leqslant p < q < +\infty, \;\; 1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Then*

I. *if* $p < q < \theta \leqslant \infty$ *then*

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset L^q(G)$$

if and only if

$$A_{p,q,\theta} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right]^{\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}} < \infty,$$

where $\tau = \frac{\theta q}{\theta - q}$ *if* $q < \theta < +\infty$, *and* $\tau = q$ *if* $\theta = +\infty$.

II. *If* $1 \leqslant \theta \leqslant q$ *then*

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset L^q(G)$$

if and only if

$$A_{p,q} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right\} < \infty.$$

Theorem 3. *Let* $1 \leqslant p < +\infty, \;\; 1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *and* $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$. *Then*

I. *If* $1 < \theta \leqslant \infty$, *Then*

$$B^{\varphi}_{p,\theta}(G) \subset L^{\infty}(G)$$

if and only if

$$A_{p,\theta} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}} \right]^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} < \infty.$$

II. *If* $\theta = 1$ *then*

$$B^{\varphi}_{p,1}(G) \subset L^{\infty}(G)$$

if and only if

$$A_{p,1} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \varphi(1/m_k) m_k^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

Other results for Besov type spaces with respect to multiplicative bases (see [3]).

Reference

[1] M. L.Goldman *On embedding the Holder generalized classes.* Mat. zametki.(in Russian) 1972, V. 12. №3. P. 325.

[2] B. I.Golubov, A.V.Efimov, V.A.Skvortsov *Walsh series and transforms: Theory and applications* (in Russian), M: Nauka, 1987.

[3] E. S.Smailov,Z. R. Suleimenova *Embedding theorems for Besov type spaces with respect to the Price multiplicative basis.* Trudy Mat. Inst. Steklov.(in Russian) 2003. V.243. P. 313-319.

GENERALISED CAMPANATO SPACES AND HARDY SPACES

P.D. Lamberti[1], **V. Vespri**[2]

[1] *University of Padua, Padua, Italy*
[2] *University of Florence, Florence, Italy*
E-mails: lamberti@math.unipd.it, vincenzo.vespri@unifi.it

In this talk we speak about the connection between Campanato spaces and Hardy Spaces. As proved by Walsh, in $\mathbf{R}^N$, generalised Campanato spaces are the dual of the Hardy spaces. As lot is known about Campanato spaces, we are starting an investigation which aims to transfer some of the known properties of Campanato spaces to Hardy spaces. Here the difficulty is that regularity people have worked only on Campanato spaces and not with generalised ones. So, first, one has to extend the techniques to generalised spaces and, only after that, one can prove regularity results for Hardy spaces. This talk is about this necessary, even if still preliminary, work.

REMARKS ON SOBOLEV-MORREY-CAMPANATO SPACES DEFINED ON $C^{0,\gamma}$ DOMAINS

P.D. Lamberti[1], **V. Vespri**[2],

[1] *University of Padova, Padova, Italy*
[2] *University of Florence, Florence, Italy*
E-mails: lamberti@math.unipd.it, vincenzo.vespri@unifi.it

We discuss a few old results concerning embedding theorems for Campanato and Sobolev-Morrey spaces adapting the formulations to the case of domains of class $C^{0,\gamma}$, and we present more recent results concerning the extension of functions from Sobolev-Morrey spaces defined on those domains. As a corollary of the extension theorem we obtain an embedding theorem for Sobolev-Morrey spaces on arbitrary $C^{0,\gamma}$ domains.

Reference

[1] G.C. Barozzi, *Su una generalizzazione degli spazi $L^{(q,\lambda)}$ di Morrey.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 19 (1965), 609–626.

[2] O.V. Besov; V.P. Il'in; S.M. Nikolskii, *Integral representations of functions and imbedding theorems.* Vol. II. Scripta Series in Mathematics. Edited by Mitchell H. Taibleson. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont.-London, 1979.

[3] V.I. Burenkov, *The continuation of functions with preservation and with deterioration of their differential properties.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **224** (1975), no. 2, 269–272.

[4] S. Campanato, *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni.* (Italian) Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 17 (1963), 175–188.

[5] S. Campanato, *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey.* (Italian) Ricerche Mat. 12 (1963), 67–86.

[6] G. Da Prato, *Spazi $\mathcal{L}^{p,\theta}(\Omega,\delta)$ e loro proprietà.* (Italian) Ann. Mat. Pura Appl. (4) 69 (1965), 383–392.

[7] M.S. Fanciullo; P.D. Lamberti, *On Burenkov's extension operator preserving Sobolev-Morrey spaces on Lipschitz domains.* Math. Nachr. 290 (2017), no. 1, 37–49.

О РАЗДЕЛИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.Г. Гадоев[1], Ф.С. Исхоков[2]

[1]*МПТИ (ф) СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Мирный, Россия,*
[2]*Институт математики им. А.Джураева, г. Душанбе, Республика Таджикистан*
E-mails: Gadoev@rambler.ru, sulaimon@mail.ru

В докладе рассматривается вопрос о разделимости одного класса дифференциальных операторов с частными производными высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области, коэффициенты которых могут иметь нестепенное вырождение на границе.

В отличие от предыдущих исследований в этом направлении, в данной работе область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и удовлетворяют "условию погружения"П.И. Лизоркина. При этом дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождения исследуемого оператора, не требуется.

CONSTRUCTIVE METHOD FOR SOLVING AN IMPEDANCE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HELMHOLTZ EQUATION

R. J. Heydarov

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan
Ganja State University, Ganja, Azerbaijan
E-mail: heyderov.rahib@gmail.com

Let $D \subset \mathbb{R}^3$ be bounded region with twice continuously differentiable boundary S,

$$v\left(x,\varphi\right)=\int_S \Phi_k\left(x,y\right)\,\varphi\left(y\right)\,dS_y,\ w\left(x,\varphi\right)=\int_S \frac{\partial\Phi_k\left(x,y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\,\varphi\left(y\right)\,dS_y,$$

$$v_0\left(x,\varphi\right)=v\left(x,\varphi\right)|_{k=0}=\int_S \Phi_0\left(x,y\right)\,\varphi\left(y\right)\,dS_y,$$

where $\Phi_k(x,y) = e^{ik|x-y|}/\left(4\pi\ |x-y|\right)$ is the fundamental solution to the Helmholtz equation, $\vec{n}(x)$ the unit external normal at the point $x \in S$, and k the wave number with $Im\,k \geqslant 0$.

In [1], it is shown that the function

$$u(x) = v\ (x,\varphi) + i\eta\, w\ (x, v_0)\,, x \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D},$$

(where η is a real number, moreover, if $Im\,k > 0$, then $\eta = 0$; and if $Im\,k = 0$, then $\eta \neq 0$) is a solution to the boundary-value problem for the Helmholtz equation with the impedance condition, if the density $\varphi \in C(S)$ is the solution of the uniquely solvable integral equation

$$\varphi + A\,\varphi = \psi, \tag{1}$$

where

$$A = -2\ (2+i\eta)^{-1}\ \left(2K + 2i\eta\ (T+G) + f\ \left(2L + 2i\eta\, F + i\eta\, L^{(0)}\right)\right)\ ,$$

$$\psi = -4\ (2+i\eta)^{-1}\, g, (L\varphi)(x) = \int_S \Phi_k(x,y)\ \varphi(y)\ dS_y,$$

$$(L^{(0)}\varphi)(x) = (L\varphi)(x)\,|_{k=0}, (K\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}\ (x)}\,\varphi(y)\ dS_y,$$

$$(F\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}\ (y)} \left(\int_S \Phi_0(y,t)\,\varphi(t)\ dS_t\right) dS_y,$$

$$(G\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial \vec{n}\ (x)} \left(\int_S \frac{\partial \Phi_0(y,t)}{\partial \vec{n}\,(y)}\varphi(t)\ dS_t\right) dS_y,$$

$$(T\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}\ (x)} \left(\frac{\partial\ (\Phi_k(x,y) - \Phi_0(x,y))}{\partial \vec{n}\ (y)}\right) \left(\int_S \Phi_0(y,t)\,\varphi(t)\ dS_t\right) dS_y, x \in S.$$

Here f and g are given continuous functions on S with $Im\ \left(\bar{k}\, f(x)\right) \geqslant 0$, $x \in S$. Here we give a justification for the collocation method for integral equation (1) and construct a sequence that converges to the exact solution of the external boundary-value problem for the Helmholtz equation with impedance conditions.

Note that the results of joint paper [2] with A.R.Aliev will be used in the talk.

Reference

[1] R.J. Heydarov, *On solvability of an external problem with impedance boundary condition for Helmholtz equation by integral equations method.* Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 42 (2016), no. 1, 3-9.

[2] A.R. Aliev, R.J. Heydarov, *On the approximate solution of the boundary value problem for the Helmholtz equation with impedance condition.* Dokl. Akad. Nauk, 488 (2019), no. 3, 233-236.

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО СОБОЛЕВА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова

КазНИТУ им. К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан
E-mail: nurlan.dairbekov@gmail.com

Стратифицированное множество определяется как связное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, являющееся объединением конечного семейства S непересекающихся связных подмногообразий σ (без края), называемых далее стратами: $\Omega = \bigcup\limits_{\sigma_i \in S} \sigma_i$.

Каждая страта σ_i имеет компактное замыкание в $\mathbb{R}^d$, индекс в обозначении страты указывает на номер страты при автономной нумерации страт. Соотношение $\sigma_k \succ \sigma_m$ между двумя стратами означает, что $\sigma_m \subset \partial\sigma_k$; в этом случае мы говорим, что данные страты примыкают друг к другу.

Помимо предположений о взамном расположении страт, накладываются специфические, именно для стратифицированных множеств, требования относительно гладкости примыканий. Традиционные требования, называемые условиями регулярности Уитни, можно найти в книге [2].

Мы определяем пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{1,\mathbf{p}}_{\mu}(\Omega)$ как пополнение пространства непрерывных функций $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, обращающихся в нуль вблизи границы $\partial\Omega_0$, имеющих непрерывно дифференцируемые сужения на каждую страту, по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,\mathbf{p}}_{\mu}(\Omega)} = \sum_{\sigma_k \in S} \left[\left(\int\limits_{\sigma_k} |u|^{p_k} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_k}} + \left(\int\limits_{\sigma_k} |\nabla u|^{p_k} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_k}} \right],$$

здесь $\mathbf{p} = \{p_k\}_{\sigma_k \in S}$ обозначает стратифицированную константу которая равна постоянной на каждой страте, где p_k является сужением $\mathbf{p}$ на страту σ_k.

Наша цель — обобщение неравенства Соболева на стратифицированном множестве в случае, когда показатель суммируемости является стратифицированной константой. Например, неравенство Соболева выглядит как

$$\sum_{\sigma_i \in S} \left(\int\limits_{\sigma_i} |u|^{q_i} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q_i}} \leqslant C \sum_{\sigma_m \in S_1} \left(\int\limits_{\sigma_m} |\nabla u|^{p_m} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_m}} \tag{1}$$

для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\mathbf{p}}_{\mu}(\Omega)$ с независящей от u константой C. Здесь S_1 - семейство страт из Ω_0 для которых существует связная цепочка страт $C = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ к $\partial\Omega_0$, где $\sigma_2 \prec \sigma_1$.

Аналог неравенства Соболева для стратифицированных множеств с постоянным показателем суммируемости на каждой страте получено в работе [1].

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан AP05130222.

Список литературы

[1] Н. С. Даирбеков, О. М. Пенкин, Л. О. Сарыбекова, *Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве.* Алгебра и анализ, Т.30 (2018), вып. 5, 149–158.

[2] Ф. Фам, *Введение в топологическое исследования особенностей Ландау.* Москва: Мир, 1970. - 184 с.

EXTREME POINTS OF THE SET OF ELEMENTS MAJORISED BY AN INTEGRABLE FUNCTION

D. Dauitbek[1], J. Huang[2] and F. Sukochev[3]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, 050040 Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010 Almaty, Kazakhstan*
[3] *University of New South Wales, Sydney, Australia*
E-mail: dostilek.dauitbek@gmail.com

Let f be an arbitrary integrable function on a finite measure space (X, Σ, ν). We characterise the extreme points of the set $\Omega(f)$ of all measurable functions on (X, Σ, ν) majorised by f, providing a complete answer to a problem raised by W.A.J. Luxemburg in 1967. Moreover, we obtain a noncommutative version of this result.

Theorem 1 below is the main result of the present paper, which unifies Ryff's theorem [2, 3] and the classic result for vectors [1] with significant extension. The following theorem yields the complete resolution of Luxemburg's problem in the general setting.

Theorem 1 *Assume that $\mathcal{M}$ is a von Neumann algebra equipped with a faithful normal tracial state τ. Let $y \in L_1(\mathcal{M}, \tau)_h$ and let $\Omega(y)$ be defined as the set of all self-adjoint operators $x \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ satisfying $\lambda(x) \prec \lambda(y)$. Then, x is an extreme point if and only if for each $t \in (0, 1)$, one of the following options holds:*

(1). $\lambda(t; x) = \lambda(t; y)$;

(2). $\lambda(t; x) \neq \lambda(t; y)$ with the spectral projection $E^x\{\lambda(t; x)\}$ being an atom in $\mathcal{M}$ and

$$\int_{\{s;\lambda(s;x)=\lambda(t;x)\}} \lambda(s; y)ds = \lambda(t; x)\tau(E^x(\{\lambda(t; x)\})).$$

Acknowledgements This work is financially supported by MES RK target Grant BR05236656.

Reference

[1] G. Hardy, J. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.

[2] J.V. Ryff, *Extreme points of some convex subsets of* $L^1(0, 1)$, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 1026–1034.

[3] J.V. Ryff, *Majorized functions and measures*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 30 (1968), 431–437.

НЕРАВЕНСТВО НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЕ СО СТУПЕНЧАТЫМ КРЕСТОМ

А.А. Джумабаева, А.Е. Жетписбаева

ЕНУ им.Л.Н. Гумилева, Нур-султан, Казахстан
E-mail: akniet-1978@mail.ru

Пусть $L_p(T^2)$, $1 < p < \infty$, пространство измеримых функций двух переменных которые являются 2π периодическими по каждой переменной и такие, что

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(x_1,x_2)\mid^p dx_1dx_2\right)^{1/p} < \infty.$$

L_p^0 - множество функций $f \in L_p$ такое, что $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ и $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$.

Определение 1 *Пусть $Q_n^r = \bigcup_{(\gamma,s)\leqslant n} p(s), r = r\gamma$. Множество k таких, что $\mid k \mid\in Q_n^r$, называем ступенчатым гиперболическим крестом, где*

$$p(s) = k = (k_1,k_2) : 2^{s_j-1} \leqslant k_j < 2^{s_j}, j = 1,2.$$

Пусть $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2)$,$\gamma_s$-действительные числа. $1 < p < \infty$, через $S_l^\gamma(f,x)$ будем обозначать частную сумму Фурье функции f(x) вида $S_l^\gamma(f) = \sum_{(\gamma,s)\leqslant l+1}\delta_s(f)$,которую называют ступенчатой гиперболической суммой Фурье. где $\delta_s(f,x) = \sum_{|k|\in p(s)}\hat{f}(k)e^{i(k,s)}$ $\mid k\mid = (\mid k_1,k_2\mid)$, $s = (s_1,s_2)$, $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} f(x)e^{-i(k,x)}dx$.

Определение 2 Пусть

$$E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t\in T(Q_n^r)} \parallel f - t\parallel_p, i \leqslant p \leqslant \infty,$$

-наилучшее приближение функции f(x) тригонометрическими полиномами с "номерами"гармоник из ступенчатого гиперболического крестаQ_n^r, где

$$T(Q_n^r) = t : t(x) = \sum_{|k|\in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)}.$$

Если $1 < p < \infty$, то имеем $E_{Q_n^r(f)_p \asymp \|f-S_{n-1}^\gamma(f)\|_p}$, то есть в этом случае частные суммы ряды Фурье дают порядок наилучших приближений. Через $\sigma(f)$ будем обозначать ряд Фурье функции $f \in L_p(T^2)$, т.е.

$$\sigma(f) := \sum_{n_1=0}^\infty\sum_{n_2=0}^\infty(a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2 + b_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2$$

$$+ c_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2 + d_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2) = \sum_{n_1=0}^\infty\sum_{n_2=0}^\infty A_{n_1n_2}(x_1x_2),$$

где для краткости обозначены $\cos(0\cdot t) = \frac{1}{2}$.

Преобразованный ряд Фурье от $\sigma(f)$ даётся выражением:

$$\sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2) \equiv \sum_{n_1=0}^\infty\sum_{n_2=0}^\infty \lambda_{n_1n_2}(a_{n_1n_2}\cos(n_1x_1+\beta_1\pi/2)\cos(n_2x_2+\beta_2\pi/2)+$$

$$+b_{n_1n_2}\cos(n_1x_1+\beta_1\pi/2\sin(n_2x_2+\beta_2\pi/2)+c_{n_1n_2}\sin(n_1x_1+\beta_1\pi/2)\cos(n_2x_2+\beta_2\pi/2)+$$
$$+d_{n_1n_2}\sin(n_1x_1+\beta_1\pi/2)\cos(n_2x_2+\beta_2\pi/2)),$$

где $\beta_1,\beta_2\in R$, $\lambda=\{\lambda_{n_1n_2}\}_{n_1n_2\in N}$ последовательность действительных чисел .

Пусть $\varphi(x_1x_2)\sim\sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2)$, назовем $(\lambda,\beta_1,\beta_2)$ смешанной производной функции f (или производная Лиувилля-Вейля) и обозначим её через $f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)}(x_1x_2)$. Например, если $\lambda_{n_1n_2}=n_1^{r_1}n_2^{r_2}, r_i\geqslant 0,\beta_ir_i(i=1,2,...),\Rightarrow f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)}=f^{(r_1r_2)}$, где $f^{(r_1r_2)}$ - смешанная производная от f в смысле Вейля. Отметим, что для любых β_1,β_2, $\parallel f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)}\parallel_p\asymp\parallel f^{(\lambda,0,0)}\parallel_p$, $1<p<\infty$.

Определение 3 Последовательность $\lambda:=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется обобщенной монотонной, записанной как $\lambda\in GM^2$, если соотношение:

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}\mid\lambda_{k_1,n_2}-\lambda_{k+1,n_2}\mid\leqslant C\mid\lambda_{n_1,n_2}\mid,\quad\sum_{k_2=n_2}^{2n_2}\mid\lambda_{n_1,k_2}-\lambda_{n_1k_2+1,}\mid\leqslant C\mid\lambda_{n_1,n_2}\mid,$$

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}\sum_{k_2=n_2}^{2n_2}\mid\lambda_{k_1,k_2}-\lambda_{k+1,k_2}-\lambda_{k_1,k_2+1}+\lambda_{k_1+1,k_2+1}\mid\leqslant C\mid\lambda_{n_1,n_2}\mid$$

справедливо для всех целых чисел n_1,n_2, где константа C не зависит от n_1 и n_2.

Наш основной результат гласит так:

Теорема 1 *Пусть* $1<p<\infty$, $1<\theta\leqslant\min(p,2)$, $\lambda:=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность положительных чисел, такие что* $\lambda\in GM^2$, $\alpha_i\in R_+$, $r_i\in R_+\bigcup 0$ *и* $\beta_i\in R$. *Если для* $f\in L_p^0(T^2)$ *ряд:*

$$\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\mid\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},1}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1-1}}(f)_p+\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\mid\lambda^{0\theta}_{1,2^{\nu_2}}-\lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2-1}}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_2-1}}(f)_p$$
$$+\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\mid\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}}\mid-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}}+\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p$$

сходится, то существует $\varphi\in L_p^0(T^2)$ *с рядом Фурье* $\sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2)$ *и*

$$\parallel\varphi\parallel_p\leqslant(\lambda^{\theta}_{11}\parallel f\parallel^{\theta}_p+\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\mid\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},1}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1-1}}(f)_p$$
$$+\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\mid\lambda^{0\theta}_{1,2^{\nu_2}}-\lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2-1}}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_2-1}}(f)_p$$
$$+\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\mid\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}}\mid-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}}+\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$E^{\theta}_{Q^r_n}(\varphi)_p)\leqslant(\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}}E^{\theta}_{Q^r_{m_1+m_2}}(f)_p+\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\mid\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{m_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{m_2-1}}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+m_2-1}}(f)_p)$$
$$+\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty}\mid\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2}}-\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-1}}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_2+m_1-1}}(f)_p)$$
$$+\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty}\mid\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}}+\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}\mid E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Список литературы

[1] R.DeVore, G.G Lorentz, *Constructive Approximation.* Berlin:Shpringer-Verlag, 1993.

О ПОТОЧЕЧНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КОНУСОВ ФУНКЦИЙ С УСЛОВИЯМИ МОНОТОННОСТИ

Г.Ж. Каршыгина

КарГУ имени Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: Karshygina84@mail.ru

При изучении порядковых накрываний введенных конусов мы существенно опираемся на результаты работ [2,3]. Через $L_0 = L_0(S, \Sigma, \mu)$ обозначим множество μ -измеримых вещественнозначных функций

$$f : S \to R,\ L_0^+ = \{f \in L_0 : f \geqslant 0\}.$$

Определение 1 Для функциональной нормы ρ введем ассоциированную норму

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int\limits_S fgd\mu : f \in L_0^+,\ \rho(f) \leqslant 1\right\},\ g \in L_0^+.$$

Для $f \in L_0$, обозначим через $\lambda_f(y) = \mu\{x \in S : |f(x)| > y\},\ y \in [0,\infty)$- Лебегову функцию распределения. Через $\dot{L}_0$ обозначим множество функций $f \in L_0$ для которых $\lambda_f(y)$ не тождественна бесконечности, т.е. $\exists y_0 \in [0,\infty) :\ \lambda_f(y_0) < \infty$. Для $f \in \dot{L}_0$ введем убывающую перестановку f^* как правую обратную функцию к убывающей функции λ_f [1] т.е.

$$f^*(t) = \inf\{y \in [0,,\infty) :\ \ \lambda_f(y) \leqslant t\},\ t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty).$$

Известно, что $0 \leqslant f^* \downarrow;\ \ f^*(t+0) = f^*(t),\ t \in R_+;\ ;\ f^*$ равноизмерима с $|f|$ т.е. $\mu_1\{t \in R_+ : f^*(t) > y\} = \lambda_f(y),\ \ \ y \in [0,\infty)$ кроме того, для $f \in \cdot L_0$ имеем: $\lambda_f(y) \to 0\ (y \to +\infty) \Leftrightarrow |f(x)| < \infty,\ (\mu$-п.в.) на S. Определим отношения порядка для функций из $\cdot L_0^+$:

$$f \prec g \Leftrightarrow f^*(t) \leqslant g^*(t);\ t \in (0,\mu(S)) \qquad (1)$$

$$f \prec g \Leftrightarrow \int\limits_0^t f^*(\tau)d\tau \leqslant \int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau;\ t \in (0,\mu(S)). \qquad (2)$$

Отношение порядка (2) подчинено отношению (1); оба они подчинены поточечной оценке (μ-п.в.). Эквивалентность функций в смысле отношения (1) означает их равноизмеримость.

Определение 2 Пусть ρ есть функциональная норма. Скажем, что ρ согласована с отношением порядка $\prec$ если для $f, g \in L_0^+,\ f \prec g$ имеем $\rho(f) \leqslant \rho(g)$.

Определение 3 Функциональная норма ρ называется перестановочно инвариантной, если она согласована с отношением порядка (2) т.е. $f^* \leqslant g^* \Rightarrow \rho(f) \leqslant \rho(g)$.

Банахово функциональное пространство $X = X(\rho)$, порожденное перестановочно инвариантной функциональной нормой ρ будем называть перестановочно инвариантным пространством (кратко: ПИП). Пусть $K,\ M \subset L_0^+$ - конусы функций, снабженные положительно однородными невырожденными функционалами ρ_K и ρ_M т.е.

$$\rho_K: \ K \to [0,\infty); \ h \in K \Rightarrow \alpha h \in K, \alpha \geqslant 0; \ \rho_K(\alpha h) = \alpha \rho_K(h);$$

$\rho_K(h) = 0 \Rightarrow h = 0, \ \mu-$ - п.в. и аналогично для $\rho_M(h), \ h \in M$.

Определение 4 Конус M порядково накрывает конус K с константами накрывания $c_0 \in \mathbb{R}_+$ и $c_1[0,\infty)$, если для любой $h_1 \in K$ найдется $h_2 \in M$ такая что
$\rho_K(h_2) \leqslant \rho_K(h_1), \ h_1 \prec h_2 + c_1\rho_K(h_1)$.
Обозначение порядкового накрывания конусов: $K \prec M$.

Определение 5 Конусы K, M называем порядково эквивалентными, если они взаимно порядково накрывают друг друга. Обозначение порядковой эквивалентности*:* $K \approx M \Leftrightarrow K \prec M \prec K$.

Если отношение порядка $\prec$ совпадает с поточечной оценкой функций μ- п.в., будем говорить о поточечном накрывании конусов и писать $K \leqslant M$. Итак, при $K \leqslant M$ примет вид: $\rho_M(h_2) \leqslant c_0\rho_K(h_1), \ h_1 \leqslant h_2 + c_1\rho_K(h_1)$, ($\mu-$ п.в.).

Поточечная эквивалентность конусов означает их взаимное поточечное накрывание и обозначается: $K \cong M$. Итак, $K \cong M \Leftrightarrow K \leqslant M \leqslant K$.

Пусть $\tilde{E}$ есть ПИП $\tilde{E}^{\downarrow}(0,T) = \left\{g \in \tilde{E}^{\downarrow}(\mathbb{R}_+): \quad g(t) = 0, \ \ t \in [T,\infty)\right\}$.

Введем конусы неотрицательных функций на $\mathbb{R}_+$:

$$K(T) = K_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{h(t) \equiv h(g;t) := \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau)g(\tau)d\tau : \ \ g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T)\right\}, \qquad (3)$$

$$\tilde{K}(T) = \tilde{K}_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{\tilde{h}(t) \equiv \tilde{h}(\tilde{g};t) := \int_0^\infty \tilde{f}_\varphi(t,\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau : \quad \tilde{g} \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T)\right\}, \qquad (4)$$

Следующий результат дает условия, гарантирующие поточечную эквивалентность конусов $K_{\varphi,\tilde{E}}(T)$ и $\tilde{K}_{\varphi,\tilde{E}}(T)$.

Теорема 1 *1. В обозначениях и условиях (1) - (4) имеет место поточечное накрывание*

$$K_{\varphi,E}(T) \leqslant \tilde{K}_{\varphi,E}(T)$$

с константами накрывания $c_0 \leqslant 2, \ c_1 = 0$.

2. Пусть выполнены условия части 1 и еще $A_\varphi := \sup_{t\in(0,T)} \frac{\int_0^t \varphi d\tau}{t\varphi(t)} < \infty$.
Тогда,

$$\tilde{K}_{\varphi,E}(T) \leqslant K_{\varphi,E}(T)$$

с константами накрывания $c_0 \leqslant 2A_\varphi, \ c_1 = 0$.

Список литературы

[1] C. Bennett, R.C. Sharpley, *Interpolation of Operators.* New york, *Math.*,1988, p. 129

[2] N. A. Bokayev, M. L. Goldman, G. Zh. Karshygina, *Cones of functions with monotonocity conditions for generalized Bessel and Riesz potetials.* Mathem. Notes, 104, 3 (2018), 356-373.

[3] M.L. Goldman, *On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials.* Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 55, Nos. 8-10, Oktober 2010, 817-832.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ ПРОСТРАНСТВА С МУЛЬТИВЕСОВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ж.А. Кеулимжаева

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана 010008, Казахстан
E-mail: zh.keulimzhayeva@mail.ru

Пусть $I=(0,1)$, n — натуральное число, $\rho_i : I \to R$, $i=1,2,...,n$, — положительные на I функции такие, что $t: 0<t\leqslant 1$

$$\rho_i^{-1}\equiv\frac{1}{\rho_i}\in L_1(t,1),\quad i=1,2,...,n-1,\quad \rho_n^{-1}\in L_{p'}(t,1),\quad 1\leqslant p'\leqslant\infty. \tag{1}$$

Обозначим через $AC^{loc}_{\bar\rho}(I)$ совокупность функций $f: I\to R$ локально абсолютно непрерывных на I вместе с функциями $D^k_{\bar\rho}f(t)=\rho_k(t)\frac{d}{dt}D^{k-1}_{\bar\rho}f(t)$ при $k=1,2,...,n-1$, где $D^0_{\bar\rho}f(t)\equiv f(t)$.

Пусть $W^n_{p,\bar\rho}(I)$, $1<p<\infty$,-пространство функций $f\in AC^{loc}_{\bar\rho}(I)$, для которых $\|D^n_{\bar\rho}f\|_{p,I}<\infty$, где $\|\cdot\|_{p,I}$ — обычная норма пространства $L_p(I)$ при $1<p<\infty$. Пусть выше и далее $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Пространство $W^n_{p,\bar\rho}(I)$, когда $\rho_i=t^{\alpha_i}$, $\alpha_i\in R$, $i=1,2,...,n$, исследовано в работах [1], [2] и [3].

Из условия (1) следует, что существуют конечные величины $\lim\limits_{t\to 1^-}D^i_{\bar\rho}f(t)\equiv D^i_{\bar\rho}f(1)$, $i=0,1,...,n-1$, для всех $f\in W^n_{p,\bar\rho}(I)$. Поэтому функционал

$$\|f\|_{W_{p,\bar\rho}(I)}=\|D^n_{\bar\rho}f\|_{p,I}+\sum_{i=0}^{n-1}|D^i_{\bar\rho}f(1)|$$

является нормой в пространстве $W^n_{p,\bar\rho}(I)$.

Для $i,j=0,1,...,n-1$ определим функции $K_{j,i+1}$ и $\bar K_{j,i+1}$:

$$K_{j,i+1}(x,s)=(-1)^{j-i}\int_s^x\rho_j^{-1}(t_j)\int_s^{t_j}\rho_{j-1}^{-1}(t_{j-1})...\int_s^{t_{i+2}}\rho_{i+1}^{-1}(t_{i+1})dt_{i+1}dt_{i+2}...dt_j$$

и

$$\bar K_{j,i+1}(x,s)=\int_s^x\rho_j^{-1}(t_j)\int_{t_j}^x\rho_{j-1}^{-1}(t_{j-1})...\int_{t_{i+2}}^x\rho_{i+1}^{-1}(t_{i+1})dt_{i+1}dt_{i+2}...dt_j$$

при $j>i$, $K_{i,i+1}(x,s)\equiv\bar K_{i,i+1}(x,s)\equiv 1$ и $K_{j,i+1}(x,s)\equiv\bar K_{j,i+1}(x,s)\equiv 0$ при $j<i$.

Рассмотрим многочлен $P_n(t)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_iK_{i,1}(1,t)$ по системе функций $\{K_{i,1}(1,t)\}_{i=0}^{n-1}$, где a_i, $i=0,1,...,n-1$, — действительные числа.

В работе [4] показано, что для каждой функции $f\in W^n_{p,\bar\rho}(I)$ существуют числа $a_i=a_i(f)$, $i=0,1,...,n-1$, такие, что $\lim\limits_{t\to 0^+}D^i_{\bar\rho}[f(t)-P_n(t,f)]=0$, $i=0,1,...,n-1$, тогда и только тогда, когда

$$\int_0^t\rho_n^{-p'}(s)\bar K^{p'}_{n-1,i+1}(t,s)ds<\infty,\ t\in I_0 \qquad (2),$$

для всех $i = 0, 1, ..., n-1$, при этом имеют место представления

$$D^i_{\bar\rho} f(t) = \sum_{j=i}^{n-1} a_j(f) K_{j,i+1}(1,t) + \int\limits_0^t \rho_n^{-1}(s) \bar K_{n-1,i+1}(t,s) D^n_{\bar\rho} f(s) ds$$

для всех $i = 0, 1, ..., n-1$.

Пусть $N = \{0, 1, ..., n-1\}$. Пусть $N_1 \subset N$ и $N_0 \subset N$ такие, что $N_1 \cap N_0 = \emptyset$ и $N_1 \cup N_0 = N$. Если $N_1 \neq \emptyset$ и $N_0 \neq \emptyset$, то положим $N_1 = \{i_1, i_2, ..., i_k\}, N_0 = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$ и $k + m = n$.

Теорема 1 *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (2). Если $N_1 = \emptyset$ и $N_0 = N$, то функционал*

$$\|f\|^1_{W^n_{p,\bar\rho}(I_0)} = \|D^n_{\bar\rho} f\|_p + \sum_{j=0}^{n-1} |a_j(f)|,$$

а если $N_1 \neq \emptyset$ и $N_0 \neq \emptyset$, то функционал

$$\|f\|^2_{W^n_{p,\bar\rho}(I_0)} = \|D^n_{\bar\rho} f\|_{p,I_0} + \sum_{\mu=1}^{k} |D^{i_\mu}_{\bar\rho} f(1)| + \sum_{\lambda=1}^{m} |a_{j_\lambda}(f)|,$$

эквивалентны норме $\|f\|_{W^n_{p,\bar\rho}}$ пространства $W^n_{p,\bar\rho}(I_0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования Казахстана, Грант № AP05130975.

Список литературы

[1] *Байдельдинов Б. Л. Теория многовесовых пространств и ее приложение к краевым задачам для сингулярных дифференциальных уравнений* Докторская диссертация. Алматы. 1998.

[2] *Калыбай А. А. Обобщенное многопараметрическое весовое неравенство Никольского — Лизоркина* Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 6. С. 727–733.

[3] *Kalybay A. A., Oinarov R. Some properties of spaces with multiweighted derivatives* Progress in Analysis. Proc. 3rd Int. ISAAC Congress. 2003. Singapore. World Scientific. P. 1–13.

[4] *Калыбай А. А., Кеулимжаева Ж. А., Ойнаров Р. Пространство с мультивесовыми производными и граничное поведение* Материалы VIII Международной научной конференции “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры”. 2018. Актобе. Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова. С. 152–156.

SOME NEW INEQUALITIES FOR THE FOURIER TRANSFORM

A.N. Kopezhanova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: Kopezhanova@yandex.ru

Let

$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx,\ t\in\mathbb{R},$$

be the Fourier transform of a function $f\in L_1(\mathbb{R})$.

Let $1<p<2$, $p'=\frac{p}{p-1}$ and $0<q\leqslant\infty$. Then we have the following inequalities

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})}\leqslant c_1\|f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p',q}(\mathbb{R})}\leqslant c_2\|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R})}, \tag{2}$$

where $L_{p,q}(\mathbb{R})$ is the classical Lorentz space. These inequalities are called the Hausdorff-Young inequality and the Hardy-Littlewood-Stein inequality, respectively, (see e.g. [1]).

Note that these inequalities (1) and (2) hold with equality for $p=q=2$ (Plancherel's theorem) but do not hold in general for $2<p<\infty$.

Let $0<p,q\leqslant\infty$, M be the set of the segments $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ and $|e|=b-a$.

The net space $N_{p'q}(M)$ is defined as the set of all measurable functions f such that the quasinorm

$$\|f\|_{N_{p'q}(M)}=\left(\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p'}}\overline{f}(t,M)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

for $q<\infty$, and

$$\|f\|_{N_{p'\infty}(M)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p'}}\overline{f}(t,M)<\infty$$

for $q=\infty$, where $\overline{f}(t;M):=\sup\limits_{\substack{|e|\geqslant t\\ e\in M}}\frac{1}{|e|}\left|\int\limits_e f(x)dx\right|$.

These spaces were introduced in [2] (see also [3]).

The main aims of this work are to derive the sufficient condition so that the Fourier transform $\widehat{f}$ belongs to L_p-space $(1<p<\infty)$ and to obtain conditions so that the norm of the Fourier transform $\widehat{f}$ in L_p-space $(1<p<\infty)$ has both upper and lower estimates.

The total variation of the function f, defined on an interval $[a,b]\subset\mathbb{R}$ is the quantity

$$V_a^b(f):=\sup_{\mathfrak{P}}\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i)|,$$

where the supremum is taken over all partitions of [a, b]:

$$\mathfrak{P}:\ a=x_0<x_1<...<x_n=b,\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

We say that the measurable function $f(x)\in V([a,b])$ if $V_a^b(f)<\infty$.

The main results read as follows.

Theorem 1. *Let $1<p<\infty$ and $f\in L_1(\mathbb{R})$. If f satisfies the condition*

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(2^{\frac{k}{p'}}V_{2^k}(f)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

then $\widehat{f} \in L_p(\mathbb{R})$ *and the inequality*

$$\|\widehat{f}\|_{L_p} \leqslant c \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{\frac{k}{p'}} V_{2^k}(f) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

holds. Here the constant c *does not depend on* f.

Theorem 2. *Let* $1 < p < \infty$. *Assume that the function* f *satisfy that there exists* $c > 0$ *such that*

$$V_{2^k}(f) \leqslant c \sup_{\substack{|e|\geqslant 2^k \\ e\in M}} \frac{1}{|e|} \left| \int\limits_e f(x)dx \right|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Then $\|\widehat{f}\|_{L_p(R)} < \infty$ *if and only if* $\|f\|_{N_{p'p}} < \infty$ *and, moreover,*

$$\|\widehat{f}\|_{L_p(\mathbb{R})} \asymp \|f\|_{N_{p'p}(M)}.$$

The author was supported by the grant no. AP05132071 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Reference

[1] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, Princeton, 1972.

[2] E.D. Nursultanov, *Network space and Fourier transform.* Dokl. Russ. Akad. Nauk. 361 (1998), no. 5., 597–599 (in Russian).

[3] E.D. Nursultanov, *Network spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type.* Mat. Sb., 189 (1998), no. 3, 83–102 (in Russian).

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОСИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

А.С. Касым, Л.К. Кусаинова

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Республика Казахстан
E-mails: kassym.aizhan@gmail.com, kussainova.leili@gmail.com

Рассматривается оператор

$$\mathrm{L}_0 f = -a_2(x)f'' + a_1(x)f' + a_0(x)f,$$

заданный в классе $C_0^\infty(I), I = (0,\infty)$, коэффициенты $a_0 \in L_{2,loc}(I),\ a_1,\ a_2 \in L_2(I),\ a_2 > 0$, меры μ_j в I с плотностью $\frac{d\mu_j}{dx} = a_j^2,\ j = 0,2$ абсолютно непрерывны в I относительно меры Лебега. Пусть $W = W^2_{2,(a_2,a_0)}$ - пополнение $C_0^\infty(I)$ по норме

$$||f||_W = ||a_2 f''||_2 + ||a_0 f||_2,$$

$||\cdot||_p = ||\cdot||_{L_p(I)}$. $(1 \leqslant p < \infty)$

Теорема 1 *Пусть*

$$A_1 = \sup_{x>0}(\int\limits_0^x a_2^{-2}(t)dt \cdot \int\limits_x^\infty a_1^2(t)dt)^{1/2} < \infty$$

и

$$A_2 = \sup_{x>0}(x\int\limits_x^\infty v_-(t)dt)^{1/2} < \frac{1}{2},$$

где

$$v_-(x) = \max\{0, -v(x)\},\ v(x) = (2a_0(x)a_2(x) - a_1^2(x))/a_2^2(x).$$

Тогда: a) оператор L_0 *допускает замкнутое расширение в* $W^2_{2,(a_2,a_0)}$; *b) замыкание* L *оператора* L_0 *в* $W^2_{2,(a_2,a_0)}$ *имеет обратный оператор.*

Пусть $\mathcal{R}_{x,d}$ - совокупность всех функций $R(t) = c_0 + c_1 t$, для которых $\int_x^{x+d}|R(t)|^2dt = 1$,

$$S(x,d;a_0) = \inf_{R\in\mathcal{R}_{x,d}} \int\limits_x^{x+d} |a_0(t)R(t)|^2dt.$$

Пусть v - положительная непрерывная функция в I. Запись $(a_2, a_0) \in \mathit{\Pi}_v$ будет означать, что

$$v(x)\left[S(x,v(x);a_0)\int\limits_x^{x+v(x)} a_2^{-2}(t)dt\right]^{1/4} \geqslant 1,\ x>0.$$

Далее пусть $(f \in L_{loc}(I))$

$$M_v f(x) = \sup_{y:\,\mathit{\Delta}(y)\ni x} \frac{1}{v(y)}\int\limits_{\mathit{\Delta}(y)} |f|dt,\ \mathit{\Delta}(y) = [y, y+v(y)],$$

$$K_v(f) = \sup_{x>0}\left[\int\limits_{\mathit{\Delta}(x)} (M_v f(t))^{1/2}dt\right]^2.$$

Пусть (X, Y) - упорядоченная пара пространств с нормой, элементами которых являются функции $f : I \to \mathbb{R}$. $M(X \to Y)$ - пространство мультипликаторов на паре (X, Y). [1]

Теорема 2 *Пусть* $(a_2, a_0) \in \mathit{\Pi}_v,\ K_v(a_j^{-2}) < \infty$, *и пусть существует такое* $\eta \in (0,1)$, *что*

$$\eta v(x)^{-1}\int\limits_x^{x+v(x)} |a_0(t)|^2dt \leqslant S(x,v(x);a_0).$$

Тогда $W^2_{2,(a_2,a_0)} \subset M\left(W^2_{2,(a_2,a_0)} \to W^2_1(I)\right)$. *Норма*

$$||y : M(W^2_{2,(a_2,a_0)} \to W^2_1(I))|| \leqslant c\left(||a_2^{-1}||_2 + K_v(a_2^{-2}) + K_v(a_0^{-2})\right)||y||_W.$$

Следствие 1 *Допустим, что* $W^2_{2,(a_2,a_0)}$ *вложено в нормированное пространство* X *и существует такое* $K > 0$, *что*

$$||a_2f''||_2 + ||a_0f||_2 \leqslant K\left(||\mathrm{L}f||_2 + ||f||_X\right),\ f \in W^2_{2,(a_2,a_0)}.$$

Пусть к тому же выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$||f : M(W^2_{2,(a_2,a_0)} \to W^2_1(I))|| \leqslant K\left(||a_2^{-1}||_2 + K_v(a_2^{-2}) + K_v(a_0^{-2})\right)\left(||\mathrm{L}f||_2 + ||f||_X\right).$$

Замечание 1 *Положим*

$$h(x) = \inf_{h>0}\left\{h^{-4} :\ h^{-4} \geqslant S(x,h;a_0)\int\limits_x^{x+h} a_2^{-2}(t)dt\right\}.$$

Если

$$0 < h(x) < \infty,\ x > 0,$$

то $(a_2, a_0) \in \Pi_v$ *относительно* $v(x) = (h(x))^{-1/4}$.

Работа выполнена при поддержке гранта АР 05133397 МОН РК

Список литературы

[1] В.Мазья, Т. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.* Издательство Ленинградского университета, 402 (1986).

ANALYSIS OF P-Q-SUB-LAPLACIANS ON STRATIFIED LIE GROUPS

A.S. Kabdulova

Nazarbayev University, Nur-Sultan(Astana), Kazakhstan
E-mail: aidana.kabdulova@nu.edu.kz

In this talk, we discuss the uniqueness of the positive solution to a nonlinear differential equation for the p-q-sub-Laplacian on the stratified Lie groups.

Let $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ be a Lie group on $\mathbb{R}^N$ by the composition law $\circ$. We say that $\mathbb{G}$ is a stratified Lie group if it satisfies the following conditions:

1. There exists an r-tuple of natural numbers $N_1 + N_2 + \cdots + N_r = N$, such that the dilation $\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ given by

$$\delta_\lambda(x_1, \dots, x_N) := (\lambda^{(1)}x_1, \dots, \lambda^{(N)}x_N)$$

   is an automorphism of the group $\mathbb{G}$ for every $\lambda > 0$. Here $x^i \in \mathbb{R}^{N_i}$ for $i = 1, \dots, r$.

2. If N_1 is as (a), let $W_1, \dots, W_{N_1}$ be the left invariant vector fields on $\mathbb{G}$ such that $W_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}|_0$ for $j = 1, \dots, N_1$. Then

$$\operatorname{rank}(\operatorname{Lie}\{W_1, \dots, W_{N_1}\}) = N$$

holds for every $x \in \mathbb{R}^N$.

If two conditions shown above are satisfied, then we say that the triple $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ is a stratified Lie group (or a homogeneous Carnot group).

Here r will be called step of $\mathbb{G}$ and the vector fields $W_1, \dots, W_{N_1}$ are called the (Jacobian) generators of $\mathbb{G}$. Any basis of $\operatorname{span}\{W_1, \dots, W_{N_1}\}$ is called a system of generators of $\mathbb{G}$. The number Q is called the homogeneous dimension of stratified group $\mathbb{G}$. Here we have

$$Q = \sum_{k=1}^{r} k N_k.$$

For the horizontal gradient we use the following notation

$$\nabla_H := (W_1, \dots, W_{N_1}).$$

The Lebesgue measure dx on $\mathbb{R}^N$ will be the Haar measure for $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$. The notation $u \in C^1(\Omega)$ means $\nabla_H u \in C(\Omega)$, where $\Omega \subset \mathbb{G}$ an open set. We refer to a recent book [1] for further discussions in this direction.

We also use the functional spaces $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u, |\nabla_H u| \in L^p(\Omega)\}$. Let consider the functional

$$J_p(u) := \left(\int_\Omega |\nabla_H u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

then we define the functional class $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$ to be the completion $C_0^1(\Omega)$ in the norm generated by J_p. The operator

$$\mathcal{L}_{p,q} u := \nabla_H \cdot (|\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u) + \nabla_H \cdot (|\nabla_H u|^{q-2} \nabla_H u), \ \ 1 < p < \infty, \ 1 < q < \infty,$$

is called p-q-sub-Laplacian.

Let $\Omega \subset \mathbb{G}$ be a bounded open set with smooth boundary $\partial\Omega$. Let us consider the Dirichlet boundary value problem

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{p,q} u = F(x, u), \ \ u > 0 \ \ in \ \Omega, \\ u = 0, \ \ on \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Here $1 < q < p, F(x, u) = F_1(x) F_2(u)$ where F_1 is a non-negative bounded function, and $F_2 : (0, \infty) \to (0, \infty)$ satisfies the conditions:

1. $F_2(u)$ is a non-decreasing function,
2. $F_2(u) u^{1-\alpha}$ non-increasing for some α such that $1 \leqslant \alpha < q$.

Theorem. *The Dirichlet boundary value problem for the p-q-sub-Laplacian (1) has at most one solution.*

Reference

[1] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Hardy inequalities on homogeneous groups: 100 years of Hardy inequalities.* Progress in Mathematics, Vol. 327, Birkhauser, 2019. xvi+588pp.

BOUNDEDNESS OF RIEMANN-LIOUVILLE OPERATOR FROM WEIGHTED SOBOLEV SPACE TO WEIGHTED LEBESGUE SPACE

A.A. Kalybay[1], **R. Oinarov**[2]

[1] *KIMEP University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nursultan, Kazakhstan*
E-mails: [1]*kalybay@kimep.kz,* [2]*o_ryskul@mail.ru*

Let $I = (0, \infty)$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Let υ, ρ and ω be functions non-negative on I such that υ^p, ρ^p, ω^q, $\rho^{-p'}$ and $\omega^{-q'}$ are locally integrable on I. Denote by $W_p^1(\rho, \upsilon) \equiv W_p^1(\rho, \upsilon, I)$ the space of all functions locally absolutely continuous on I having the finite norm

$$\|f\|_{W_p^1} = \|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p,$$

where $\|\cdot\|_p$ is the standard norm of the Lebesgue space $L_p(I)$. Let $\overset{\circ}{AC}(I)$ be the set of all locally absolutely continuous functions with compact supports on I.

Denote by $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon) \equiv \overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon, I)$ the closure of the set $\overset{\circ}{AC}(I) \cap W_p^1(\rho, \upsilon)$ with respect to the norm of the space $W_p^1(\rho, \upsilon)$.

Let $L_{p,\upsilon} \equiv L_p(\upsilon, I)$ be the space of all measurable functions I with the finite norm $\|f\|_{p,\upsilon} \equiv \|\upsilon f\|_p$.

We consider the problem of boundedness from the weighted Sobolev space $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon)$ into the weighted Sobolev space $W_p^1(u, \omega)$ the Riemann-Liouville fractional integration operator I_α, $\alpha > 0$

$$I_\alpha f(x) = \int\limits_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad x \in I, \tag{1}$$

i.e.,the fulfillment of the inequality:

$$\|\omega I_\alpha f\|_q \leqslant C(\|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p), \quad f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, \upsilon). \tag{2}$$

In the case $\rho \equiv 0$, the validity of the inequality (2) means the boundedness of the Riemann-Liouville operator I_α from $L_{p,\upsilon}$ to $L_{q,\omega}$.

There are many recent works devoted to this problem. However, problem (2) has not been previously investigated.

HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV AND STEIN-WEISS INEQUALITIES ON HOMOGENEOUS LIE GROUPS

A. Kassymov

Department of Mathematics Ghent University, Belgium
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: kassymov@math.kz

In this talk we prove the Stein-Weiss inequality on general homogeneous Lie groups. The obtained results extend previously known inequalities. Special properties of homogeneous norms play a key role in our proofs. Also, we give a simple proof of the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality on general homogeneous Lie groups. Let us give HLS inequality on homogenous Lie groups.

Theorem 1 *Let $\mathbb{G}$ be a homogeneous group of homogeneous dimension Q and let $|\cdot|$ be an arbitrary homogeneous quasi-norm on $\mathbb{G}$. Let $1 < p < q < \infty,\ 0 < \lambda < Q,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{Q} - 1$, and $u \in L^p(\mathbb{G})$. Then we have*

$$\|I_{\lambda,|\cdot|}u\|_{L^q(\mathbb{G})} \leqslant C\|u\|_{L^p(\mathbb{G})}, \tag{1}$$

where C is a positive constant independent of u.

Next, let us give second main result,

Theorem 2 *Let $\mathbb{G}$ be a homogeneous group of homogeneous dimension Q and let $|\cdot|$ be an arbitrary homogeneous quasi-norm on $\mathbb{G}$. Let $0 < \lambda < Q$, $1 < p < \infty$, $\alpha < \frac{Q}{p'}$, $\beta < \frac{Q}{q}$, $\alpha + \beta \geqslant 0$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha+\beta+\lambda}{Q} - 1$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Then for $1 < p \leqslant q < \infty$, we have*

$$\||x|^{-\beta} I_{\lambda,|\cdot|}u\|_{L^q(\mathbb{G})} \leqslant C\||x|^{\alpha}u\|_{L^p(\mathbb{G})}. \tag{2}$$

where C is positive constant and independent by u.

Acknowledgements

The author was supported by the MES RK grant AP05130981.

Reference

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some properties of fractional integrals. *I. Math.Z.*, 27:565–606, 1928.

[2] M. Ruzhansky and D. Suragan. Hardy and Rellich inequalities, identities, and sharp remainders on homogeneous groups. *Adv. Math.*, 317, 799–822, 2017.

[3] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. *Mat. Sb. (N.S.)*, 4:471–479, 1938, English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 34:39–68, 1963.

[4] E. M. Stein and G. Weiss. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean Space. *J. Math. Mech.*, 7(4):503–514, 1958.

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОТЕНЦИАЛОВ. ПРИЛОЖЕНИЯ

Л.К. Кусаинова[1], А.А. Шкаликов[2], Г. Мурат[3]

[1,3]*ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
[2]*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
E-mail: muratgulnar1988@gmail.com

В работе рассматриваются весовые пространства потенциалов $H^s_p(\rho, v_s)$, $s > 0$, $1 < p < \infty$, $v_s(x) = \rho(x)h^{-s}(x)$, где ρ и $h(\cdot)$ – положительные функции, заданные в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие условиям: 1) $0 < h(x) \leqslant 1$, 2) $Q(x) = Q_{h(x)}(x) \subset \Omega$, 3) существует такое $\varkappa > 1$, что

$$\varkappa^{-1} \leqslant \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \frac{h(y)}{h(x)} \leqslant \varkappa, \text{ если } y \in \widetilde{Q}(x) = \frac{3}{4}Q(x). \tag{1}$$

Здесь приняты обозначения: для $d > 0$ куб $Q = Q_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_k - x_k| < d/2,\ k = 1, 2, ..., n\}$, $\lambda Q = Q_{\lambda d}(x)$ $(\lambda > 0)$.

Пусть $\{\widehat{Q}(x^j), \widetilde{Q}(x^j)\}_{j\geqslant 1}$ – двойное конечнократное и конечноразделимое покрытие типа Безиковича-Гусмана, выделенное из семейств $\{\widehat{Q}(x),\ x \in \Omega\}$ $(\widehat{Q}(x) = \frac{3}{4}\widetilde{Q}(x))$ и $\{\widetilde{Q}(x),\ x \in \Omega\}$; $\{\psi_j\}_{j\geqslant 1}$ - разбиение единицы, соотнесенное данному покрытию $(\sum \psi_j = 1$, $\mathrm{supp}(\psi_j) \subset \overline{\widetilde{Q}^j}$, $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$, $\psi_j = 1$ на $\widehat{Q}^j)$. См. [3], [4] Далее пусть F - оператор Фурье, $J_s f(x) = F^{-1}(1 + \xi^2)^{s/2} F f(x)$, $(\xi^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2,\ \xi \in \mathbb{R}^n)$. Обозначим через $H^s_p(\rho, v_s)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f; H^s_p(\rho, v_s)\| = \Big[\sum_{j\geqslant 1} \big(\rho^p(x^j)\|J_s(\psi_j f)\|_p^p + v_s^p(x^j)\|\psi_j f\|_p^p\big)\Big]^{1/p}, \tag{2}$$

$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$. Все нормы вида (2) попарно эквивалентны в классе $C_0^\infty(\Omega)$.

Пусть $v \geqslant 1$–вес в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий слабому условию (A_∞), $m > 0$ - целое, $mp > n$. В этом случая функция ("бегущая средняя Отелбаева")

$$v^* = \sup\{d > 0 : d^{mp-n}\int_{Q_d(x)} v dy \leqslant 1\}$$

положительна и непрерывна в $\mathbb{R}^n$, а $h(x) = v^*(x)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3) с $\varkappa = 4$.

Заметим также, что имеют место вложения

$$H^{s_0}_p(\rho, v^*_{s_0}) \hookrightarrow H^m_p(\rho, v_m) = W^m_p(\rho, v) \hookrightarrow H^{s_1}_p(\rho, v^*_{s_1}),\ 0 < s_1 < m < s_0.$$

Через $W^s_p(\rho, v)$ обозначено весовое пространство Соболева. По определению $W^s_p(\rho, v)$ есть пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f;\ W^m_p(\rho, v)\| = \left[\int_\Omega \Big(\rho^p(x)|\nabla_m f|^p + v(x)|f|^p\Big)dx\right]^{1/p}.$$

В некоторых случаях возможно совпадение $H^s_p(\rho, v_s)$ с весовым пространством $H^s_p(\sigma^\mu, \sigma^{\mu+sp})$, введенном в [7]. Например в случае ограниченной области для $h(x) \sim \mathrm{dist}(x, \Omega) \sim \sigma^{-1}(x)$, $\rho(x) \sim \sigma^{\mu/p}(x)$.

Пусть (X, Y)- упорядоченная пара банаховых пространств функций $f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $M(X \to Y)$-пространство всех $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, для которых оператор умножения $T_\gamma f = \gamma f$ действует из X в Y и ограничен. $\gamma \in M(X \to Y)$ называют мультипликатором на паре (X, Y). По определению $\|\gamma : M(X \to Y)\| = \|T_\gamma\|_{X \to Y}$. В [1], [2] и в [5],[6] были получены описания мультипликаторов на паре пространств $(H_p^{s_0}, H_p^{s_1})$ бесселевых потенциалов и были раскрыты важные значения пространств $M(H_p^{s_0} \to H_p^{s_1})$ $(-\infty < s_1 \leqslant s_0 < \infty)$ в исследованиях дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами. В данной работе продолжены исследования в указанном направлении в весовых пространствах $H_p^s(\rho, v_s)$ $(s > 0)$ обобщенных функций в произвольной n-мерной области.

Список литературы

[1] А.А. Беляев, А.А. Шкаликов, *Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов: случай индексов неотрицательной гладкости.* Математические заметки, 102:5 (2017), 684-699.

[2] А.А. Беляев, *Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе.* Математические заметки, 94: 4 (2013), 632-636.

[3] М. Гусман, *Дифференцирование интегралов в* $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, (1978).

[4] Л.К. Кусаинова, *Об интерполяции весовых пространств Соболева.* Известия МН-АНРК. Серия физ.-матем. №5 (1997), С. 33–51.

[5] В.Г. Мазья, Т.О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференциальных функций.* Л.: Изд. ЛГУ, (1986).

[6] M.I. Neiman-zade and A.A. Shkalikov, *Shrodinger Operators with singular Potentials from the space of Multiplicators.* Mathematical Notes, vol. 66, no. 5, P. 599-607 (1999).

[7] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* М.: Мир, (1980).

INVERSION THEOREMS FOR FOURIER TRANSFORMS

K.T. Mynbaev[1], C.B. Martins Filho[2]

[1] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *University of Colorado, Boulder, CO, USA*
E-mail: kairat_mynbayev@yahoo.com

Let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform and $\mathcal{F}^{-1}$ its inverse:

$$(\mathcal{F}F)(s) = \int_R e^{ist} dF(t), \ (\mathcal{F}^{-1}F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R e^{-ist} dF(s).$$

Here F is a distribution function on the real axis. Inversion theorems deal with recovering F from its Fourier transform $\psi = \mathcal{F}F$.

Fourier inversion theorem: if $f, \psi \in L_1(R)$, then $\mathcal{F}^{-1}\psi = f$ a.e.

Problems arise when ψ is not integrable. In this area, there are three types of results:

1. recovering $F(x)$ when x is a continuity point of F,
2. recovering $F(x,y) = F(y) - F(x)$ for $x < y$ continuity points and
3. recovering jumps of F.

We prove new results in all cases. For case 1), the format of the inversion theorem is new. For cases 2) and 3), the format is not new but the bounds on convergence rates are. Our approach establishes a unified framework for theorems by Lévy, Borovkov, Lukacs and Mynbaev and links them to nonparametric estimation of distribution functions.

This project has been partially supported by the grant AP05130154 from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Reference

[1] A.A. Borovkov, *Teoriya Veroyatnosteĭ.* Izdat. "Nauka", Moscow, 1976.

[2] J. Gil-Pelaez, *Note on the inversion theorem.* Biometrika, 38 (1951), 481–482.

[3] K. Iosida, *Functional Analysis.* Springer, 1980.

[4] E. Lukacs, *Characteristic Functions.* Second edition, Hafner Publishing Co., New York, 1970.

[5] K. Mynbaev, *Distributions escaping to infinity and the limiting power of the Cliff-Ord test for autocorrelation.* ISRN Probability and Statistics, article number 926164 (2012), 1–39.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И КЛАССЫ ЛИПШИЦА

А.Б. Муканов

Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Нур-Султан, Казахстан
E-mail: mukanov.askhat@gmail.com

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$ и Lip α – класс Липшица, т.е.,

$$\mathrm{Lip}\ \alpha = \{f \in C([0,2\pi]) : \omega(f,\delta) = O(\delta^\alpha)\},$$

где $\omega(f,\delta) = \sup\limits_{|h|<\delta} \|f(x+h) - f(x)\|_C$ – модуль непрерывности функции f.

В 1948 году Дж. Лоренц [4] доказал следующую теорему.

Теорема A. *Пусть интегрируемая на* $[0, 2\pi]$ *функция* f *имеет ряд Фурье* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$*, причем* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$*,* $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ *являются невозрастающими неотрицательными последовательностями. Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *условие* $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

Теорема Лоренца была неоднократно обобщена. В недавней работе М.И. Дьяченко и С.Ю. Тихонова [3] теорема Лоренца была доказана для рядов Фурье с обобщенно монотонными коэффициентами. В указанной работе в отличие от других обобщений теоремы Лоренца авторы не накладывают условия неотрицательности на коэффициенты Фурье.

Отметим, что оригинальная теорема Лоренца является частным случаем следующего результата Боаса [1].

Теорема B. *Пусть интегрируемая на* $[0, 2\pi]$ *функция* f *имеет ряд Фурье* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$*, причем* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*,* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *являются неотрицательными последовательностями. Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *условие* $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$*,* $\sum_{k=n}^{\infty} b_k = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

В 2008 году Ф. Морицем [5] был доказан аналог теоремы Боаса в непериодическом случае, т.е., для преобразования Фурье. Позднее результаты Морица были обобщены в работах В. Фулоп, в работах Б.И. Голубова и С.С. Волосивца и в других работах (см., например, [2]).

В данной работе мы доказываем аналог теоремы Лоренца, полученный в работе [3] в непериодическом случае. Мы рассматриваем следующий класс обобщенно монотонных функций.

Определение 1 Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально ограниченной вариации называется обобщенно монотонной, если существуют $C > 0$, $\lambda > 1$, такие что для любого $x > 0$ выполняется неравенство

$$\int_x^{2x} |df(t)| \leqslant C \int_{x/\lambda}^{\lambda x} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R}_+) \cap C_0(\mathbb{R}_+)$*, и* $\widehat{f}$ *– синус- (или косинус-) преобразование Фурье функции* f*. Пусть также* $\widehat{f}$ *является обобщенно монотонной функцией. Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *условие* $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\widehat{f}(y) = O\left(\frac{1}{y^{1+\alpha}}\right)$, $y > 0$.

Автор был поддержан грантом AP05132071 КН МОН РК.

Список литературы

[1] R.P. Boas, *Fourier series with positive coefficients.* J. Math. Anal. Appl. 17 (1967), 463-483.

[2] С.С. Волосивец, Б.И. Голубов, *Преобразования Фурье из обобщенных классов Липшица.* Труды МИАН 280 (2013), 126-137.

[3] M.I. Dyachenko, S.Yu. Tikhonov, *Smoothness and asymptotic properties of functions with general monotone Fourier coefficients.* J. Fourier Anal. Appl. 24 (2018), no. 4, 1072-1097.

[4] G.G. Lorentz, *Fourier-koeffizienten und funktionenklassen.* Math. Z. 51 (1948), 135-149.

[5] F. Morisz, *Absolutely convergent Fourier integrals and classical function spaces.* Archiv der Mathematik. 91, (2008), no. 1, 49-62.

ON THE INTERPOLATION PROPERTIES OF THE INTEGRAL OPERATOR IN ANISOTROPIC SPACES

Zh. Mukeyeva, E.D. Nursultanov

L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: zhazira.mukeyeva@bk.ru

In [1], [2] the criterion for the quasi weak boundedness of the integral operator was obtained in the Lorentz space. In this work we have investigated the boundedness of integral operators in the anisotropic Lorentz spaces. We have received the criterion for weak boundedness of the integral operator in these spaces and have proved the Marcinkiewicz-type theorem for integral operators in these spaces. Let $\mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})$ and $\mathbf{q} = (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2})$ $0 < \mathbf{p}, \mathbf{q} < \infty$. We denote by $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2)$ the anisotropic Lorentz space [3] with the norm

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_0^\infty \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right)^{q_2} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}, \ q \leqslant \infty$$

Here, for $q = \infty$ the integral $\left(\int_0^\infty (F(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$ is understood as $\sup_{t>0} F(t)$

Let $G \subset R$ be a measurable set. We denote by $e_2(G)$ and $e_1(G, x_2)$:

$$e_2(G) = \{x_2 \in R, \ x_2 : R \times \{x_2\} \cap G \neq \oslash\}.$$

We define for all $x_2 \in e_2(G)$

$$e_1(G, x_2) = \{x_1 \in R, x_1 : (x_1, x_2) \in G\}.$$

Let $t_1 > 0, t_2 > 0$.

We define the family of measurable sets $M_{t_1t_2} = \{G : |e_2(G)| = t_2, |e_1(G, x_2)| = t_1, \ \forall x_2 \in e_2(G)\}$.

Теорема 1 *Let* $1 < \mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})$, $\mathbf{q} = (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) < \infty$. *The integral operator*

$$(Af)(x_1, x_2) = \int\int_{R_2} K(x_1, x_2, y_1, y_2) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

was bounded from $L_{\mathbf{p},\mathbf{1}}(\mathbb{R}^2)$ *to* $L_{\mathbf{q},\infty}(\mathbb{R}^2)$ *if and only if*

$$\sup_{t_i>0, s_i>0} \sup_{G\in M_{t_1t_2}, F\in M_{s_1s_2}} \frac{1}{t_1^{\frac{1}{q_1'}} t_2^{\frac{1}{q_2'}} s_1^{\frac{1}{p_1}} s_2^{\frac{1}{p_2}}} \left| \int_G \int_F K(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \right| < \infty.$$

Теорема 2 *Let* $1 < \mathbf{p_0} = (\mathbf{p_1^0}, \mathbf{p_2^0}) \leqslant \mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}) \leqslant \mathbf{p_1} = (\mathbf{p_1^1}, \mathbf{p_2^1}) < \infty$,

$$Tf(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \int K(x_1, x_2, y_1, y_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

If

$$M_i = \sup_{\substack{s_i>0 \\ t_i>0}} \sup_{\substack{G\in M_{s_1s_2} \\ F\in M_{t_1t_2}}} \frac{1}{t_1^{1/p_1^{i'}} t_2^{1/p_2^{i'}} s_1^{1/p_1^i} s_2^{1/p_2^i} (1 + |\ln \frac{s_1}{t_1}|)(1 + |\ln \frac{s_2}{t_2}|)} \times$$

$$\times\left|\int\int_G\int\int_F K(x_1,x_2,y_1,y_2)dy_1dy_2dx_1dx_2\right| < \infty, i=0,1.$$

Then

$$\|Tf\|_{L_{\bar{p}}} \leqslant \max_{i=0,1} M_i\left(\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{p_i}\right|^{-2}+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{p_i}\right|^{-1}\right)\|f\|_{L_p},\ f\in L_p$$

This work was supported by a grant AP05132071 from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Reference

[1] Nursultanov E.D., Kostyuchenko A.G. *On integral oparetors in L_p- spaces* Fundam. Prikl. Mat., Volume.5, No 2 (1999), 475–491.

[2] Nursultanov E.D., Tikhonov S. *Net spaces and boundedness of integral operators* J. Geom. Anal., Vol. 21, No. 3 (2011), 950–981.

[3] Nursultanov E.D. *On the coefficients of multiple Fourier series in L_p-space* Izv. Math, Vol. 64, No. 1 (2000), 93–120.

HARDY-LITTLEWOOD THEOREM FOR ANISOTROPIC LORENTZ SPACES

G.K. Mussabayeva, N.T. Tleukhanova, K. Sadykova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mails: musabaevaguliya@mail.ru, tleukhanova@rambler.ru, sadkelbet@gmail.com

The problems of the summability of Fourier coefficients with respect to the regular systems of functions from the anisotropic Lorentz space are investigated. We obtain the lower estimates of the norm of the function from the Lorentz space in terms of Fourier coefficients, which refine the known ones. The results are new in the case of trigonometric series.

The research of the authors was supported by the MES RK grants AP05132590.

THE MARCINKIEWICZ-CALDERON TYPE INTERPOLATION THEOREM

Y.D. Nursultanov

Lomonosov Moscow state university, Kazakhstan branch, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: er-nurs@yandex.ru

The interpolation theorem of Marcinkiewicz-Calderon is well known.

Let $p_0 < p_1,\ \theta \in (0,1),\quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.
Then for the quasilinear operator T the estimate is true

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant C_{p_0,p_1,p,\tau} \left(\|T\|_{L_{p_0,\tau} \to L_{p_0,\infty}}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L_{p_1,\tau} \to L_{p_1,\infty}}\right)^{\theta}$$

where $0 < \tau \leqslant \infty$.

In this work presents new interpolation theorems for integral operators, where the conditions for the boundedness of operators are given in terms of the kernel of the operator. This approach allows us to extend the class of integral operators for which theorems of the Marcinkiewicz – Calderon type hold. The extrapolation type theorems for integral operators are also given.

The research of the authors was supported by the MES RK grants AP05132071.

ТЕОРЕМА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

Е.Д. Нурсултанов[1], А.Н. Баширова[2]

[1]*МГУ имени М.В.Ломоносова, Казахстанский филиал*
[2]*ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
E-mail: anar_ bashirova@mail.ru

Аннотация. В терминах коэффициентов Фурье-Хаара получен критерий принадлежности функции $f(x_1,x_2)$ сетевому пространству $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где $\bar{p} = (p_1,p_2)$, $1 < p_1,p_2 < \infty$, $\bar{q} = (q_1,q_2)$, $1 < q_1,q_2 < \infty$, M - множество всех прямоугольников в $\mathbb{R}^2$.

Пусть M - множество всех прямоугольников $Q = Q_1 \times Q_2$ из $\mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2)$ – интегрируемая функция на множестве $Q \in M$. Определим

$$\bar{f}(t_1,t_2,M) = \sup_{\substack{|Q_1| \geqslant t_1 \\ |Q_2| \geqslant t_2}} \frac{1}{|Q_1||Q_2|} \left| \int_{Q_1} \int_{Q_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \right| \qquad t_1 > 0, t_2 > 0,$$

где $|Q_i|$ - длина отрезка Q_i.

Пусть $0 < \bar{p} = (p_1,p_2) < \infty$, $0 < \bar{q} = (q_1,q_2) \leqslant \infty$. $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ - множество всех функций f, для которых

$$\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)}=\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(t_1^{\frac{1}{p_1}}t_2^{\frac{1}{p_2}}\bar{f}(t_1,t_2,M)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}<\infty.$$

Данные пространства были введены Нурсултановым Е.Д. [1] и используются в гармоническом анализе, в теории приближений и в теории операторов.

Тогда верна следующая теорема:

Теорема 1 *Пусть $\bar{p}=(p_1,p_2)$, $1<p_1,p_2<\infty$, $\bar{q}=(q_1,q_2)$, $1<q_1,q_2<\infty$, M - множество всех параллелепипедов в $\mathbb{R}^2$. Тогда, для того, чтобы $f\in N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье-Хаара $\{c_{mk}\}_{m=1k=1}^{\infty}$ имело место условие:*

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)+k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)}c_{mk}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}<\infty$$

и

$$\|f\|_{N_{\bar{p}\bar{q}}(M)}\sim\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)+k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)}c_{mk}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Список литературы

[1] Нурсултанов Е.Д., *Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда.* Матем. сб. , 189 (1998), no. 3, 83-102.

[2] Нурсултанов Е.Д., Аубакиров Т.У., *Теорема Харди–Литтлвуда для рядов Фурье–Хаара.* Матем. заметки. 73 (2003), no. 3., 340–347.

WEIGHTED ESTIMATE OF A CLASS OF QUASILINEAR DISCRETE OPERATORS

B.K. Omarbayeva

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: gaziza.omarbaeva@mail.ru

Let $1<p,q,\theta<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ and $u=\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $\omega=\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ be positive sequences of real numbers, which will be referred to as weight sequences. Let $\varphi=\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a non-negative sequence of real numbers.

Let $1<p<\infty$. We denote by $l_{p,u}$ the space of sequences $f=\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ of real numbers such that

$$\|f\|_{p,u}=\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|u_jf_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Let $p \geqslant 1$ and $0 < q, \theta \leqslant \infty$. We consider the following weighted inequalities:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{\theta}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\Big|\varphi_k \sum_{i=k}^{\infty} f_i\Big|^q\Big)^{\frac{\theta}{q}}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j f_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_p, \tag{1}$$

for quasilinear operator $H_{k,\varphi}$ defines as follow for $\forall f \in l_1$:

$$(H_{\varphi,q} f)_n := \left(\sum_{k=n}^{\infty}\Big|\varphi_k \sum_{i=k}^{\infty} f_i\Big|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

where $k \in N$ and C is a positive constant of (1).

In 2008, [2] in the work, considered the three-weigted Hardy-type inequalities. After this work, V.I. Burenkov and R. Oinarov (see [1]) gained the boundedness of the quasi-linear integral operator from the Morrey space to the Lebesgue space. In recent years, weighted estimates for various classes of quasilinear operators are intensively studied in connection with various applications (see for example [3] and [4]).

Theorem 1 *Let $0 < q < p \leqslant \theta < \infty$, $p > 1$. Then the inequality (1) holds for some $C < \infty$ if and only if $\max\{F_1, F_2\} < \infty$, where*

$$F_1 := \sup_{k \geqslant 1}\Big(\sum_{j=1}^{k} \omega_j^{\theta}\Big(\sum_{n=j}^{k} \varphi_n^q\Big)^{\frac{\theta}{q}}\Big)^{\frac{1}{\theta}}\Big(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^{-p'}\Big)^{\frac{1}{p'}},$$

and

$$F_2 := \sup_{k \geqslant 1}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\Big(\sum_{i=n}^{\infty} u_i^{-p'}\Big)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\Big(\sum_{s=n}^{i} \varphi_s^q\Big)^{\frac{q}{p-q}} \varphi_n^q\Big)^{\frac{p-q}{pq}}\Big(\sum_{j=1}^{k} \omega_j^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Moreover, $C \approx \max\{F_1, F_2\}$ with the equivalency constants depending only on k, p, q and θ, where C is the best constant in (1).

Reference

[1] V.I. Burenkov, R. Oinarov, *Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesque space to a Morrey-type space.* Math. Inequal. Appl. 16 (2013), no. 1, 1-19.

[2] R. Oinarov, A. Kalybay, *Three-parameter weighted Hardy type inequalities.* Banach Journal Math. Appl. (2008), no. 2, 85-93.

[3] R. Oinarov, A. Kalybay, *Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters.* J. Funct. Spaces. Appl. 44 (2016), 11 pages.

[4] V.D. Stepanov, G.E. Shambilova, *On weighted iterated Hardy-type operators.* Analysis Math. 44 (2018), no. 2, 273–283.

STEIN-WEISS TYPE INTERPOLATION THEOREM OF HAAGERUP NONCOMMUTATIVE HARDY SPACES ASSOCIATED WITH SUBDIAGONAL ALGEBRA

M. Raikhan, A.E. Uatayeva

L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: mady1029@yandex.kz

Let $\mathcal{M}$ be a σ-finite von Neumann algebra on a complex Hilbert space $\mathcal{H}$, equipped with a distinguished normal faithful state φ. Let $\{\sigma_t^{\varphi}\}_{t\in\mathbb{R}}$ be the one parameter modular automorphism group of $\mathcal{M}$ associated with φ, and let $\mathcal{N}$ denote the crossed product$\mathcal{M} \rtimes_{\sigma^{\varphi}} \mathbb{R}$ of $\mathcal{M}$ by $\{\sigma_t^{\varphi}\}_{t\in\mathbb{R}}$. $L^0(\mathcal{N},\tau)$ denotes the topological $*$-algebra of all operators on $L^2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ measurable with respect to $(\mathcal{N},\tau)$. Then the Haagerup noncommutative L^p-spaces, $0 < p \leqslant \infty$, are defined by

$$L^p(\mathcal{M},\varphi) = \{x \in L^0(\mathcal{N},\tau) :\ \hat{\sigma}_t(x) = e^{-\frac{t}{p}}x,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Let $0 < p \leqslant \infty,\ K \subset L^p(\mathcal{M})$. We denote by $[K]_p$ the closed linear span of K in $L^p(\mathcal{M})$ (relative to the w*-topology for $p = \infty$) and set

$$J(K) = \{x^* :\ x \in K\}.$$

For $0 < p < \infty,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1$, we have that

Let $\mathcal{D}$ be a von Neumann subalgebra of $\mathcal{M}$. Let $\mathcal{E}$ be the (unique) normal faithful conditional expectation of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathcal{D}$ which leaves φ invariant.

Definition 1 *A w*-closed subalgebra $\mathcal{A}$ of $\mathcal{M}$ is called a subdiagonal algebra of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathcal{E}$(or to $\mathcal{D}$) if*

1. *$\mathcal{A} + J(\mathcal{A})$ is w*-dense in $\mathcal{M}$,*
2. *$\mathcal{E}(xy) = \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)$, $\forall\, x, y \in \mathcal{A}$,*
3. *$\mathcal{A} \cap J(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$,*

The algebra $\mathcal{D}$ is called the diagonal of $\mathcal{A}$.

The $\mathcal{A}$ always denotes a maximal subdiagonal algebra in $\mathcal{M}$ with respect to $\mathcal{E}$.

Definition 2 *For $0 < p < \infty$, we define the Haagerup noncommutative H^p-space that*

$$H^p(\mathcal{A}) = [\mathcal{A}D^{\frac{1}{p}}]_p, \quad H_0^p(\mathcal{A}) = [\mathcal{A}_0 D^{\frac{1}{p}}]_p.$$

We obtained the following interpolation theorem.

Theorem 1 *Let $1 < p < \infty$. Then*

$$C_\theta(\mathcal{A}^\eta, H^1(\mathcal{A})) = i_p^\eta(H^p(\mathcal{A}))$$

with equivalent norms, where $\theta = \frac{1}{p}$.

We have the following Stein-Weiss type interpolation theorem.

Theorem 2 *Let $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Then*

$$C_\eta(H^p(\mathcal{A})D^{\frac{1}{q}}, D^{\frac{1}{q}}H^p(\mathcal{A})) = D^{\frac{\eta}{q}}H^p(\mathcal{A})D^{\frac{1-\eta}{q}}.$$

Consequently,

$$C_\eta(H^p(\mathcal{A})_L, H^p(\mathcal{A})_R) = C_\theta(\mathcal{A}^\eta, H^1(\mathcal{A})) \mid_{\theta=\frac{1}{p}}$$

Authors supported by project AP05131557 of the Science Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Reference

[1] W.B. Arveson, *Analyticity in operator algebras.* Amer.J.Math 89 (1967), 578-642.

[2] T. N. Bekjan, *Szego type factorization of Haagerup noncommutative Hardy spaces.* Acta. Math. Sci. 37B(5) (2017), 1-9.

[3] H. Kosaki, *Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: Noncommutative Lp -spaces.* J.Funct.Anal. 56 (1984), 29-78.

[4] G. Pisier, Q. Xu, *, Noncommutative Lp-spaces, In Handbook of the geometry of Banach spaces.* Vol. 2 (2003), 1459-1517.

ACTUAL PROBLEMS RELATED TO SOME MINIMIZERS OF FUNCTIONALS

M.A. Ragusa

University of Catania, Italy

I show the advances on the regularity problem and present recent results related to minimizers

$$u(x) : \Omega \to R^n$$

of quadratic and non quadratic growth functionals of the following type

$$\int_\Omega A(x, u, Du)dx,$$

where $\Omega \subset R^m$ is a bounded domain. About the dependence on the variable x is supposed that $A(\cdot, u, p)$ is in the vanishing mean oscillation class, as a function of x. Then, is pointed out that the continuity of $A(x, u, p)$, with respect to x, is not assumed.

GEOMETRIC HARDY INEQUALITIES ON STARSHAPED SETS

B. Sabitbek[1], D. Suragan[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: b.sabitbek@math.kz, durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In 1998, Danielli and Garofalo [4] firstly introduced the concept of starshapedness on the Carnot groups. Their paper provides the geometrical properties of starshaped and convex sets. The convexity in the Heisenberg groups was studied by many authors such as Monti and Rickly [6] who proved the geodesic convexity, or by Danielli, Garofalo, and Nhieu [3] (see also [5]) who introduced the concept of horizontal convexity (H-convexity). Bardi and Dragoni [1], [2] generalised the concept of convexity to general vector fields and introduced the notion of $\mathcal{X}$-convexity which is a generalisation of H-convexity. This analysis allows introducing the distance to the boundary notation for starshaped sets, so by using the distance formula one can obtain geometric Hardy type inequalities.

Reference

[1] M. Baldi, F. Dragoni, *Convexity and semiconvexity along vector fields.* Calc. Var. PDE, 42 (2011), no. 3-4, 405-427.

[2] M. Baldi, M. Dragoni, *Subdifferential and properties of convex functions with respect to vector fields.* J. Convex Anal., 21 (2014), no. 3, 785-810.

[3] D. Danielli, N. Garofalo and D.M. Nhieu, *Notions of convexity in Carnot groups.* Comm. Anal. Geom., 11(2) (2003), 263-341

[4] D. Danielli, N. Garofalo, *Geometric properties of solutions to subelliptic equations in nilpotent Lie groups.* Reaction diffusion systems (Trieste, 1995), 89-105, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 194, Dekker, New York, (1998)

[5] N. Garofalo, *Geometric second derivative estimates in Carnot groups and convexity.* Manuscripta Math. 126 (2008), 353-373.

[6] R. Monti, M. Rickly,]texti Geodetically convex sets in the Heisenberg group. J. Convex Anal. 12 (2005), No. 1, 187-196.

КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Б.Н. Сейлбеков

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: SeilbekovBolat@gmail.ru

Пусть $0 < p, q < \infty, I = (0;\infty), 0 < \alpha < 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Весовые функции $\nu, \varphi : I \to I$ неотрицательные локально интегрируемые и $u-$ не возрастающая функция на I .

Положим, что $\frac{dW(x)}{dx} \equiv w(x)$ почти всюду на $x \in I$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности из $L_{p,w} = L_{p,w}(I)$ в $L_{q,\nu} = L_{q,\nu}(I)$ интегрального оператор в вида

$$T_{\varphi} = \int\limits_{0}^{\varphi(x)} \frac{u(s)W^{\beta}(s)f(s)w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}, \ \ x \in I,$$

где $L_{p,w}-$ пространство всех измеримых функций $f : I \to R$, для которых конечен следующий функционал

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_{0}^{\infty} |f(x)|^p w(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ 0 < p < \infty.$$

При $\varphi(x) = x$ получены критерии ограниченности и компактности оператора T_{φ} из $L_{p,w}$ в $L_{q,\nu}$ в работе [1]. А в случае, когда компактность двухвесовая оценка вытекает из результатов работы [2].

Теорема 1 *Пусть* $0 < \alpha < 1, \ \ \frac{1}{\alpha} < p \leqslant q < \infty$ *и* $\beta \geqslant 0$. *Тогда оператор* T_{φ} *компактен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,\nu}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

$$a) A_{\varphi} = \sup_{s>0} A_{\varphi}(s) < \infty \qquad b) \lim_{s\to 0} A_{\varphi}(s) = \lim_{s\to\infty} A_{\varphi}(s) = 0$$

где $A_{\varphi}(s) = \left(\int\limits_{0}^{\varphi(s)} u^{p'}(t)W^{p'\beta}(t)w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{s}^{\infty} W^{q(\alpha-1)}(x)\nu(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$

Списки литературы

[1] A.V. Abylayeva, R.Oinarov and L.-E. Persson, *Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators.* Journal of Inequal. and Appl. (JIA), № 324, 2016.

[2] А.М.Абылаева, *Критерий компактности оператора типа дробного интегрирования порядка* $0 < \alpha < 1$.

HARDY TYPE INEQUALITY WITH SHARP CONSTANT FOR $0 < P < 1$

A. Senouci

Ibn-Khaldoun university, Tiaret, Algeria
E-mail: kamer295@yahoo.fr

A power-weighted integral inequality with sharp constant for $0 < p < 1$ was established in [1] for the Hardy operator $\big(Hf\big)(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$ for non-negative non-increasing functions f. In this work we consider a more general class of functions f and prove a new Hardy-type inequality with sharp constant for functions of this class. The integral inequality

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx \leqslant C_1\ \int_0^\infty f^p(x)\ x^\alpha\ dx, \tag{1}$$

where $C_1 = \big(\frac{p}{p-1-\alpha}\big)^p$, known as Hardy's inequality, is satisfied for all functions f non-negative and measurable on $(0,\infty)$ with $p \geqslant 1$ and $\alpha < p-1$. The constant C_1 is sharp i.e. the smallest possible (for more details see [2]).

If $0 < p < 1$, inequality (1) with any $C_1 > 0$ is not satisfied for arbitrary non-negative measurable functions (see [1]).

In [1] for $0 < p < 1$, inequality of type (1) with a sharp constant was proved for non-negative non-increasing functions. Namely the following statement was proved there.

Theorem 1 *Let $0 < p < 1$ and $-1 < \alpha < p-1$, then for all function $f \geqslant 0$ non-increasing on $(0,\infty)$,*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx \leqslant C_2\ \int_0^\infty f^p(x)\ x^\alpha\ dx, \tag{2}$$

where $C_2 = \frac{p}{p-1-\alpha}$. Moreover, the constant C_2 is sharp.

The aim of this work is to change the monotonicity condition by a more general one and obtain an inequality of type (1) with a sharp constant which coincides with the constant C_2 in Theorem 1 for the class of all functions non-negative and f is non-increasing on $(0,+\infty)$.

In the following theorem we establish and prove an inequality of type (2) with sharp constant under assumptions weaker than monotonicity.

Theorem 2 *Let $k > 0$, $0 < p < 1$ and $-1 < \alpha < p-1$. If a function $f \geqslant 0$ measurable on $(0,\infty)$ satisfies for almost all $x > 0$ the inequality*

$$f(x) \leqslant \frac{k}{x}\Big(\int_0^x f^p(y)\,y^{p-1}\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

then

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\Big)^p x^\alpha\ dx \leqslant C_3\ \int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha\ dx, \tag{4}$$

where $C_3 = \frac{p^p\,k^{p(1-p)}}{p-\alpha-1}$. Moreover the constant C_3 is sharp.

Reference

[1] V.I. Burenkov, *On the exact constant in the Hardy inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions.* Proc. Steklov Inst. Mat., 194 (1993), no. 4, 59-63.

[2] G.H. Hardy, *Notes on somme points in the integral calculus. LXIV. Further inequalities between integrals.* Messenger of Math. 57 (1927), 12-16.

RECENT PROGRESS IN THE THEORY OF SUBELLIPTIC HARDY TYPE INEQUALITIES

D. Suragan

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

The Hardy inequality has many applications in the analysis of linear and nonlinear PDEs, for example, in existence and nonexistence results for second order partial differential equations of different types.

Since L. Hörmander's fundamental work [1] the operators of the type sum of squares of vector fields have been studied intensively. and today's literature on the subject is quite large. Much of the development in the field has been connected to the development of analysis on the homogeneous (Lie) groups, following the ideas of E. Stein's talk at ICM 1970 [2].

Nowadays, a lot of work concerning Hardy inequalities have been developed in the context of the subelliptic operators, and these inequalities are called the subelliptic Hardy type inequalities.

I will survey the history of the inequalities, their significance, and all the contributions made throughout the last 100 years. The talk is based on our recent open access book [3].

Reference

[1] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations.* Acta Math., 119 (1967), 147–171.

[2] E. M. Stein, *Some problems in harmonic analysis suggested by symmetric spaces and semi-simple groups.* Actes, Congres Intern. Math., Nice, 1 (1970), 179–189.

[3] M. Ruzhansky and D. Suragan, *Hardy inequalities on homogeneous groups.* Birkhäuser, 2019.

THE BOUNDEDNESS OF THE HILBERT TRANSFORM IN LORENTZ SPACES AND ITS APPLICATIONS

F. Sukochev[1], K. Tulenov[2], and D. Zanin[3]

[1,3] *School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Sydney, Australia*
[2] *Al-Farabi Kazakh National University;*
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: tulenov@math.kz

Let $S(0,\infty)$ be a space of all Lebesgue measurable functions such that $m(\{|x|\geqslant s\})$, for some $s>0$.

If x is a locally integrable function on $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, then the classical Hilbert transform $\mathcal{H}$ is defined by the principal-value integral

$$(\mathcal{H}x)(t)=p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(s)}{t-s}ds.$$

Let E and F be symmetric Banach function spaces on $(0,\infty)$. We recall that if $\mathcal{H}: E \to F$ is bounded, the optimal range is the smallest symmetric Banach function space G is embedded into F on $(0,\infty)$ such that $\mathcal{H}: E \to G$ is bounded.

Let Ω denote the set of increasing concave functions $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ for which $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$ (or simply $\varphi(0+) = 0$). For a function φ in Ω, the Lorentz space $\Lambda_\varphi(0,\infty)$ is defined by setting

$$\Lambda_\varphi(0,\infty) := \left\{ x \in L_0(0,\infty) : \int_0^\infty \mu(s,x)d\varphi(s) < \infty \right\}$$

equipped with the norm

$$\|x\|_{\Lambda_\varphi(0,\infty)} := \int_0^\infty \mu(s,x)d\varphi(s).$$

In particular, if $\varphi(t) = \log(1+t)$, $t > 0$, then we denote $\Lambda_\varphi(0,\infty)$ by $\Lambda_{\log}(0,\infty)$.

In this talk, we describe the optimal range for the Hilbert transform in the special case when $E = \Lambda_\phi$, an arbitrary Lorentz space. In fact, we identify the optimal range for $\mathcal{H}$ on E as another Lorentz space Λ_ψ. Thus, $\mathcal{H}$ acts boundedly from $E = \Lambda_\phi$ into symmetric Banach function space F if and only if $\Lambda_\psi \subseteq F$, where ψ is given by the following formula

$$\psi(u) := \inf_{w>1} \frac{\phi(uw)}{1+\log(w)}.$$

Of course, if the function ψ is equivalent to ϕ, then our result simply recovers that of Boyd [1] by ensuring that $E = \Lambda_\phi$ has non-trivial Boyd indices.

Reference

[1] D. Boyd, *The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces.* Can. J. Math. 19 (1967), 599–616.

UNCERTAINTY TYPE PRINCIPLES

D.B. Shilibekova

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: dina.shilibekova@nu.edu.kz

In this paper, the functional version of generalized Uncertainty principle will be obtained. We will discuss many interesting consequences of the obtained inequality. Our main theorem is

Theorem 1 *For any integrable radial function ϕ, and for any $f \in C_0^1(\Omega)$ we have the following generalized uncertainty principle:*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \phi(|x|)\, dx \leqslant p \left(\int_\Omega \frac{\left|\frac{df(x)}{d|x|}\right|^p |\tilde{\phi}(|x|)^p|}{|x|^{n-p}}\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{|x|^n}\, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}, \qquad 1 < p < +\infty$$

Here, $\tilde{\phi}(|x|) = \int_0^r \phi(|x|)\, |x|^{n-1}\, dx$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an open bounded set.

Reference

[1] M. Ruzhansky and D. Suragan, *Critical Hardy inequalities.* Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, 44 (2019), 1159-1174.

[2] A. Witkowski, *Critical Hardy inequalities.* Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7 (2006), no. 5.

[3] Walter Rudin, *REAL AND COMPLEX ANALYSIS.* McGraw-Hill international editions. (1987), no. 3.

ON A CLASS OF NON-CONVOLUTION OPERATORS

M.U. Yakhshiboev

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

In the spaces $L_{\overline{p}}(R^n)$ is investigated the convergence of a class of non-convolution operators to the identity operator. Identity approximations of this class have origin in fractional calculus related to the so-called Chen fractional integro-differentiation [1].

In this paper we specially consider a general class of identity approximation operators of such a nature in the multi-dimensional case, namely the following class of operators with vector step$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$,

$$(A_\varepsilon \varphi)(x) := \int_0^{\frac{1}{\varepsilon_1}} ... \int_0^{\frac{1}{\varepsilon_n}} k_1(y_1) ....k_n(y_n)\, \varphi(x - \varepsilon \circ y \circ (x-c))\, dy_1...dy_n, \tag{1}$$

where $c \in R^n$, $\varepsilon \in R^n$, $x \circ y = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n)$ and $0 < \varepsilon_i < 1, \int_0^\infty k_i(y_i)\, dy_i = 1$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ and investigate their convergence in the spaces $L_{\overline{p}}(R^n)$ (or$L_{\overline{p}}^{loc}(R^n)$) with the mixed norm. In the lemma below, we use the following rectangles

$$K = \left\{x : x \in R^n;\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ a_i, b_i \in R^1,\ i = \overline{1,n}\right\}$$

and $K' = \{\ x : x \in R^n;\ a_i^{'} \leqslant x_i \leqslant$
$\leqslant b_i^{'},\ i = \overline{1,n}\ \}$ where $a_i' = \min(a_i, c_i)$, $b_i' = \max(b_i, c_i)$.

Lemma. Let $0 < \varepsilon_i < 1,\ i = \overline{1,n}$, $c \in R^n$ and

$$\delta(\varepsilon_i) = \int_0^{1/\varepsilon_i} |k_i(t)| \frac{dt}{(1-\varepsilon_i t)^{1/p_i}} < \infty,\ i = \overline{1,n.}$$

Then the operator A_ε is continuous in the spaces $L_{\overline{p}}^{loc}(R^n)$ and $L_{\overline{p}}(R^n)$ $1 \leqslant p_i < \infty,\ i = \overline{1,n},$ and

$$\|A_\varepsilon \varphi\|_{L_{\overline{p}}(K)} \leqslant \delta(\varepsilon_1) \cdot \delta(\varepsilon_2) ...\delta(\varepsilon_n) \cdot \|\varphi\|_{L_{\overline{p}}(K')}.$$

The operators A_ε are uniformly bounded from $L_{\overline{p}}(K')$ into $L_{\overline{p}}(K)$, if $\sup\limits_{\varepsilon_i > 0} \delta(\varepsilon_i) < \infty,\ i = \overline{1,n}.$

In the following theorem we use the notation

$$\delta_{\mu_i}(\varepsilon_i) = \int_{\mu\, i/\varepsilon_i}^{1/\varepsilon_i} |k_i(t)| \frac{dt}{(1-\varepsilon_i t)^{1/p_i}} < \infty,\ 0 < \mu_i < 1,\ i = \overline{1,n}.$$

Theorem. Let the kernels $k_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, satisfy the conditions:

$$\sup_{0<\varepsilon_i<1} \int_0^{1/\varepsilon_i} |k_i(t)| \frac{dt}{(1-\varepsilon_i t)^{1/p_i}} < \infty,\ \int_0^{\infty} k_i(t)\, dt = 1,\ i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Then,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (A_\varepsilon \varphi)(x) = \varphi(x) \tag{3}$$

for $\varphi \in L_{\overline{p}}^{loc}(R^n)$, $1 < \overline{p} < \infty$, where the limit in the left-hand side may be treated both as a multiple limit or repeated one, with respect to the natural topology in the space $L_{\overline{p}}^{loc}(R^n)$.

When $\varphi \in L_{\overline{p}}(R^n)$, $1 < \overline{p} < \infty$, then relation (3) is also valid in the sense of convergence in $L_{\overline{p}}(R^n)$, $1 < \overline{p} < \infty$, if besides (2) the following condition holds

$$\lim_{\varepsilon_i\to 0} d_{\mu_i}(\varepsilon_i) = 0$$

for *any* $0 < \mu_i < 1$, $i = \overline{1,n}$.

(1) is non-convolution operator and the kernels $k_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ are not obliged to have a monotonous dominated so the known results about convergence almost everywhere convolution averagings ([2], p. 77-78) are not applicable here. We will give the simple conditions providing convergence of (1) to $\varphi(x)$ almost everywhere, having received them as the investigation from a statement about convergence almost everywhere of the non-convolution operator in rather general form

$$(K_\varepsilon \varphi)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x_1, y_1) ....k_n(x_n, y_n)\, \varphi(x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)\, dy_1...dy_n.$$

Reference

[1] S.G.Samko, M.U.Yakhshiboev, *A modification of Riemann-Liouville fractional integro-differentiation applied to functions on with arbitrary behaviour at infinity.* Izv. Vysch. Uchebn. Zaved., Matem., no. 4, 96–99, 1992 (In Russian).

[2] I. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions.* M. Mir. 1973. 342 p.(In Russian)

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКАНЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

DIFFERENTIAL AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.М. Алдибеков[1], М.М. Алдажарова[2]

[1]*КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан*
[2]*НИИ КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан*
E-mail:tamash59@mail.ru

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x) y_k + g_i(x,\, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $x \in (0, +\infty)$, $p_{ik}(x) \in \mathbb{C}\,(0, +\infty)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\|y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, h > 0$,
$D \equiv ((x, y) : x \in (0, +\infty),\, \|y\| < h),\, f(x, y) = (f_1, \ldots, f_n),\, f(x, y) \in \mathbb{C}^{0,1}_{x,y}(D)$,
$f(x, 0) = 0,\, x_0 \in (0, +\infty), I \equiv [x_0, +\infty)$.

Теорема 1 *Если нелинейная система дифференциальных уравнений (1) удовлетворяет условиям:*
1) $p_{k-1,k-1}(x) - p_{k,k}(x) \geqslant \alpha\gamma x^{\gamma-1},\ x \in I,\ k = \overline{2; n},\ \alpha > 0,\ \gamma > 0;$
2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\gamma x^{\gamma-1}} = 0,\ i \neq k,\ k = \overline{1; n};$
3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{x^\gamma} \int\limits_{x_0}^{x} p_{kk}(s) ds = \beta_k < 0,\ k = \overline{1; n};$
4)$\|f(x, y)\| \leqslant K\|y\|^m$*, где* $m > 1$, $K > 0$*, то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчиво.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования Казахстана, Грант № AP05132615.

Список литературы

[1]] T.M. Aldibekov and M.M. Aldazharova, *On the Stability by the First Approximation of Lyapunov Characteristic Exponents in Critical Cases.* Differential Equations, 2014, Vol. 50, No. 10, pp. 1-5.

УСЛОВИЕ ОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ И НЕОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. Алдай, К.Р. Мырзатаева, Д.С. Каратаева

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mails: saiajan@yandex.kz, kalbibi@mail.ru, danagul83@inbox.ru

Пусть $\mu, \gamma \in R, \alpha > 0$,

$$t^{\mu}(|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + \alpha t^{\gamma}|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, t > 0, \tag{1}$$

$$\int_0^{\infty}(t^{\mu}|y'(t)|^{p} - \alpha t^{\gamma}|y(t)|^{p})dt \geqslant 0, y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(0,\infty). \tag{2}$$

Неравенство (2) является необходимым и достаточным условием безсопряженности уравнения (1) на интервале $(0,\infty)$. Пусть $\mu < p-1$, тогда $\forall c > 0$, $\int_0^c t^{(1-p')\mu}dt < \infty$, $\int_0^\infty t^{(1-p')\mu}dt = \infty$, по Th.A [1] $\overset{\circ}{W}{}_p^1(0,\infty) = \overset{\circ}{W}{}_{p,l}^1(0,\infty) = \left\{f \in W_p^1(0,\infty) : f(0) = 0\right\}$.

Тогда из (2)

$$\int_0^{\infty} t^{\mu}|y'(t)|^{p}dt \geqslant \alpha\int_0^{\infty} t^{\gamma}|y(t)|^{p})dt, y(0) = 0. \tag{3}$$

Положим $y'(t) = f(t), y(0) = 0 \Longrightarrow y(t) = \int_0^1 f(s)ds$. Подставляя в (3), получим

$$\int_0^{\infty} t^{\gamma}\left|\int_0^1 f(s)ds\right|^p dt \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\mu}|f(t)|^p dt. \tag{4}$$

Теперь рассмотрим неравенство Харди

$$\int_0^{\infty} t^{\gamma}\left|\int_0^t f(s)ds\right|^p dt \leqslant C\int_0^{\infty} t^{\mu}|f(t)|^p dt,$$

пусть $\gamma = \mu - p$.

Тогда $\int_0^\infty \left|\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds\right|^p t^{\mu}dt \leqslant C\int_0^\infty t^{\mu}|f(t)|^p dt$, по теореме Харди [2] наименьшая константа $C = \left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p$. При $\mu < 1-p, \gamma = \mu - p$, неравенство (4) выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\alpha} \geqslant \left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p$, то есть, если выполняется $\alpha \leqslant \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$. Если $\alpha > \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$, то не выполняется (4)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(2).

Поэтому $\alpha \leqslant \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$ и при $\gamma = \mu - p, \mu < 1-p$, выполняется неравенство (2), отсюда уравнение (1) безсопряженно на интервале $(0,\infty)$, и тогда уравнение (1) будет неосцилляторным.

Если при $\alpha > \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$ $\gamma = \mu - p$, $\mu < 1 - p$, то уравнение (1) будет осцилляторным. При любом $\alpha > 0$ по неравенству Харди неравенство $\int\limits_a^\infty \left|\frac{1}{t}\int\limits_a^t f(s)ds\right|^p t^\mu dt \leqslant \left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p \int\limits_a^\infty t^\mu |f(t)|^p dt$ выполняется с наименьшей константой $\left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p$. При выполнении условия (6) уравнение (1) для любого $a > 0$, на интервале (a, ∞) сопряженно, а это значит что уравнение (1) осцилляторно. Отсюда вытекает, что при выполнении условия (6) уравнение (1) осцилляторно.

Список литературы

[1] A.Kalybay, D. Karatayeva, *An extended discrete weighted Hardy inequality in the difference form* // AIP Conference Proceedings. - 2017. - V. 1880, 030012. - doi: http://dx.doi.org/110.1063/1.5000611

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С Р-ЛАПЛАСИАНОМ

С.Е. Айтжанов, Г.Р. Ашурова

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы
E-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com, ashurova.guzel@gmai.com

В данной работе исследуется обратная задача для псевдопараболического уравнения с р-Лапласианом. Рассматриваются вопросы асимптотического поведения решений при $t \to \infty$, локализации решения, а также разрушение за конечное время. Получены достаточные условия "разрушения"решения за конечное время, а также получена оценка снизу разрушения решения.

Исследование начально-краевых задач для псевдопараболического уравнения началось в 1970-х годах. К настоящему времени достаточно хорошо изучены и в исследование разрешимости таких задач существенный вклад внесли Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Кожанов А. И., Осколков А.П., Антонцев С.Н. и др. ученые. В работах Кожанов А.И., Аблабеков Б.С., Yaman M. изучались некоторые обратные задачи для псевдопараболических уравнений, но эти задачи существенно отличаются по постановке от рассматриваемой в настоящей работе.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t): \ x \in \Omega, \ t \in (0,T)\}$ обратную задачу для псевдопараболического уравнения: определить пару функций $(u(x,t), f(t))$ удовлетворяющих уравнению

$$u_t - \chi\Delta u_t - div\left(|\nabla u|^{\sigma-2}\nabla u\right) = |u|^{\beta-2}u + f(t)h(x), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

$$\int_\Omega u(x,t)\cdot h(x)dx = 1. \tag{4}$$

Здесь $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 1$ ограниченная область, граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, σ и β положительные константы, которые $\chi > 0$, $\sigma \geqslant 2$, $\beta > 2$.

Список литературы

[1] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит, 2007.

[2] Корпусов М. О. *О разрушении решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения псевдопараболического типа.* Дифференцальные уравнения, 41 (2005), 6. 832–835.

[3] Meyvaci M. *Blow-up of solutions of pseudo-parabolic equations.* J. Math. Anal. Appl. 352 (2009). 629-633.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

С.Е. Айтжанов[1], Г.О. Жумагул[2]

[1]*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы*
[2]*Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы*
E-mails: Aitzhanov.Serik81@gmail.com, zhumagul.gaziza@bk.ru

В данной работе рассмотрена начально-краевая задача в прямоугольной области для псевдопараболического уравнения с нелинейными краевыми условиями. Доказана однозначная разрешимость этой задачи, а также получены достаточные условия разрушения его решения за конечное время.

Рассмотрим в прямоугольнике $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T\}$ начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения

$$u_t - u_{xxt} + uu_x = b(x,t)u^3 + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \ \ u_{xt}(1,t) + \frac{1}{3}u^2(1,t) = 0. \tag{3}$$

В работе Бубнова Б.А. была доказана однозначная разрешимость в целом начально-краевой задачи для альтернативного уравнения Кортевега де Фриза [1].О разрушении решения для уравнения псевдопараболического типа были исследованы многими авторами, следует отметить работы [2-5].

Список литературы

[1] Бубнов Б.А. *Разрешимость в целом нелинейных граничных задач для уравнения Кортевега-де Фриза в ограниченной области.* Дифференциальные уравнения, 16 (1980), no. 1. 34-41.

[2] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит, 2007.

[3] Юшков Е.В. *О разрушении решения уравнения, родственного уравнения Кортевега-де Фриза.* Теоретическая и математическая физика, 172(2012), no. 1. 64-72.

[4] Корпусов М. О. *О разрушении решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения псевдопараболического типа.* Дифференцальные уравнения, 41 (2005), 6. 832–835.

[5] Meyvaci M. *Blow-up of solutions of pseudo-parabolic equations.* J. Math. Anal. Appl. 352 (2009). 629-633.

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Е. Айтжанов, Д.Т. Жанузакова

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы
E-mail: Aitzhanov.Serik81@gmail.com, Dinara.Zhan07@gmail.com

В данной статье рассмотрена обратная задача с интегральным условием переопределением для уравнения параболического типа. В ограниченной области с однородным условием Дирихле получены достаточные условия разрушения его решения за конечное время, а также устойчивость решения для обратной задачи с противоположным знаком на нелинейность степенного типа.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t): \ x \in \Omega, \ t \in (0,T)\}$ обратную задачу для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью: определить пару функций $(u(x,t), \ f(t))$ удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + a_0|u|^{p-2}u\right) - \Delta u + a(x,t,u,\nabla u) = |u|^{p-2}u + f(t)\omega(x), \ \ x \in \Omega, \ \ 0 < t < T, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in \Omega, \tag{2}$$

граничному условию

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$\int_\Omega \left(u + a_0|u|^{p-2}u\right)\omega\, dx = \varphi(t), \ \ 0 < t < T. \tag{4}$$

Здесь $\Omega \subset R^n, \ n \geqslant 1$ ограниченная область, граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, p и q положительные константы, которые $q > p-2, \ \ p > 2$.

В работе [1] исследуется обратная задача для параболического уравнения со степенной нелинейностью вида

$$u_t - \Delta u - |u|^p u + b(x,t,u,\nabla u) = F(t)\omega(x), \ \ x \in \Omega, \ \ t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$
$$u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0,$$
$$\int_\Omega u \cdot \omega \, dx = 1, \;\; t > 0.$$

В данной работе получены условия на известные данные, гарантирующие глобальное отсутствие решений обратной задачи. А также устанавливается устойчивость решения в ограниченной области для обратной задачи с противоположным знаком с нелинейностью степенного вида
$$u_t - \Delta u + |u|^p u = F(t)\omega(x), \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0.$$

В работе [2] рассмотрена обратная задача для квазилинейного параболического уравнения со степенной нелинейностью вида

$$u_t - div\left((k_1 + k_2|\nabla u|^{m-2})\nabla u\right) + h(u, \nabla u) - |u|^{p-2}u = f(t)\omega(x), \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0,$$

с начально-краевым условием (2), (3) и дополнительным интегральным условием (4) (когда функция $\varphi(t) = 1$ при $t > 0$). Получены условия разрушения его решения за конечное время.

Список литературы

[1] Eden A., Kalantarov V.K. *On global nonexistence of solutions to an inverse problem for semilinear parabolic equations.* J. Math. Anal. Appl., 307 (2005). 120-133.

[2] Gur S., Yaman M. *Finite time blow up of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearity.* J. Nonlinear Sci. Appl., 9 (2016), 1902-1910.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ХАББЛА

Н. Аканбай, З.И. Сулейменова, С.К. Тапеева

КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mails: noureke1953@gmail.com; suleymenova2474@gmail.com; tapeevasamal77@gmail.com

Задача об эволюции магнитного поля в случайном турбулизованном потоке проводящей жидкости является одной из самых важных во многих физических приложениях.

В то время, как при заданном течении жидкости процесс переноса магнитного поля принципиально ясен, то сама проблема описания турбулентного течения жидкости, как известно, чрезвычайна сложна. Поэтому обычно прибегают к тем или иным способам моделирования движения жидкости. В [3-4] эволюция магнитного поля была изучена в так называемой линейной модели с обновлением, в которых рассматриваемая задача в конечном итого свелась к изучению произведения независимых случайных матриц при возрастании числа сомножителей.

Целью нашей работы является обобщение основных результатов работ [3-4] на случай так называемой марковской линейной модели. (Отметим, что линейные модели используются в космологии под именем "течения Хаббла").

Основная часть. Хорошо известно, что задача об эволюции начального распределения $\overrightarrow{H_0}(x) = (H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$ магнитного поля

$$\overrightarrow{H}(t,x) = (H_1(t,x), (H_2(t,x), H_3(t,x))$$

в заданном несжимаемом случайном поле скорости $\overrightarrow{V}(t,x) = (V_1(t,x), (V_2(t,x), V_3(t,x))$ с постоянной магнитной диффузией $\nu_m \quad (\nu_m > 0)$ сводится к решению задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{H} = \nu_m \triangle \overrightarrow{H} - (\overrightarrow{V},\ \nabla)\overrightarrow{H} + (\overrightarrow{H},\ \nabla)\overrightarrow{V}, \qquad \overrightarrow{H}(0,\ x) = \overrightarrow{H_0}(x). \tag{1}$$

где $t \geqslant 0, \quad x \in R^3, \quad div\overrightarrow{V} = 0.$

В данной работе мы будем изучать задачу (1) в следующей *марковской линейной модели скоростей (или модели Хаббла)*

$$\overrightarrow{V}(t,x) = C(b_t)x, \tag{2}$$

где b_t - определенный на некотором компактном многообразии K однородный диффузионный процесс с инфинитезимальным оператором $\frac{1}{2}\triangle$ (скажем, b_t- броуновское движение), $C(\cdot) : K \to SL(3,\ R)$ - гладкая класса $C^\infty(K)$ матрица с нулевым следом ($trC = 0$) и значениями в группе Ли $SL(3, R)$ унимодулярных матриц 3-го порядка.

Можно показать [3], что решение задачи (1) в модели (2) записывается в виде интеграла

$$\overrightarrow{H}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} G_t \widehat{\overrightarrow{H_0}}(\overrightarrow{k}) exp\left\{ i\left((G_t^*)^{-1}\overrightarrow{k}, x\right) - \nu_m \int\limits_0^t \left((G_s^*)^{-1}\overrightarrow{k}\right)^2 ds \right\} d\overrightarrow{k}, \tag{3}$$

а для полной магнитной энергии $\mathcal{E}(t)$ имеет место представление

$$\mathcal{E}(t) = \int\limits_{R^3} \overrightarrow{H}^2(t,x)dx = \int\limits_{R^3} \left(G_t \widehat{\overrightarrow{H_0}}\left(\overrightarrow{k}\right)\right)^2 exp\left\{ -2\nu_m \int\limits_0^t \left((G_s^*)^{-1}\overrightarrow{k}^2\right) ds \right\}. \tag{4}$$

В формулах (3), (4) - звездочка ($*$) означает операцию транспонирования, $\widehat{\overrightarrow{H_0}}(\overrightarrow{k})$ - Фурье - образ начального (случайного) магнитного поля $\overrightarrow{H_0}(x)$,

$$G_t = \int\limits_0^{\widehat{t}} (E + C(b_s))ds$$

мультипликативный интеграл (решение матричного уравнения $\frac{d}{dt}X(t) = C(b_t)X(t),\ X(0) = E$- единичная матрица)

Постановка задачи. С помощью формул-представлений (3)-(4) провести асимптотический анализ магнитного поля $\overrightarrow{H}(t,\ x)$ и магнитной энергии $\mathcal{E}(t)$ при $t \to \infty$.

Решение задачи было проведено следующим образом:

1. Опираясь на теорему типа Ферстенберга из [1], на некоторые известные результаты из теории матриц и теории случайных процессов и на основную теорему из [2], доказана теорема о простоте (т.е. о различности) характеристических показателей матрицы G_t при $t \to \infty$.

2. Построен специальный (так называемый Ляпуновский) базис, при использовании которого матрицу G_t при $t \to \infty$ можно представить как степень некоторой фиксированной матрицы, причем найден явный вид последний матрицы.

3. Получены ряд вспомогательных результатов относительно построенных Ляпуновских базисов.

4. С помощью полученных в пп.1-3 результатов получены основные результаты - теоремы об асимптотических поведениях $\overrightarrow{H}(t,\ x)$ и $\mathcal{E}(t)$.

Список литературы

[1] N.Akanbay, Nurkhanova M.S. Suleimenova Z.I. *Linear model of the hydromagnetic dynamo and multiplicative products of Markov random matrices.* TWMS 2017. VI congress of the Turkic world mathematical society. Octobor, 2-5, 2017. Astana, Kazakhstan. The Abstract Book, p. 286 - 287

[2] A. D. Vircer, *On the simplicity of the spectrum of Lyapunov's characteristic indices of a product of random matrices.* Theory Probab. Appl., 28:1 (1984), 122–135

[3] S.A.Molchanov , V.N.Tutubalin *The linear model of the hydromagnetic dynamo and the product of random matrices.* Theory Probab.Appl., (1985), no. 29:2., 231-246, (in Russian).

[4] Ya.B.Zel'dovich, A.A.Ruzmaikin A.A., S.A.Molchanov, D.D.Sokoloff *Kinematic dinamo problem in a linear velocity field.* Fluid Mech., 144(1984), 1-11.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА БЕЗДИСПЕРСИОННОГО (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФОКАСА-ЛЕНЭЛЛСА

А. Айжан, М.Б. Жасыбаева, К.Р. Есмаханова

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: mzhassybaeva@yahoo.com

В данной работе рассмотрено солитонное уравнение, являющееся одним из обобщений нелинейного уравнения Шредингера, так называемое интегриуемое (2+1)-мерное уравнение Фокаса-Ленэллса (ФЛ). Так как, уравнение ФЛ интегруемо, оно допускает Лаксову пару. Настоящая работа посвящена нахождению представления Лакса (ПЛ) бездисперсионного (2+1)-мерного уравнения Фокаса-Ленэллса (ФЛ) [1]-[3].

Нами было построено (2+1)-мерное (две пространственные переменные и одна временная) уравнение ФЛ, которое имеет вид [4]

$$iq_{xt} - iq_{xy} + 2q_x - |q|^2 q_x + iq = 0, \tag{1}$$

где $q(x, y, t)$ - комплексная оболочка поля, индексы x, y, t обозначают дифференцирование по аргументам x, y, t и i - мнимая единица.

Также, нами найденное бездисперсионное (2+1)-мерное уравнение ФЛ, выглядит как [5]

$$v_t - v_y + u_x + \frac{v_x}{v^2} = 0, \tag{2}$$

$$u_t + (2v_t u + \gamma u_x - 2(uv)_x - 2u_x + uu_x - u_x k + u_y v)v^{-1} = 0, \tag{3}$$

здесь $\gamma = \partial_x^{-1} v_t$, $k = \partial_x^{-1} v_y$.

Для построения ПЛ бездисперсионного уравнения (2) и (3) рассмотрим по компонентно Лаксову пару уравнения (1)

$$\Phi_{1x} = -i\lambda^2\Phi_1 + \lambda q_x \Phi_2, \tag{4}$$

$$\Phi_{2x} = \lambda \bar{q}_x \Phi_1 + i\lambda^2 \Phi_2 \tag{5}$$

и

$$\Phi_{1t} = \Phi_{1y} + i\left(1 - \frac{|q|^2}{2} - \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_1 + \frac{i}{2\lambda} q \Phi_2, \tag{6}$$

$$\Phi_{2t} = \Phi_{2y} + i\left(-1 + \frac{|q|^2}{2} + \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_2 - \frac{i}{2\lambda}\bar{q}\Phi_1. \tag{7}$$

Теперь, зададим подстановку в следующем виде:

$$\Phi_1 = \xi_1 e^{\frac{i}{\epsilon}\left[F + \lambda^2 x\right]}, \quad \Phi_2 = \xi_2 e^{\frac{i}{\epsilon}\left[F + \lambda^2 x - \partial_x^{-1} v\right]}, \quad q = \sqrt{u} e^{\frac{i}{\epsilon}\partial_x^{-1} v}, \tag{8}$$

где F, u, v, ξ_1, ξ_2- вещественные функции.

Применим масштабное преобразование $\frac{\partial}{\partial t} \to \epsilon\frac{\partial}{\partial t}$, $\quad \frac{\partial}{\partial x} \to \epsilon\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \to \epsilon\frac{\partial}{\partial y}$, после которого уравнения (4)-(6) примут вид

$$\epsilon\Phi_{1x} = -i\lambda^2\Phi_1 + \epsilon\lambda q_x \Phi_2, \tag{9}$$

$$\epsilon\Phi_{2x} = \epsilon\lambda\bar{q}\Phi_1 + i\lambda^2\Phi_2. \tag{10}$$

и

$$\epsilon\Phi_{1t} = \epsilon\Phi_{1y} + i\left(1 - \frac{|q|^2}{2} - \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_1 + \frac{i}{2\lambda} q \Phi_2, \tag{11}$$

$$\epsilon\Phi_{2t} = \epsilon\Phi_{2y} + i\left(-1 + \frac{|q|^2}{2} + \frac{1}{4\lambda^2}\right)\Phi_2 - \frac{i}{2\lambda}\bar{q}\Phi_1. \tag{12}$$

Подставляя уравнение (8) в уравнения (9) и (10), получаем первую пару ПЛ

$$F_x - \frac{\lambda^2 uv^2}{F_x - v} + 2\lambda^2 = 0 \tag{13}$$

или

$$p + \frac{\lambda^2 uv^2}{p - v} + 2\lambda^2 = 0, \tag{14}$$

где $p = F_x$.

Теперь перейдем к нахождению второй пары ПЛ. Для этого уравнение (8) подставляем в уравнение (11) и полученное уравнение продифференцируем по x

$$F_{tx} - F_{xy} + \frac{u_x}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{uv}{(F_x - v)}\right]_x = 0 \tag{15}$$

или

$$p_t - p_y + \frac{1}{2}\left(\frac{uv}{p - v}\right)_x + \frac{u_x}{2} = 0. \tag{16}$$

Итак, уравнения (14) и (16) являются ПЛ бездисперсионного ФЛ. На основе найденных результатов планируется нахождение «ударного» волнового решения рассматриваемого уравнения.

Список литературы

[1] H. Jingsong, X. Shuwei, P. Kuppuswamy, *Rogue Waves of the Fokas-Lenells Equation* J. Phys. Soc. Jpn. 2012, **81** 12

[2] М.Б. Жасыбаева, Г.Н. Нугманова, *Спиновая система, эквивалентная интегрируемому уравнению Фокаса-Ленэллса.* Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, №1, 2018, -С. 53-58.

[3] Y. Matsuno, *A direct method of solution for the Fokas-Lenells derivative nonlinear Schrodinger equation: I. Bright soliton solutions.* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 45, 23202 (2012).

[4] M. Zhassybayeva, K. Yesmakhanova, *The Construction of the (2+1)-Dimensional Integrable Fokas-Lenells Equation and its Bilinear form by Hirota Method.* International Conference on Technology, Engineering and Science (IConTES) October 26-29, 2018, Antalya, Turkey, p.61-67

[5] M. Zhassybayeva, *Бездисперсионный предел (2+1)-мерного интегрируемого уравнения Фокаса Ленэллса.* XIV Международная научная конференция студентов и молодых ученых, 2019, 260-262.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА С ПАРАМЕТРОМ

К.С. Алыбаев[1], Т.К. Нарымбетов[2]

[1] *Жалал-Абадский государственный университет, г. Жалал-Абад, Кыргызстан*
[2] *Научно-исслед. медико-социальный институт, г. Жалал-Абад, Кыргызстан*
E-mail: alybaevkurmanbek@rambler.ru

Пусть $a(t) \in Q(D)$ — пространства аналитических функции в области $D \subset C$ — множество комплексных чисел; $Z(t,\varepsilon) \in Q_\varepsilon(D)$ — пространство аналитических функции в области D с параметром ε.

Пусть оператор $I_\varepsilon a(t)$ отображает пространство $Q(D)$ в пространство $Q_\varepsilon(D)$. Основная задача заключается в исследовании предельного перехода $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon a(t)$.

В частности к таким задачам сводятся исследование асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями и заданными дополнительными условиями [1]-[2].

Пример 1 $I_\varepsilon a(t) = e^{\frac{a(t)}{\varepsilon}}$.

Пусть выполняются условия:
U_1. $a(t) \in Q(D) \wedge (\forall t \in D(a'(t) \neq 0))$
U_2. $t_0 \in D$ и её внутренняя точка и $a(t_0) = 0$.

Определение 1 . *Множество* $(P_0) = \{t \in D, Re\ a(t) = P_0 - const\}$ *назовём линией уровня функции* $Re\ a(t)$.

Теорема 1 *Пусть выполняются условия $U_1 - U_2$. Тогда:*

1. Область D линией (P_0) разделяется на две открытые области при этом на одном из областей $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon a(t) = 0$, а на другом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon a(t) = \infty$.

2. $\forall t \in (P_0) \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon a(t)$ не существует.

Список литературы

[1] K.C. Алыбаев, *Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости.* Вестник КГНУ, 3 (2001) 6. Бишкек, 190-200.

[2] K.S. Alybaev, A.B. Murzabaeva, *Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy.* In "International Conference on Analysis and Applied Mathematics" (ICAAM 2018), AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics. 1997 (2018), 020076-1-020076-5.

НОВЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

К. Алымкулов, К.Г. Кожобеков

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан
E-mails: keldibay@mail.ru, kudayberdikozhobekov@mail.ru

Рассматривается уравнение Бесселя

$$\frac{d^2Y(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dY(z)}{dz} + \Big(1 - \frac{v^2}{z^2}\Big)Y(z) = 0, \tag{1}$$

где $z \in D = \{z : |Argz| < \pi/(2-\delta), \delta > 0\}, v \in$ — порядок функции Бесселя, $Y(z)$ — неизвестная функция комплексной переменной z, $z = x + iy, i = \sqrt{-1}$.

В [1] асимптотическое решение уравнения (1) для больших действительных значений было получено путем сведения его к уравнению Риккати. А в работе [2] асимптотическое решение уравнения (1) для больших действительных значений аргумента получено непосредственно из него. Здесь данная асимптотика решения уравнения Бесселя продолжена на комплексную область.

Отметим, что обычно асимптотика решения уравнения (1) для больших значений аргумента x получается из интегрального представления его решения [3-6].

С помощью подстановки

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}u(z)$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u''(z) + \Big(1 + \frac{\alpha}{z^2}\Big)u(z) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{1}{4}(1 - 4v^2)$.

Справедлива

Теорема 1 *Решение уравнения Бесселя (2) в комплексной области D представляется в виде*

$$u(z) = cosz + J_1(z)sinz + J_2(z)cosz, \tag{3}$$

где

$$J_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}\frac{1}{z^{2k+1}}, \qquad J_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}\frac{1}{z^{2k}},$$

$$B_{2k+1} = (-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)\dots(4v^2-(2k+3)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}};$$

$$A_{2k+2} = (-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)\dots(4v^2-(2k+4)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}};\ k = 0, 1, 2, \dots$$

При действительных значения аргумента ряд (3) с точностью до постоянного множителя совпадает с ранее полученными результатами.

Список литературы

[1] К. Алымкулов, К. Г. Кожобеков, *Асимптотика решения уравнения Бесселя для больших значений аргумента.* Международный научный студенческий вестник, 1 (2019), 1–7.

[2] K. Alymkulov, K.G. Kozhobekov, *Asymptotics of the solution of Bessel equation at large values of the argument.* Norwegian Journal of development of the International Science. 2 (2019), no. 27., 58–62.

[3] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications.* Dover pub., (1972).

[4] NIST, *Handbook of mathematical functions.* Chapter 10, ed. Olver F.W.J., Cambridge univ. Press, (2010).

[5] F. Olver, *Asymptotic and special functions.* Academic Press, New York, (1974).

[6] Nico M. Temme, *Asymptotic methods for integrals.* World Scientific, (2015).

[7] А.М. Ильин, А.Р. Данилин,*Асимптотические методы в анализе.* Физматлит. (2009).

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Т. Асанова[1], **Н.Т. Орумбаева**[2], **А.Б. Кельдибекова**[3]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2],[3]*Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан*
E-mails: anarasanova@list.ru, OrumbayevaN@mail.ru, keldibekova_ a_ b@mail.ru

На $\Omega = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + D(x,t)u + f(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $(n \times n)$ - матрицы $A(x,t), B(x,t), C(x,t), D(x,t)$ n-вектор-функции $f(x,t)$ непрерывны на Ω, n-вектор-функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[0,T]$, здесь $\|u(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \quad \|A(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$.

Для нахождения решения введем функции $z(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $v(x,t) = \frac{\partial z(x,t)}{\partial x}$, и задачу (1)-(4) сведем к семейству периодических краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с функциональными соотношениями Далее, применим метод параметризации [1]. По шагу $h > 0 : Nh = T$ произведем разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$, $N = 1,2,\ldots$. При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t)$, $z_r(x,t)$, $u_r(x,t)$ обозначим, соответственно, сужение функции $v(x,t)$, $z(x,t), u(x,t)$ на $\Omega_r = [0,\omega] \times [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}$. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t = (r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x) = v_r(x,(r-1)h)$ и сделаем замену $\widetilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x), r = \overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\widetilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r(x) + B(x,t)z_r(x,t) + C(x,t)u_r(x,t) + f(x,t), \tag{5}$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad r = \overline{1,N}, \tag{6}$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_N(x) - \lim_{t \to T-0} \widetilde{v}_N(x,t) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{7}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \to sh-0} \widetilde{v}_s(x,t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1,N-1}. \tag{8}$$

$$z_r(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x \widetilde{v}_r(\xi,t)d\xi + \int\limits_0^x \lambda_r(\xi)d\xi, \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{9}$$

$$u_r(x,t) = \varphi(t) + \int\limits_0^x z_r(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{10}$$

где (8)- условие склеивания функций во внутренних линиях разбиения.

На основе метода параметризации предложен алгоритм нахождения приближенного решения. В терминах матрицы $Q_\nu(x,h)$ элементы которой определяются через $A(x,t)$, числа подстановок ν, были установлены достаточные условия сходимости и однозначной разрешимости задачи (5)-(10). Справедливо утверждение

Теорема 1 *Пусть при некоторых* $h > 0 : Nh = T, N = 1,2,...,$ *и* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(nN \times nN)$ *матрица* $Q_\nu(x,h)$ *обратима при всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства*
1) $\|[Q_\nu(x,h)]^{-1}\| \leqslant \gamma_\nu(x,h)$;
2) $q_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!} \leqslant \mu < 1$, *где* $q_\nu(x,h) = 1 + \gamma_\nu(x,h)\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}$.
Тогда существует единственное решение задачи (5)-(10) и справедливы оценки

$$a)\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\| + \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \rho_\nu(x,h)\sum_{j=k-1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\int\limits_0^x \rho_\nu(\xi,h)d\xi\right)^j\int\limits_0^x d_\nu(\xi,h)d\xi \max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \|f\|_0\right\},$$

$$b)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|z_r^*(x,t) - z_r^{(k)}(x,t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^x \max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^*(\xi) - \lambda_r^{(k)}(\xi)\|d\xi + \int\limits_0^x \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(\xi,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(\xi,t)\|d\xi,$$

$$c)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^*(x,t) - u_r^{(k)}(x,t)\| \leqslant \int\limits_0^x \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|z_r^*(\xi,t) - z_r^{(k)}(\xi,t)\|d\xi,$$

где $k = 1,2,..., \alpha(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|, \beta(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|B(x,t)\|, \sigma(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|C(x,t)\|$,

$$\rho_\nu(x,h) = \frac{\theta_\nu(x,h)[\beta(x) + x\sigma(x)]}{1 - q_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}, \quad \theta_\nu(x,h) = [\gamma_\nu(x,h) + q_\nu(x,h)]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!},$$

$$d_\nu(x,h) = \frac{\theta_\nu(x,h)\beta(x)}{1 - q_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}\int\limits_0^x[\beta(\xi) + \sigma(\xi) + 1]\theta_\nu(\xi,h)d\xi + \frac{\theta_\nu(x,h)\sigma(x)}{1 - q_\nu(x,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}}\times$$

$$\times\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi[\beta(\xi_1) + \sigma(\xi_1) + 1]\theta_\nu(\xi_1,h)d\xi_1 d\xi + \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}q_\nu(x,h)[\beta(x) + \sigma(x) + 1]\theta_\nu(x,h).$$

Работа поддержана МОН РК (грант AP05132262, грант "Лучший преподаватель ВУЗа").

Список литературы

[1] D.S. Dzhumabaev, *Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution.* Journal of Mathematical analysis and Applications, 461 (2018), no. 1, 817-836.

PERTURBED LI-YORKE HOMOCLINIC CHAOS

M.U. Akhmet[1], M. Fečkan[2], M.O. Fen[3], A. Kashkynbayev[4]

[1]*Middle East Technical University, Ankara, Turkey*
[2]*Mathematical Institute of Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Slovakia*
[3]*TED University, Ankara, Turkey*
[4]*Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz

It is rigorously proved that a Li-Yorke chaotic perturbation of a system with a homoclinic orbit creates chaos along each periodic trajectory. The structure of the chaos is investigated, and the existence of infinitely many almost periodic orbits out of the scrambled sets is revealed. Ott-Grebogi-Yorke and Pyragas control methods are utilized to stabilize almost periodic motions. A Duffing oscillator is considered to show the effectiveness of our technique, and simulations that support the theoretical results are depicted.

Reference

[1] M. Akhmet and M.O. Fen, *Replication of Chaos in Neural Networks, Economics and Physics*, Springer/HEP, Berlin, Heidelberg, 2016.

[2] M.U. Akhmet, M.O. Fen, and A. Kashkynbayev, *Persistence of Li-Yorke chaos in systems with relay*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2017, No. 72, 1–18.

[3] T.Y. Li and J.A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82 (1975) 985–992.

PARAMETER IDENTIFICATION IN AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

A.T. Assanova[1], Z.S. Tokmurzin[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mails: assanova@math.kz, anartasan@gmail.com, tokmurzinzh@gmail.com

In present communication, at the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ we consider the following initial-boundary value problem for system of hyperbolic equations of the fourth order

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ A_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{4-i}} + B_i(t,x) \frac{\partial^{4-i} u}{\partial x^{3-i} \partial t} \right\} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{3} M_{i,j}(x) \frac{\partial^i u(t_j,x)}{\partial x^i} = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x),...,u_n(t,x))$ is an unknown vector function, the $(n \times n)$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = 1,2,3$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, the $(n \times n)$ matrices $M_{i,j}(x)$, and the n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, $i = \overline{0,3}$, $j = \overline{0,m}$, the n vector functions $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

By introducing new unknown functions [2] we reduce the original problem (1)–(3) to an equivalent nonlocal problem for system of hyperbolic equations of the second order with parameters. We can interpret this equivalent problem as a problem identification of parameters for system of hyperbolic equations of the second order [1, 3]. We establish sufficient conditions for the unique solvability of initial-boundary value problem (1)–(3) in the terms of unique solvability of the nonlocal problem for the system of hyperbolic equations of the second order with parameters. The results can be used in the numerical solving of application problems.

These results are partially supported by Grant of Ministry Education and Science of the Republic of Kazakhstan, No. AP 05131220.

Reference

[1] A.T. Asanova, *Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative.* Journal of Mathematical Sciences (United States), 212 (2016), no. 3., 213–233.

[2] A.T. Assanova, *An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order*. Turkish Journal of Mathematics, 43 (2019), no. 4, 1967–1978. DOI: 10.3906/mat-1903-111

[3] A.T. Asanova and A.E. Imanchiev, *On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations*. Eurasian Mathematical Journal, 6 (2015), no. 4, 19–28.

О НЕПУСТОТЕ СПЕКТРА ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.С. Бердышев, Н. Адил

КазНПУ, Алматы, Казахстан
E-mail: berdyshev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \left\{ \begin{array}{l} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{array} \right\} = f\left(x, y\right) \tag{1}$$

в конечной односвязной области D плоскости независимых переменных x, y ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, BB_0 прямых $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения (1). Пусть гладкая кривая $BE : y = -\sigma\left(x\right)$, $l < x < 1$, где $0 < l < 0.5$, $\sigma(1) = 0$, $l - \sigma(l) = 0$, $\sigma(x) > 0$, $x > 0$, расположена внутри характеристического треугольника $0 \leqslant x + y \leqslant x - y < 1$.

Данная работа посвящена изучению задачи типа Бицадзе-Самарского для уравнения (1), когда в гиперболической части области D задаются условия, поточечно связывающие значение касательной производной искомого решения на характеристике BC со значением производного по направлении характеристики AC решения на некоторой кривой BE, лежащей в области $D \cap \{y < 0\}$, с концами в точке B, и на характеристике AC (в точке E).

Задача TB_2. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0 \tag{2}$$

$$\left[u_x + u_y\right]\left[\theta_1\left(t\right)\right] + \mu\left(t\right)\left[u_x - u_y\right]\left[\theta_1^*\left(t\right)\right] = 0 \tag{3}$$

где $\theta_1\left(t\right)$ $\left(\theta_1^*\left(t\right)\right)$- аффиксы точки пересечения характеристиками BC (кривой BE) с характеристиками, выходящей из точки $(t, 0)$, $0 < t < 1$. В случае, когда кривая $\sigma\left(x\right)$ выходит из точки A , для уравнения (1) вопросы разрешимости и вольтерровости для одного класса задач с условиями Бицадзе-Самарского изучена в работе [1] . Установлены что, для корректности и вольтерровости аналога задачи TB_2 (когда кривая $\sigma(x)$ выходит из точки A) для уравнения (1), существенное значение имеет соотношение между коэффициентом "сжатия"$\sigma(0)$ в начале координат производного по направлению характеристики BC и полярным углом α, образуемым кривой $\sigma(x)$ и осью абсцисс [1,2].

Если в условии (3) $\mu\left(t\right) \equiv 0$, то задача TB совпадает с аналогом задачи Трикоми для уравнения (1). В этом случае разрешимость и некоторые спектральные свойства задачи TB_2 рассматривались многими авторами, библиографию которого можно найти в [2].

Аналогично, как и в работах [1,2], вводится понятия регулярного и сильного решения задачи TB_2. В работе найдены условия регулярной и сильной разрешимости задачи TB_2. Показано, что спектр задачи TB_2-не пустое множество.

Список литературы

[1] А.С. Бердышев *Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов.* — А. 2015 г., — 224 с.

[2] А.С. Бердышев, *О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения.* // Сибирский мат. журн. Т. 45 2005, № 3, С. 500–510.

CONTROL PROBLEM FOR PARABOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARAMETER

E.A. Bakirova[1], A.T. Assanova[2]

[1]*Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mails: bakirova1974@mail.ru, assanova@math.kz

In present report, we consider the following two-point boundary value problem with parameter for parabolic integro-differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t,x)u + \int_0^T k(x,s)u(x,s)ds + b(x,t)\mu(x) + f(x,t), \tag{1}$$

$(x,t) \in \Omega = (0,\omega) \times (0,T)$,

$$b_0(x)\mu(x) + b_1(x)u(x,0) + b_2(x)u(x,T) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$c_0(x)\mu(x) + c_1(x)u(x,0) + c_2(x)u(x,T) = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \qquad u(\omega,t) = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $u(x,t)$ is a desired function, $\mu(x)$ is unknown functional parameter, functions $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $c(x,t) \geqslant 0$, $k(x,t)$, $b(x,t)$, and $f(x,t)$ are continuous by t and Holder continuous by x on Ω; functions $b_k(x)$, $c_k(x)$, $k = 0,1,2$, and $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ are continuous on $[0,\omega]$; functions $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ are continuous on $[0,T]$. Assume that the boundary functions are sufficiently smooth and satisfy the compatibility conditions.

A solution of the problem (1)–(4) is a pair of functions $(u^*(x,t), \mu^*(x))$, where $u^*(x,t)$ is continuous on Ω, has continuous partial derivatives by t the first order, by x the second order, and satisfies the parabolic integro-differential equation (1) and boundary conditions (2)–(4) for $\mu(x) = \mu^*(x)$.

Control problems, also called as boundary value problems with parameters and as a problem of identification of parameters for the systems of ordinary differential and integro-differential equations with parameters, are actively investigated in the works of many authors. Models describing the reaction-diffusion processes lead to control problems for the integro-differential equations of the parabolic type. To solve these classes of control problems, there were used the optimization methods, topological methods, the maximum principle, etc. In spite of this, the questions of finding the effective signs of unique solvability and constructing the numerical algorithms for finding the optimal solutions of control problems for integro-differential equations of the parabolic type still remain open.

In [1], the boundary-value problem for the parabolic equation by discretization with respect to the spatial variable was reduced to a boundary-value problem for the system of ordinary differential equations. Effective estimates of the solution, its derivatives via the coefficients and the right-hand side of the equation are obtained in [1, 2]. We use these results for solve considered problem (1)–(4).

We take $\forall h > 0$ and make a partition by x in the following form: $x_i = ih$, $i = \overline{0,P}$, $Ph = \omega$.

Introduce the notation

$u_i(t) = u(ih,t)$, $\mu_i = \mu(ih)$, $a_i(t) = a(ih,t)$, $c_i(t) = c(ih,t)$, $k_i(t) = k(ih,t)$,
$b_i(t) = b(ih,t)$, $f_i(t) = f(ih,t)$, $b_{k,i} = b_k(ih)$, $c_{k,i} = c_k(ih)$, $k = 0,1,2$,
$\varphi_{1,i} = \varphi_1(ih)$, $\varphi_{2,i} = \varphi_2(ih)$, $i = \overline{0,P}$.

We approximate of original problem (1)-(4) by the following two-point boundary value problem for a system of ordinary integro-differential equations with parameter

$$\frac{du_i}{dt} = a_i(t)\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{2h} + c_i(t)u_i + \int_0^T k_i(s)u_i(s)ds + b_i(t)\mu_i + f_i(t), \quad i = \overline{1, P-1}, \tag{5}$$

$$b_{0,i}\mu_i + b_{1,i}u_i(0) + b_{2,i}u_i(T) = \varphi_{1,i}, \qquad i = \overline{0, P}, \tag{6}$$

$$c_{0,i}\mu_i + c_{1,i}u_i(0) + c_{2,i}u_i(T) = \varphi_{2,i}, \qquad i = \overline{0, P}, \tag{7}$$

$$u_0(t) = \psi_1(t), \qquad u_P(t) = \psi_2(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{8}$$

For solve the approximating problem (5)–(8) we use one approach proposing in [3], based on the algorithms of the parametrization method and numerical methods for solving Cauchy problems.

The approximating problem (5)–(8) is reduced to an equivalent problem consisting of a special Cauchy problem for the system of Fredholm integro-differential equations, boundary conditions, and continuity conditions for the solution at the partition points. The conditions for the unique solvability of the approximating problem are obtained in the terms of the solvability of a system of algebraic equations with respect to parameters. Estimates of approximation of solution to original problem by solution to the approximating linear two-point problem with parameter for the system of ordinary integro-differential equations are established.

For $k(x,t) = 0$ we obtain two-point boundary value problem with parameter for parabolic equation with conditions (2)–(4). A corresponding approximating problem for this case is considered in [4].

These results are partially supported by Grants of Ministry Education and Science of the Republic of Kazakhstan, No.No. AP 05132455, AP 05132486.

Reference

[1] D.S. Dzhumabaev, *The justification of polygonal method for a boundary-value problem of linear parabolic equation.* News of AS KazSSR. Ser. Phys.-mathem., (1983), no. 1, 8–11.

[2] A.T. Asanova and D.S. Dzhumabaev, *Estimates of solutions and its derivatives to boundary value problems for parabolic equations.* News of MES RK. Ser. Phys.-mathem., (2000), no. 5, 3–9.

[3] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 294 (2016), no. 2., 342–357.

[4] E.A.Bakirova, D.S.Dzhumabaev, Zh.M.Kadirbayeva, *An algorithm for solving a control problem for a differential equation with a parameter*. News of the National Academy of Sciences of the RK. Physico-Mathematical Series, 5 (2018), no. 321, 25–32.

CORRECT SINGULAR PERTURBATIONS OF THE LAPLACE OPERATOR

B.N. Biyarov, D.A. Svistunov, G.K. Abdrasheva

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mails: bbiyarov@gmail.com, abakan_ ac545@mail.ru, gulnara.abdrash@gmail.com

Let L_0 be some minimal operator, and let M_0 be another minimal operator related to L_0 by the equation $(L_0u, v) = (u, M_0v)$ for all $u \in D(L_0)$ and $v \in D(M_0)$. Then $\widehat{L} = M_0^*$ and $\widehat{M} = L_0^*$ are maximal operators such that $L_0 \subset \widehat{L}$ and $M_0 \subset \widehat{M}$. The existence of at least one boundary correct extension L was proved by Vishik in [3], that is, $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$. In this case, L^* is a boundary correct extension of the minimal operator M_0, that is, $M_0 \subset L^* \subset \widehat{M}$. The inverse operators to all possible correct restrictions L_K of the maximal operator $\widehat{L}$ have the form

$$L_K^{-1}f = L^{-1}f + Kf, \tag{1}$$

then $D(L_K)$ is dense in H if and only if $\operatorname{Ker}(I + K^*L^*) = \{0\}$. Thus, it is obvious that any correct extension M_K of M_0 is the adjoint of some correct restriction L_K with dense domain, and vice versa [1]. Finally, all possible correct extensions M_K of M_0 have inverses of the form

$$M_K^{-1}f = (L_K^*)^{-1}f = (L^*)^{-1}f + K^*f, \tag{2}$$

where K is an arbitrary bounded linear operator in H with $R(K) \subset \operatorname{Ker}\widehat{L}$ such that $\operatorname{Ker}(I + K^*L^*) = \{0\}$. It is also clear that $R(M_0) \subset \operatorname{Ker} K^*$. In particular, M_K is a boundary correct extension of M_0 if and only if $R(M_0) \subset \operatorname{Ker} K^*$ and $R(K^*) \subset \operatorname{Ker}\widehat{M}$.

Theorem 1 *Let L_K be a densely defined correct restriction of the maximal operator $\widehat{L}$ in a Hilbert space H. If $R(K^*) \subset D(L^*) \cap D(L_K^*)$, where L and K are the operators from the representation* (1) *then*

1. *The operator $B_K = (I+\overline{KL})L_K$ is relatively bounded correct perturbations of correct restriction L_K and the spectra of the operators B_K and L coincide, that is, $\sigma(B_K) = \sigma(L)$;*
2. *The operator L is quasinilpotent (the Volterra) boundary correct extension of L_0, and B_K is a quasinilpotent (the Volterra) correct operator simultaneously;*
3. *If L is an operator with discrete spectrum then the system of root vectors of the operator L is complete (the basis) in H if and only if the system of root vectors of the operator B_K is complete (the basis) in H;*
4. *In particular, when L is a normal operator with discrete spectrum, then the system of root vectors of the operator B_K form a Riesz basis in H.*

Consider a more visual case when $m = 2$, that is, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. To do this, we set the operator K using the functions $g(x)$ in the following form: let $z_1, z_2, \ldots, z_n = x_1^{(n)} + ix_2^{(n)}$ points lying strictly inside the domain Ω. We take a holomorphic function $F(z) \in L_2(\Omega)$ in the domain Ω such that $F(z_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$, with multiplicities m_k. As functions $g(x_1, x_2)$ we take the solution of the following Dirichlet problem

$$-\Delta g = \ln|F(z)|, \quad g|_{\partial\Omega} = 0.$$

Then, near the point where $F(z) \neq 0$ there is an analytic branch $\Phi(z)$ of the function $\ln F$, hence $\ln|F| = \operatorname{Re}\Phi$ is a harmonic function. In a neighborhood of z_k we can write

$$F(z) = (z - z_k)^{m_k}\Phi(z),$$
$$\ln|F(z)| = m_k \ln|z - z_k| + \ln|\Phi(z)|,$$

where $\Phi(z_k) \neq 0$, $k = \overline{1, n}$. Then by Theorem 3.3.2 (see [2]) and the harmonicity of the functions $\ln|\Phi(z)|$ we get that

$$\Delta \ln|F| = 2\pi m_k \delta(z - z_k)$$

in the neighborhood. If we denote by T the next bounded operator in $L_2(\Omega)$

$$Tu = w(x) \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \ln|F(\zeta)| - u(\xi)\frac{\partial}{\partial n} \ln|F(\zeta)|\right] ds,$$

we get the following

$$B_K u = -\Delta u + 2\pi w(x) \sum_{k=1}^{n} m_k u(x^{(k)}) - Tu = f(x),$$

where $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. The domain of the operator B_K has the form

$$D(B_K) = \Bigg\{ u \in W_2^2(\Omega) : \\ \left[u(x) + w(x) \int\limits_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{\partial \ln|F(\zeta)|}{\partial n} ds - w(x) \iint\limits_{\Omega} u(\xi) \ln|F(\zeta)| d\xi\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0 \Bigg\}.$$

We obtained a relatively bounded perturbation B_K of L_D which has the same eigenvalues as the Dirichlet problem L_D. The system of root vectors of B_K forms a Riesz basis in $L_2(\Omega)$. If $\{v_k\}$ are an orthonormal system of eigenfunctions of L_D, then the system of eigenvectors $\{u_k\}$ of B_K have the form

$$u_k = (I + \overline{KL})v_k = v_k(x) + w(x) \iint\limits_{\Omega} v_k(\xi) \ln\overline{|F(\zeta)|} d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Reference

[1] B. N. Biyarov, *Spectral properties of correct restrictions and extensions of the Sturm-Liouville operator.* Differ. Equations, **30**(12), 1863–1868 (1994) (Translated from Differential Equations. **30**(12), 2027–2032 (1994))

[2] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators.* IL, Moscow (1959) (in Russian)

[3] M. I. Vishik, *On general boundary problems for elliptic differential equations.* Tr. Mosk. Matem. Obs.,**1**, 187–246 (1952) (in Russian); (English transl., Am. Math. Soc., Transl., II, **24**, 107–172 (1963))

LOCAL EXISTENCE AND GLOBAL NON-EXISTENCE FOR THE INTEGRO-DIFFERENTIAL DIFFUSION EQUATION

M.B. Borikhanov

Al-Farabi Kazakh National University,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: borikhanov@math.kz

The main goal of the present paper is to obtain results on local existence, global non-existence and critical exponents of Fujita type [1] for the integro-differential diffusion equation

$$u_t(x,t) = \Delta_x D^{1-\alpha}_{0+,t} u(x,t) + f(x,t,u), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times (0,T), \tag{1}$$

with the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \tag{2}$$

where $D^{\alpha}_{0+,t}$ is the Riemann-Liouville fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$ [2].

Acknowledgements

This research is financially supported by a grant No. AP05131756 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

Reference

[1] H.Fujita., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$* . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect., (1966), V. 13, 109-124.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* North-Holland Mathematics Studies, (2006), 69-90.

STABLE AND CHAOTIC DYNAMICS IN HAMILTONIAN SYSTEMS: APPLICATIONS TO ONE - DIMENSIONAL LATTICES

A.T. Bountis

Department of Mathematics, Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: btassosbountis@gmail.com

In the theory of classical mechanics of conservative systems of interacting particles, one often follows the Hamiltonian formalism to write down the differential equations describing the motion of the particles.

Since these equations are, in general, nonlinear, they are very rarely analytically solvable. As we will describe in this lecture, it is still possible to obtain useful information about the dynamics by focusing on certain important special solutions of Hamilton's equations. These are simple periodic orbits, which, when stable under small perturbations, are at the center of wide regions of regular quasiperiodic motion. However, when they destabilize, chaotic domains of non-periodic irregular motion appear around them. In this lecture, we will examine how these ideas help us analyze the dynamics of one-dimensional lattices of interest to statistical mechanics as well as certain chains of nonlinearly elastic materials that are of interest to applications.

Reference

[1] T. Bountis and H. Skokos. *Complex Hamiltonian Dynamics.* Springer Synergetic series, New York, 2012.

POLYANALYTIC SCHWARZ PROBLEM AND THE ALMATY APPLE

H. Begehr[1], S. Burgumbayeva[2], A. Dauletkulova[3], H. Lin[1], B. Shupeyeva[4]

[1]*Free University Berlin, Berlin, Germany*
[2]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[3]*Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*
[4]*Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mails: begehrh@zedat.fu-berlin.de; saulenai@yandex.ru; aiguldu@mail.ru; hxlin@zedat.fu-berlin.de; bibinur.shupeyeva@nu.edu.kz

The proper boundary value problem for the polyanalytic differential operator $\partial_{\bar z}^m, \quad m \in \mathbb{N}$, with the Cauchy-Riemann differential operator $\partial_{\bar z}$ given by $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y, \quad z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy; \quad x, y \in \mathbb{R}$ is the

Schwarz problem. Find a solution to the inhomogeneous polyanalytic equation

$$\partial_{\bar z}^m w = f \text{ in } \mathbb{D}, f \in L_p(\mathbb{D}; \mathbb{C}), 2 < p,$$

in a regular domain D of the complex plane $\mathbb{C}$ with $z_0 \in D$ satisfying

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\partial_{\bar z}^\mu w = \gamma_\mu \text{ on } \partial D, \gamma_\mu \in C(\partial D; \mathbb{R}), 0 \leqslant \mu \leqslant m-1,\\ \mathrm{Im}\partial_{\bar z}^\mu w(z_0) = c_\mu, c_\mu \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \mu \leqslant m-1.\end{gathered}$$

This problem is classic for the Cauchy-Riemann equation $\partial_{\bar z} w = f$ in the unit disc $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ and is generalized for the polyanalytic equation in [3]. But the Schwarz problem can be handled for certain other (admissible) simply connected domains with harmonic Green function [1, 4] and also for some multiply connected domains were however, solvability conditions appear, exemplarily studied for the concentric ring $R = \{0 < r < |z| < 1\}$ [5, 6, 4].

Dirichlet problem. The iterated Dirichlet boundary value problem for the polyanalytic operator of degree m is to find a solution w and proper solvability conditions for the data f, γ_μ given, satisfying

$$\partial_{\bar z}^m w(z) = f(z), \quad z \in D; \quad \partial_{\bar\zeta}^\mu w(\zeta) = \gamma_\mu(\zeta), \quad \zeta \in \partial D, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant m-1, \tag{1}$$

for a domain D of the plane $\mathbb{C}$ with boundary ∂D.

As the Dirichlet problem is an over-determined problem the main task is to determine the solvability conditions. The solution then is given via the plyanalytic Cauchy-Pompeiu formula [4].

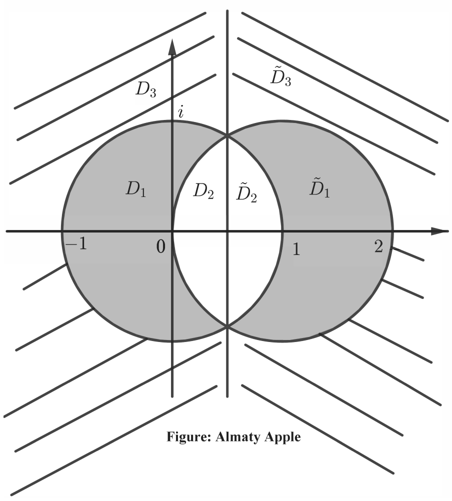

Figure: Almaty Apple

The parqueting-reflection principle is a method to find harmonic Green and Neumann functions for certain domains the boundary of which are composed by arcs from circles and lines. Examples are discs, disc sectors, plane sectors, strips, hyperbolic strips, polygons as rectangles, triangles, hexagons etc. A recent example is a disc cap, $D_2 = \{z + \overline{z} < 1, |z - 1| < 1\}$, [2]. Its Green and Neumann functions are

$$G_1(z,\zeta) = \log\Big|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\frac{\zeta - (1 - \overline{z})}{1 - z + z\zeta}\frac{\overline{z}(1 - \zeta) + \zeta}{1 - (1 - z)\zeta}\Big|^2,$$

$$N_1(z,\zeta) = -\log\big|(\zeta - z)(1 - z\overline{\zeta})(1 - z + z\zeta)(\zeta - (1 - \overline{z}))(1 - (1 - z)\zeta)(\overline{z}(1 - \zeta) + \zeta)\big|^2.$$

Acknowledgement. The last named author was supported by the Re-Invitation Programme for Former Scholarship Holders, 2019 (57440919) of the German Academic Exchange Service (DAAD) in the fall term 2019 at FU Berlin.

Reference

[1] Ü. Aksoy, H. Begehr, A.O. Çelebi. *A.V. Bitsadze's observation on bianalytic functions and the Schwarz problem.* Complex Var., Elliptic Eqs. 64:8(2019), 1257-1274

[2] H. Begehr, S .Burgumbayeva, A. Dauletkulova, H. Lin. *Harmonic Green functions for the Almaty apple.* Preprint, FU Berlin, 2019.

[3] H. Begehr, D. Schmersau, *The Schwarz problem for polyanalytic functions.* ZAA 24 (2005), 341-351.

[4] H. Begehr, B. Shupeyeva, *Polyanalytic boundary value problems for plane domains with harmonic Green function.* Preprint, FU Berlin, 2019.

[5] T. Vaitsiakhovich, *Boundary value problems for complex partial differential equations in a ring domain.* Ph.D. thesis, FU Berlin, 2008: www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS_thesis_000000003859.

[6] T.S. Vaitekhovich, *Boundary value problems to first order complex partial differential equations in a ring domain.* Integral Transf. Special Funct., 19 (2008), 211–233.

К РЕШЕНИЮ ПСЕВДО – ВОЛЬТЕРРОВОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ СОЛОННИКОВА–ФАЗАНО

М.Т. Дженалиев[1], М.И. Рамазанов[2], А.О. Танин[3]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2],[3]*КарГУ им. Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан*
E-mails: muvasharkhan@gmail.com, ramamur@mail.ru, tan_alibek@mail.ru

Исследуются вопросы разрешимости псевдо –Вольтеррового интегрального уравнения:

$$\varphi(t)+\int_0^t K_\omega(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t), \tag{1}$$

где ядро $K_\omega(t,\tau)$ представимо в виде суммы:

$$K_\omega(t,\tau)=\sum_{i=1}^4 K_\omega^{(i)}(t,\tau),$$

при этом:

$$K_\omega^{(1)}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t^\omega+\tau^\omega}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};$$
$$K_\omega^{(2)}=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t^\omega-\tau^\omega}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};$$
$$K_\omega^{(3)}=-\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1+\omega\cdot t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(t^\omega+\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\};$$
$$K_\omega^{(4)}=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1+\omega\cdot t^{\omega-1}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(t^\omega-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}.$$

Такого рода интегральные уравнения возникают при решении следующей граничной задачи [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \{x,t\,|\,0<x<t^\omega,t>0\}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0,\quad \frac{d\tilde{u}(t)}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=t^\omega}=0,$$

где $\tilde{u}(t)=u(t^\omega,t),\quad \omega>\frac{1}{2}$.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций:

$$t^{\frac{3}{2}-\omega}\cdot\varphi(t)\in L_\infty(0,\infty), \tag{2}$$

т.е. $\varphi(t)\in L_\infty(0,\infty;t^{\frac{3}{2}-\omega})$.

Подобные интегральные уравнения типа Вольтерра рассматривались в работах [1-3].

Отметим, что особенность ядра $K_\omega(t,\tau)$ заключается в том, что

$$\lim_{t\to 0+}\int_0^t K_\omega(t,\tau)d\tau=1.$$

Показано, что соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t)+\int_0^t K_\omega(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=0$$

имеет ненулевое решение

$$\varphi_{\text{hom}}(t,\omega) \in L_\infty(0,\infty; t^{\frac{3}{2}-\omega}).$$

Построена резольвента для неоднородного уравнения (1), и найдено его частное решение

$$\varphi_{\text{part}}(t,\omega) \in L_\infty(0,\infty; t^{\frac{3}{2}-\omega}).$$

Таким образом, показано, что если $\omega > \frac{1}{2}$, то интегральное уравнение (1) для любой

$$t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot f(t) \in L_\infty(0,\infty)$$

имеет в классе (2) решение вида:

$$\varphi(t,\omega) = \varphi_{part}(t,\omega) + C \cdot \varphi_{\text{hom}}(t,\omega), \quad C = const.$$

Работа выполнена при поддержке МОН РК (проект No AP05132262).

Список литературы

[1] M.M. Amangaliyeva, M.T. Jenaliyev, M.T. Kosmakova, and M.I. Ramazanov, *About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain.* Boundary Value Problems. 213 (2014), 1-21. doi: 10.1186/s13661-014-0213-4

[2] M.M. Amangaliyeva, M.T. Jenaliyev, M.T. Kosmakova, and M.I. Ramazanov, *On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain.* Siberian Mathematical Journal, 56 (2015), no. 6, 982-995. doi: 10.1134/S0037446615060038

[3] M.T. Jenaliyev, M.M. Amangaliyeva, M.T. Kosmakova, and M.I. Ramazanov, *On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel.* Advances in Diference Equations. 71 (2015), 1-14. doi: 10.1186/s13662-015-0418-6

[4] В.А. Солонников, А. Фазано, *Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами.* Записки научных семинаров ПОМИ, 269 (2000), 322-338.

NEW GENERAL SOLUTION TO A NONLINEAR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

D.S. Dzhumabaev[1,2], S.T. Mynbayeva[1,3]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: [1] *ddzhumabaev54@gmail.com,* [2] *mynbaevast80@gmail.com*

On $[0,T]$ we consider Fredholm integro-differential equation with nonlinear differential part

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

where $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ is continuous and the $n \times n$ matrices $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

General solution play important role by investigating and solving problems for differential and integro-differential equations. Integral term essentially impacts to the properties of Eq. (1). Particularly Eq. (1) might be unsolvable and have no solutions without any additional conditions (see [1, 3]). This fact implies that a classical general solution exists not for all Eq. (1). Therefore, new concept of general solution has been introduced in [4].

Employing regular partition Δ_N of the interval $[0,T]$ (see [2, 3]), there constructed the Δ_N general solution $x(\Delta_N, t, \lambda)$ to the linear Fredholm integro-differential equation. As distinct from the classical general solution, $x(\Delta_N, t, \lambda)$ exists to any linear Fredholm integro-differential equation and depend on parameter $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}$. New general solutions to the ordinary differential equations have been introduced in [5].

In the communication, the new concept of general solution is introduced to Eq. (1). Let Δ_N be a partition of $[0,T]$ into N parts with points $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. Denote by $x_r(t)$ the restriction of function $x(t)$ to the interval $[t_{r-1}, t_r)$, $\overline{1,N}$. Introducing the parameters $\lambda_r \hat{=} x_r(t_{r-1})$ and functions $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, we obtain the system of nonlinear integro-differential equations with parameters on subintervals

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big[u_j(\tau) + \lambda_j\big]d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}, \tag{2}$$

subject to initial conditions

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{3}$$

Problem (2), (3) is called the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with parameters on subintervals. Criterion of unique solvability of the special Cauchy problem for the system of linear integro-differential equations is obtained and algorithm of finding its solution is proposed in [2, 3]. Sufficient conditions for the existence of solution to problem (2), (3) is given [6].

In report employing the function system $u[t,\lambda] = \big(u_1(t,\lambda), u_2(t,\lambda), \ldots, u_N(t,\lambda)\big)$, the solution to the special Cauchy problem (2), (3), we introduce the Δ_N general solution to Eq. (1). Conditions for the existence of Δ_N general solution $x(\Delta_N, t, \lambda)$ to Eq. (1) is obtained and its properties are established. Application of new general solution for solving the nonlinear boundary value problems is discussed.

This research is supported by the Ministry of Education and Science of the Republic Kazakhstan Grant AP 05132486.

Reference

[1] A.A. Boichuk, A. M. Samoilenko. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems.* Berlin,De Gruyter (2016)

[2] D.S. Dzhumabaev. *Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of Linear Boundary-Value Problems for the Fredholm Integro-differential Equations.* Ukrainian Math. J. (2015). DOI 10.1007/s11253-015-1003-6.

[3] D.S. Dzhumabaev. *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations.* J. Comput. Appl. Math. 294 (2016), 342-357.

[4] D.S. Dzhumabaev. *New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems.* J. Comput. Appl. Math. 327 (2018), 79-108.

[5] D.S. Dzhumabaev. *New general solutions to ordinary differential equations and methods for solving boundary value problems.* Ukrainian Math. J. 71 (2019), no. 7, 884-905.

[6] S.T. Mynbayeva. *The existence of a solution to the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations.* Kazakh Math. J. 19 (2019), no. 1, 69-81.

ON THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION IN A DEGENERATING DOMAINS

M.T. Jenaliyev[1], M.I. Ramazanov[2], M.G. Yergaliyev[3]

[1],[3]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*E.A.Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: muvasharkhan@gmail.com

In the report we consider a coefficient inverse problem for the heat equation in a degenerating angular domain. It has been shown that the inverse problem for the homogeneous heat equation with homogeneous boundary conditions has a nontrivial solution up to a constant factor consistent with the integral condition. Moreover, the solution of the considered inverse problem is found in explicit form. In conclusion statements of possible generalizations and the results of numerical calculations are given.

Statement of the problem and main result. In the domain $G_T = \{(x,t)|\ 0 < x < t,\ \ 0 < t < T, \}$, $T < +\infty$, we consider an inverse problem of finding a coefficient $\lambda(t)$ and a function $u(x,t)$ for following heat equation:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - \lambda(t)u(x,t), \tag{1}$$

with homogeneous boundary conditions

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=t} = 0,\ 0 < t < T, \tag{2}$$

suspect to the overspecification

$$\int_0^t u(x,t)dx = E(t), \quad |E(t)| \geqslant \delta > 0,\ 0 < t < T, \tag{3}$$

where $E(t) \in L_\infty(0,T)$ is a given function.

The main result of the report is the following theorem [1], in which the criterion for the solvability of the inverse problem (1)–(3) is formulated.

Theorem. *The inverse problem (1)–(3) has a solution $\{u(x,t), \lambda(t)\}$ if and only if the following condition is satisfied*

$$\operatorname{sign}\{E(t)\} = \operatorname{sign}\{I[\varphi_0(t),t]\},\ \forall t \in (0,T), \tag{4}$$

where

$$I[\varphi_0(t),t] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \left[2\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4(t-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\}\right.$$

$$- \exp\left\{-\frac{(t-\tau)}{4}\right\}\Bigg] \varphi_0(\tau)d\tau,\ t\in(0,T),$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{t}{4}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right],\ t\in(0,T),$$

where $\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^a \exp\{-z^2\}\,d\,z$*. Moreover, the solution* $\{u(x,t),\lambda(t)\}$ *belongs to classes*

$$\begin{cases} t^{1/2}u(x,t)\in L_\infty(G_T), & \text{i.e. } u\in L_\infty(G_T;t^{1/2}),\\ t\lambda(t)\in L_\infty((0,T)), & \text{i.e. } \lambda(t)\in L_\infty((0,T);t). \end{cases}$$

Next, we consider the following possible generalizations.

First generalization. Replacing the law of variation of the boundary $x=t$ with $x=\sqrt{k}\,t,\ 0<k<\infty$, we obtain in domain $G_{Tk}=\{(x,t)|\,0<x<\sqrt{k}\,t,\,0<t<T\}$ the inverse problem for heat equation (1) with boundary conditions:

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=\sqrt{k}\,t}=0, \tag{5}$$

suspect to the overspecification (3).

Second generalization. Let $\mu(t)$ is a continuous nondecreasing function on the interval $(0,T)$. And let this function coincides with the linear function $\mu(t)=\sqrt{k}\,t,\ 0<k<\infty$, on a sufficiently small subinterval $(0,t_0)\subset(0,T)$, where $t_0<<T$, it means, that on the interval $(0,t_0)$ the function $\mu(t)$ is differentiable, which derivative is equal to $\sqrt{k}$.

Now in domain $G_{T\mu}=\{(x,t)|\,0<x<\mu(t),\ 0<t<T\}$ we consider the following inverse problem of finding a coefficient $\lambda(t)$ and a function $u(x,t)$:

$$u_t=u_{xx}-\lambda(t)u(x,t),\ \{x,t\}\in G_{T\mu}, \tag{6}$$

$$u_{|x=0}=0,\ u_{|x=\mu(t)}=0,\ \int\limits_0^t u(x,t)d\,x=E(t),\ 0<t<T. \tag{7}$$

Next, we divide problem (6)–(7) into the following two subproblems.

Problem 1. Find the solution of the inverse problem (6)–(7) in the triangular degenerate domain $G_{t_0\mu}=\{(x,t)|\,0<x<\sqrt{k}\,t,\ 0<t<t_0\}\subset G_{T\mu}$, where $t_0<<T$.

Problem 2. Find the solution of the inverse problem (6)–(7) in a curvilinear (non-degenerate) domain $G_{t_0T\mu}=\{(x,t)|\,0<x<\mu(t),\ t_0<t<T\}\subset G_{T\mu}$, where $t_0<<T$ with an additional initial condition on the line $t=t_0$, which is determined by the solution of Problem 1 and given by the function $u(x,t_0)$. To solve this problem, we can use, for example, the methods of [2], [3].

Funding. Supported by the grant projects AP05130928 (2018–2020), AP05132262 (2018–2020) and by the target program BR05236693 (2018–2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

Reference

[1] Jenaliyev M., Ramazanov M., and Yergaliyev M., *On the coefficient inverse problem of heat conduction in a degenerating domain.* Applicable Analysis. 2018. P. 1–16. To link to this article: https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1518523. Published online: 18 Sep 2018.

[2] H. Li, J. Zhou, *Direct and inverse problem for the parabolic equation with initial value and time-dependent boundaries.* Applicable analysis. 2016. V.95, no 6. P. 1307–1326.

[3] J. Zhou, H. Li, Y. Xu, *Ritz-Galerkin method for solving an inverse problem of parabolic equation with moving boundaries and integral condition.* Applicable analysis. 2019. V.98, no 10. P. 1741–1755.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРУЮЩИМ ПРОМЕЖУТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ

Ж.Б. Ескабылова[1], К.Н. Оспанов[2], Т.Н. Бекжан[3]

[1,2]ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
[3]Синьцзянский университет, Урумчи, Китай
E-mailы: juli_e92@mail.ru, ospanov_kn@enu.kz, bekjant@yahoo.com

Рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$ly \equiv -y'''(x) + q(x, y, y')\, y' + s(x, y, y')\, y = h(x)\,, \tag{1}$$

где $x \in R = (-\infty, +\infty)$, а $q(x, u, w)$, $s(x, u, w)$ $(u, w \in R)$ и $h \in L_2 := L_2(R)$ являются вещественными функциями. Мы предполагаем, что q и s, соответственно, непрерывно дифференцируемы и непрерывны. Используя коэрцитивные оценки для решения линейного дифференциального уравнения $-y''' + qy' + sy = f(x)$, установленные в [1], мы доказываем однозначную разрешимость (1). Отметим, что уравнение (1) содержит известное модифицированное стационарное уравнение Кортевега-де Фриза. С 1980 г. интенсивно изучалось следующее квазилинейное уравнение третьего порядка

$$-y''' + g(x, y, y')y = f(x)\,, \tag{2}$$

где $x \in R$ и $g \geqslant 1$ (см. [2], [3] и ссылки в нем). Были получены достаточные условия для коэрцитивной разрешимости (2) с $f \in L_p(R)$ $(1 < p < +\infty)$ и эффективные оценки аппроксимативных характеристик решения. Свойства уравнения (1) заметно отличаются от (2). В частности, s может быть знакопеременной функцией, более того, она может быть не ограниченной снизу. Если $s = 0$ и r являются ограниченными, то уравнение (1) не может иметь решения в $L_2(R)$.

Под решением уравнения (1) понимается функция $y \in L_2$, для которой существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^{(3)}(R)$ такая, что выполнены соотношения $\|\theta\,(y_n - y)\|_2 \to 0$ and $\|\theta\,(ly_n - h)\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ для любой функции θ из $C^{(3)}(R)$ с компактным носителем.

Теорема 1 *Пусть q — непрерывно дифференцируемая, а s — непрерывная функции, для которых выполнены условия*

$$q(t, u, w) \geqslant C\left(1 + t^2\right), \ \tilde{\gamma} = \sup_{(u, w) \in R^2} \gamma_{s(t, u, w),\, q(t, u, w),\, 0} < \infty$$

и для любого положительного числа A

$$\sup_{\substack{x,\eta\in R:\\ |x-\eta|\leqslant 1}} \sup_{\substack{\left|C_i'\right|\leqslant A,\ \left|C_i''\right|\leqslant A,\\ \left|C_i'-C_i''\right|\leqslant A\\ i=1,\,2}} \frac{q(x,C_1',\,C_2')}{q(\eta,C_1'',\,C_2'')}<\infty.$$

Тогда для любой правой части $h\in L_2$ существует решение y уравнения (1), причем

$$\|y'''\|_2+\|q\,(\cdot,\,y,\,y')\,y'\|_2+\|s\,(\cdot,\,y,\,y')\,y\|_2\,<\,\infty.$$

Авторы поддержаны грантом 05131649 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список литературы

[1] R. D. Akhmetkalieva, L. - E. Persson, K. N. Ospanov, P. Woll, *Some new results concerning a class of third-order differential equations.* Appl. Anal. 94 (2015), no. 2, 419-434.

[2] M. B. Muratbekov, M. M. Muratbekov and K. N. Ospanov, *Coercive solvability of the odd-order differential equation and its applications.* Dokl. Math. 435 (2010), no. 3, 310-313.

[3] K. N. Ospanov, Zh. B. Yeskabylova and D. R. Beisenova, *Maximal regularity estimates for higher order differential equations with fluctuating coefficients.* Eurasian Math. J. 10 (2019), no. 2, 65 - 74.

CORRECT SOLVABILITY OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH UNBOUNDED COEFFICIENTS

A.N. Yesbayev

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: adilet.e@gmail.com

The following equation is considered in the paper

$$-\rho(\rho y')'+ry'+sy=f(x), \tag{1}$$

for $x\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, ρ positive and twice continiously differentiable, r continiously differentiable and s continuous functions, $f\in L_p=L_p(\mathbb{R})$, $1<p<+\infty$.

Consider the differential expression $l_0y=-\rho\,(\rho y')'+ry'+sy$, defined on the twice continuously differentiable functions set $C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ with compact support. Denote by l the closure of the operator l_0 in the L_p space.

The equation (1) has a fairly general form, its coefficients are unlimited functions. The equation (1) with $\rho\geqslant\delta>0$ and its multidimensional generalizations have been studied intensively in connection with applications to quantum mechanics, stochastic analysis and stochastic differential equations (see [1, 2, 7, 10] and the links inside). However, in these works it is assumed that s is positive and separated from zero, and the growth at infinity of the absolute value of the intermediate coefficient r is limited by some power of s. There are works [3, 4, 5, 6] where there is no such direct subordination, but it is assumed that the coefficient r can grow no faster than $|x|\ln|x| \quad (x \gg 1)$.

In the case $\rho = 1$ and $|r|$ has the fast growth and not depend on the coefficient s the equation (1) was explored in [9], where unique solvability and an estimate of the maximum regularity for the solution were established. The last estimate was then applied to the study of a single quasilinear equation in $\mathbb{R}$.

Note that the fast and independent growth of the absolute value of the intermediate coefficient r greatly changes the case of well-posedness of (1). Firstly, in this case, the lowest coefficient s can be unbounded from below, moreover, it can tend to $-\infty$ with a certain rate [8]. Here the order of the tendency of s to $-\infty$ depends on the growth rate of $|r|$. Note that while exploring the Sturm-Liouville equation (the case $\rho = 1$ and $r = 0$) usually it is assumed that $s \geqslant -kx^2$ for some k [10]. This requirement is not necessary in the case of the equation (1).

Secondly, due to the growth of the absolute value of r in the equation (1), it turns out that we can assume that the coefficient ρ tends to zero at infinity in the leading term, thereby we may consider the case of degeneracy. The result obtained below shows that the order of the tendency of ρ to zero also depends on the growth of $|r|$. In contrast to [9], in addition to generality, the equation (1) can degenerate near the infinity.

Let g and $h \neq 0$ are given continuous functions. Suppose

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_p(0,t)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_q(t,+\infty)} \ (t > 0), \quad \beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_p(\tau,0)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_q(-\infty,\tau)} \ (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h} = \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau)\right).$$

Theorem 1 *Let $1 < p < +\infty$, ρ is twice continuously differentiable funtion, r is continuously differentiable positive funtion and the following conditions hold*

$$1 \leqslant \frac{|r|}{\rho^2} \leqslant C\left(\frac{|r|}{\rho}\right)^p, \qquad \gamma_{1,\left(\frac{|r|}{\rho^2}\right)^{1/p}\rho} < +\infty,$$

and let there exists $a \in \mathbb{R}$ such that

$$\sup_{x<a}\left\{\rho(x)\exp\left(-\int_x^a \frac{|r(t)|}{\rho^2(t)}dt\right)\right\} < +\infty.$$

Then the equation (1) *has the only solution y for any right side $f \in L_p$ and the following estimate for y holds*

$$\left\|\left(\frac{|r|}{\rho}\right)^{1/p}\rho y'\right\|_p + \|y\|_p \leqslant C\|f\|_p.$$

The conditions of the theorem holds for the following equation

$$-\frac{1}{m(x)+x^2}\left(\frac{1}{m(x)+x^2}y'\right)' + (n(x)+x^{10})y' = f,$$

where $m(x) \geqslant 1$ and $n(x) \geqslant 1$ are smooth functions.

Reference

[1] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner and S.V. Shaposhnikov. *Fokker-Planck-Kolmogorov equations.* AMS, Mathematical surveys and monographs, 207 (2015).

[2] M.V. Fedoruk. *Asymptotic methods for linear ordinary differential equations.* Nauka, Moscow (1983).

[3] S. Fornaro and L. Lorenzi. *Generation results for elliptic operators with unbounded diffusion coefficients in L^p-and C_b-spaces.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 18 (2007), no. 4, 747–772.

[4] M. Hieber, L. Lorenzi, J. Prüss, A. Rhandi and R. Schnaubelt. *Global properties of generalized Ornstein–Uhlenbeck operators on $L_p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ with more than linearly growing coefficients.* Journal of Math. Analysis and Appl., 350 (2009), no. 1, 100–121.

[5] M. Hieber and O. Sawada. *The Navier-Stokes Equations in Rn with Linearly Growing Initial Data.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 175 (2005), 269–285.

[6] G. Metafune, D. Pallara and V. Vespri. *L^p-estimates for a class of elliptic operators with unbounded coefficients in $\mathbb{R}^n$.* Houston J. Math., 31 (2005), 605–620.

[7] M.A. Naimark. *Linear differential operators.* Nauka, Moscow (1979).

[8] K.N. Ospanov. *L_1-maximal regularity for quasilinear second order differential equation with damped term.* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE), 2015 (2015), no. 39, 1–9.

[9] K.N. Ospanov and R.D. Akhmetkaliyeva. *Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation.* EJQTDE, 2012 (2012), no. 66, 1–12.

[10] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics.* Vol. 2. *Harmonic analysis, self-adjointness.* Mir, Moscow (1978).

ON A STABILITY OF A PROGRAM MANIFOLD WITH VARIABLE COEFFICIENTS WITH STATIONARY NONLINEARITY

S.S. Zhumatov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

In a class of continuously-differentiable at times t and bounded on a norm matrices Ξ we consider the program manifold $\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, which is integral for the system

$$\dot{x} = f\,(t,x) - B(t)\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega - Q(t)\xi, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \tag{1}$$

provided $Q(t) >> 0$, where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, $B(t) \in \Xi^{n\times r}$, $P(t) \in \Xi^{s\times r}$ are continuous matrices, $\omega \in R^s (s \leqslant n)$ is a vector, $\varphi(\sigma) \in R^r$ is a vector-function of control on deviation from given program manifold, satisfying to conditions of local quadratic connection

$$\varphi(0) = 0 \;\wedge\; 0 < \sigma^T \varphi(\sigma) \leqslant \sigma^T K \sigma\,;$$
$$K = diag\,\|k_1, \ldots, k_r\|\,, \quad K = K^T > 0, \tag{2}$$

Due to the fact that $\Omega(t)$ is the integral manifold for the system (1)-(2), we have

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + Hf\,(t, x) = F(t, x, \omega), \tag{3}$$

where $H = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ is the Jacobi matrix and $F(t, x, \omega)$ is a certain s-dimensional Erugin vector function, satisfying conditions $F(t, x, 0) \equiv 0$ [1].

At solving inverse problems of the dynamics of automatic control systems,the basic and obligatory requirement is the stability of program motion in the presence of unstable actuating elements and system deviations from a given program at the initial time.

Taking into account that $\Omega(t)$ is the integral manifold for the system (1), and by choosing the Erugin function as following

$$F(t, x, \omega) = -A\omega, \tag{4}$$

where $-A \in R^{s\times s}$ is Hurwitz matrix and differentiating the manifold $\Omega(t)$ with respect to time t along the solutions of system (1), we get [2]:

$$\dot{\omega} = -A(t)\omega - H(t)B(t)\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega - Q(t)\xi, \tag{5}$$

Definition 1. A program manifold $\Omega(t)$ is called absolutely stable in relation to a vector-function ω, if it is asymptotically stable on the whole at all functions $\varphi(\sigma)$ satisfying to the conditions (2).

Statement of the problem. To get the condition of absolute stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the indirect control systems with variable coefficients in relation to the given vector-function ω.

Some overview of variable coefficient control systems was given in [3].

First, we consider the following system with variable coefficients as a linear approximation of the system (5),(2) with respect to the vector function ω :

$$\dot{\omega} = -A(t)\omega, \quad t \in I = [0, \infty). \tag{6}$$

We construct for it a Lyapunov function $V(t, \omega) = \omega^T L(t)\omega$.

Theorem 1. Let the Erugin function $F(t, x, \omega)$ have the form (3). Then, if the matrix $A(t)$ system (6) is non-degenerate and together with the matrix $M(t)$ satisfy equality $A^T(t)M(t) = M^T(t)A(t)$, then whatever the given quadratic form with the matrix $G(t)$ there exists a unique quadratic form $W(t)$ with the matrix $L(t)$ and satisfies the equation

$$-\frac{dV(t, \omega)}{dt}\Big|_{(6)} = W(t, \omega) = \omega^T G(t)\omega.$$

Theorem 2. Let the Erugin function $F(t, x, \omega)$ has the form (4). Then for asymptotic stability in the whole of the program manifold $\Omega(t)$ of a linear system with variable coefficients relative to the vector function ω it is sufficient fulfillment of relations

$$L(t) = M(t)A^{-1}(t) >> 0 \wedge G(t) >> 0 \quad t \in I = [0, \infty).$$

The basic theorem. If there is a real, continuous differentiable function of $V(t,\omega)$ in the given domain and positive-definite and allowing the highest limit in whole such that its derivative

$$-\frac{dV}{dt}\Big|_{(5)} = W(t,\omega)$$

would be definitely positive for any function $\varphi(\sigma)$ satisfying conditions (2), then the program manifold $\Omega(t)$ is absolutely stable with respect to vector functions $\omega(t,x)$.

Theorem 3. Suppose that there exist matrices

$$L(t) = L^T(t) > 0,\ \beta = diag\,(\beta_1,\ldots,\beta_r) > 0$$

and non-linear function $\varphi(\sigma)$ satisfies the conditions (2). Then, for the absolute stability of the program manifold $\Omega\,(t)$ with respect to the vector function ω it is sufficient performing of the following conditions

$$l_1(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leqslant V \leqslant l_2(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2), \tag{7}$$

$$g_1(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leqslant W \leqslant g_2(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2), \tag{8}$$

where l_1, l_2, g_1, g_2 are positive constants.

These results are supported by Grants of Ministry Education and Science of the Republic of Kazakhstan, No. AP 05131369.

Reference

[1] B.G. Maygarin, *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system.* Alma-Ata, Nauka, 1981.

[2] N.P. Erugin , *Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral curve.* Prikl. mat. Mech., 1952. 10(1952), Issue 6, 659–670.

[3] S.S. Zhumatov, *Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems.* News of the NAS RK, 6 (2018), no. 6, 37–43.

MULTIPERIODIC SOLUTION OF ONE HYPERBOLIC SYSTEM AND ITS INTEGRAL REPRESENTATION

A.Kh. Zhumagaziyev, Zh.A. Sartabanov, G.A. Abdikalikova

K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: charmeda@mail.ru

Many physical processes are described by systems of the first order partial differential equations [2]. For example, the well-known nonlinear Euler equations of fluid motion, relating pressure, density and velocity along the axes, belong to such systems.

Along with this, we also note that, under fairly general conditions, it is possible to present higher order partial differential equations in the form of systems of first order equations. Such, for example, it is the telegraph equation.

In fluid dynamics at constant speeds along the coordinate axes of the equation, the density $u = \rho(t, x, y)$ of fluid with known fluid flow f is particular case of vector-matrix equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = Cu + f(t, x, y).$$

Research of multiperiodic solutions with respect to t and x and y with such vector-matrix equations presents certain interest, when the fluid flow has the property of multiperiodicity in all independent variables [1, 3, 6].

In [4, 5] this question was considered in terms of the Green's function for such systems. The development of method for researching this problem in this paper was developed on basis of the method [3] for the system of equations

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + A\frac{\partial y}{\partial t} = By + \varphi(\tau, t) \tag{1}$$

with respect to unknown function $y = (y_1, ..., y_n)$ of variables $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$ and $t \in R$, the constant n-matrices A and B, n-vector-function $\varphi(\tau, t)$ are input data of the system.

Based on [1] and [3]-[6], the problem about existence and integral representation of unique (θ, ω)-periodic solution of system (1) is been studying in the following assumptions:

1^0. The matrix A has various real eigenvalues $\lambda_j = \lambda_j(A)$, $j = \overline{1, n}$; $\lambda_j \neq \lambda_k$ on different j and $k = \overline{1, n}$. The system (1) is hyperbolic in the narrow sense [2];

2^0. Matrix $X(\tau) = C^{-1}exp[B\tau]C$ satisfies the relation $det[X(\theta) - E] \neq 0$, where E is identity matrix; C is transformation matrix, leading the matrix A to Jordan normal form;

3^0. The vector-function $\varphi(\tau, t)$ has properties of (θ, ω)-periodicity and smoothness on (τ, t) order $(0, 1)$

$$\varphi(\tau + \theta, t) = \varphi(\tau, t + \omega) = \varphi(\tau, t) \in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R \times R),$$

where θ and ω are rationally independent periods.

By virtue of condition 1^0 the characteristics $h_j(\tau, \tau^0, t^0) = t^0 + \lambda_j(\tau - \tau^0), j = \overline{1, n}$, with arbitrary initial point (τ^0, t^0) are determined and we put

$$h(\tau, \tau^0, t^0) \in \{h_1(\tau, \tau^0, t^0), ..., h_n(\tau, \tau^0, t^0)\}$$

.

The operator $P = (P_1, ..., P_n)$ is introduced which is acting on vector-function

$$x(\tau, h(\tau, \tau^0, t^0))$$

and forms the vector

$$Px(\tau, h(\tau, \tau^0, t^0)) = (P_1x(\tau, h(\tau, \tau^0, t^0)), ..., P_nx(\tau, h(\tau, \tau^0, t^0)))$$

with vector components $P_jx(\tau, h(\tau, \tau^0, t^0)) = x(\tau, h_j(\tau, \tau^0, t^0))$, $j = \overline{1, n}$.

Under the product of matrix $X = [x_{jk}]_1^n$ on vector Px is understood vector $XPx = (\langle X_1, P_1x\rangle, ..., \langle X_n, P_n$ where the vector X_j is composed of elements j-th row's matrix X : $X_j = (x_{j1}, ..., x_{jn})$, $\langle a, b\rangle$ is vector product of a and b.

In conclusion, based on the transformation $y^*(\tau, t) = Cx^*(\tau, t)$, we obtain the solution of main problem of the existence and uniqueness (θ, ω)-periodic solution $y^*(\tau, t)$ of system (1) in the form

$$y^*(\tau, t) = [Y^{-1}(\tau + \theta) - Y^{-1}(\tau)]^{-1} \int_{\tau}^{\tau+\theta} Y^{-1}(s)P\varphi_\theta(s, h(s, \tau, t))ds, \tag{2}$$

where $Y(\tau) = CX(\tau)$, vector-function $\varphi_\theta(s, h(s, \tau, t))$ is determined by the relation

$$\varphi_\theta(s, h(s,\tau,t)) = \begin{cases} \varphi(s, h(s,\tau,t)), \tau \leqslant s \leqslant \tau^0, \\ \varphi(s, h(s,\tau+\theta,t)), \tau^0 < s \leqslant \tau+\theta. \end{cases} \quad (3)$$

By virtue of condition 3^0, there is not difficult to make sure, that $y^*(\tau, t)$ is unique (θ, ω)-periodic solution of the system (1).

Theorem 1 *Under the conditions* 1^0-3^0 *system (1) admits unique* (θ, ω)*-periodic solution* $y^*(\tau, t)$ *that is integrally represented by the formula (2)-(3).*

The idea of this work is realized to the quasilinear case based on contraction mapping principle, when the vector-function contains the unknown function. Here it was illuminated, confining itself to linear case.

In conclusion, we also note that similar results can be obtained when the variable is multidimensional and the matrix coefficients for partial differentials are commutative.

Reference

[1] Kh.V. Kharasahal, *Almost periodic solutions of ordinary differential equations.* Alma-Ata, Nauka, 1970.

[2] B.L. Rozhdestvensky, N.N. Yanenko, *Systems of quasilinear equations and its application to gas dynamics.* Moscow, Nauka, 1978.

[3] Z.A. Sartabanov, *The multi-period solution of a linear system of equations with the operator of differentiation along the main diagonal of the space of independent variables and delayed arguments.* AIP Conf. Proceed, 1880, 040020 (2017).

[4] Zh.A. Sartabanov, G.A. Abdikalikova, A.Kh. Zhumagaziyev, *Multiperiodic solution of linear system with constant coefficients and two various differentiation operators.* Proceedings of VIII International Scientific Conference Problems of Differential Equations, Analysis and Algebra, Aktobe, (2018), 89–95.

[5] Zh.A. Sartabanov, A.Kh. Zhumagaziyev, G.A. Abdikalikova *On one method of research of multiperiodic solution of system with various differentiation operators.* Traditional International April Mathematical Conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan, IMMM MES RK, Almaty, (2019), 82–84.

[6] D.U. Umbetzhanov, *Almost multiperiodic solutions of partial differential equations.* Alma-Ata, Nauka, 1979.

К СПЕКТРАЛЬНОМУ ВОПРОСУ ОПЕРАТОРА КОШИ-РИМАНА

Н.С. Иманбаев

Южно-Казахстанский государственный педагогический университет,
Шымкент, Казахстан
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

В функциональном пространстве $C(|z| \leqslant 1)$ рассмотрим спектральную задачу для оператора Коши-Римана, с предположением, что $0 \in \rho(K)$ - резольвентное множество непустое:

$$K\omega(z) = \frac{\partial \omega(z)}{\partial \bar{z}} = \lambda \omega(z), \quad |z| < 1, \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}\omega(z) = \alpha \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=1} \frac{\lambda \omega(t)}{t - z} dt \right), \quad |z| = 1, \tag{2}$$

$$\mathrm{Im}\omega(0) = \alpha \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=1} \frac{\lambda \omega(t)}{t} dt \right), \tag{3}$$

где λ - спектральный параметр, $\alpha = \overline{0, 1}$.

Утверждение. Если $\alpha = 0$, тогда спектральная задача (1) - (3) является вольтерровым [1]. Если $\alpha = 1$, тогда задача (1) - (3) редуцируется к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. При этом охарактеризуется те λ, которых неоднородная краевая задача со смещением для оператора Коши - Римана (1) - (3) всюду разрешима в классе непрерывных в смысле Гёльдера функций на единичном круге, причём показана явная конструкция, аппроксимирующая решение неоднородной задачи. Для этого достаточно $u(z) = \mathrm{Re}\omega(z)$, определяемое как решение неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, аппроксимировать решениями неоднородного линейного интегрального уравнения с вырожденными ядрами.

Список литературы

[1] N.S.Imanbaev, B.E.Kanguzhin, *On spectral question of the Cauchy-Riemann operaror with homogeneous boundary value conditions.* Bulletin of the Karaganda University, (2018), no 2(90), 49-55

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Т. Ш. Кальменов[1], А.К. Лес[2]

[1,2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби , Алматы, Казахстан*
E-mails: kalmenov.t@mail.ru[1] , a.les@math.kz[2]

Известно, что непрерывное распределения масс, заряда в ограничной области $\Omega \subset R^3$ создает линейный (Ньютоновый)потенциал [1] по формуле

$$u\left(x\right) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon\left(x - \xi\right) \rho\left(\xi\right) d\xi, \tag{1}$$

где $\varepsilon\left(x - \xi\right)$ - фундаментальные решения уравнения Лапласа

$$-\Delta_x \varepsilon\left(x\right) = \delta\left(x\right), \quad \varepsilon\left(x\right)|_{|x| \to \infty} = 0. \tag{2}$$

Поскольку интегральный оператор (1)- интегральной оператор Фредгольма I-рода, то нахождения плотности $\rho\left(x\right)$ по заданному потенциалу $u\left(x\right)$ является некорректной задачей. В нашей работе [2] Кальменова Т.Ш., Сурагана Д. впервые найдено граничные условия объемного (Ньютонового) потенциала (1).

В настоящей работе методами работы [2] найдены граничные условия эллиптического потенциала $u\left(x\right)$, задаваемые интегралом

$$u\left(x\right) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon\left(x, \xi\right) \rho\left(\xi\right) d\xi, \tag{3}$$

где $\varepsilon\left(x, \xi\right)$ - фундаментальные решения эллиптического уравнения

$$L(x, D)\varepsilon(x, \xi) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon\left(x, \xi\right) = \delta(x, \xi), \tag{4}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant d|\xi|^2,$$

$$\varepsilon(x, \xi)|_{|x| \to \infty} \to 0.$$

Пользуясь найденным граничным условием потенциала $u\left(x\right)$ однозначно определена плотность $\rho\left(x\right)$ этого потенциала.

Список литературы

[1] В.С.Владимиров., *Уравнения математической физики.* М:Наука, 1981.-512 с.

[2] Т.Ш.Кальменов, Д.Сураган, *К спектральным задачам для объемного потенциала.* Докл.РАН. 80(2)(2009),с.646-649.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С ОБЛАСТЬЮ, ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

С.А. Кассабек[1], А.А. Кавокин[2], Ю.Р. Шпади[3], Д.С. Кулахметова[4]

[1]*Институт IT, Нур-Султан, Казахстан*
[2]*SDU, Каскелен, Казахстан*
[3,4]*Институт математики и математического моделирования,Алматы, Казахстан*
E-mails: [1]*kassabek@gmail.com*, [2]*kavokin_alex@yahoo.com*, [3]*yu-shpadi@yandex.ru*,
[4]*koulakhmetova.diana@gmail.com*

Исследовано асимптотическое представление координаты свободной границы $x = \alpha(t)$ и решения $T_i(x,t)$ $(i = 1,2)$ при малых значениях времени t для следующей двухфазной задачи Стефана с условием 3-го рода на неподвижной границе:

$$T'_{it} = a_i^2 T''_{ixx}; \quad \{i = 1,2; D_1 : \{x \in (0, \alpha(t))\};\; D_2 : \{x \in (\alpha(t), \infty)\}; t > 0\}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\alpha(0) = 0; T_2(x,0) = f_3(x);$$

$$\lambda_1 T'_{1x}(0,t) = g(T(0,t),t)); \quad T_2(\infty,t) = f_3(\infty),$$

и условием Стефана на свободной границе $x = \alpha(t)$:

$$T_1(\alpha(t),t) = T_2(\alpha(t),t) = T_0,$$

$$\lambda_1 T'_{1x}(\alpha(t),t) - \lambda_2 T'_{2x}(\alpha(t),t) = \gamma \frac{d\alpha(t)}{dt},$$

где λ_i – коэффициенты теплопроводности, γ – величина скрытой теплоты фазового перехода (отрицательная в случае плавления и положительная в случае кристаллизации вещества).

Предполагается, что начальная температура $f_3(x)$ и входящая в граничное условие функция $g(T_1(0,t),t)$ некоторое количество раз дифференцируемы по своим аргументам, однако последняя может иметь особенность типа $t^{-1/2}$ при $t \to 0$.

Чтобы найти асимптотическое представление решения поставленной задачи, представим его в следующем виде:

$$T_i(x,t) = \sum_{k=i-1}^{i} \frac{1}{2a_i\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f_{i+k}(\xi) \exp\left(-\frac{(x + (-1)^{k+i}\xi)^2}{4a_i^2 t}\right) d\xi \quad (i = 1,2),$$

Предполагается, что функции $f_l(\xi)$, $(l = 1,2,4)$, дифференцируемы достаточное количество раз. При этих условиях, используя разложения $f_l(x)$, $(l = \overline{1,4})$, и $\alpha(t)$ в асимптотические ряды вида

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{n} f_{l,k} x^k + o(x^n) \text{ и } \alpha(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \theta^k + o(\theta^m), \quad \theta = \sqrt{t},$$

начальные и граничные условия приводят к рекуррентной системе нелинейных функциональных уравнений для определения коэффициентов $f_{l,k}$, α_k.

Анализ асимптотических решений полученных этим методом, позволил доказать следующие утверждения относительно условий согласования начальной и граничной функций, необходимые для асимптотической разрешимости задачи:

– если не выполнены условия согласования $f_3(0) = f_{3,0} = T_0$, то вышеуказанная задача не имеет классического ($C^{2,1}_{D_1 \cap D_2}$) решения;

– если при $t \to 0$ имеет место асимптотическое представление: $g(T,t) \sim g_0 \cdot t^{-1/2}$, то $\alpha(t) \sim \alpha_1 \cdot \sqrt{t}$, где $\alpha_1 > 0$ –корень известного нелинейного уравнения, зависящий от параметров рассматриваемой задачи;

– если в начальный момент времени не совпадают значения внешней $g_0 = g(T_2(0,0),0) < \infty$ и внутренней $-\lambda_2 f_{3,1}$ производных решения при $x = 0$, то $\alpha(t) \sim \alpha_2 \cdot t$, $\alpha_2 = \frac{1}{\gamma}(g_0 - \lambda_2 f_{3,1})$, при необходимом условии: $\alpha_2 > 0$;

- если начальная температура области D_2 сформировалась под действием того же самого теплового потока g_0 при $x = 0$, т.е. $\alpha_2 = 0$, то имеет место асимптотическое представление $\alpha(t) \sim \alpha_3 \cdot t^{3/2}$, $\alpha_3 = \frac{4g_0}{3\pi\gamma\sqrt{t_0}}$, при необходимом условии $\alpha_3 > 0$, где t_0 время изменения температуры поверхности $x = 0$ от начального значения до температуры фазового перехода. Если при этом начальная температура постоянная $\forall x > 0$, то t_0 определяется явно из решения соответствующего уравнения теплопроводности:

$$t_0 = \left((T_0 - T_{beg})\lambda_2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a_2 g_0} \right)^2 .$$

В последних двух случаях также имеет место асимптотическое представление:

$$T_1(x,t) \sim T_0 + \frac{g_0}{\lambda_1}(x - \alpha(t)).$$

Оценку времени, до которого имеют место вышеуказанные асимптотические представления, для различных материалов можно получить используя следующие члены асимптотического разложения решения.

Работа поддержана грантом AP05133919 от КН МОН РК

Список литературы

[1] S.N. Kharin, *The analytical solution of the two-face Stefan problem with boundary flux condition.* Математический журнал, 2014.-№ 1.- P. 55-75. (ИМММ, Алматы)

ОБ ОДНОМ НЕОДНОРОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

М.Т. Космакова, Ж.М. Тулеутаева, Л.Ж. Касымова

КарГУ им. Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан
E-mails: svetik_mir69@mail.ru, erasl-79@mail.ru, l.kasymova2017@mail.ru

Исследование сопряженной краевой задачи теплопроводности:
В области $G = \{(x;\ t): \quad t > 0, \quad 0 < x < t\}$ *найти решение уравнения*

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2},$$

удовлетворяющего граничным условиям:

$$u^*(x,\ t)|_{t=\infty} = 0,\ \ u^*(x,\ t)|_{x=0} = v(t),\ \ u^*(x,\ t)|_{x=t} = w(t)$$

редуцируется к исследованию интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\psi(t) - \int_t^\infty K(\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau = f(t), \qquad (t>0), \tag{1}$$

где

$$K(\tau,t) = \frac{1}{2\,a\sqrt{\pi}}\left[\frac{\tau+t}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}\ \exp\left\{-\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\ \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\}\right]. \tag{2}$$

Доказана лемма

Лемма 1 *Для ядра (2) уравнения (1) справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_t^\infty K(\tau,t)\,d\tau = 1.$$

Значит, характеристическая часть уравнения (1) – это второе слагаемое ядра (2).
Исследование уравнения (1) сводится к изучению интегрального уравнения:

$$\psi^*(t) - \int_t^\infty k^*(t,\tau)\,\psi^*(\tau)\,d\tau\ = g(t), \tag{3}$$

где

$$k^*(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\Big\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}}\Big(1-\exp\Big\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\Big\}\Big)\right\},$$

$$g(t) = \exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\}f(t), \quad \psi^*(t) = \exp\Big\{-\frac{t}{4a^2}\Big\}\psi(t).$$

Лемма 2 *Уравнение (2) эквивалентно сводится к уравнению с разностным ядром*

$$t_1\cdot y_1(t_1) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_1}\frac{1}{(t_1-\tau_1)^{1/2}}\Big(1-\exp\Big\{-\frac{1}{a^2(t_1-\tau_1)}\Big\}\Big)y(\tau_1)\,d\tau_1 -$$

$$-t_1\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_1}\frac{2}{(t_1-\tau_1)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{1}{a^2(t_1-\tau_1)}\Big\}y(\tau_1)\,d\tau_1 = g_1\left(t_1\right). \tag{3}$$

Для доказательства вводим замены переменных и обозначения функций [2]:

$$t=\frac{1}{t_1}, \quad \tau=\frac{1}{\tau_1}, \quad y\left(t_1\right) = \frac{1}{t_1^{3/2}}\psi^*\left(\frac{1}{t_1}\right), \quad g_1\left(t_1\right) = \frac{1}{t_1^{1/2}}g\left(\frac{1}{t_1}\right).$$

К уравнению (3) применив преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$\overline{y}'(p) + \frac{1}{2a\sqrt{p}}\frac{ch\frac{\sqrt{p}}{a}}{sh\,\frac{\sqrt{p}}{a}}\overline{y}(p) = -\frac{\bar{G}_1(p)}{1-\exp\left(-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right)}. \tag{4}$$

Решением дифференциального уравнения (4) является функция:

$$\overline{y}(p) = \frac{C}{sh\frac{\sqrt{p}}{a}} - \frac{1}{2\,sh\frac{\sqrt{p}}{a}}\int_p^\infty \bar{G}_1(q)\,\exp\left(\frac{\sqrt{q}}{a}\right)\,dq. \tag{5}$$

К (5) применив обратное преобразование Лапласа [1], получим решение интегрального уравнения (3).

Далее, в силу замен, приведенных выше, решение уравнения (2) имеет вид:

$$\psi^*(t) = \frac{C}{a^3\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{n^2+n}{a^2} t\right) - g(t) -$$

$$-\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{\infty} \frac{\tau\, n}{(\tau - t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{n^2 t\, \tau}{a^2(\tau - t)}\right) \cdot g(\tau)\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{4a\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau - t}} g(\tau)\, d\tau - \frac{1}{8a^2} \int_t^{\infty} \exp\left(\frac{\tau - t}{8a^2}\right) erfc\left(\frac{-\sqrt{\tau - t}}{2a}\right) \cdot g(\tau)\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{4a^2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \int_t^{\infty} g(\tau) \int_{\tau}^{t} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau_1}\sqrt{\tau - \tau_1}} + \frac{1}{2a\tau_1} \exp\left(\frac{\tau - \tau_1}{8a^2}\right) erfc\left(\frac{-\sqrt{\tau - \tau_1}}{2a}\right)\right) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n \exp\left(-n^2 \frac{\tau_1 t}{a^2(\tau_1 - t)}\right) d\tau_1\, d\tau. \tag{6}$$

Теорема 1 *Интегральное уравнение (1) в классе суммируемых функций имеет решение [3]* $\psi(t) = \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} \psi^*(t)$, *где функция* $\psi^*(t)$ *определяется формулой (6) и* $f(t) = \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} g(t)$.

Список литературы

[1] Дёч Г., *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.* М.: Наука, 1971. – 288 с.

[2] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., *Нагруженные уравнения - как возмущения дифференциальных уравнений.* Алматы: FЫЛЫМ, 2010. - 335 с.

[3] Полянин А.Д., Манжиров А.В., *Справочник по интегральным уравнениям.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 608 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

М.Д. Кошанова[1], М.А. Муратбекова[2], Б.Х Турметов[3]

Международный казахско-турецкий университет
имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mails: koshanova-2018@mail.ru,moldir_1983@mail.ru,turmetovbh@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости краевой задачи с граничным оператором дробного порядка для нелокального уравнения Пуассона.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$- единичный шар, $n \geqslant 2, \partial\Omega$ - единичная сфера, $r = |x|, \theta = x/r, \delta = r\frac{d}{dr}$- оператор Дирака, где $r\frac{d}{dr} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1, \mu \geqslant 0$. Введем операторы

$$J_\mu^\alpha [u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} u(\tau x)\, d\tau,$$

$$D_\mu^\alpha [u](x) = r^{-\mu} J^{1-\alpha}[\delta[\tau^\mu u]](x) = \frac{r^{-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r \left(\ln \frac{r}{\tau}\right)^{\alpha-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right) [\tau^\mu u(\tau\theta)] \frac{d\tau}{\tau}.$$

В дальнейшем в случае $\alpha = 0$ будем считать $J^0[u](x) = D^0[u](x) = u(x)$.

Пусть S - действительная, ортогональная матрица $S \cdot S^T = E$. Предположим также, что существует такое натуральное число $l \geqslant 2$ что $S^l = E$.

Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$-\Delta u(x) - a\Delta u(Sx) = f(x), \ x \in \Omega, a \in R, \tag{1}$$

$$D_\mu^\alpha u(x) = g(x), \ x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) назовём функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $D_\mu^\alpha u(x) \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничному условию (2) в классическом смысле.

В случае $a = 0$ уравнение (1) совпадает с классическим уравнением Пуассона. Отметим,что в этом случае задача (1),(2) изучена в работе [1].

Если в задаче (1),(2) $\alpha = 0$, то получаем задачу Дирихле, а в случае $\alpha = 1$ задачу Неймана ($\mu = 0$) и задачу Робена ($\mu > 0$).

Сначала приведем утверждение для случая $\alpha = 0$. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\Delta v(x) - a\Delta v(Sx) = F(x), x \in \Omega, \\ v(x) = g(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $G_D(x,y)$ - функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона, а $P(x,y)$ - ядро Пуассона.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 *Пусть* $0 < \lambda < 1, F(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}), g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$. *Тогда, если выполняется условие* $(-a)^l \neq 1$, *то решение задачи (3) существует, единственно, принадлежит классу* $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ *и представляется в виде*

$$v(x) = \int\limits_\Omega G_S(x,y) F(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega} P_S(x,y) g(y)\, dS_y,$$

где

$$G_{S,D}(x,y) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-a)^k}{1-(-a)^l} G_D(S^k x, y),$$

$$P_S(x,y) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-a)^k}{1-(-a)^l} \left[P(S^k, y) + aP(S^k x, S^T y)\right].$$

Теорема 2 *Пусть* $\mu > 0, 0 < \alpha \leqslant 1, 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^{\lambda+1}\left(\bar{\Omega}\right)$ *и* $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$. *Тогда, если выполняется условие* $(-a)^l \neq 1$, *то решение задачи (1),(2) существует, единственно, принадлежит классу* $C^{\lambda+2}\left(\bar{\Omega}\right)$ *и представляется в виде*

$$u(x) = J_\mu^\alpha [v](x),$$

где $v(x)$ *- решение задачи (3) с функцией* $F(x) = D_{\mu+2}^\alpha [f](x)$.

Теорема 3 *Пусть* $\mu = 0, 0 < \alpha \leqslant 1, 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^{\lambda+1}\left(\bar{\Omega}\right), g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ *и выполняется условие* $(-a)^l \neq 1$. *Тогда для разрешимости задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\Omega} f_{1-\alpha}(x)\, dx + (1+a) \int\limits_{\partial\Omega} g(x)\, dS_x,$$

где $f_{1-\alpha}(x) = J_2^{1-\alpha}[f](x)$.

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = J_0^\alpha [v](x),$$

где $v(x)$ *решение задачи (3) с функцией* $F(x) = D_2^\alpha(f)$ *и удовлетворяющее условию* $v(0) = 0$.

Замечание 1 *Если* $\mu = 0$ *и* $\alpha = 1$, *то* $f_0(x) = J_2^0 [f](x) = f(x)$. *Следовательно, в этом случае условие разрешимости задачи (1),(2) имеет вид*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx + (1+a) \int\limits_{\partial\Omega} g(x)\, dS_x = 0.$$

В случае $a = 0$ *это условие совпадает с условием разрешимости задачи Неймана для классического уравнения Пуассона.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерство образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05131268).

Список литературы

[1] Turmetov B. Kh., Koshanova M.D., Usmanov K.I. *About solvability of some boundary value problems for Poisson equation with Hadamard type boundary operator.* Electronic Journal of Differential Equations. 2016(2016), no. 161, 1-12.

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Б.Д. Кошанов[1], Ж.Б. Султангазиева[2], А.Н. Емир Кадыоглы[3]

[1]*Институт математики и математического моделирования*
[2,3]*Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан*
E-mails: koshanov@list.ru, zhanat_87@mail.ru, aynur2603@mail.ru

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с гладкой компактной границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \Gamma \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv (-1)^p D_t^{2p} u + \Delta u - \lambda u = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, Δ – оператор Лапласа, λ – действительный параметр, $f(x,t)$ – заданная функция.

Краевая задача $I_{p,\lambda}$: Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q такое, что

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \ k = 0, ..., p, \ x \in \Omega, \tag{3}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \ k = 1, ..., p-1, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Постановка краевых задач для таких операторов (1) впервые предложен В.Н. Враговым [1, 2]. Дальнейшие исследования для подобных операторов связаны с работами [3-6]. Одним из основных условий корректности в этих работах было условие неотрицательности параметра λ. Исследования нелокальных задач с интегральными условиями для линейных параболических уравнений, для дифференциальных уравнений нечетного порядка, и для некоторых классов нестационарных уравнений в последние время активно проводится в работах А.И. Кожанова [4, 6].

В данной работе будут анализированы случаи неотрицательности и положительности параметров λ в зависимости от четности и нечетности p. Будут вычислены собственные числа и соответственно, собственные функций спектральных задач $I_{2,\lambda}$, $I_{3,\lambda}$. Будет также доказана, что однородная задача $(1)-(4)$ имеет линейно независимых решений. Обычно такое не имеет место при гиперболическом операторе.

Работа выполнена при поддержке гранта AP 05135319 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список литературы

[1] В.Н. Врагов, *К теории краевых задач для уравнений смешанного типа* Дифференциальные уравнения. (1976), Т. 13, №6. 1098-1105.

[2] В.Н. Врагов, *О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешного типа.* Матем. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, (1978), 5-13.

[3] И.Е. Егоров, В.Е. Федоров, *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка.* Новосибирск: Изд. ВЦ СО РАН, (1995).

[4] А.И. Кожанов, Е.Ф. Шарин, *Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка.* Укр. мат. вестник. (2014), Т. 11, № 2. 181-202.

[5] Н.Р. Пинигина, *К вопросу о корректности краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка.* Asian-European Journal of Mathematics (2017), V. 10, № 3.

[6] А.И. Кожанов, Н.Р. Пинигина, *Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка.* Мат. Зам. (2017), Т. 101, вып. 3. 403-412.

О НЕКОТОРЫХ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОДНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л.К. Кусаинова, Б.С. Кошкарова

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: b-koshkarova@yandex.kz

В работе рассмотрен замкнутый дифференциальный оператор

$$Ly = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\rho_k(x) y^{(k)}\right)^k, \ \ \mathcal{D}(L) \subset L(I),$$

с комплекснозначными переменными коэффициентами $\rho_k = u_k + iv_k$ ($0 \leqslant k \leqslant n-1$, $i = \sqrt{-1}$), где функции u_k, v_k имеют в $I = (0, \infty)$ непрерывные производные до k-го порядка включительно, и

$$\lim_{x\to\infty} \inf \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + v_k)_+(x) > 0. \qquad (1)$$

В (1) приняты обозначения $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$. Будем предполагать, что для всех $y \in \mathcal{D}(L)$

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(\infty) = 0, \ \ k = 1, ..., n-1.$$

Нас будут интересовать вопросы полноты в $L_2(I)$ корневых систем данного оператора, а также условия, при которых данный оператор имеет резольвенту конечного порядка [1].

Пусть $\omega = \{\omega_j\}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ – кортеж неотрицательных локально суммируемых в I функций. Положим

$$S(x, h; \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} h^{-2k-1} \int\limits_x^{x+h} \omega_k(t) dt, \ \ h^*(x) = \inf\{h^{-2n} : h^{2n} S(x, h; (u+v)_+) \leqslant 1\}.$$

Функция $h^*(x) < \infty$ ($x > 0$). Из условия (1) будет следовать, что $h^*(x) > 0$ в I (см. [2]).

Обозначим через $\mathcal{R}_{x,h}$ множество всех полиномов $R(\cdot)$ порядка $\leqslant n-1$, для которых $\int\limits_x^{x+h} |R(t)|^2 dt = 1$. Введем следующие условия регулярности на систему $(u+v)_+ = \{(u_k+v_k)_+ :$

существует η, $0 < \eta < 1$ такое, что

$$\eta S(x,h;(u+v)_+) \leqslant \inf_{R\in\mathcal{R}_{x,h}} \sum_{k=0}^{n-1} h^{-2k-1} \int_x^{x+h} (u_k+v_k)_+(t)dt. \tag{2}$$

Систему коэффициентов $\rho_k = u_k + iv_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ будем называть допустимой, если

$$\inf_{x\geqslant 0} h^*(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} h^*(x) = +\infty. \tag{3}$$

К примеру для оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом $q(x) = p(x) + ir(x)$ условие (2) выполнено при $q = 1$. Условие (3) – если

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+h} (p+r)_+(t)dt = \infty$$

(см. [3]).

Теорема 1 *Пусть система коэффициентов $\rho_k = u_k + iv_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ допустима и регулярна. Тогда a) оператор L имеет вполне непрерывный обратный оператор;*

b) Если

$$\sup_{x\geqslant 0} \sum_{k=0}^{n-1} h^*(x)^{2(n-k)} \int_x^{x+h^*(x)} (u_k+v_k)_-(t)dt \leqslant \epsilon\eta \ (0<\epsilon<1),$$

$$\int_0^\infty h^*(x)^\theta dx < \infty, \theta = -p + \frac{1}{2n},$$

то $L^{-1} \in \sigma_p$.

c) Если

$$\int_0^\infty h^*(x)^{-1+\frac{1}{2n}} dx < \infty,$$

то система корневых векторов оператора L полна.

Работа выполнена по гранту МОН РК AP05133397.

Список литературы

[1] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовых пространствах.* М.: Наука, 1965, 274–368.

[2] М. Отелбаев, Л.К. Кусаинова, А. Булабаев, *Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов.* Сборник трудов Института математики НАН Украины. 6 (2009), №. 1., 165–190.

[3] М. Отелбаев, *Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля.* Алма-Ата: Гылым, 1990, С. 191.

СОПРЯЖЕННЫЕ И БЕЗСОПРЯЖЕННЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.А. Калыбай[1], Д.С. Каратаева[2]

[1]*Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан*
[2]*ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
[1]*E-mail: kalybay@kimep.kz*
[2]*E-mail: danagul83@inbox.ru*

Рассмотрим разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(\rho_i|\Delta y_i|^{p-2}\Delta y_i) + \omega_i|y_{i+1}|^{p-2}y_{i+1} - r_i|y_{i+1}|^{p-2}y_{i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

где $1 < p < \infty$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\{\rho_i\}$ - последовательность положительных действительных чисел, $r = \{r_i\}$ и $\omega = \{\omega_i\}$ - последовательности неотрицательных действительных чисел.

Говорят, что интервал $(m, m+1]$, $m \in N$, содержит обобщенный нуль решения $y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ уравнения (1), если $x_m \neq 0$ и $y_m y_{m+1} \leqslant 0$. Уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек на дискретном отрезке $[m, n]$, если каждое его решение имеет не более одного обобщенного нуля на дискретном интервале $(m, n+1]$ и его решение y с начальными условиями $y_m = 0$, $y_{m+1} \neq 0$, не имеет обобщенного нуля на $(m, n+1]$.

Обозначим через $\overset{\circ}{Y}(m, n)$ совокупность нетривиальных последовательностей действительных чисел $y = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ таких, что $supp\ y \subset [m+1, n]$, $n < \infty$, где $supp\ y := \{i \geqslant 0 : y_i \neq 0\}$

Рассмотрим дискретное расширенное неравенство Харди

$$\sum_{i=m}^{n} \omega_{i-1}|y_i|^p \leqslant \sum_{i=m}^{n}(\rho_i|\Delta y_i|^p + r_{i-1}|y_i|^p), \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m, n). \tag{2}$$

Теорема 1 *Пусть $0 \leqslant m < n \leqslant \infty$. Уравнение (1) является безсопряженным на интервале $[m, n]([m, n] = [m, \infty)$ при $n = \infty)$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (2).*

Таким образом, основной целью данного тезиса является изучение сопряженных и безсопряженных свойств уравнения (1), которые в силу теоремы 1 зависят от выполнения расширенного неравенства Харди

$$\sum_{i=m}^{n} \omega_{i-1}|y_i|^p \leqslant C\sum_{i=m}^{n}(\rho_i|\Delta y_i|^p + r_{i-1}|y_i|^p), \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m, n), \tag{3}$$

где C - наименьшая постоянная в (3).

Положим

$$\varphi_r^-(m, d) = \inf_{m<c\leqslant d}\left\{\left(\sum_{i=c}^{d}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \sum_{i=c}^{d-1} r_i\right\},$$

$$\varphi_r^+(d, n) = \inf_{d\leqslant c<n}\left\{\left(\sum_{i=d}^{c}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \sum_{i=d}^{c-1} r_i\right\},$$

$$B_{r,\omega} := B_{r,\omega}(m, n) = \sup_{m<t\leqslant s<n}\left(\sum_{i=t}^{s-1}\omega_i\right)\left(\varphi_r^-(m, t) + \sum_{i=t}^{s-1} r_i + \varphi_r^+(s, n)\right).$$

Теорема 2 *Пусть* $0 \leqslant m < n \leqslant \infty$ *и* $1 < p < \infty$. *Неравенство (3) выполняется тогда и только тогда, когда* $B_{r,\omega}(m,n) < \infty$. *Более того, для наименьшей константы в (3) выполняется* $B_{r,\omega}(m,n) \leqslant C \leqslant 2\gamma_p B_{r,\omega}$, *где* $\gamma_p = \inf\limits_{1<\lambda<\lambda_0} \frac{\lambda^p(\lambda^p-1)}{(\lambda-1)^p}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Доказательство теоремы 2 можно найти в работе [1]. Поэтому в данной работе мы ограничимся тем, что представим только её формулировку.

Теорема 3 *Пусть* $0 \leqslant m < n \leqslant \infty$ *и* $1 < p < \infty$. *Тогда*
(i) для безсопряжённости уравнения (1) на интервале $[m,n]$ *выполнение условия* $B_{r,\omega} \leqslant 1$ *необходимо, а выполнение условия* $2\gamma_p B_{r,\omega} \leqslant 1$ *достаточно;*
(ii) для сопряжённости уравнения (1) на интервале $[m,n]$ *выполнение условия* $2\gamma_p B_{r,\omega} > 1$ *необходимо, а выполнение условия* $B_{r,\omega} > 1$ *достаточно.*

Следствие 1 *Пусть* $0 \leqslant m < n \leqslant \infty$ *и* $1 < p < \infty$. *Тогда*
(i) если существуют целые числа $t, s : m \leqslant t < s \leqslant n$ *такие, что выполняется*

$$\sum_{i=t}^{s-1} \omega_i > \varphi_r^-(m,t) + \sum_{i=t}^{s-1} r_i + \varphi_i^+(s,n),$$

тогда уравнение (1) является сопряжённым на интервале $[m,n]$*;*
(ii) если уравнение (1) является сопряжённым на интервале $[m,n]$*, тогда существуют целые числа* $t, s : m \leqslant t < s \leqslant n$ *такие, что выполняется*

$$\sum_{i=t}^{s-1} \omega_i > \frac{1}{2\gamma_p} \left[\varphi_r^-(m,t) + \sum_{i=t}^{s-1} r_i + \varphi_i^+(s,n) \right];$$

(iii) если уравнение (1) является безсопряжённым на интервале $[m,n]$*, тогда существуют целые числа* $t, s : m \leqslant t < s \leqslant n$ *такие, что выполняется*

$$\sum_{i=t}^{s-1} \omega_i < \varphi_r^-(m,t) + \sum_{i=t}^{s-1} r_i + \varphi_i^+(s,n).$$

Список литературы

[1] A.Kalybay, D. Karatayeva, *An extended discrete weighted Hardy inequality in the difference form* // AIP Conference Proceedings. - 2017. - V. 1880, 030012. - doi: http://dx.doi.org/110.1063/1.5000611

MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF A SEMI-LINEAR D_e-EQUATION

A.A. Kulzhumiyeva[1], **Zh.A. Sartabanov**[2]

[1]*M.Utemisov West Kazakhstan State University, Uralsk, Kazakhstan*
[2]*K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mails: aiman-80@mail.ru, sartabanov42@mail.ru

Consider an n-th order linear equation

$$D_e^n x + a_1(\sigma) D_e^{n-1} x + ... + a_n(\sigma) x = b(\tau, t, \sigma) \tag{1}$$

with operators $D_e^j x = D_e(D_e^{j-1}x)$, $j = \overline{1,n}$, where $a_j = a_j(\sigma)$, $j = \overline{1,m}$, $b(\tau, t, \sigma)$ are given functions, $\sigma = t - e\tau$ is a characteristic of operator D_e, $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$, $x(\tau, t)$ is a sought-for function.

The operator $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ is called the differential operator in the direction of the main diagonal or of vector field $\frac{dt}{d\tau} = e$, where $\langle , \rangle$ denotes the scalar product of m-dimensional vectors $e = (1, ..., 1)$ and $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$.

Suppose the given functions have the properties of periodicity and smoothness:

$$a_j(\sigma + q\omega) = a_j(\sigma) \in C_\sigma^{(1)}(R^m), \quad j = \overline{1,m}, \quad q \in Z^m, \tag{2}$$

$$b(\tau + \theta, t + q\omega, \sigma + q\omega) = b(\tau, t, \sigma) \in C_{\tau,t,\sigma}^{(0,1,1)}(R \times R^m \times R^m), \quad q \in Z^m \tag{3}$$

with multiple vector-period $q\omega = (q_1\omega_1, \ldots, q_m\omega_m)$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$, $\omega_0 = \theta$, ω_1, ..., ω_m are positive incommensurable constants, $q_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,m}$, where $\mathbb{Z}$ is the set of integers.

We aim to describe the conditions for existence of multiperiodic solutions in terms of eigenvalues.

To solve the problem, we first consider the homogeneous equation

$$D_e^n x + a_1(\sigma) D_e^{n-1} x + ... + a_n(\sigma) x = 0.$$

Suppose that the eigenvalues of the corresponding characteristic equation satisfy the properties 1^0-4^0 (see [1]).

Under condition (2), equation (4) has eigenvalues $\lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) \pm i\beta_j(\sigma)$, $j = \overline{1,p}$ of multiplicities k_j, $j = \overline{1,p}$ and $Re\,\lambda_j(\sigma) \neq 0$, then the homogeneous equation does not have multiperiodic solutions, except zero.

Then each solution $x^j(\tau - s, \sigma)$ of the fundamental system is decomposed into the sum of the solutions

$$x^j(\tau - s, \sigma) = x_-^j(\tau - s, \sigma) + x_+^j(\tau - s, \sigma), \tag{4}$$

that satisfy inequalities

$$|x_-^j(\tau - s, \sigma)| \leqslant \Gamma e^{-\gamma(\tau - s)}, \quad \tau \geqslant s, \quad |x_+^j(\tau - s, \sigma)| \leqslant \Gamma e^{\gamma(\tau - s)}, \quad \tau < s. \tag{5}$$

Consequently, solution $X(\tau - s, \sigma) = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j(\sigma) x(\tau - s, \sigma)$ is decomposed into the sum of the solutions and by (4) and (5) satisfy the following estimates:

$$X(\tau - s, \sigma) = X_-(\tau - s, \sigma) + X_+(\tau - s, \sigma), \tag{6}$$

$$|X_-(\tau - s, \sigma)| \leqslant \Gamma_- e^{-\gamma(\tau - s)}, \quad \tau \geqslant s, \quad |X_+(\tau - s, \sigma)| \leqslant \Gamma_+ e^{\gamma(\tau - s)}, \quad \tau < s, \tag{7}$$

where Γ_- and Γ_+ are positive constants.

Next, we introduce the function

$$x^*(\tau,t,\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\tau}X_-(\tau-s,\sigma)b(s,\sigma+es,\sigma)ds-\int\limits_{\tau}^{+\infty}X_+(\tau-s,\sigma)b(s,\sigma+es,\sigma)ds. \tag{8}$$

Obviously, improper integrals in relation (8), by conditions (3) and (7), converge uniformly, integrand differentiation n-fold, and satisfy equation (1).

Thus, the following theorem is valid.

Theorem 1. *Under conditions (2), (3), (4), (5) and* 1^0-4^0 *([1]), equation (1) has a unique* (θ,ω,ω)*-periodic in* (τ,t,σ) *solution of the form (8).*

The idea of Theorem 1 is realized in the semi-linear case, when the right-hand side of equation (1) depends on the unknown function x. Consequently, $b=f(\tau,t,\sigma,x)$

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,\sigma+p\omega,x)=f(\tau,t,\sigma,x)\in C^{(0,e,e,1)}_{\tau,t,\sigma,x}(R\times R^m\times R^m\times R_\Delta),\quad p,q\in Z^m, \tag{9}$$

where $R_\Delta=\{x\in R:|x|\leqslant\Delta\}$, $\Delta=const>0$.

We introduce a Green function of the type $G(\tau-s,\sigma)=\begin{cases}X_-(\tau-s,\sigma), & \tau\geqslant s,\\ -X_+(\tau-s,\sigma), & \tau<s\end{cases}$ and with its help we define the operator T

$$(Tx)(\tau,t,\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tau-s,\sigma)f(s,\sigma+es,\sigma,x(s,\sigma+es,\sigma))ds$$

in the space $S^{\theta,\omega}_\Delta$ of continuous (θ,ω,ω)-periodic in (τ,t,σ) and bounded in the norm $\|x\|=\sup\limits_{R\times R^m\times R^m}|x(\tau,t,\sigma)|$ functions $x=x(\tau,t,\sigma)$ number $\Delta>0$.

When the condition

$$\Gamma(\delta+l\Delta)<\gamma\Delta \tag{10}$$

the T operator takes $S^{\theta,\omega}_\Delta$ into itself and is compressed, where $\Gamma=\max(\Gamma_-,\Gamma_+)$, $\delta=\|f_0\|$, $f_0=f|_{x=0}$, $l=\left\|\frac{\partial}{\partial x}f\right\|$, $x\in S^{\theta,\omega}_\Delta$. Obviously, the space $S^{\theta,\omega}_\Delta$ is full, therefore, the mapping T in $S^{\theta,\omega}_\Delta$ has a single fixed point $(TX^*)(\tau,t,\sigma)=x^*(\tau,t,\sigma)\in S^{\theta,\omega}_\Delta$.

It is not difficult to show that $x^*(\tau,t,\sigma)\in C^{(0,e,e)}_{\tau,t,\sigma}(R\times R^m\times R^m)$. From the equivalence of the problem of multiperiodic solutions of the equation

$$D^n_ex+a_1(\sigma)D^{n-1}_ex+...+a_n(\sigma)x=f(\tau,t,\sigma,x) \tag{11}$$

with solvability of the integral equation $x=Tx$ in the space $S^{\theta,\omega}_\Delta$, the rationale for Theorem 2 below follows.

Theorem 2. *Under conditions (2),* 1^0-4^0 *([1]) and (4), (5) with respect to the coefficients* a_j, $j=\overline{1,n}$ *and (9) with respect to the right side of* f *by parameters related by the relation (10), system (11) allows a unique multiperiodic solution* $x^*(\tau,t,\sigma)$ *with periods* (θ,ω,ω).

Reference

[1] A.A. Kulzhumiyeva and Zh.A. Sartabanov, *General bounded multiperiodic solutions of linear equation with differential operator in the direction of the main diagonal.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, 92 (2018), no. 4, 44–53.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

М. Рамазанов[1], **А. Сейтмуратов**[2], **Н. Медеубаев**[3], **Г. Мукеева**[4]

[1,3] *КарГУ им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*
[2,4] *Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан*
E-mails: ramamur@mail.ru, medeubaev65@mail.ru, angisin_@mail.ru

Теория колебания и методика расчета колебаний плоского элемента строится на основе рассмотрения плоского элемента в трехмерной постановке механики твердого деформированного тела, при тех же граничных и начальных условиях. Трехмерная задача решается с использованием методов интегральных преобразований Фурье и Лапласа. В преобразованиях строятся общие решения трехмерной динамической задачи [1].

Рассмотрим ряд задач колебания плоских прямоугольных элементов при произвольных граничных условиях по краям элемента с целью определения частот собственных колебаний методом декомпозиции.

Изложим постановку метода на случай плоского элемента, когда материал элемента упругий. В дальнейшем метод будем применять и для элементов из вязкоупругого материала.

В случае плоского элемента из упругого материала приближённое уравнение поперечного колебания четвёртого порядка запишем в виде

$$\Delta^2 W - D_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta W + D_1\frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + D_2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты D_0, D_1, D_2 определяются геометрией и свойствами материала плоского элемента.

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$W = exp(i\frac{b}{h})W_0(x,y), \tag{2}$$

Метод декомпозиции в теории колебания в общей постановке сводится к следующему.

Формулируется постановка вспомогательных задач.

1) Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^4 \nu_1}{\partial \alpha^4} = f^{(1)}(\alpha,\beta), \tag{3}$$

2) Найти решение уравнения

$$\lambda^4\frac{\partial^4 \nu_2}{\partial \beta^4} = f^{(2)}(\alpha,\beta), \tag{4}$$

Граничные условия на краях пластинки зависят от условий её закрепления или на свободном крае от напряжений.

3) Оставшаяся часть

$$2\lambda\frac{\partial^4 \nu_3}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda D_0(\frac{b}{h})^2\xi^2(\frac{\partial^2\nu_3}{\partial\alpha^2} + \lambda^2\frac{\partial^2\nu_3}{\partial\beta^2}) + \lambda_1^4 D_0(\frac{b}{h})^2\xi^2[D_1(\frac{b}{h})^2\xi^2 - D_2]\nu_3 +$$

$$+f^{(1)}(\alpha,\beta) + f^{(2)}(\alpha,\beta) = 0. \tag{5}$$

Следуя методу декомпозиции будем считать, что

$$\nu_3 = \frac{1}{2}[\nu_1 + \nu_2] \tag{6}$$

и условие должно выполняться в заданных точках плоского элемента.

Общие решения уравнений вспомогательных задач (3) и (4) имеют вид

$$\begin{gathered}\nu_1 = f_1(\alpha,\beta) + \frac{\alpha^3}{6}\varphi_1(\beta) + \frac{\alpha^2}{2}\varphi_2(\beta) + \alpha\varphi_3(\beta) + \varphi_4(\beta),\\ \\ \nu_1 = f_1(\alpha,\beta) + \frac{\beta^3}{6}\psi_1(\alpha) + \frac{\beta^2}{2}\psi_2(\alpha) + \beta\psi_3(\alpha) + \psi_4(\alpha).\end{gathered} \tag{7}$$

Используя частные решения задач при заданных граничных условиях и используя приближённые представления (6), для нахождения неизвестных $a_{n,m}^{(j)}$ получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений, нетривиальное решение которых приводит к частотному уравнению.

Если все четыре края произвольно закреплены, то получить точные частотные уравнения не представляются возможным.

Для таких задач можно успешно применять приближённый метод получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции, развитого в работах профессора Г.И. Пшеничного [2] для задач статики.

Таким образам, приближённый метод декомпозиции позволяет находить частоты собственных колебаний плоских элементов. Задачи для вязкоупругого материала плоского элемента решаются аналогично.

Список литературы

[1] I.G. Filippov, S.I. Filippov, *Dynamic stability theory of rods.* Proceedings of the Russian-Polish seminar. Theoretical Foundations of construction. Warsaw, 63–69.

[2] G.I. Pshenichnov, *Decomposition method for solving the equation and boundary value problems.* M.: 182(1985), no 4, 792–794.

КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ Г-СИНОВОЙ СИСТЕМОЙ И НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА

Ж.Р. Мырзакулова

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com

В настоящей работе рассматривается эквивалентный аналог для нелинейного (2+1)-мерный уравнения Шредингера (НУШ), который имеет следующии вид:

$$
\begin{aligned}
iq_{1t}+q_{1yx}-v_1q_1-w_1q_2 &= 0, && (1)\\
iq_{2t}+q_{2xy}-v_2q_2-w_2q_1 &= 0, && (2)\\
ir_{1t}-r_{1yx}+v_1q_1+w_2q_2 &= 0, && (3)\\
ir_{2t}-r_{2xy}+v_2q_2+w_1q_1 &= 0, && (4)\\
v_{1x}-(2q_1r_1+q_2r_2)_y &= 0, && (5)\\
v_{2x}-(q_1r_1+2q_2r_2)_y &= 0, && (6)\\
w_{1x}-(q_1r_2)_y &= 0, && (7)\\
w_{2x}-(r_1q_2)_y &= 0. && (8)
\end{aligned}
$$

где q, r- комплекснозначные функции, $r_i=\delta_i\bar{q}_i$, $i=1,2$ и $\delta_i=\pm1$. Система уравнения НУШ (1)-(8) интегрируемо с помощю метода обратной задачи рассеяния. Следовотельно, имеет представление Лакса (ПЛ):

$$
\begin{aligned}
\Phi_x &= U\Phi, && (9)\\
\Phi_t &= 2\lambda\Phi_y+V\Phi, && (10)
\end{aligned}
$$

где U и V-матричные операторы. Калибровочно эквиваленная спиновая система, которая называется Г-спиновой системой, выглядит как:

$$
i\Gamma_t+\frac{1}{2}\left[\Gamma_x,\Gamma_y\right]+\frac{1}{2}\left[\Gamma,\Gamma_{xy}\right]+2i\left(z\Gamma\right)_x=0, \qquad (11)
$$

$$
z_x=\frac{i}{12}tr\left\{\Gamma\left[\Gamma_x,\Gamma_y\right]\right\}. \qquad (12)
$$

Здесь $\Gamma=g^{-1}\Sigma g,\ \Gamma^2=I$. Уравнения (11) и (12) также интегрируемы и допускают следующее ПЛ:

$$
\Psi_x=U'\Psi=-i\lambda\Gamma\Psi, \qquad (13)
$$

$$
\Psi_t=2\lambda\Psi_y+V'\Psi, \qquad (14)
$$

где $V'=2i\lambda z\Gamma+\frac{\lambda}{2}\left[\Gamma,\Gamma_y\right]$ и λ-изоспектральный параметр.

Определение 1 Интегрируемые уравнения называются калибровочно эквивалентными, если они связаны преобразованием $\Phi=g^{-1}\Psi$, $U=gU'g^{-1}+g_xg^{-1}$, $V=gV'g^{-1}+g_tg^{-1}$ с матричной функцией g, не зависящей от символов псевдодифференциальных по другим независимым переменным операторов, входящих в U и V.

Теорема 1 Г-*спиновая система (11) - (13) калибровочно эквивалентно НУШ (1) - (8).*

В дальнейшем нам предстоит получить точные солитонные решения для Г-спиновой системы с помощью преобразование Дарбу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РКв рамках грантов 0118RK00935 и 0118RK00693.

Список литературы

[1] К.Р. Есмаханова, Ж.Р. Мырзакулова. *Бездисперсионный предел уравнения Ма.* Вестник КазНУ, 102 (2019), no. 2, 12-21.

[2] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, *Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингераи и уравнения ферромагнетика Гейзенберга.* Теор. Мат. Физ. 38 (1979), no. 1., 26–34.

[3] К.Р. Есмаханова, Ж.Р. Мырзакулова, *Бездисперсионный предел уравнения Ма.* Вестник КазНУ, 102 (2019), no. 2, 12-21.

[4] Chen Hai, Zhou Zi-Xiang, *Darboux Transformation with a Double Spectral Parameter for the Myrzakulov-I Equation.* Chin. Phys.Lett., 31 (2014), no. 12, 120504.

[5] Zh. Myrzakulova, G. Nugmanovazand and R. Myrzakulov, *Notes on integrable motion of two interacting curves and two-layer generalized Heisenberg Ferromagnet Equations.* DOI:10.13140/RG.2.2.35045.04320.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И МАКСИМАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ В $L_2(R^2)$ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СИЛЬНО РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.Б. Муратбеков[1], Е.Н. Баяндиев[2]

[1] *Таразский государственный педагогический университет, Тараз, Казахстан*
[2] *ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
E-mail: musahan_m@mail.ru

В работе рассматривается дифференциальное уравнение с неограниченными коэффициентами

$$(L+\lambda I)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b(y)u_x + q(y)u + \lambda u = f(x,y), \tag{1}$$

где $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \geqslant 0$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $b(y), q(y)$ удовлетворяют условию: i) $|b(y)| \geqslant \delta_0 > 0$, $q(y) \geqslant \delta > 0$ непрерывные функции в $\mathbb{R}(-\infty,\infty)$ и ограничены в каждом компакте.

Как известно, подробный анализ показывает, что для изучения спектральных характеристик дифференциальных операторов заданных в неограниченной области важной задачей является вопрос о поведении коэффициентов на бесконечности.

Определение 1 *Функция* $u(x,y) \in L_2(R^2)$ *называется решением уравнения (1), если существует последовательность* $\{u_n(x,y)\} \subset C_0^\infty(R^2)$ *такая, что*

$$\|u_n - u\|_{L_2(R^2)} \to 0, \quad \|(L+\lambda I)u_n - f\|_{L_2(R^2)} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Определение 2 *Будем говорить, что решение гиперболического уравнения (1) называется максимально регулярным, если имеет место оценка*

$$\|u_{xx} - u_{yy}\|_2 + \|u_y\|_2 + \|b(y)u_x\|_2 + \|q(y)u\|_2 \leqslant c \cdot (\|Lu\|_2), \tag{2}$$

где $c > 0$ *- не зависит от* $u \in D(L)$, $\|\cdot\|_2$ *- норма в пространстве* $L_2(R^2)$.

Для эллиптических операторов, в случае неограниченных областей максимальная регулярность (разделимость) исследована в работах М. Отелбаева, К.Х. Бойматова и др.

Приведем формулировки основных результатов.

Теорема 1 *Пусть выполнено условие i). Тогда для любого* $f(x,y) \in L_2(R^2)$ *при* $\lambda \geqslant 0$ *существует единственное решение уравнения (1).*

Предположим, что коэффициенты $b(y)$, $q(y)$ помимо условия i) удовлетворяют условиям:
ii) $\mu = \sup\limits_{|y-t|\leqslant 1} \frac{b(y)}{b(t)} < \infty$; $\mu = \sup\limits_{|y-t|\leqslant 1} \frac{q(y)}{q(t)} < \infty$.
iii) $q(y) \leqslant c_0 \cdot b^2(y)$, при $y \in \mathbb{R}$, $c_0 > 0$ - постоянное число, где $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия i)-iii). Тогда существует единственное решение уравнения (1), которое является максимально регулярным.*

Пример 1 *Для уравнения*

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + e^{100\cdot|y|} \cdot u_x + e^{10\cdot|y|} \cdot u = f \in \mathbb{L}_2(R), \ y \in (-\infty, \infty),$$

нетрудно проверить, что все условия теорем 1-2 выполняется. Следовательно, для него существует единственное решение, такое, что для него справедлива оценка (2).

Список литературы

[1] M. Muratbekov, M. Otelbaev, *On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain.* EURASIAN MATHEMATICAL JOURNAL, volume 7, no. 1 (2016), 50-67.

MAXIMAL REGULARITY AND TWO-SIDED ESTIMATES FOR THE APPROXIMATION NUMBERS OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR STURM-LIOUVILLE EQUATION WITH RAPIDLY OSCILLATING COEFFICIENTS IN $L_2(R)$

M.B. Muratbekov[1], **M.M. Muratbekov**[2]

[1] *Taraz State Pedagogical Institute, Taraz, Kazakhstan*
[2] *Kazakh University of Economics Finance and International Trade, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: mmuratbekov@kuef.kz

The set of functions integrable with respect to the square of the module in each strictly internal subdomain $\Omega \subset R$ is denoted by $L_{2,loc}(R)$.

The set of functions from $L_{2,loc}(R)$ having generalized first-order derivatives (from $L_{2,loc}(R)$) will be denoted by $W^1_{2,loc}(R)$. By $W^1_2(R)$ we denote the subset of $W^1_{2,loc}(R)$, which elements together with the first generalized derivatives belong to $L_2(R)$. By $W^2_{2,loc}(R)$ we denote the set of all functions $u \in L_{2,loc}(R)$ which with their generalized derivatives up to and including the second order belong to $L_{2,loc}(R)$.

$\|\cdot\|_2$ is the norm of an element in $L_2(R)$, $\|\cdot\|_{2,1}$ is the norm of an element in $W^1_2(R)$, $\|\cdot\|_{2,loc}$ is the norm of an element in $L_{2,loc}(R)$.

Consider the nonlinear Sturm-Liouville equation

$$Ly = -y'' + q(x,y)\,y = f(x) \in L_2(R), \quad R = (-\infty, \infty). \tag{1}$$

Suppose that $q(x,y)$ satisfies the conditions::

i) $q(x,y)$ is a continuous mapping $R \times C$ in $[\delta, \infty)$, $\delta > 0$, C is a set of complex numbers:

$$ii)\ \sup_{|x-\eta|\leqslant 1}\ \sup_{|c_1-c_2|\leqslant A} \frac{q(x,c_1)}{q(\eta,c_2)} \leqslant \mu(A) < \infty,$$

where A is a finite value, $\mu(A)$ is a continuous function from A.

Definition 1. The function $y \in L_2(R)$ is called a solution of the equation (1) if there exist a sequence $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W^1_2(R)$ such that $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W^2_{2,loc}(R)$, $\|y_n - y\|_{L_{2,loc}} \to 0$ $\|Ly_n - f\|_{L_{2,loc}} \to 0$ as $n \to \infty$.

Definition 2. We say that the solution $y(x) \in L_2(R)$ of the equation (1) called the maximal regular in $L_2(R)$ if $q(x,y)\,y \in L_2(R)$, $y'' \in L_2(R)$.

Theorem 1. Let the conditions *i*)-*ii*) be fulfilled. Then there is the most regular solution to the equation (1).

The condition *ii*) is imposed in Theorem 1 limits the potential oscillations. This condition is removed in the following theorem. In order to formulate the theorem, we introduce the following condition:

$$i_0)\ \sup_{x\in R}\ \sup_{|c_1-c_2|} \frac{q(x,c_1)}{Q^2(x,c_2)} < \infty,$$

$Q(x,c_2)$ is a special averaging of the function $q(x,c_1)$, i.e.

$$Q(x,c_2) = \inf_{d>0}\left(d^{-1} + \int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} q(t,c_2)\,dt\right),$$

where A is a finite value.

Theorem 2. Let the conditions i)-i_0) be fulfilled. Then there exist the maximal regular solution to the equation (1).

Example 1. Let $q(x,y) = e^{|x|} \cdot \sin^2 e^{|x|} + e^{|y|}$. Then it is not difficult to verify that all conditions of Theorem 2 are satisfied for the equation

$$Ly = -y'' + \left(e^{|x|} \cdot \sin^2 e^{|x|} + e^{|y|}\right) y = f(x).$$

Therefore, there exists a solution $y(x)$ for the equation such that $y''(x) \in L_2(R)$.

This shows that Theorem 2 holds for a very wide class of nonlinear equations, including equations with potentials that are rapidly oscillating at infinity.

Now, consider the question B), i.e. finding such sequences of numbers that have approximative properties of the type a)-b). To do this, we study the behavior of the Kolmogorov k-widths of the set

$$M = \left\{u \in W_2^1(R) : \|-y'' + q(x,y)\, y\|_2^2 \leqslant T\right\}.$$

By the definition of the Kolmogorov k-width of the set M is called the quantity

$$d_k(M, L_2) = d_k = \inf_{\{\ell_k\}} \sup_{u \in M} \inf_{v \in \ell_k} \|u - v\|_2,$$

where ℓ_k is a subspace of dimension k.

Note that the Kolmogorov widths of a compact set have the following properties: 1) $d_0 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant ... \geqslant d_k \geqslant ...$, 2) $d_k \to 0$ as $k \to \infty$.

By $L_2^2(R, q(x,0))$ we denote the space obtained by completing $C_0^\infty(R)$ with respect to the norm

$$\left\|y \cdot L_2^2(R, q(x,0))\right\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(|y''|^2 + q(x,0)\,|y|^2\right) dx\right)^{1/2}$$

Theorem 3. Let the conditions i)-ii) be fulfilled. Then any bounded set is compact in $L_2^2(R, q(x,0))$ if and only if

$$\lim_{|x| \to \infty} q(x,0) = \infty. \qquad (*)$$

We introduce the following counting function $N(\lambda) = \sum_{d_k > \lambda} 1$ of those widths d_k greater than $\lambda > 0$.

Theorem 4. Let the conditions i)-ii) be fulfilled. Then the estimate

$$A^{-1}\lambda^{-1/2} mes\left(x \in R : q(x,0) \leqslant c^{-1}\lambda^{-1}\right) \leqslant N(\lambda) \leqslant c\lambda^{-1/2} mes\left(x \in R : q(x,0) \leqslant c\lambda^{-1}\right)$$

holds, $A > 0$ is a constant depending, generally speaking, on T.

Example 2. Let us take $q(x) = |x| + |y| + 1$. Then, by virtue of Theorem 4, the estimate $c^{-1}\lambda^{-3/2} \leqslant N(\lambda) \leqslant c\lambda^{-3/2}$ holds for the distribution function of the widths of the set $M = \left\{y \in W_2^1(R) : \ \|-y'' + q(x,y)\, y\|_2^2 \leqslant 1\right\}$, where $c > 0$ is a constant. Since $N(\lambda)$ is a monotone function then we have $d_k \sim \frac{c}{k^{2/3}}, \ \ k = 1, 2, 3, ...$

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИСТЕМЫ МАНАКОВА И ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА

А.Р. Мырзақұл, Г.Н. Нугманова

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нұр-Сұлтан, Казахстан
E-mail: akbota.myrzakul@mail.ru, nugmanovagn@gmail.com

Векторному нелинейному уравнению Шредингера, ассоциируемому симметрическим пространством $su(n+1)/s(u(1))$, при $n=2$, соответствует двухкомпонентная система Манакова [1]

$$iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 = 0, \tag{1a}$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 = 0, \tag{1b}$$

где $q_j(x,t)(j=1,2)$ - комплекснозначные функции, $|q_j|^2 = q_j\bar{q}_j$, здесь $(-)$ означает комплексное сопряжение.

Представление Лакса, позволяющее применение метода обратной задачи рассеяния для системы (1) имеет вид

$$\Phi_x = U\Phi, \quad \Phi_t = V\Phi,$$

где $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ и $U = -i\lambda\Sigma + U_0, \quad V = -2i\lambda^2\Sigma + 2\lambda U_0 + V_0,$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -\bar{q}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{q}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_0 = i\begin{pmatrix} |q_1|^2 + |q_2|^2 & q_{1x} & q_{2x} \\ \bar{q}_{1x} & -|q_1|^2 & -q_1 q_2 \\ \bar{q}_2 x & -\bar{q}_2 q_1 & -|q_2|^2 \end{pmatrix}.$$

Геометрическая связь уравнения (1) с двухслойной спиновой системой [2]

$$\mathbf{A}_t + \mathbf{A} \times \mathbf{A}_{xx} + u_1\mathbf{A}_x + 2\nu_1\mathbf{H} \times \mathbf{A} = 0, \tag{2a}$$

$$\mathbf{B}_t + \mathbf{B} \times \mathbf{B}_{xx} + u_2\mathbf{B}_x + 2\nu_2\mathbf{H} \times \mathbf{B} = 0 \tag{2b}$$

была установлена в [3]. Здесь $\mathbf{A}(x,t) = (A_1, A_2, A_3)$ и $\mathbf{B}(x,t) = (B_1, B_2, B_3)$ являются единичными спиновыми векторами, $\mathbf{H}$ - магнитное поле, а u_j и ν_j - потенциалы.

В данном докладе демонстрируется калибровочная эквивалентность между системами (1) и (2), которая преобразует решение уравнения (1) к решению уравнения (2), и наоборот.

Работа выполнена в рамках проекта грантового финансирования по Договору $no132$ от 12.03.2018.

Список литературы

[1] N. Kostov, R. Dandoloff, V. Gerdjikov, G. Grahovski, *The Manakov System as Two Moving Interacting Curves.* Proc. of Int. Workshop "Complex structures and vector fields Sofia, Bulgaria. Eds.: K.Sekigawa, S.Dimiev. World Scientific (2007).

[2] A. Myrzakul, R. Myrzakulov, *Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system.* Int.Jour. Geom. Meth. Mod. Phys., 14 (2017), no. 7, 1750115.

[3] G. Nugmanova, A. Myrzakul, *Integrability of the two-layer spin system.* Proc. of XXth Int. Conf. "Geometry, Integrability and Quantization Varna, Bulgaria (2018), 208–214.

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Н. Оспанов, Р.Д. Ахметкалиева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва,
Нур-Султан, Казахстан
E-mail: ospanov_kn@enu.kz, raya_84@mail.ru

Эллиптическая система с промежуточными коэффициентами

$$-\triangle U + \sum_{i=1}^{n} A_i\,(x)\,U_{x_i} + B\,(x)\,U = F(x), \tag{1}$$

где $x{=}\,(x_1{,}x_2{\dots}\ x_n)\ \ \in R^n$ и $U{=}\,(u_1\ u_2{\dots}\ u_n)$, интенсивно изучается в связи с приложениями в стохастическом анализе и стохастических дифференциальных уравнениях [2]. Когда промежуточные коэффициенты $A_i\,(x)\,(i\,=\,\overrightarrow{1,n}\ )$ растут на бесконечности не быстрее, чем некоторая степень функции $B\,(x) \geqslant \delta > 0$, вопросы корректной и коэрцитивной разрешимости (1) в пространствах L_p ($1 \leqslant p < \infty$) были исследованы в ряде работ (см. [1, 12, 8, 13] и ссылки в них).

Многомерная система (1), где каких-либо подчиненностей между коэффициентами нет, изучался только при условии, что $|A_i|$ $(i = \overrightarrow{1,n}\ )$ могут расти не быстрее, чем $|x|\ln|x|$ $\ (|x| \gg 1)$, в [5], см., также, [4, 6, 7]. Случай, когда $n = 1$, а промежуточный коэффициент уравнения (1) имеет более быстрый рост, рассмотрен недавно в [9, 10], где установлены коэрцитивная разрешимость и некоторые аппроксимативные свойства решения. Однако, методы работ [9, 10] являются сугубо одномерными. Возникает вопрос, существует ли решение системы (1) с независимо растущим промежуточным коэффициентом в случае $n > 1$? Будет ли оно единственным и выполняется ли для него коэрцитивная оценка?

В настоящей работе указанные вопросы мы обсуждаем для системы (1), в котором $n = 2$. Тогда, как известно (см. [3]), систему (1) можно записать в следующей комплексной форме:

$$L\omega{=}\omega_{\overline{z}z} + a\omega_{\overline{z}} + b\omega_z + d\overline{\omega_z} + e\overline{\omega_{\overline{z}}} + k\omega + m\overline{\omega} = f, \tag{2}$$

где $z = x + iy$, $\omega = u_1 + iu_2$, $\omega_{\overline{z}}{=}\ 1/2(\omega_x{+}\mathrm{i}\omega_y)$, $\omega_z{=}\ 1/2\omega_x{-}i\omega_y)$, а $F \in L_2(\mathbb{C})$ ($\mathbb{C}$ - комплексная плоскость). При этом поставленные выше задачи достаточно решить для комплексного уравнения (2). Результаты своих исследований мы также будем сформулировать в терминах коэффициентов уравнения (2).

Уравнение (2), имеющее неограниченные промежуточные коэффициенты a, b, d, и e, отличается от уравнений Шредингера, этим определяется сложность исследуемого вопроса. В работе мы доказываем однозначную разрешимость уравнения (2), а для его решения ω устанавливаем неравенство

$$\|\omega_{\overline{z}z}\|_2 + \|a\omega_{\overline{z}}\|_2 + \|b\omega_z\|_2 + \|d\overline{\omega_z}\|_2 + \|e\overline{\omega_{\overline{z}}}\|_2 \ + \|k\omega\|_2 + \|m\overline{\omega}\|_2 \leqslant C\|f\|_2.$$

Такая оценка называется оценкой максимальной регулярности, она играет важную роль в изучении гладкостных и аппроксимативных свойств решения ω, а также для оценки спектра соответствующего (2) дифференциального оператора L. Также, она может быть использована для изучения квазилинейных уравнений, являющихся обобщениями (2).

В доказательствах утверждений мы используем результаты работы [11], а также применяем некоторые весовые неравенства Харди.

Работа поддержана проектом AP05131649 Комитета науки министерства образования и науки Республики Казахстан

Список литературы

[1] W. Arendt, G. Metafune, D. Pallara, *Schrödinger operators with unbounded drift,* J. Oper. Theory 55 (2006), No. 1, 185-211.

[2] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Röckner, S.V. Shaposhnikov, *Fokker-Planck-Kolmogorov Equations.* AMS. Math. Surv. and Monogr. 207 (2015).

[3] И.Н. Векуа, *Generalized analytic functions,*-M.: Наука, 1988.

[4] S. Fornaro, L. Lorenzi, *Generation results for elliptic operators with unbounded diffusion coefficients in L_p - and C_b-spaces,* Discrete Contin. Dyn. Syst. 18 (4) (2007) 747-772.

[5] M. Hieber, L. Lorenzi, J. Pruss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, *Global properties of generalized Ornstein–Uhlenbeck operators on $L_p(R^N, R^N)$ with more than linearly growing coefficients.* J. Math. Anal. Appl. 350 (2009) 100-121.

[6] M. Hieber, O. Sawada, *The Navier–Stokes equations in R^n with linearly growing initial data,* Arch. Ration. Mech. Anal. 175 (2005) 269-285.

[7] G. Metafune, D. Pallara, V. Vespri, *L_p-estimates for a class of elliptic operators with unbounded coefficients in R^N,* Houston J. Math. 31 (2005) 605-620.

[8] G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, *The domain of the Ornstein–Uhlenbeck operator on an Lp-space with invariant measure,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) 1(2002), No. 2, 471-485.

[9] K. N. Ospanov, *L_1-maximal regularity for quasilinear second order differential equation with damped term,* Elect. J. Qual. Theory Dif. Eq. 2015, No. 39, 1-9.

[10] K. Ospanov, R. D. Akhmetkaliyeva, *Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation,* Elect. J. Qual. Theory Dif. Eq. 2012, No. 66, 1-12.

[11] К.Н. Оспанов, *О нелинейной обобщенной системе Коши-Римана на всей плоскости,* Сиб. мат. журн. -1997, No. 2, 365-371.

[12] G. Da Prato, V. Vespri, *Maximal Lp-regularity for elliptic equations with unbounded coefficients,* Nonl. Anal. 49(2002), 747-755.

[13] P. J. Rabier, *Elliptic problems on R^N with unbounded coefficients in classical Sobolev spaces,* Math. Z. 249(2005), 1-30.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

М.Н. Оспанов

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва,
Нур-Султан, Казахстан
E-mail: myrzan66@mail.ru

Пусть $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим уравнение

$$u_{xtt} = a_0(x,\, t)u_{xt} \,+\, a_1(x,\, t)u_{tt} \,+\, a_2(x,\, t)u_x \,+\, a_3(x,\, t)u_t \,+\, a_4(x,t)u + \, f(x,\, t), \tag{1}$$

где функции $a_i(x,t)$ $(i = \overline{0,4})$ и $f(x,t)$ предполагаются непрерывными и, вообще говоря, неограниченными на $\overline{\Omega}$.

В настоящее время весьма активно изучаются и вызывают большой практический и теоретический интерес локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения (1), поскольку к нему сводятся ряд прикладных задач физики, механики и биологии [2]. Уравнение (1) в случае, когда $a_1 = 0$, исследовалось в работе [1].

Через $C_*(\bar{\Omega},\, R)$ обозначим пространство ограниченных функций, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0, \omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0, \omega]$ с нормой $\|V\| = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |V(x,t)|$.

В [3] для уравнения (1) исследована задача

$$u(0,\, t) \,=\, \psi(t),\; u_x(x,\, t),\, u_{xt}(x,\, t) \,\in C_*(\bar{\Omega},\, R), \tag{2}$$

где $\psi(t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая и ограниченная на R вместе со своими производными $\dot{\psi}(t)$ и $\ddot{\psi}(t)$ функция. Была доказана

Теорема 1 [3]. *Пусть коэффициенты $a_0(x,t)$ и $a_2(x,t)$ уравнения (1) непрерывны на $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующим условиям $a) - e)$:*

a) $a_2(x,t) \geqslant \gamma > 0$;

b) $|a_0(x,t)\,| \,\leqslant\, K_1\sqrt{a_2(x,t)}$;

c) $\frac{a_2(x,t)}{a_2(x,\bar{t})} \,\leqslant\, c$, при $t,\, \bar{t} \,\in\, R:\, |t-\bar{t}| \,<\, 1,\; c$- const;

d) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех $t \in R$ и $x',\, x'' \,\in\, [0,\, \omega]$: $|x' \,-\, x''| \,<\, \delta$ выполнено неравенство $\left|\frac{a_2(x',t)\,-\,a_2(x'',t)}{a_2(x'',t)}\right| \,<\, \varepsilon$;

e) $P_{a_0,a_2}(x,\, t) \,\leqslant\, K,\, P_{a_j,a_2}(x,\, t), P_{f,a_2}(x,\, t) \,\in\, C_*(\overline{\Omega},\, R)$ $(j \,=\, 1,3,4)$. *Здесь* $P_{\alpha,\beta}(x,\, t) = \frac{\alpha(x,t)}{\sqrt{\beta(x,t)}}$.

Тогда существует единственное решение $u(x,\, t)$ задачи (1), (2) и справедлива оценка:

$$\max\, \{\|u\|\,,\, \|u_x\|\,,\, \|u_t\|\,, \|u_{tt}\|\,,\, \|u_{xt}\|\} \leqslant \tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ - постоянная, зависящая только из исходных данных.

Цель настоящей работы - установление максимальной регулярности решения уравнения (1) при некоторых дополнительных ограничениях на коэффициенты. Для этого нами получена оценка для нормы производной u_{xtt} третьего порядка решения задачи (1), (2). Обозначим

$$\theta(x,t) = \frac{1}{d}\int_t^{t+d} a_2(x,\tau)d\tau,$$

где $d-$ некоторое положительное число. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть*

g) $f(x,\, t) \in C_*(\overline{\Omega},\, R)$;

h) $\psi(t)\theta(x,t) \in C_*(\bar{\Omega},\, R),\ \dot{\psi}(t)\theta(x,t) \in C_*(\bar{\Omega},\, R),\ \ddot{\psi}(t)\theta(x,t) \in C_*(\bar{\Omega},\, R).$

Тогда для решения u задачи (1), (2) справедлива оценка:

$$\max\left\{\|u\|,\, \|u_x\|,\, \|u_t\|, \|u_{tt}\|,\, \|u_{xt}\|,\, \|u_{xtt}\|\right\} \leqslant C_1 \|f\|,$$

где постоянная C_1 зависит только от исходных данных.

Работа поддержана проектом AP05131649 Комитета науки министерства образования и науки Республики Казахстан

Список литературы

[1] Джумабаев Д.С., Оспанов М.Н. *Об ограниченности на полосе решения и его производных системы гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами.* Математический журнал. **6** (2006), No. 1, 61-66.

[2] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* - М.: Высшая школа. 1995. -301 с.

[3] Оспанов М.Н. *Об одном свойстве решения псевдопараболического уравнения третьего порядка в некомпактной области* Межд. конф. «Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня работников науки Республики Казахстан». Тезисы докл. Алматы, 2019, с. 126-127.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

М. Отелбаев[1], Б.Д. Кошанов[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан*
E-mail:[1] otelbaevm@mail.ru, [2]koshanov@list.ru

§1. Постановка задачи В этом разделе будут рассмотрены финальные задачи I, II и III для уравнения теплопроводности. В конце раздела они будут записаны как финальные задачи для абстрактного эволюционного уравнения.

Задача I. Пусть $\Omega-$ трехмерный куб с центром в нуле, ребрами паралельными координатным осям с длинами равными 2π, т.е. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : -\pi \leqslant x_i \leqslant \pi, i = 1, 2, 3\}$.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(x,t), \quad t \in [0,T], \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ u(x,t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

по пространственным переменным задаются условия

$$u|_{x_i=-\pi} = u|_{x_i=\pi}, \quad \tfrac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=-\pi} = \tfrac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=\pi}, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}|_{x_3=-\pi} = F_-(x_1,x_2,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x_3}|_{x_3=\pi} = F_+(x_1,x_2,t). \tag{3}$$

В этой задаче $F_+(\cdot)$ и $F_-(\cdot)$ означают "подачу тепла"с верхней и с нижней поверхностей куба Ω. В наших задачах $F_\pm(\cdot)$ будут означать "подаваемое тепло"управляемым лазерным источником тепла.

Задача II. В области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнение (1). По пространственным переменным задаются условия (2) из задачи I и условия

$$u(x,t)|_{x_3=-\pi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3}|_{x_3=\pi} = F_+(x_1,x_2,t). \tag{4}$$

Задача I отличается от задачи II только условиями (4) (вместо условии (3)).

Задача III. В области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнения (1). По пространственным переменным задаются периодические условия,т.е.

$$u|_{x_i=-\pi} = u|_{x_i=\pi}, \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=\pi}, \quad i=1,2,3. \tag{5}$$

Эта задача отличается от задачи I и II. Тепло передается только из внутри, а не из поверхности.

Пусть $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируемые на $[-1,1]$ функций такие, что

$$\begin{cases} \varphi_1(x_3) = 1 \ \text{ при } \ \frac{1}{2} \leqslant x_3 \leqslant \pi, \ \ \varphi_1(x_3) = 0 \ \text{ при } \ -\pi \leqslant x_3 \leqslant -\frac{1}{2}, \\ \varphi_2(x_3) = 0 \ \text{ при } \ \frac{1}{2} \leqslant x_3 \leqslant \pi, \ \ \varphi_2(x_3) = 1 \ \text{ при } \ -\pi \leqslant x_3 \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{7}$$

Положим

$$\begin{cases} \omega(x_1,x_2,x_3,t) = \varphi_1(x_3)(x_3-\pi)F_+(x_1,x_2,t) + \varphi_2(x_3)(x_3+\pi)F_-(x_1,x_2,t), \\ v = u-\omega, \quad u = v+\omega. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда для v имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = (\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega) + g(x,t), \quad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \\ v(x,t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x_3}|_{x_3=-\pi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3}|_{x_3=\pi} = 0, \\ v|_{x_i=-\pi} = v|_{x_i=\pi}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{x_i=-\pi} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{x_i=\pi}, \quad i=1,2. \end{cases} \tag{9}$$

При выводе (9) учтено, что $F_\pm(x_1,x_2,t)$ удовлетворяет по переменным x_1 и x_2 периодическим условиям.

Таким образом, задача I сведена к задаче (9), в которой $\omega(x_1,x_2,x_3,t)$ определяется равенствами (8).

Теперь возьмем

$$\begin{cases} \omega(x_1,x_2,t) = \varphi_1(x_3)(x_3-\pi)F_+(x_1,x_2,t), \\ v = u-\omega, \quad u = v+\omega, \end{cases} \tag{10}$$

где $\varphi_1(x_3)$ та же самая, что и в (8).

Из задачи II и из (10) получаем для v задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = (\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega) + g(x,t), \quad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \\ v(x,t)|_{t=0} = 0, \\ v|_{x_3=-\pi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3}|_{x_3=\pi} = 0, \\ v|_{x_i=-\pi} = v|_{x_i=\pi}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{x_i=-\pi} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{x_i=\pi}, \quad i=1,2. \end{cases} \tag{11}$$

§2. Общее операторное уравнение

Пусть H- сепарабельное гильбертово пространство. Все три задачи из §1 можно записать в виде уравнения

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t), \\ u(t)|_{t=0} = \overset{0}{u}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $u(t), f(t)$– вектор-функции со значениями в H, A–самосопряженный оператор. Оператор A, вектор- функция $f(t)$ и вектор $\overset{0}{u}$ для каждой из задач I,II и III будут свои и разные.

Для уравнения (2.1) рассмотрим финальную задачу:

Пусть при $t = 0$ значение $u(t)$ равно вектору $\overset{0}{u}$. Выбрать вектор- функцию $f(t)$– так, чтобы в момент времени $t = T$ значение $u(t)$ было

$$u(t)|_{t=T} = u(T) = \overset{1}{u}. \tag{2.2}$$

Из уравнения (2.1) имеем

$$\overset{1}{u} = u(T) = u(t)|_{t=T} = e^{-AT}\, \overset{0}{u} + \int_0^T e^{-A(T-\eta)} f(\eta)d\eta. \tag{2.3}$$

Если

$$\overset{1}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{1}{u}_n\, e_n, \quad \overset{0}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{u}_n\, e_n, f(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta)e_n, \tag{2.4}$$

где e_j– полная ортонормированная система собственных векторов оператора A. Таким образом из (2.3) вытекают равенства

$$\overset{1}{u}_n - e^{-\lambda_n T}\, \overset{0}{u}_n = e^{-\lambda_n T} \int_0^T f_n(\eta)e^{\lambda_n \eta}d\eta \tag{2.5}$$

для $n = 1, 2, ...$ Здесь λ_j– собственные числа соответствующие к собственным векторам e_j.

Наоборот из (2.5) вытекают (2.3).

Функцию $f_n(t)$ представим в виде

$$f_n(t) = \left\{ \left[\int_0^T g_n(\eta)e^{-\lambda_n \eta}d\eta \right] \frac{e^{\lambda_n t}}{\int_0^T e^{2\lambda_n \eta}d\eta} + g_n(t) \right\} + c_n e^{\lambda_n t}. \tag{2.6}$$

Если $|f_n(t)|^2$– интегрируемая функция, то представление (2.6) возможно. Для C_n имеем

$$\int_0^T f_n(\eta)e^{\lambda_n \eta}d\eta = c_n \int_0^T e^{2\lambda_n \eta}d\eta = c_n \frac{e^{2\lambda_n T}}{2\lambda_n}.$$

Отсюда и из (2.5) имеем

$$c_n = e^{\lambda_n T} \left[\overset{1}{u}_n - e^{-\lambda_n T}\, \overset{0}{u}_n \right] \frac{2\lambda_n}{e^{2\lambda_n T} - 1}.$$

Поэтому для $f_n(t)$ имеем

$$f_n(t) = g_n(t) + \frac{2\lambda_n}{e^{2\lambda_n T} - 1} \left[-\overset{0}{u}_n + e^{\lambda_n T}\, \overset{1}{u}_n \right] e^{\lambda_n t} - \frac{2\lambda_n}{e^{2\lambda_n T} - 1} \left(\int_0^T g_n(\eta)e^{\lambda_n \eta}d\eta \right) e^{\lambda_n t} =$$

$$g_n(t) - \frac{2\lambda_n e^{\lambda_n t}}{e^{2\lambda_n T} - 1} \left[\overset{0}{u}_n - e^{\lambda_n T}\, \overset{1}{u}_n + \int_0^T g_n(\eta)e^{\lambda_n \eta}d\eta \right].$$

Или в силу (2.4) и (2.3) имеем

$$f(t) = g(t) - 2A(e^{2AT} - 1)^{-1}e^{At}\left[\overset{0}{u} - e^{AT}\overset{1}{u} + \int_0^T e^{A\eta}g(\eta)d\eta\right]. \qquad (2.7)$$

Можно $f_n(t)$ представить в виде

$$f_n(t) = g_n(t) - \lambda_n(e^{\lambda_n T} - 1)^{-1}\int_0^T g_n(\eta)e^{\lambda_n\eta}d\eta + \hat{c}_n, \qquad (2.8)$$

где

$$\hat{c}_n = \lambda_n(e^{\lambda_n T} - 1)^{-1}\int_0^T f_n(\eta)e^{\lambda_n\eta}d\eta. \qquad (2.9)$$

В этом случае (выражая $\hat{c}_n$ с помощью (2.5)) через $[\overset{1}{u}_n - e^{-\lambda_n T}\overset{0}{u}_n]$ для $f(t)$ получаем

$$f(t) = g(t) + A(1 - e^{-AT})^{-1}\left[\overset{1}{u} - e^{-AT}\overset{0}{u} - \int_0^T e^{-A(T-\eta)}g(\eta)d\eta\right]. \qquad (2.10)$$

Представление (2.10) совпадает с представлением использованным в работах [1-3]. Помимо представлении (2.7) и (2.10) можно придумать и другие представления.

Авторы были поддержаны грантом AP05135319, AP05133239 КН МОН РК.

Список литературы

[1] М. Отелбаев, А. Гасанов, Б. Акпаев, *Об одной задаче управления точечных источником тепла.* Доклады РАН, 435 (2010), 317-319.

[2] А.М. Гаджиев, А.И. Гасанов, А.Г. Фатуллаев, *Мат.моделироование.* мат.моделирование, 3(1) (1991), 18-24.

[3] М. Отелбаев, С.М. Молдабеков, *об управлении линейным операторным уравнением.* В сб.:Дифференциальные уравнения и их приложения. Алма-Ата: КазГу, (1982), 6-9.

[4] М. Отелбаев, М.К. Болеева, Изв. НАН РК, Сер.физ.-матем (1994), no.3, 46-51.

[5] A. Hasanov, M. Otelbaev, Б. *Identification of an Unknown Source Term in Parabolic equation from Final Over determination.* Weak.

[6] Ш.С. Смагулов, Ж.А. Балдыбек, М.О. Отелбаев, *Метод дополненных облостей для уравнений Навье-Стокса.* Известия НАН РК, Серия физико-математическая, (1993).

[7] Ш.С. Смагулов, М.О. Отелбаев, А.Т. Мухаметжанов, *Об одном новом приближенном методе решения нелинейных краевых задач.* Препринт ИА РК, (1997), no.21, 34.

[8] Ш.С. Смагулов, М.О. Отелбаев, *О новом методе приближенных решений краевых задач в произвольной области.* Известия НАН РК, 7 (1998), no.6, 452-455.

[9] Ш.С. Смагулов, М.О. Отелбаев, *Эллиптика-параболическая аппроксимация для уравнения Навье-Стокса.* Монография, (2002), 9.

TRACE FORMULA FOR THE POISSON POTENTIAL FOR THE TIME-FRACTIONAL HEAT EQUATION

G. Oralsyn[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: g.oralsyn@list.ru

The aim of this paper is to obtain a trace formula of the Poisson potential for the time-fractional heat equation to piecewise smooth lateral surfaces of cylindrical domains. As a byproduct, we establish a nonlocal initial boundary value problem for the time-fractional heat equation and give its solution. For a bounded function g with $\operatorname{supp} g \subset \Omega$ we consider the inhomogeneous Cauchy problem for the time-fractional heat equation

$$\Diamond_{\alpha,t} u = \partial_t^\alpha u - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,x) = g(x), \ x \in \Omega, \tag{2}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a simply-connected bounded open domain with the boundary $\partial\Omega \in C^{1+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ is the Laplacian and

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\tau} u'_\tau(\tau,x) d\tau$$

is the fractional Caputo time derivative of order $0 < \alpha \leqslant 1$. Here Γ is the gamma function. We shall note that for $\alpha = 1$ the fractional derivative coincides with the standard time derivative. Therefore, our results cover previously known results for the (classical) heat equation (see, e.g. [1]). The fundamental solution of the time-fractional heat equation (1) can be given by the formula

$$E(x,t) = \theta(t)\pi^{-d/2} t^{\alpha-1} |x|^{-d} H_{12}^{20} \left(\frac{1}{4}|x|^2 t^{-\alpha} |_{(-d/2,1),(1,1)}^{(\alpha,\alpha)} \right), \tag{3}$$

where H is the Fox H-function and θ is the Heaviside step function. For further discussions in this direction, we refer our paper [2] and references therein.

Thus, we obtain a trace formula of the “time-fractional"Poisson potential

$$\int_\Omega E(x-y,t) g(y) dy \tag{4}$$

to the surface $\partial\Omega \times (0,T)$, where $\partial\Omega$ is the boundary of the bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Then we use this to introduce a new nonlocal initial boundary value problem for the time-fractional heat equation.

One of the main results is

Theorem 1 *For each bounded g with* $\operatorname{supp} g \subset \Omega$ *the time-fractional Poisson potential u satisfies the following nonlocal boundary condition:*

$$-\frac{u(x,t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \partial_n E(x-y,t-\tau) u(y,\tau) dS_y \\ - \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} E(x-y,t-\tau) \partial_n u(y,\tau) dS_y = 0, \tag{5}$$

for all $x \in \partial\Omega$ and $t \in (0,T)$. Here ∂_n is the outer normal derivative on the boundary $\partial\Omega$ of the bounded domain Ω.

Conversely, if u is a solution of the time-fractional heat equation

$$\Diamond_{\alpha,t} u = 0, \tag{6}$$

satisfying the initial condition

$$u|_{t=0} = g, \quad \text{on} \quad \Omega, \tag{7}$$

and the boundary condition (5)*, then it is given as the time-fractional Poisson potential by formula* (4) *and it is unique.*

Reference

[1] T.Sh. Kal'menov and G.D. Arepova, *On a heat and mass transfer model for the locally inhomogeneous initial data.* Bulletin SUSU MMCS, 9 (2016), 124–129.

[2] M.A. Sadybekov and G. Oralsyn, *Nonlocal initial boundary value problem for the time-fractional diffusion equation.* Electron Journal of Differential Equations. 201 (2017), 1–7.

MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF QUASILINEAR SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH D_c OPERATOR AND ϵ-HEREDITARY PERIOD

Zh.A. Sartabanov, G.M. Aitenova, G.A. Abdikalikova

K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: sartabanov42@mail.ru

We research the problem for the existence of (θ, ω)-periodic solutions $u(\tau, t)$ by $(\tau, t) = (\tau, t_1, ..., t_m) \in R \times R^m$ of system

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int\limits_{\tau-\epsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,t-c\tau+cs)u(s,t-c\tau+cs)ds +$$

$$+ f\left(\tau, t, u(\tau,t), \int\limits_{\tau-\epsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,t-c\tau+cs)u(s,t-c\tau+cs)ds\right) \tag{1}$$

with the differentiation operator $D_c = \partial/\partial\tau + \langle c, \partial/\partial t\rangle$ acting along the characteristics $t = c\tau - cs + \sigma$ with initial data $(s,\sigma) \in R \times R^m$, $R = (-\infty, +\infty)$; $c = (c_1, ..., c_m)$ is constant vector with non-zero coordinates c_j, $j = \overline{1,m}$; $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1, ..., \partial/\partial t_m)$ is vector; $\langle c, \partial/\partial t\rangle$ is scalar product of vectors; $A(\tau,t)$ and $K(\tau,t,s,\sigma)$ are given $n\times n$-matrices; $f(\tau,t,u,v)$ is n-vector-function; u and $v \in \overline{R}^n_\Delta$, $\overline{R}^n_\Delta$ is closure $R^n_\Delta = \{w \in R^n : |w| < \Delta = const\}$; $(\theta,\omega) = (\theta, \omega_1, ..., \omega_m)$ is vector-period with rationally incommensurable coordinates; ϵ is positive constant.

In the present work are investigated to obtain conditions for the unique solvability of initial problem and of the existence multiperiodic solutions quasilinear systems of integro-differential equations with a given differentiation operator D_c.

With problem of this kind involves the research of hereditary vibrations in mechanics and electromagnetism [5]. Various processes of physics, mechanics and biology lead to the consideration integro-differential equations of the form (1) with a finite period of heredity [2,5]. The research of multi-frequency oscillations led to the concept of multidimensional time. In this regard, the theory of oscillations develops the theory of periodic by multidimensional time solutions of partial differential equations with respect to time variables [1,3,4]. In this paper, the methods to extend the research of problem.

Suppose the conditions are satisfied

$$A(\tau+\theta, t+q\omega) = A(\tau,t) \in C^{(1,2e)}_{\tau,t}(R\times R^m), q\in Z^m, \tag{2}$$

$$K(\tau+\theta, t+q\omega, s,\sigma) = K(\tau,t,s+\theta,\sigma+q\omega) =$$
$$= K(\tau,t,s,\sigma) \in C^{(1,2e,1,2e)}_{\tau,t,s,\sigma}(R\times R^m\times R\times R^m), q\in Z^m, \tag{3}$$

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,u,v) = f(\tau,t,u,v) \in C^{(1,2e,2\widetilde{e},2\widetilde{e})}_{\tau,t,u,v}\left(R\times R^m\times \overline{R}^n_\Delta\times \overline{R}^n_\Delta\right), q\in Z^m. \tag{4}$$

Where the vectors e and $\widetilde{e}$ have unit components and they differ from each other in their sizes m and n; $R^n_\Delta = \{u\in R^n : |u|<\Delta\}$, $\overline{R}^n_\Delta$ is closure R^n_Δ.

Using the method of successive approximations, we can determine the resolving operator $U(s,\tau,t)$ with the initial condition $U(s,s,t)=E$, which has the properties

$$D_cU(s,\tau,t) = A(\tau,t)U(s,\tau,t) + \int\limits_{\tau-\epsilon}^{\tau} K(\tau,t,\xi,h(\xi,\tau,t))U(s,\xi,h(\xi,\tau,t))d\xi, \tag{5}$$

$$U(s+\theta,\tau+\theta,t+q\omega) = U(s,\tau,t), q\in Z^m. \tag{6}$$

Where E is the identity n-matrix. In the case of splitting the resolving operator $U(s,\tau,t)$ into the sum of two matrices $U_-(s,\tau,t)$ and $U_+(s,\tau,t)$, possessing properties similar to (5) and (6) and satisfying estimates

$$|U_-(s,\tau,t)| \leqslant ae^{-\alpha(\tau-s)}, \tau\geqslant s; |U_+(s,\tau,t)| \leqslant ae^{\alpha(\tau-s)}, \tau\leqslant s \tag{7}$$

we call the corresponding linear homogeneous system of integro-differential equations the system with property of exponential dichotomy, where $a\geqslant 1$ and $\alpha>0$.

We consider for the system (1) of initial problem with condition

$$u|_{\tau=\tau^0} = u^0(t) \in S^\omega_\rho \tag{1^0}$$

in the space $S^\omega_{\Delta,\delta}$ of n-vector functions $u(\tau,t)$ ω-periodic by t and continuously differentiable by $\tau\in R_\delta = \{\tau\in R: |\tau-\tau^0|<\delta\}$ and $t\in R^m$: $u(\tau,t+q\omega) = u(\tau,t) \in C^{(1,e)}_{\tau,t}(R_\delta\times R^m)$.

Suppose the conditions are satisfied

$$(1+\alpha)l\delta < 1, (1+\alpha)\left[\rho + (r+l\Delta)\delta\right] \leqslant \Delta. \tag{8}$$

Theorem 1 *Under conditions (2)-(4) and (8) the initial problem (1)-(1^0) is unique solvability in the space $S^\omega_{\Delta,\delta}$ of n-vector-functions $u(\tau,t)$ ω-periodic by t and continuously differentiable by $(\tau,t)\in R_\delta\times R^m$ and bounded by the norm $\|u\| = \|u\|_0 + \|\partial u/\partial\tau\|_0 + \|\partial u/\partial t\|_0$ of the constant $\Delta>0$, where $\|u\|_0 = sup\,|u(\tau,t)|$ at $(\tau,t)\in\overline{R}_\delta\times R^n$, $\overline{R}_\delta$ is closure R_δ, $\|\partial u/\partial t\|_0 = \sum_{j=1}^m \|\partial u/\partial t_j\|_0$.*

Let the parameters α, a, l, r, Δ be related by inequality

$$a(r + l\Delta) < \alpha\Delta. \tag{9}$$

Theorem 2 *Suppose that under conditions (2)-(3) and the corresponding linear homogeneous system of integro-differential equations has the property of exponential dichotomy (5)-(7). Then the quasilinear system of integro-differential equations (1), which has property (4) under condition (8)-(9), admits a unique (θ, ω)-periodic solution limited by $\Delta > 0$.*

Reference

[1] A.A. Kulzhumiyeva, Zh.A. Sartabanov, *On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables.* Eurasian Mathematical Journal, 8(2017), no. 1, 67-75.

[2] A.M. Nakhushev, *Equations of mathematical biology.* Vysshaia shkola, 1995 (in Russian).

[3] Zh.A. Sartabanov, *Pseudoperiodic solutions of a system of integro-differential equations.* Ukrainian Mathematical Journal, 41(1989), no.1, 125-130 (in Russian).

[4] D.U. Umbetzhanov, *Almost periodic solutions of evolution equations.* Alma-Ata, Nauka, 1990 (in Russian).

[5] V. Volterra, *Theory of functionals, integral and integro-differential equations.* Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).

RESEARCH OF MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF PERTURBED NONLINEAR AUTONOMOUS SYSTEMS WITH DIFFERENTIATION OPERATOR ON THE VECTOR FIELD

Zh.A. Sartabanov, B.Zh. Omarova

K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: sartabanov42@mail.ru

We consider the of perturbed quasilinear system

$$Dx = Ax + f(\tau, t, \zeta, x), \tag{1}$$

with differentiation operator

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \nu I \zeta + g, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle,$$

where $\tau \in R$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R^m$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_l) \in R_\delta^{2l}, \zeta_j = (\xi_j, \eta_j), j = \overline{1, l}$, $R_\delta^2 = \left\{(\xi_j, \eta_j) \in R^2 : |\zeta_j| = (\xi_j^2 + \eta_j^2)^{1/2} < \delta\right\}$, $\delta = const > 0$; $\dfrac{\partial}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t_m}\right)$ and

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \zeta_l}\right)$$

, $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_j} = \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}, \dfrac{\partial}{\partial \eta_j}\right)$, $j = \overline{1,l}$ are vector operators of differentiation; $I = diag(I_2, \dots, I_2)$ is a l-block matrix, I_2 is a two-dimensional symplectic unit, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$ is a constant vector, $\nu I = diag(\nu_1 I_2, \dots, \nu_l I_2)$, $(g_1(\tau), \dots, g_l(\tau)) = g(\tau)$, $(a_1(\tau,t), \dots, a_m(\tau,t)) = a(\tau,t)$ are vector-functions, $\langle , \rangle$ is the sign of the scalar product of vectors; A is a constant $n \times n$ matrix,$f = f(\tau,t,\zeta,x)$ is a n-vector-function of the variables $(\tau,t,\zeta,x) \in R \times R^m \times R^{2l}_\delta \times R^n_\Delta$, $R^n_\Delta = \{x \in R^n : |x| < \Delta\}$, $\overline{R}^{2l}_\delta, \overline{R}^n_\Delta$ are closure of $R^{2l}_\delta, R^n_\Delta$ respectively.

The main problem is to study the oscillatory process described by the given system, to determine the structures of multiperiodic solutions and the solution of the initial problem for the system (1). The problems about structures of the solutions of systems were not considered in the works [1,2,5].

The problem of multiperiodic solutions of the autonomous system of the form (1) was considered in [3,4], that is when time variables τ, t were clearly not included in the system.

In this case, some input data of the system received the perturb dependent on time variables τ, t. Nevertheless, some subsystems connected by a common system are autonomous in nature and they generate periodic components of motion with incommensurable periods. In the study of multiperiodic motions of the general system, taking into account the effects of the natural vibrations of subsystems depending on the commensurability or incommensurability of periods (frequencies) is important. Hence, the relevance of the investigated problem follows. The essence of the method for studying the structures of multiperiodic solutions of the system (1) is the combination of known methods [1,2,5] with the approaches used in [3,4].

We suppose that conditions

a) A non-linear vector function $f(\tau,t,\zeta,x)$ is (θ,ω)-periodic with respect to (τ,t), continuous with respect to $\tau \in R$, twice continuously differentiable with respect to $(t,\zeta,x) \in R^m \times R^{2l}_\delta(z) \times R^n_\Delta$ and continuous on closure $R \times R^m \times \overline{R}^{2l}_\delta(z) \times \overline{R}^n_\Delta$ along with all derivatives. We represent these properties of the vector-function $f(\tau,t,\zeta,x)$ in the form:

$$f\left(\tau+\theta, t+q\omega, \zeta, x\right) = f\left(\tau,t,\zeta,x\right) \in C^{0,2\hat{e},2\tilde{e},2e}_{\tau,t,\zeta,x}\left(R \times R^m \times R^{2l}_\delta(z), R^n\right), q \in Z^m, \tag{2}$$

where $C^{0,2\hat{e},2\tilde{e},2e}_{\tau,t,\zeta,x}\left(R \times R^m \times R^{2l}_\delta(z), R^n\right)$ is a class of functions with the specified areas of variation of the variables and smoothness $(0, 2\hat{e}, 2\tilde{e}, 2e)$, respectively, with them, $\hat{e}, \tilde{e}, e$ are constant vector smoothness indices with unit components of dimension $m, 2l, n$ respectively, $R^{2l}_\delta(z) = \left\{\zeta \in R^{2l} : |\zeta - z| < \delta\right\}$ $z = (z_1, \dots, z_l)$, $z_k = z_k(\tau) = \left[Z_k^{-1}(\tau+\beta_k) - Z_k^{-1}(\tau)\right]^{-1} \int\limits_\tau^{\tau+\beta_k} Z_k^{-1}(s) g_k(s)\, ds$, $Z_k(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\nu_k\tau & -\sin\nu_k\tau \\ \sin\nu_k\tau & \cos\nu_k\tau \end{pmatrix}$, $k = \overline{1,l}$ is the vector-function.

b) A linear system $Dx = Ax$ does not have (θ,ω)-periodic solutions except zero.

Theorem 1 *Under conditions a), b) and parameters related by relation*

$$c_*(\chi + c\Delta) \leqslant \Delta, c_0(\chi + c\Delta) < 1$$

system (1) with properties (2) has a unique (θ,ω)-periodic solution of definite structure, where $\varepsilon = exp\left[2\left\|\dfrac{\partial a}{\partial t}\right\|_\circ \theta\right]$, $\gamma = \sup\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant \theta} \int\limits_\tau^{\tau+\theta} \left|\left[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1} X^{-1}(s)\right| ds$, $c_0 = max\Big\{\left[\gamma + 8l\gamma(1+2l\Delta) + \gamma\varepsilon(1+m\Delta) + (1 + \gamma|A| + \gamma\sqrt{2l} + \gamma(2l)^{3/2}\Delta) + \gamma\|a\|_\circ\varepsilon \times \times(1+m\Delta)\right]; \left[8l\gamma + \sqrt{2l}\gamma\right]; \left[\gamma\varepsilon m + \gamma m\varepsilon\|a\|_\circ\right]\Big\}$, $c = max\left\{c_1, c_2, c_3, c_4\right\}$, *$c_1, c_2, c_3, c_4$ are positive constants,which are also Lipschitz constants of vector-matrix functions* $f_\theta, \dfrac{\partial f_\theta}{\partial \zeta}, \dfrac{\partial f_\theta}{\partial t_j},$

$j=\overline{1,m}$, $\dfrac{\partial f_\theta}{\partial x}$ with respect to x, $\chi = max\{\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4\}$, $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4$ are positive constants that bounded the functions $|f_\theta|$, $\left|\dfrac{\partial f_\theta}{\partial \zeta}\right|$, $\left|\dfrac{\partial f_\theta}{\partial t_j}\right|$, $j=\overline{1,m}$, $\left|\dfrac{\partial f_\theta}{\partial x}\right|$ from above at $x=0$. The structure of the multiperiodic solution is related to the multiperiodicity of characteristics of the vector fields of time and space variables, the matricant factor, and the perturbing force.

Reference

[1] V.Kh. Kharasakhal, *Almost-periodic solutions of ordinary differential equations.* Alma-Ata, Nauka, 1970 (in Russian).

[2] A.A. Kulzhumiyeva, Zh.A. Sartabanov, *Periodic solutions of the systems of differential equations with multidimensional time.* Uralsk, RITs ZKGU, 2013 (in Russian).

[3] Z.A. Sartabanov, B.Z. Omarova, *Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field.* AIP Conference Proceedings, 1997 (2018), 020041-1–020041-4.

[4] Z.A. Sartabanov, B.Zh. Omarova, *On multi-periodic solutions of quasilinear autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field.* Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, 94 (2019), no. 2, 70–83.

[5] D.U. Umbetzhanov, *Almost multiperiodic solutions of partial differential equation.* Alma-Ata, Nauka, 1979 (in Russian).

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А.А. Сарсенби

ЮКГУ им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан
E-mail:abdisalam@mail.kz, abdisalam@mail.ru

Рассмотрим вопрос об устойчивости базисности собственных функций спектральной задачи

$$-u''(-x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x)\,,\ -1 < x < 1, u(-1) = 0,\ \ u(1) = 0 \tag{1}$$

с непрерывным комплекснозначным коэффициентом $q(x)$, то есть будет ли базисом в пространстве $L_2(-1,1)$ система собственных функций этой спектральной задачи.

В работах [1],[2] исследована спектральная задача

$$-u''(-x) = \lambda u(x)\,,\ -1 < x < 1, \tag{2}$$

$$u(-1) = 0,\ u(1) = 0. \tag{3}$$

Было установлено, что система собственных функций вида

$$\left\{\sin k\pi x,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\quad \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)\pi x,\quad l = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \right\}$$

образует ортонормированный базис пространства $L_2\,(-1,\ 1)$. Построена функция Грина краевой задачи (2), (3).

Обозначим через $G_q\,(x, t, \lambda)$ функцию Грина задачи (1), а через $G\,(x, t, \lambda)$— функцию Грина задачи (2), (3).

Пусть

$$\sigma_m\,(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{P_m} G(x,t,\lambda)2\rho d\rho\right] f(t)\,dt$$

частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (2), (3), где $\forall f(x) \in L_1(-1,1)$. Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (1) обозначим через

$$S_m\,(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{P_m} G_q(x,t,\lambda)2\rho d\rho\right] f(t)dt.$$

Такое представление разложения по собственным функциям возможно только в случае, когда спектральная задача (1) имеет не более конечного числа кратных собственных значений. Поэтому в дальнейшим мы предполагаем, что собственные значения спектральной задачи (1) являются простыми, начиная с некоторого номера. Последовательность $S_m\,(f)$ называют равносходящимся с последовательностью $\sigma_m\,(f)$ на промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, если $S_m - \sigma_m \to 0$ равномерно на этом промежутке при $m \to \infty$.

Теорема 1 *Для любой функции* $f\,(x) \in L_1\,(-1,1)$ *последовательность* $S_m\,(f)$ *равносходится с последовательностью* $\sigma_m\,(f)$.

Из доказанной теоремы легко следует базисность собственных функций спектральной задачи (1).

Теорема 2 *Система корневых функций спектральной задачи (1) с непрерывным комплекснозначным коэффициентом* $q\,(x)$ *образует базис пространства* $L_2\,(-1,1)$.

Работа выполнена в рамках грантового проекта AP 05131225.

Список литературы

[1] A.M. Sarsenbi, *Unconditional bases related to anonclassical second-order differential operator.* Differential Equations, 44 (2010), no. 4, 509-514.

[2] M.A. Sadybekov, A.M. Sarsenbi, *Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution.* Differential Equations, 48 (2012), no. 8, 1112-1118. DOI:10.1134/S001226611208006X.

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А.М. Сарсенби[1], М. Утелбаева[2]

[1] *ЮКГУ им. М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан*
[2]

E-mail:abzhahan@mail.ru

Для возмущенного волнового уравнения с инволюцией следующего вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 u(-x,t)}{\partial x^2} - q(x)\,u(x,t)\,, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0, \tag{1}$$

рассматривается следующая смешанная задача

$$u(x,0) = \varphi_1(x)\,, \; u_t(x,0) = \varphi_2(x)\,, u(-1,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

где $-1 < \alpha < 1$, $q(x)$ - вещественная непрерывная функция. Применение метода Фурье приводит спектральной задаче вида

$$-X''(x) + \alpha X''(-x)\,q(x)\,X(x) = \lambda X(x)\,, -1 < x < 1, \; X(-1) = X(1) = 0. \tag{3}$$

Для доказательства разрешимости смешанной задачи (1), (2) важное значение имеет следующий известный факт [1].

Теорема 1 *Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным, то система собственных функций $\{X_k(x)\}$ спектральной задачи (3) образует полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(-1,1)$.*

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2 *Пусть для смешанной задачи (1), (2) выполнены следующие условия:*
1) вещественная функция $q(x)$ неотрицательна;
2) число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным $(-1 < \alpha < 1)$;
3) начальные данные $\varphi_1(x)\,, \varphi_2(x) \in C^2[-1,1]$ таковы, что $\varphi_1(-1) = \varphi_1(1) = 0$, $\varphi_2(-1) = \varphi_2(1) = 0$.

Тогда существует единственное решение смешанной задачи (1), (2) и оно представимо в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) X_k(x)$$

по полной ортонормированной системе системе собственных функций $\{X_k(x)\}$ спектральной задачи (3).

Работа выполнена в рамках грантового проекта AP 05131225.

Список литературы

[1] A.A. Sarsenbi, *Unconditional basicity of eigenfunctions' system of Sturm-Liouville operator with an involutional perturbation.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Special issue, 3(91)/2018, pp/ 117-127.

RIESZ BASIS OF ROOT FUNCTIONS OF PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH SYMMETRIC POTENTIAL

M.A. Sadybekov[1] **and N. Kakharman**[1,2]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Al-Farabi Kazakh National University;*
E-mail:[1]*sadybekov@math.kz,* [2]*n.kakharman@math.kz*

In this talk, we consider spectral problems for the Sturm - Liouville differential operator

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \text{ on } (0,1) \tag{1}$$

with periodic and antiperiodic boundary conditions

$$u'(0) = \pm u'(1), u(0) = \pm u(1). \tag{2}$$

The Riesz basis property of the system of root functions of such problems is proved in the case of a potential $q(x)$ that is summable on an interval, when it satisfies the symmetry condition $q(x) = q(1-x)$.

Theorem 1 *If $q(x) \in L_1(0,1)$ and $q(x) = q(1-x)$ for almost all $x \in (0,1)$, then the system of eigen- and associated functions of the problem* (1), (2) *is Riesz basis in $L_2(0,1)$.*

For equation (1) consider the Dirichlet problem

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0, \tag{3}$$

and the Neumann problem

$$u'(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \tag{4}$$

Lemma 1 *If $q(x) \in L_1(0,1)$ and $q(x) = q(1-x)$, then all eigen- and associated functions of the Dirichlet problem* (1), (3) *and the Neumann problem* (1), (4) *possess one of the properties of symmetry:*

$$u(x) = u(1-x) \qquad \text{or} \qquad u(x) = -u(1-x) \qquad \text{for all} \qquad x \in [0,1] \tag{5}$$

Acknowledgements

The first author was supported by the MES RK grant AP05133271, the second author was supported by the MES RK grant AP05134615.

Reference

[1] M. Sadybekov, G. Oralsyn *Nonlocal initial boundary value problem for the time-fractional diffusion equation.* Electronic Journal of Differential Equations. 201. 1–7 (2017).

[2] M.A. Sadybekov, N.S. Imanbaev. *Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property.* Eurasian Math. J. **8**(2), 40-46 (2017).

[3] M.A. Sadybekov, G. Dildabek, A. Tengayeva. *Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem.* Filomat. **31**(4), 981–987 (2017).

LAPLACE OPERATOR WITH NONLOCAL SAMARSKII-IONKIN TYPE BOUNDARY CONDITIONS IN A DISK

M.A. Sadybekov[1], A.A. Dukenbayeva[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: sadybekov@math.kz, dukenbayeva@math.kz

The Dirichlet and Neumann boundary value problems play an important role in the theory of harmonic functions and have been widely studied in literatures. Another important problem, called periodic boundary value problem, arises when one considers the problem in a one-dimensional case or in a multidimensional parallelepiped. For the first time, in [1] and [2], a new class of the boundary value problems for the Poisson equation in a multidimensional ball $\Omega \subset R^n, (k=1,2)$ was introduced:

Problem P_k. *Find a solution of the Poisson equation*

$$-\Delta u = f(x),\ x \in \Omega$$

satisfying the following periodic boundary conditions

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = \tau(x),\ x \in \partial\Omega_+,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial r}(x^*) = \nu(x),\ x \in \partial\Omega_+.$$

Here as usual $\partial\Omega_+$ is a part of the sphere $\partial\Omega$, for which $x_1 \geqslant 0$; each point $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ is matched by its "opposite"point $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) \in \Omega$, where the indices $\alpha_j \in \{-1, 1\}, j = 2, \dots, n$. Clearly, if $x \in \partial\Omega_+$, then $x^* \in \partial\Omega_-$.

These problems are analogous to the classical periodic boundary value problems. In [1], the well-posedness of these problems are investigated. They also showed the existence and uniqueness of the solution of the problem P_1, while the solution of the problem P_2 is unique up to a constant term and exists if the necessary condition of the well-posedness is held. The uniqueness and existence are shown by using the extremum principle and Green's function, respectively. In [2], they considered the problem P_k in the two dimensional case and showed the possibility of using the method of separation of variables. Moreover, in this case, the self-adjointness of these problems and its spectral properties are studied.

If we turn to the non-classical problems, then one of the most popular problems is the Samarskii-Ionkin problem, arisen in connection with the study of the processes occurring in the plasma in the 70s of the last century by physicists (see e.g. [3] and [4]).

In this report we continue the research from [1] and [2] devoted to the well-posedness and spectral properties of the Samarskii-Ionkin type boundary value problem for the Poisson equation. Namely, we consider a generalised form of the Samarskii-Ionkin type boundary value problem for the Poisson equation in the disk and investigate its well-posedness.

Let $\Omega = \{z = (x,y) = x + iy \in C : |z| < 1\}$ be the unit disk, $r = |z|$ and $\varphi = \arctan(y/x)$. Consider the following problem SI_α.

Problem SI_α. *Find a solution of the Poisson equation*

$$-\Delta u = f(z),\ \ |z| < 1 \tag{1}$$

satisfying the following boundary conditions

$$u(1,\varphi) - \alpha u(1, 2\pi - \varphi) = \tau(\varphi),\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\varphi)-\frac{\partial u}{\partial r}(1,2\pi-\varphi)=\nu(\varphi),\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \tag{3}$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\varphi)+\frac{\partial u}{\partial r}(1,2\pi-\varphi)=\nu(\varphi),\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \tag{4}$$

where $\alpha\in\mathbb{R}$, $f(z)\in C^{\gamma}(\overline{\Omega})$, $\tau(\varphi)\in C^{1+\gamma}[0,\pi]$ and $\nu(\varphi)\in C^{\gamma}[0,\pi]$, $0<\gamma<1$.

It is clear that a necessary condition for the existence of the solution of the problem (1)–(3) in the class $C^1(\overline{\Omega})$ is given by the following condition:

$$\nu(0)=\nu(\pi)=0.$$

The antiperiodic boundary value problem (1), (2), (4) for $\alpha=-1$ and the periodic boundary value problem (1)–(3), for $\alpha=1$ were studied in [1] and [2].

In this report, we consider a Samarskii-Ionkin type boundary value problems (2), (4) and (2), (3) for the Laplace operator (1) in the disk. We consider well-posedness and spectral properties of the formulated problem. The possibility of separation of variables is justified. We obtain an explicit form of the Green function for this problem and an integral representation of the solution. The eigenfunctions and eigenvalues of these problems are constructed in the explicit form. Moreover, we prove the completeness of these eigenfunctions. In addition, we note that unlike the one-dimensional case the system of root functions of the problems consists only of eigenfunctions.

Reference

[1] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov, *On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball.* Eurasian Mathematical Journal, 3 (2012), no. 1, 143–146.

[2] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov, *On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk.* Differential Equations, 50 (2014), no. 2, 268–273.

[3] N.I. Ionkin, *Solution of a boundary-value problem in heat conduction theory with a nonclassical boundary condition.* Differentsial'nye Uravneniya [Differential Equations], 13 (1977), no. 2, 294–304.

[4] N.I. Ionkin, E.I. Moiseev, *A problem for a heat equation with two-point boundary conditions.* Differentsial'nye Uravneniya [Differential Equations], 15 (1979), no. 7, 1284–1295.

[5] A. Akbulut, V.S. Guliyev and R. Mustafayev, *On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces.* Mathematica Bohemica, 137 (2012), no. 1, 27-43.

[6] I.K. Petrov, *On algebra of elementary generalized functions.* Dokl. Akad. Nauk SSSR. 246 (1979), no. 4., 805–808.

SPECTRAL PROPERTIES OF DIFFERENTIAL OPERATORS WITH OSCILLATING COEFFICIENTS

Y.T. Sultanaev[1], N.F. Valeev[2], E.A. Nairova[3]

[1]*Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Ufa, Russia*
[2]*Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Russia*
[3]*Bashkir State University , Ufa, Russia*
E-mail: ellkid@gmail.com

It is supposed to discuss the spectral properties of differential operators (deficiency indices and the nature of the spectrum) with oscillating coefficients, as well as a number of new methods and approaches to the study of the asymptotic properties of solutions of singular differential equations.

Asymptotic formulas for the fundamental system of solutions of a differential equation contain important information about the defect indices of the minimal operator L_0 generated by the corresponding differential expression, as well as on the qualitative spectral properties of self-adjoint extensions of this operator.

Moreover, to date, there are no wide classes of differential operators with coefficients other than regular ones for which asymptotic formulas of the fundamental system of solutions would be obtained.

In this connection, any sufficiently meaningful classes of coefficients of a linear differential expression of arbitrary order are interesting, for which it is possible to construct the asymptotics of solutions for large values of the argument or spectral parameter, and to investigate spectral properties generated by these differential expressions of operators.

In [1], results for the Sturm-Liouville equation for the class of potentials containing oscillations were obtained. A model example of such an equation is an equation of the form:

$$-y'' + x^{\alpha}(1 + \sin x^{\beta})y = \lambda y, \quad \beta > \alpha/2 + 1. \tag{1}$$

For the solutions of this equation, it is possible to write out the asymptotic formulas of the solutions for $x \to \infty$, and then apply the obtained asymptotics to study the spectral properties of the corresponding minimal differential operator. The method of studying such equations is based on the transition to the Riccati equation, but it is difficult to extend such an approach to equations of higher degrees.

In [2], an attempt was made to apply an approach to the Sturm-Liouville equation with an oscillating potential based on a modification of the Levinson method, which consists in the transition to a system of differential equations, a number of matrix transformations of the resulting system and a further transition to a system of integral equations. It was possible to obtain results for equation (1) with the more stringent condition $\beta > \alpha + 1$, however, the method of investigation itself can be applied to equations of any order.

In [3], a fundamentally new approach was proposed to the study of the asymptotic behavior as $x \to \infty$ of solutions of a singular two-term equation view:

$$-\frac{d^n}{dx^n}y + \lambda q(x)y = 0$$

with a potential of $q(x)$ that is irregularly growing for $x > 0$ on a model example of a 4th order equation with an oscillating potential:

$$-\frac{d^4}{dx^4}y + \lambda^4(h(x) + q(x))y = 0,$$

where $h(x)$ is a function containing oscillation, for example, $h(x) = (1+x)^\alpha \sin(x^\beta)$, $q(x) = (1+x)^\alpha$, $\beta > 3\alpha/8 + 3/2$. The idea of the method consists in a series of matrix transformations of the corresponding system of differential equations, the transition to which is carried out by introducing quasi-derivatives using the Hausdorff matrix identity.

In a number of papers by the authors of the report, this method was developed. For example, in [4], asymptotic formulas were constructed for $x \to \infty$ for the fundamental system for solving an equation with an intermediate oscillating coefficient $h(x)$ and a coefficient $q(x)$ from the standard class of functions that are regular in Titchmarsh-Levitan:

$$ly = y(4) - \lambda(h(x)y)' - q(x))y = \lambda y.$$

The deficiency indices of the minimal differential operator L_0 generated by ly are also investigated.

In [5], the developed method of matrix transformations was implemented to obtain the asymptotics of the fundamental system of solutions for the following class of differential equations:

$$y(2n) - (q(x) + h(x))y = 0,$$

where $q(x)$ is a regular potential, and $h(x)$ is a rapidly oscillating perturbation of the form:

$$h(x) = \sum a_k(x) S_k(\phi(x)),$$

$S_k(t)$ -oscillating functions, $\phi(x)$, $a_k(x)$ - sufficiently smooth monotone functions.

In the future, it is planned to continue the study of similar classes of differential operators and their spectral properties.

This work was supported by RFBR N18-51-06002 Az-a

Reference

[1] Valeev N. F. , Sultanaev Y.T., *On the deficiency indices of a Sturm-Liuville operator with a rapidly oscillating perturbation*,Doklady mathematics, 2000, v.62, №2, pp. 271-273year.

[2] Makina N.K., Nazirova E.A., Sultanaev Ya.T. , *On the Methods of Study of the Asymptotic Behavior of Solutions of Singular Differential Equations*, Mathematical Notes, 2014, v.96, №4, pp. 603–608

[3] Valeev N.F., Nazirova E.A., Sultanaev Y.T. *On a new approach for studying asymptotic behavior of solutions to singular differential equations*, Ufa Math. J. ,2015, v.7, №3, pp. 9–14

[4] Valeev N.F., Eskermesuly A., Sultanaev Y.T., *On the deficiency index of a differential operator with fast oscillating coefficients*, Mathematical Notes , 2016, v.100, №3, pp.486-490

[5] Valeev N.F., Myakinova O.V., Sultanaev Y.T., *On the Asymptotics of Solutions of a Singular nth-Order Differential Equation with Nonregular Coefficients*, Math. Notes, 2018, v.104, №4, pp.606–611

ПОГРАНСЛОЙНЫЕ ЛИНИИ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

К.Б. Тампагаров

Жалал-Абадский государственный университет, г. Жалал-Абад, Кыргызстан
E-mail:tampagarovkak@mail.ru

В данном сообщении, расширим и уточним некоторые из введенных ранее [1] определений для систем уравнений второго порядка следующего вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + f(t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \tag{2}$$

где $t_0 \in \Omega \subset C,\ A(t) = (a_{mk}(t)),\ m,k = 1,2;\ z(t,\varepsilon) = (z_1(t,\varepsilon),\ z_2(t,\varepsilon)), f(t) = (f_1(t), f_2(t))$.

Введем положительную вещественнозначную функцию от решения

$$U(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon)z_1^*(t,\varepsilon) + z_2(t,\varepsilon)z_2^*(t,\varepsilon),$$

(для тех значений t, для которых она существует и однозначно определена) - означает комплексную сопряженность.

Определения и примеры.

Определение 1 *Если $U(t_1,\varepsilon)$ не ограничено при $\varepsilon \to 0$, то точка $t_1 \in \Omega$ называется сингулярной для задачи* (1)-(2).

Определение 2 *Если $U(t_1,\varepsilon)$ ограничено, но не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то точка $t_1 \in \Omega$ называется «промежуточной» для задачи* (1)-(2).

Определение 3 *Если $U(t_1,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, то точка $t_1 \in \Omega$ называется регулярной для задачи* (1)-(2).

Определение 4 *Точка, в любой окрестности которой существуют как регулярные, так и нерегулярные точки, называется погранслойной точкой.*

Примечание. Данные определения введены, потому что в двумерном случае, в отличие от одномерного [1], есть различия между «промежуточными» и погранслойными точками.

Определение 5 *Любое множество промежуточных точек, в любой окрестности которых существуют только нерегулярные (сингулярные) точки называются промежуточными множествами.*

Определение 6 *Любое множество промежуточных точек в любой окрестности которых существуют регулярные так и сингулярные точки называются погранслойными множествами.*

Определение 7 *Промежуточное (погранслойное) множество, являющееся непрерывным, локально взаимно-однозначным образом отрезка, называется промежуточной (погранслойной) линией.*

Определение 8 *Для промежуточной (погранслойной) точки $t_1 \in C$ число $v \in C_1$ называется промежуточным (погранслойным) направлением, если для любого малого $\sigma > 0$ существует такое малое $\delta > 0$, что множество*

$$\{t \in C || Arg(t - t_1) - Argv| < \sigma, |t - t_1| = \delta\}$$

содержит промежуточные (погранслойные) точки.

Определение 9 *Если в промежуточной (погранслойной) точке имеются два промежуточных (погранслойных) направления, составляющие угол, отличный от 180^0, то она называется точкой ветвления. Количество таких направлений, каждое из которых составляет угол, отличный от 180^0, с каким-либо другим направлением, будем называть количественным показателем ветвления.*

Примеры

Пример 1 *(наличие промежуточной, но не погранслойной линии).*

$$\varepsilon z_1'(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon),\ \varepsilon z_2'(t,\varepsilon) = -z_2(t,\varepsilon),\ z_{10} = 1,\ z_{20} = 1. \tag{3}$$
$$U(u+iv,\varepsilon) = e^{\frac{u+iv}{\varepsilon}} e^{\frac{u-iv}{\varepsilon}} + e^{-\frac{u+iv}{\varepsilon}} e^{-\frac{u-iv}{\varepsilon}} = e^{\frac{2u}{\varepsilon}} + e^{-\frac{2u}{\varepsilon}}.$$

При $u = 0$ получаем промежуточную линию: $U \equiv 2$. Вместе с тем, при $u \neq 0$ получаем, что $U(u+iv,\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, регулярных точек не существует. Следовательно, не существует погранслойных точек и погранслойных линий.

Отметим, что в одномерном случае погранслойные линии (как частные случаи линий Стокса), а также точки ветвления и др. получаются из условий вида $Re\int_0^t a_{11}(\tau)d\tau =$ 0. *В двумерном случае такой связи уже нет: погранслойные и промежуточные линии не определяются каким-либо одним равенством.*

Пример 2 *(2-ветвление погранслойных линий).*

$$\varepsilon z_1'(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon),\ \varepsilon z_2'(t,\varepsilon) = iz_2(t,\varepsilon),\ z_{10} = 1,\ z_{20} = 1. \tag{4}$$
$$U(u+iv,\varepsilon) = e^{\frac{u+iv}{\varepsilon}} e^{\frac{u-iv}{\varepsilon}} + e^{i\frac{u+iv}{\varepsilon}} e^{-i\frac{u-iv}{\varepsilon}} = e^{\frac{2u}{\varepsilon}} + e^{\frac{-v+iu}{\varepsilon}} e^{\frac{-v-iu}{\varepsilon}} = e^{\frac{2u}{\varepsilon}} + e^{\frac{-2v}{\varepsilon}}.$$

Итак, получаются два луча: $u < 0; v = 0$ и $u = 0; v > 0$, составляющие угол 90^0.

Пример 3 *(4-ветвление погранслойных линий).*

$$\varepsilon z_1'(t,\varepsilon) = 2tz_1(t,\varepsilon),\ \varepsilon z_2'(t,\varepsilon) = 2itz_2(t,\varepsilon),\ z_{10} = 1,\ z_{20} = 1. \tag{5}$$

$$U(u+iv,\varepsilon) = e^{\frac{(u+iv)^2}{\varepsilon}} e^{\frac{(u-iv)^2}{\varepsilon}} + e^{i\frac{(u+iv)^2}{\varepsilon}} e^{i\frac{(u+iv)^2}{\varepsilon}} =$$
$$= e^{\frac{u^2-v^2+2iuv}{\varepsilon}} e^{\frac{u^2-v^2-2iuv}{\varepsilon}} + e^{\frac{-2uv+i(u^2-v^2)}{\varepsilon}} e^{\frac{-2uv-i(u^2-v^2)}{\varepsilon}} = e^{2\frac{u^2-v^2}{\varepsilon}} + e^{\frac{-4uv}{\varepsilon}}.$$

Здесь получаются четыре луча: $u = 0;\ v > 0;\ u = 0;\ v < 0;\ u = v > 0;\ u = v < 0.$

Список литературы

[1] П.С. Панков, К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров, М.Р. Нарбаев, *Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями* Вестник ОшГУ, 1 (2013), 227-231.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА С НЕГЛАДКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Д.А. Турсунов, М.О. Орозов

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан
E-mail:tdaosh@gmail.com, gnezdo83@mail.ru

Рассмотрим задачу Дирихле для круга

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi)-\sqrt{1-\rho}h(\rho,\varphi)u_\varepsilon(\rho,\varphi)=f_\varepsilon(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(1,\varphi)=\psi_\varepsilon(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi), \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат, $h(\rho,\varphi)>0,\ (\rho,\varphi)\in\overline{D},\quad f_\varepsilon(\rho,\varphi)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi), f_k,\ h\in C^\infty(D),\ D=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho<1,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\},\ \psi_\varepsilon(\varphi)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k(\varphi),\ \psi_k\in C^\infty[0,2\pi],\quad u_\varepsilon(\rho,\varphi)$ неизвестная функция, а все остальные функции входящие в задачу Дирихле известные.

Задача (1), (2) является бисингулярной по терминологии академика А.М. Ильина [3]. Предельное уравнение, т.е. соответствующее невозмущенное уравнение ($\varepsilon=0$):

$$\sqrt{1-\rho}h(\rho,\varphi)u_0(\rho,\varphi)=-f_0(\rho,\varphi),$$

имеет не гладкое решение:

$$u_0(\rho,\varphi)=-\frac{f_0(\rho,\varphi)}{\sqrt{1-\rho}h(\rho,\varphi)}$$

в рассматриваемой области, а также это решение не удовлетворяет граничному условию (2).

Решение задачи (1), (2) существует и единственно [4]. Требуется построит полное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon\to0$.

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) строим обобщенным методом погранфункций [1, 2, 5], а при обосновании построенного формального асимптотического разложения используем принцип максимума [4].

Для начала рассмотрим структуру внешнего решения задачи Дирихле, которое ищем в виде

$$u_\varepsilon(\rho,\varphi)=u_0(\rho,\varphi)+\varepsilon u_1(\rho,\varphi)+\ldots+\varepsilon^n u_n(\rho,\varphi)+\ldots \tag{3}$$

Подставляя соотношение (3) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε получим:

$$\sqrt{1-\rho}h(\rho,\varphi)u_k(\rho,\varphi)=\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi)-f_k(\rho,\varphi),\ k=0,1,\ldots;\ u_{-1}(\rho,\varphi)\equiv0.$$

Отсюда имеем

$$u_k(\rho,\varphi) = \frac{\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi) - f_k(\rho,\varphi)}{\sqrt{1-\rho}h(\rho,\varphi)},\ k = 0,1,\dots;$$

В общем случае все эти функции $u_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности вида:

$$u_k(\rho,\varphi) = O\Big((1-\rho)^{-(5k+1)/2}\Big),\ k = 0,1,\dots,$$

т.е. с увеличением номера k в окрестности окружности $\rho = 1$ особенность растет.

Поэтому ряд (3) является асимптотическим только при $\varepsilon^{2/5} < 1-\rho$ и теряет асимптотический характер при $0 \leqslant 1-\rho \leqslant \varepsilon^{2/5}$.

Чтобы применить наш метод, мы сначала уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi) - \sqrt{1-\rho}h(\rho,\varphi)u_\varepsilon(\rho,\varphi) = f_\varepsilon(\rho,\varphi) - h_\varepsilon(\rho,\varphi) + h_\varepsilon(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,$$

т.е. вводим вспомогательную функцию (асимптотический ряд) $h_\varepsilon(\rho,\varphi)$.

С помощью функции $h_\varepsilon(\rho,\varphi)$ убираем особенности из внешнего решения и выбрасываем их в внутреннее решение [5].

Формальное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле ищем в виде

$$u_\varepsilon(\rho,\varphi) = V_\varepsilon(\rho,\varphi) + \chi(\rho)W_\mu(\tau,\varphi), \tag{4}$$

где

$$V_\varepsilon(\rho,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi),\ W_\mu(\tau,\varphi) = \sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi),$$

$\tau = (1-\rho)/\mu^2,\ \mu = \sqrt[5]{\varepsilon},\ \chi(\rho)$ — функция сглаживания, $\chi(\rho)\in[0,1],\ \chi\in C^\infty[0,1],\ \chi(\rho) = 1$ при $|1-\rho| \leqslant \delta/3,\ \chi(\rho) = 0$ при $2\delta/3 \leqslant |1-\rho|,\ 0 < \delta$ — малое число, независящее от малого параметра ε.

Доказывается

Теорема 1 *Для решения задачи Дирихле* (1), (2) *справедливо асимптотическое разложение* (5), *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $v_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(\overline{D}),\ w_k(\tau,\varphi)\in C^\infty(\overline{D}_0)$.

Список литературы

[1] K. Alymkulov, D.A. Tursunov *A Method for Constructing Asymptotic Expansions of Bisingularly Perturbed Problems.* RussianMathematics, 60 (2016), no. 12, 1–8.

[2] K. Alymkulov, D.A. Tursunov, B.A. Azimov *Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation.* FJMS. Pushpa Publishing House, Allahabad, India, 101 (2017), no. 3, 507–516.

[3] A.M. Il'in *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Nauka, Moscow. [Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992)].

[4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York; Nauka, Moscow,(1989)

[5] Д.А. Турсунов *Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге.* Труды ИММ УроРАН, 23 (2017), № 2, 239–249.

DESIGN OF HETEROGENEOUS SYSTEMS SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVE OF THIRD ORDER HYPERGEOMETRIC TYPE

Zh.N. Tasmambetov, Zh.K. Ubayeva

[1,2] *Aqtobe Regional Zhubanov State University, Aqtobe, RK*
E-mail:tasmam@rambler.ru, Zhanar_ubaeva@mail.ru

In the theory of ordinary differential equations, all special functions and classical orthogonal polynomials are particular cases of the Gauss hypergeometric function and each of them are solutions of the corresponding homogeneous hypergeometric type equation. This facilitated the study of their various properties. The use of various technical problems have stimulated the study of the corresponding non-homogeneous equations. The monograph Babister A.W. is devoted to the study of the design of solutions of such inhomogeneous equations [2].

This work considers an inhomogeneous, near-singularity (0,0) regular system consisting of two partial differential equations

$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(r_{j,k}-\alpha_{j,k}\cdot x^h)\cdot x^j\cdot y^k\cdot p_{j,k}=g(x,y),$$
$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(t_{j,k}-\beta_{j,k}\cdot y^h)\cdot x^j\cdot y^k\cdot p_{j,k}=q(x,y), \tag{1}$$

where $p_{0,0}=Z(x,y)$ - common unknown, for two equations of the system; $g(x,y)$ and $q(x,y)$ - polynomials of two variables.

It is required to establish a general method for constructing solutions of a given inhomogeneous system of hypergeometric type (1).

System (1) has a number of interesting properties.

1. If $g(x,y)\equiv 0$ and $q(x,y)\equiv 0$ we get the corresponding homogeneous system

2. If $h=0$ a homogeneous system is represented in the form of a system of Euler type, where expressions in brackets turn into constants: $r_{j,k}-\alpha_{j,k}=a_{j,k}, t_{j,k}-\beta_{j,k}=b_{j,k}$. The study of this case allows to establish the number of solutions of systems of the form (1) and the presentation form of the general solution.

Theorem 1. A system of Euler type has up to nine linearly independent partial solutions of the form $Z_l(x,y)(l=\overline{1,9})$ and the general decision is presented as a sum

$$Z(x,y)=\sum_{l=1}^{9}C_lZ_l(x,y)=\sum_{l=1}^{9}C_l\cdot x^{\rho_l}\cdot y^{\sigma_l}(l=\overline{1,9}). \tag{2}$$

Theorem 2. Conversion

$$x^h=u, y^h=\upsilon \tag{3}$$

homogeneous system derived from (1) if $g(x,y)\equiv 0$ and $q(x,y)\equiv 0$, lead to a hypergeometric system such as Campe de Feriet [1].

$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1}(r_{j,k}-\alpha_{j,k}\cdot u^h)\cdot u^j\cdot \upsilon^k\cdot p_{j,k}=0,$$

$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (t_{j,k} - \beta_{j,k} \cdot \upsilon^h) \cdot u^j \cdot \upsilon^k \cdot p_{j,k} = 0, \tag{4}$$

relatively new unknown u and υ.

Solutions of systems of the type (4) are generalized hypergeometric functions of two variables. They are defined by double rows.

$$F(x,y) = \Sigma_{m,n} a_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n,$$

the coefficients of which satisfy the relations:

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m,n)}{R(m,n)}, \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m,n)}{S(m,n)}.$$

Here P, Q, R and S - are polynomials from m and n.

Coefficients which are polynomials by u and υ in (4), can be calculated if polynomials are known P, Q, R, S.

Best studied hypergeometric function of the form

$$F\left(\begin{array}{c|ccccc|c} \mu & \alpha_1, & \cdots, & & & \alpha_\mu & \\ \nu & \beta_1, & \beta_1', & \cdots, & \beta_\nu, & \beta_\nu' & x, y \\ r & \gamma_1, & \cdots, & & & \gamma_r & \\ t & \delta_1, & \delta_1', & \cdots, & \delta_t, & \delta_t' & \end{array}\right). \tag{5}$$

Theorem 3. If $h = 2$, then transformation (3), a homogeneous system, can be reduced to a Campe de Feriet - type hypergeometric system whose solutions are orthogonal polynomials of two variables. They are expressed in terms of the hypergeometric functions of two variables.

Theorem 4. The general solution of the inhomogeneous system (1) is represented as the sum of the general solution $\overline{Z}(x,y)$ corresponding homogeneous system and particular solution $Z_0(x,y)$ of heterogeneous system (1):

$$Z(x,y) = \overline{Z}(x,y) + Z_0(x,y) = \sum_{l=1}^{9} C_l \cdot Z_l(x,y) + Z_0(x,y).$$

For the proof of the theorem applied methods Frobenius-Latysheva and uncertain factors. More number of theorems are proved on the existence of solutions of the inhomogeneous system (1) and constructed examples of solutions of the inhomogeneous system.

Reference

[1] P. Appell, M.J. Kampe de Feriet, *Fonctions hypergeometriques et hypesperiques.* Paris: Gauthier Villars, (1926), 434.

[2] A.W. Babister, *ransendental functions satisfying nonhomogeneous linear differential equations.* New York - London. (1967), 44.

PROPERTIES OF RELATED SYSTEMS SOLUTIONS WITH WHITTAKER TYPE SYSTEM

Zh.N. Tasmambetov, A.A. Issenova

Aqtobe Regional Zhubanov State University, Aqtobe, RK
E-mail:tasmam@rambler.ru, akkenje_ ia@mail.ru

M. Lauricella compiled four hypergeometric functions of P. Appel $F_1 - F_4$ two variables and introduced for the consideration of the four hypergeometric functions of the n variables F_A, F_B, F_C, F_D [2].Further, their various properties and degenerate hypergeometric functions of n variables obtained from them by the limit transition were studied [1, pp. 114-120].

In this paper we consider the properties of related systems solutions with the Whittaker type system. Zh. Tasmagambetov and A.A.Issenova have established for a particular case $n = 2$ systems of Horn type, Whittaker, of Laguerre and Bessel. M. P. Humbert studied the relationship between the system of Horn type and Whittaker of different orders with the solution $\Psi_2^{(n)}$,that is, through the function of Humbert.

We highlight the main properties of Humbert functions $\Psi_2^{(n)}$:
1. The degenerate hypergeometric function of M. P. Humbert $\Psi_2^{(n)}$ $(n = 2, 3, ...)$ n variables $x_j (j = \overline{1, n})$ is determined by a series of

$$\Psi_2^{(n)}(\lambda, \gamma_1, \cdots \gamma_n; x_1, \cdots, x_n) = \sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1+...+m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} ... (\gamma_n)_{m_n}} \cdot \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdot ... \cdot \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \tag{1}$$

The series converges absolutely and uniformly at $|x_1| < \varepsilon$, ...,$|x_n| < \varepsilon$.
2. **Theorem 1.** The Humbert function (1) is a particular solution of a system consisting of n equations of the form

$$x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} + [\gamma_j - x_j] \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{(k \neq j)} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} - \lambda F = 0, \quad (j = \overline{1, n}). \tag{2}$$

where $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ - general unknown for all equations of the system (2).
3. The following property is relative to the number of system solutions (2).
Theorem 2. The system (2) near the singularity $(0, 0, ..., 0)$ has 2^n regular solutions in the form of generalized power series of two variables

$$F_1(x_1, ..., x_n) = x_1^{\rho_1} ... x_n^{\rho_n} \sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty} C_{m_1,...,m_n} \cdot x_1^{m_1} ... x_n^{m_n}, C_{0,...,0} \neq 0 \tag{3}$$

where $\rho_j (j = \overline{1, n}), C_{m_1,...,m_n} (m = 0, 1, 2...)$ - unknown coefficients that are expressed through the Humbert function $\Psi_2^{(n)}$.

The Frobenius-Latysheva method is used to construct the solution of the form (3) [3]. 4. The properties associated with the conversion of

$$F(x_1, ..., x_n) = expQ(x_1, ..., x_n) \cdot U(x_1, ..., x_n) \tag{4}$$

where $Q(x_1, ..., x_n)$ - polynomial of degree n with indefinite coefficients; $U(x_1, ..., x_n)$ - a series of the form (3), is used to derive related systems of the type of Whittaker, Laguerre, and Bessel, and to represent their solution near an irregular singularity at infinity.

5. The degree of a polynomial $Q(x_1, ..., x_n)$ is defined by the notion of rank.
Definition. The value of the rank p is determined by the highest degrees of coefficients of the system by equality

$$p = 1 + k, k = max\frac{\tau_s - \tau_0}{s}, (s = \overline{1, n}) \tag{5}$$

is called the order of the series (3) and can be integer and fractional (positive or negative).

The solution of the form (4) is called normal-regular and exists only when the singularity at infinity is irregular and the finite singularity $(0, ..., 0)$ is regular.
Theorem 3. The system

$$x_j^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} - x_j\sum_{(r\neq j)} x_r\frac{\partial F}{\partial x_r} + \left[-\frac{x_j^2}{4} - \frac{x_j}{2} - \sum_{(r\neq j)} x_r + kx_j + \frac{1}{4} - \mu_j^2\right]F = 0, \quad (j = \overline{1, n}) \tag{6}$$

obtained from system (2) by transformation

$$F(x_1, ..., x_n) = exp(\frac{x_1}{2}, ..., \frac{x_n}{2})x_1^{-\frac{\gamma_1}{2}}...x_n^{-\frac{\gamma_n}{2}} \cdot U(x_1, ..., x_n) \tag{7}$$

is a Whittaker-type system [1, p. 135] and has a normally regular solution of the form

$$W_{\lambda,\mu_1,...,\mu_n}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\mu_1,...,\mu_n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-2\omega_1\mu_1)...\Gamma(-2\omega_n\mu_n)}{\Gamma(1 - \frac{n}{2} - \omega_1\mu_1 - ... - \omega_n\mu_n - k)} \cdot M_{k,\omega_1\mu_1,...,\omega_n\mu_n}$$

because true performance proven [1] by M. P. Humbert

$$M_{k,\mu_1,...,\mu_n}(x_1, ..., x_n) = exp(-\frac{x_1 + ... + x_n}{2}) \cdot x_1^{\mu_1+\frac{1}{2}}...x_n^{\mu_n+\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\Psi_2(\mu_1 + ... + \mu_n - k + \frac{n}{2}, 2\mu_1 + 1, ..., 2\mu_n + 1, x_1, ..., x_n).$$

The most researched case is $n = 2$. For this case, the properties of solutions of systems such as Whittaker, Laguerre and Bessel type are investigated [3]. Similar properties can be set for both cases $n = 2$ and general cases.

Reference

[1] P. Appell, M.J. Kampe de Feriet, *Fonctions hypergeometriques et hypersperiques.* Paris: Gauthier Villars. 1926.-434 pp.

[2] G. Lauricella, *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili* . Rendiconi Cire.mat. Palermo, t.VII, 1897, p.111-158.

[3] Zh.N. Tasmambetov, *Construction of normal and normally-regular solutions of special systems of partial equations of second order.* IP Zhanadilov S.T., Aktobe,2015,463pp.

ON THE SOLVALITY OF A NONLINEAR PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ODE SYSTEM WITH IMPULSE ACTIONS

A.B. Tleulessova

Eurasian National University named after L.N. Gumilyov
E-mail:agila_ 72@mail.ru

We consider the following periodic boundary value problem for a system of nonlinear ordinary differential equations with impulse effects on $[0,T]$:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in [0,T] \setminus \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < ...\theta_m < \theta_{m+1} = T,$$

$$x(0) = x(T), \tag{2}$$

$$x(\theta_i + 0) - x(\theta_i - 0) = J_i\left(\lim_{t\to\theta_i - 0} x(t)\right), \qquad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

where $f : [0,T] \times R^n \to R^n$, is a piecewise-continuous vector valued function with points of discontinuity of the first kind at $t = \theta_i \, (i = \overline{1,m})$ and $J_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ are continuous vector valued functions of x.

$C([0,T], R^{n)})$ denotes the space of all continuous functions $x : [0,T] \longrightarrow R^n$ with norm

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|.$$

Many authors discuss solvability of problem (1) - (3) and construction of approximate methods for its solution [1-4].

Definition 1 *The solution of the problem (1)-(3) is called isolated if there exists a number $\sigma_0 > 0$ such that, functions $f(t,x)$ and $J_i(x)$ have uniformly continuous partial derivatives $f^{'}_{t,x}(t,x)$ and $J^{'}_{i,x}(x)$ on $Z^*_{0,\sigma_0} = \{(t,x) : \ t \in [0,T], \|x - x^*\| < \sigma_0\}$ and $Z^*_{i,\sigma_0} = \{x : x \in R^n, \|x - \lim\limits_{t\to\theta_i - 0} x^*_i\| < \sigma_0\}$, $i = \overline{1,m}$, and linear periodic homogeneous boundary value problem with impulse effects*

$$\frac{dy}{dt} = f^{'}_x(t, x^*(t)), \quad t \in [0,T], \ \theta_i \in [0,T] \ i = \overline{1,m}, \ y \in R^n, \tag{4}$$

$$y(0) - y(T) = 0. \tag{5}$$

$$y(\theta_i + 0) - y(\theta_i - 0) = J^{'}_{i,x}(\lim_{t\to\theta_i - 0} x^*) y(\theta_i - 0). \tag{6}$$

has only the trivial solution $y(t) = 0$.

Choose $\sigma_\lambda > 0$, $\sigma_u > 0$, $\sigma_\chi > 0$, and set

$$S(\lambda^{(0)}, \sigma_\lambda) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{(m+1)l}) \in R^{n(m+1)l} : \|\lambda_r - \lambda^{(0)}_r\| = \max_{r=\overline{1,(m+1)l}} \|\lambda_r - \lambda^{(0)}_r\| < \sigma_\lambda\}.$$

$$S(u^{(0)}[t], \sigma_u) = \left\{u[t] \in C\Big([0,T], \widetilde{t}, R^{n(m+1)l}\Big) : \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \sigma_u\right\},$$

$$Z^0_{1,r}(\sigma_\chi) = \big\{(t,x) : t \in [0,T], \|x - \lambda^{(0)}_r - u^{(0)}_r(t)\| < \sigma_\chi,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,(m+1)l}, \ \|x - \lambda^{(0)}_{(m+1)l} - u^{(0)}_{(m+1)l}(t)\| < \sigma_\chi, t \in [t_{r-1}, t_r)\}.$$

$$Z_i(\sigma_\lambda) = \Big\{x \in R^n : \|x - \lambda^{(0)}_{il} - \lim_{t \to t_r - 0} u^{(0)}_{il}(t)\| < \sigma_\lambda, r = \overline{1,(m+1)l}, \quad i = \overline{1,m}\Big\}.$$

Condition 1. *Functions f, J_i have uniformly continuous partial derivatives f'_x, $J'(i,x)$ respectively in $Z^0_{1,r}(\sigma_\chi)$, $Z^{(0)}_i(\sigma_\lambda, \sigma_\chi)$ and the following inequalities hold: $\|f'_x(t,x)\| \leqslant L(t)$, $J'_x(i,x) \leqslant L_i$, $i = \overline{1,m}$, where $L(t)$ is a continuous function on $[0,T]$ and L_i are constants.* To find the solutions of the problem (1)-(3), we use Theorem A in [4, p.41] to establish the sufficient conditions of feasibility, the convergence of the algorithm and the existence of isolated solutions of multi-point boundary value problem with parameters.

Theorem 1 *Let $l \in N$, $t_0 = 0, t_r = t_r + \frac{h_1}{l}, r = \overline{1,l}, t_r = t_{r-1} + \frac{h_2}{l}, r = \overline{l+1, 2l,...}$, $t_r = t_{r-1} + \frac{h_{m+1}}{l}, r = \overline{ml+1,(m+1)l}$, $\sigma_\lambda > 0$, $\sigma_u > 0$, $\sigma_\chi > 0$ satisfy the conditions A, B. If the Jacobi $(n(m+1)l) \times (n(m+1)l)$ matrix $\frac{\partial Q_{1,\tilde\theta}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ is invertible for any $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \sigma_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \sigma_u)$ and the following inequalities hold:*

$$\Big\|\Big[\frac{\partial Q_{1,\tilde\theta}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\Big]^{-1}\Big\| \leqslant \gamma_1(\tilde\theta), \tag{7}$$

$$q_1(\tilde\theta) = \gamma_1(\tilde\theta)\max(1, \max_{i=\overline{1,m}}\|L_i\|) \max_{r=\overline{1,(m+1)l}}\Big\{e^{\int_{t_{r-1}}^{t} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\Big(\int_{t_{r-1}}^{t} L(t)dt\Big)^i\Big\} < 1, \tag{8}$$

$$\frac{1}{1 - q_1(\tilde\theta)}\gamma_1(\tilde\theta)\|Q_{1,\tilde\theta}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \sigma_\lambda, \tag{9}$$

$$\frac{1}{1 - q_1(\tilde\theta)}\gamma_1(\tilde\theta)\|Q_{1,\tilde\theta}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| \max_{r=\overline{1,(m+1)l}}\Big\{e^{\int_{t_{r-1}}^{t} L(t)dt} - 1\Big\} < \sigma_u, \tag{10}$$

$$\sigma_\lambda + \sigma_u \leqslant \sigma_\chi. \tag{11}$$

Then the problem (1)-(3) in $S(x^{(0)}(t), \sigma_\chi)$ has an isolated solution.

Reference

[1] *A.M.Samoilenko and N.A.Perestyuk., Impulse Differential Equations. Vyscha Shkola. Kiyv. 1987, p.405*

[2] *A.M.Samoilenko and N.I.Ronto Numerical-Analytic Methods for the Investigation of the Solutions of Boundary-Value Problems, Naukova Dumka, Kiyv, 1986, p.565.*

[3] *D.S.Dzhumabaev and S.M.Temesheva, Computational mathematics and mathematical physics 47. 37-61, (2007)*

[4] *D.S.Dzhumabaev, USSR Computational mathematics and mathematical physics 29. 34-46, (1989),*

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ РОБЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Б.Х. Турметов, К.И. Усманов

Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail:turmetovbh@mail.ru,y_kairat@mail.ru

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости нового класса краевых задач для уравнения Лапласа. Рассматриваемая задача обобщает классическую задачу Робена. Найдены точные условия разрешимости изучаемой задачи и построены интегральные представления решения для различных случаев данных.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар $n \geqslant 2, \partial\Omega$ - единичная сфера. Для любого $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ сопоставим точку $x^* = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) \in \Omega$, где $\alpha_1 = -1, \alpha_j, j = 2, ..., n$ принимает один из значений ± 1. Пусть $\nu-$ вектор нормали к $\partial\Omega, 0 \leqslant a_j, j = \overline{1,4}-$ действительные числа. Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega, \tag{1}$$

$$a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + a_2 \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} + a_3 u(x) + a_4 u(x^*) = g(x), x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Отметим, что задача (1),(2) в случае $a_2 = a_3 = 0$ изучена в работе [1]. В дальнейшем будем считать, что $a_1 \neq a_2$.

Пусть $P(x, y)$ - ядро Пуассона, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$,

$$D_x^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}}, x^{\beta,!} = \frac{x_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot x_n^{\beta_n}}{\beta_1! \cdot ... \cdot \beta_n!}, P_x^{(\beta)}(0, y) = D_x^\beta P(x, y)\big|_{x=0},$$

$$A_+ = \frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2}, A_- = \frac{a_3 - a_4}{a_1 - a_2}.$$

Для любого $c \in R$ введем обозначение

$$P_c(x, y) = \begin{cases} \int\limits_0^1 \tau^{c-1} P(\tau x, y) d\tau, c > 0, \int\limits_0^1 \tau^{c-1} \left[P(\tau x, y) - 1\right] d\tau, c = 0, \\ \int\limits_0^1 \tau^{c-1} \left[P(\tau x, y) - \sum\limits_{|\beta|=0}^{m} (\tau x)^{\beta,!} P_x^{(\beta)}(0, y))\right] d\tau, c < 0, m = -[c]. \end{cases}$$

В дальнейшем также будем использовать следующие обозначения

$$P_{A_\pm}^{\pm}(x, y) = \frac{P_{A_\pm}(x, y) \pm P_{A_\pm}(x, y^*)}{2}, P_x^{(\beta)-}(0, y) = \frac{P_x^{(\beta)}(0, y) - P_x^{(\beta)}(0, y^*)}{2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 *Пусть в задаче (1),(2) коэффициенты $a_j, j = 1, ..., 4$ такие, что $A_-, A_+ \geqslant 0$ и $g(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда*

1) если $A_-, A_+ > 0$, то решение задачи (1),(2) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{a_1 + a_2} P_{A_+}^{+}(x, y) + \frac{1}{a_1 - a_2} P_{A_-}^{-}(x, y)\right] g(y) dS_x;$$

2) если $A_-, A_+ = 0\,(a_3 = a_4 = 0)$, то для разрешимости задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega} g(x)dS_x = 0.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = \frac{1}{(a_1^2 - a_2^2)\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[a_1 P_0(x,y) - a_2 P_0(x,y^*)\right] g(y)dS_x.$$

Теорема 2 *Пусть в задаче (1),(2) коэффициенты $a_j, j = 1,...,4$ такие, что $A_+ > 0, A_- < 0$ и $g(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда*

1) если A_- - нецелое, то решение задачи (1),(2) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = u_m(x) + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{a_1 + a_2} P^{+}_{A_+}(x,y) + \frac{1}{a_1 - a_2} P^{-}_{A_-}(x,y)\right] g(y)dS_y, m = -[A_-], \qquad (3)$$

где функция $u_m(x)$ имеет вид

$$u_m(x) = \sum_{|\beta|=0}^{m} \frac{a_\beta}{|\beta| + A_-} x^{\beta,!},$$

у которого

$$a_\beta = \frac{1}{(a_1 - a_2)\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} P_x^{(\beta)-}(0,y) g(y)dS_y, |\beta| \leqslant m;$$

2) если A_- - целое и четное, то решение задачи (1),(2) существует, единственно и представляется в виде (3), где в представлении функции $u_m(x)$ коэффициенты $a_m = 0$;

3) если A_- - целое и для некоторого $m = 0, 1, ..., A_- = -(2m + 1)$, то для разрешимости задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_{\partial\Omega} H_{2m+1}(x) g(y)dS_y = 0.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до однородных гармонических полиномов степени $2m + 1$ и представляется в виде (3), где в представлении функции $u_{2m+1}(x)$ коэффициенты $a_{2m+1} = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерство образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05131268).

Список литературы

[1] Б. Х.Турметов , *Об одном обобщении третьей краевой задачи для уравнения Лапласа* . Челябинский физико - математический журнал, 4 (2019), no. 1, 32-40.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Д.А. Турсунов[1], З.М. Сулайманов[2]

[1] *филиал Российского государственного социального университета в г. Ош, Ош, Кыргызстан*
[2] *Ошскйи государственный университет, Ош, Кыргызстан*
E-mail:tdaosh@gmail.com, szavur1983@mail.ru

Рассмотрим двухточечную краевую задачу с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) + xy_\varepsilon'(x) - xy_\varepsilon(x) = 0,\ -1 < x < 1, \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(-1) = a,\ y_\varepsilon(1) = b, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $a,\ b$ — постоянные, $y_\varepsilon(x)$ неизвестная функция.

Двухточечная краевая задача (1), (2), методом сращивания, исследована в монографии А. Найфэ [1], получен только первый член асимптотики решения. А мы построим полное равномерное асимптотическое разложение решения этой задачи обобщенным методом погранфункций [2]-[4], который на наш взгляд является более удобным и сокращает количество вычислений.

Краевая задача (1), (2) отличается от ранее исследованных задач тем, что здесь появляется так называемый "внутренний"пограничный слои, и поэтому в [1] не получилось построить единое асимптотическое разложение решения, которое оказалось бы равномерно пригодным на всем отрезке решения задачи.

Внешнее решение, которое пригодно вне малой окрестности точки $x = 0$, представимо в виде:

$$y_\varepsilon^{out}(x) = \begin{cases} be^{x-1} + \varepsilon b_1(x)lnx + \frac{\varepsilon^2}{x^2}b_2(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^{n+1}}{x^{2n}}b_{n+1}(x) + \ldots,\ 0 < x \leqslant 1 \\ ae^{x+1} + \varepsilon a_1(x)lnx + \frac{\varepsilon^2}{x^2}a_2(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^{n+1}}{x^{2n}}a_{n+1}(x) + \ldots,\ -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

где $b_k(x),\ a_k(x) \in C^\infty[0,1]$.

Заметим, что в внешнем разложении особенность в особой точке $x = 0$ растет с увеличением номера n. Также, это разложение является асимптотическим только при $\sqrt{\varepsilon} < |x| \leqslant 1$ и теряет асимптотический характер когда $|x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Следовательно, рассматриваемая двухточечная краевая задача является бисингулярной по терминологии академика А.М. Ильина [5].

Мы сначала, задачу (1)-(2) с помощью преобразования $y_\varepsilon(x) = e^x z_\varepsilon(x)$, где $z_\varepsilon(x)$ — новая неизвестная функция, приводим к виду

$$\varepsilon z_\varepsilon''(x) + \varepsilon\big(2z_\varepsilon'(x) + z_\varepsilon(x)\big) + xz_\varepsilon'(x) = 0,\ -1 < x < 1, \tag{3}$$

$$z_\varepsilon(-1) = \alpha,\ z_\varepsilon(1) = \beta, \tag{4}$$

где $\alpha = ae,\ \beta = be^{-1}$.

Решение задачи (3)-(4) ищем в виде [6]:

$$z_\varepsilon(x) = z_0(t) + \mu z_1(t) + \ldots + \mu^n z_n(t) + \ldots \tag{5}$$

где $t = x/\mu,\ \mu = \sqrt{\varepsilon}$.

Подставляя соотношение (5) в уравнение (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε получим рекуррентные уравнения для $z_n(t),\ n = 0, 1, \ldots$:

$$lz_0 \equiv z_0''(t) + tz_0'(t) = 0,\ -\mu^{-1} < t < \mu^{-1}, \tag{6}$$

$$z_0(-\mu^{-1}) = \alpha,\ z_0(\mu^{-1}) = \beta. \tag{7}$$

$$lz_n = -2z_{n-1}'(t) - z_{n-2}(t),\ -\mu^{-1} < t < \mu^{-1}, \tag{8}$$

$$z_n(-\mu^{-1}) = 0,\ z_n(\mu^{-1}) = 0. \tag{9}$$

Решения задач (6)-(7) и (8)-(9) существуют и единственны. Например, решение задачи (6)-(7) представимо в виде:

$$z_0(t) = \frac{\beta - \alpha}{2\gamma} \int_0^t e^{-\tau^2/2} d\tau + \frac{\alpha + \beta}{2},$$

где $\gamma = \int_0^{\mu^{-1}} e^{-\tau^2/2} d\tau$.

Доказана

Теорема 1 *Для решения задачи* (1), (2) *справедливо асимптотическое разложение*

$$y_\varepsilon(x) = e^x \Big(z_0(t) + \mu z_0(t) + \ldots + \mu^k z_k(t) + \ldots \Big),\ \varepsilon \to 0.$$

Замечание 1 *Для простоты мы рассмотрели именно ту задачу которая была исследована в монографии А. Найфе [1]. Рассмотренную задачу можно обобщить, т.е. точно также исследуется первая, вторая и третья краевые задачи для уравнения*

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) + xp(x)y_\varepsilon'(x) - xq(x)y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x),\ -1 < x < 1,$$

где $p(x) > 0, q(x) > 0, x \in [-1, 1],\ f_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(x),\ f_k,\ p,\ q \in C^\infty[-1, 1]$.

Список литературы

[1] А. Найфе, *Введение в методы возмущений.* Москва, Мир, (1984).

[2] К. Алымкулов, Д.А. Турсунов, *Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач* Изв. вузов. Математика. (2016). № 12. 3–11.

[3] Д.А. Турсунов, *Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота* Тр. ИММ УрО РАН. 22 (2016), № 1. 271–281.

[4] Д.А. Турсунов *Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге.* Труды ИММ УроРАН, 23 (2017), № 2, 239–249.

[5] A.M. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Nauka, Moscow. [Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992)].

[6] Д.А. Турсунов *Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем* Изв. вузов. Математика. (2018). № 3. 70–78.

ON THE CLOSURE OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION

M.I. Tleubergenov[1], G.I. Ibraeva[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan*
[2]*Aktobe Military Institute of Air Defense Forces, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: marat207@mail.ru; gulmira_ ibraeva@mail.ru

The set of ordinary differential equations (ODE) with given integral curve was constructed in [2]. The cited paper is fundamental in the formation and development of the theory of inverse problems in the dynamics of systems described by ODE. The various statements of the inverse problems for differential equations and their solving in the class of ODE are discussed in [1,3,5,6].

In the papers [4,8-10] inverse problems of dynamics are considered in the presence of random perturbations.

Let us consider following inverse stochastic problem of dynamics. Assume that the set

$$\Lambda(t): \quad \lambda(y,v,t)=0, \quad \lambda\in R^m, \quad \lambda=\lambda(y,v,t)\in C^{2\,2\,2}_{y\,v\,t} \tag{1}$$

and the system of the first-order Itô stochastic differential equations of the form

$$\begin{cases} \dot y = g_1(y,z,v,w,t), \\ \dot z = g_2(y,z,v,w,t)+\sigma_1(y,z,v,w,t)\dot\xi, \end{cases} \tag{2}$$

are given. It is necessary to construct the system of closing equations of the form

$$\begin{cases} \dot v = g_3(y,z,v,w,t), \\ \dot w = g_4(y,z,v,w,t)+\sigma_2(y,z,v,w,t)\dot\xi \end{cases} \tag{3}$$

such that set (1) be been an integral manifold of the system of equations (2), (3).

Comment. In the previous work of the authors [10], the given properties $\Lambda'(t)$ depended on all variables

$$\Lambda'(t): \lambda(y,z,v,w,t)=0, \quad \lambda=\lambda(y,z,v,w,t)\in C^{1\,2\,1\,2\,1}_{y\,z\,v\,w\,t} \tag{1'}$$

Here $y\in R^{l_1}$, $z\in R^{l_2}$, $v\in R^{p_1}$, $w\in R^{p_2}$, $l_1+l_2+p_1+p_2=n$, σ_1 is a $(l_2\times k)$ matrix, σ_2 is a $(p_2\times k)$ matrix. The system of random processes with independent increments $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$, as in [7], can be represented as the sum of the processes: $\xi=\xi_0+ +\int c(x)P^0(t,dx)$, where $\xi=(\xi_1^T,\dots,\xi_k^T)^T$ is vector process with independent increments, $\xi_0=(\xi_{10}^T,\dots,\xi_{k0}^T)^T$ is vector Wiener process; P^0 is Poisson process; $P^0(t,dx)$ is the number of jumps of the process P^0 in the interval $[0,t]$ into the set dx; $c(x)$ is vector function mapping the space of $R^n\ni x$ into the space of values of R^k of the process $\xi(t)$ for any t.

The following statement is proved using the notations of work [10].

Theorem. *The system of Itô-type first-order stochastic differential equations (2), (3) will have given integral manifold (1) if and only if the coefficients of closing stochastic differential equations g_4 have the appearance of*

$$g_4 = s_1\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^+(A-G)$$

for an arbitrary vector-function $g_3 = \varphi(y, z, v, w, t)$ *of class* $C^{1\,1\,1\,2\,1}_{y\,z\,v\,w\,t}$, *and the columns* σ_{2i} *of diffusion matrix* σ_2 *satisfy condition*

$$\sigma_{2i} = s_2 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) C \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^+ B_i,$$

where B_i *- i-th column of the matrix* $B, i = \overline{1, k}$.

The quasi-inversion method [6] is used to obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem of closure of the equations of motion in the class of Itô first-order stochastic differential equations with random perturbations from the class of processes with independent increments, with degenerate diffusion with respect to a part of variables and with the given properties depending only on the part of variables.

This publication is financially supported by a grant from Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant number AP 05131369).

Reference

[1] N.V. Abramov, R.G. Mukharlyamov, Zh.K. Kirgizbaev, *Control the dynamics of systems with program communications.* Nauka, Moscow (1986) (in Russian).

[2] N.P. Erugin, *Construction of the entire set of system of differential equations with integral curve.* Prikl. Mat. Mech., Vol.10, **6** (1952), 659-670 (in Russian).

[3] A.S. Galiullin, *Methods for the solution of inverse problems of dynamics.* Nauka, Moscow (1986) (in Russian).

[4] G.T. Ibraeva and M.I. Tleubergenov, *Main inverse problem for differential systems with degenerate diffusion*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol.65, **5** (2013), 787-792.

[5] J. Llibre, R. Ramirez, *Inverse problems in ordinary differential equations and applications.* Springer International Publishing Switzerland, (2016).

[6] I.A. Mukhamedzianov, R.G. Mukharlyamov, *Equations of program motions.* Publishing house of peoples' friendship University, Moscow (1986)(in Russian).

[7] V.S. Pugachev, I.N. Sinitsyn, *Stochastic differential systems, Analysis and filtration.* Nauka, Moscow (1986) (in Russian).

[8] M.I. Tleubergenov, *An inverse problem for stochastic differential systems*, Differential Equations, Vol.37, **5** (2001), 751-753.

[9] M.I. Tleubergenov, *On the inverse stochastic reconstruction problem*, Differential Equations, Vol.50, **2**(2014), 274-278.

[10] M.I. Tleubergenov, G.T. Ibraeva, *On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion.* Eurasian mathematical journal, V.10, **2** (2019), 93-102.

A MULTIDIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT AND MASS TRANSFER, WHEN THE BOUNDARY CONDITIONS CONTAIN HIGHER-ORDER DERIVATIVES

Ye.M. Khairullin, G.A. Tulesheva, A.S. Azhibekova

Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: khairullin_42_42@mail.ru, tulesheva.gulnara@mail.ru, aliya.azhibek@gmail.com

The following boundary value problem

$$\frac{\partial U_k(x,t)}{\partial t} = \lambda_k \Delta U_k\left(x,t\right),\ k=1,\ 2 \tag{1}$$

is considered in the domain

$$Q_T \equiv \left\{(x,t) = \left(x^{'}, x_n, t\right) : x^{'} \in R^{n-1},\ x_n \in R_+, t \in]0,T[\right\},$$

with the initial conditions:

$$U_k\left(x,0\right) = 0 \tag{2}$$

and the boundary conditions:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k U_k(x,t)|_{x_n=0} = \varphi_1\left(x^{'},t\right),\ \left(x^{'},t\right) \in Q_T^{(1)} = Q_T \backslash x_n, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{k_n=0}^{m} a_{k_n}^{(k)} \frac{\partial^{k_n} U_k(x,t)}{\partial {x_n}^{k_n}}|_{x_n=0} = \varphi_2\left(x^{'},t\right),\ \left(x^{'},t\right) \in Q_T^{(1)} = Q_T \backslash x_n,\quad m \geqslant 1, \tag{4}$$

where Δ is the Laplace operator with respect to the variable $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, λ_k are positive constants, and $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; a_k, $a_{k_n}^{(k)}$ $(k = 1,\ 2)$ are given constants, $\varphi_k\left(x^{'},t\right)$ are given bounded continuous functions.

The method of heat potentials [1] is used to study and solve the boundary value problem (1)-(4).

The solution of the boundary value problem (1)-(4) is sought as double layer potentials. The boundary conditions are set on the bounding hyperplane $x_n = 0$ as the sum of the derivatives of the functions $U_k(x,t)$ with respect to the variable x_n. A Lemma for a jump in the double layer potentials in a neighborhood of the hyperplane $x_n = 0$ is presented.

Using the boundary conditions (3) and (4), a system of integro-differential equations (SIDE) with thermal conductivity operator relative to the densities of heat potentials is obtained.

The characteristic part of SIDE is solved by the method of integral Fourier-Laplace transforms. The conditions of the correctness and incorrectness of the problem are found, expressed in terms of given system constants and boundary conditions.

By using the regularization method, SIDE is reduced to a system of Volterra-Fredholm integral equations (SIE). The obtained estimates of the SIE kernels make it possible to apply the method of successive approximations. It is proved that if the solvability condition $\frac{\lambda_1 z_k^2 - \lambda_2}{z_k^2 - 1} > 0$ (z_k are the roots of the characteristic equation of degree m) is fulfilled, there is a solution to the boundary value problem.

Theorem. If $\varphi_k\left(x',t\right) \in C^2_{x'}\left(Q^{(1)}_T\right)$ and $\frac{\lambda_1 z_k^2-\lambda_2}{z_k^2-1} > 0$, then there is a solution $U_k(x,t) \in C^{2,\,\left[\frac{m}{2}\right]}_{x',\,x_n}(Q_T)$.

The obtained solutions of the boundary value problem in a closed form make it possible to apply them in the study of specific mathematical models of thermophysical processes in the theory of heat and mass transfer.

Funding: Authors are partially supported by a grant AP0513919 from the MES RK.

Reference

[1] Y. Khairullin, G. Tulesheva and A. Shakulikova, *About one boundary task of the heat and mass exchange.* Vestnik KazNRTU, 134 (2019), no. 4., 561-567.

MATHEMATICAL MODELS OF VARIUOS FORMS OF EROSION IN OPENING ELECTRICAL CONTACTS

S.N. Kharin

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: staskharin@yahoo.com

1.Bridge erosion.

Mathematical models describing erosion in electrical contacts in the process of consecutive stages of their opening are presented. The initial stage of the contact opening is accompanied by the appearance of a liquid metallic bridge which explosion leads to the erosion and the transfer of the contact material from one contact piece to the other. The mathematical model describing this process is based on the equations for the distribution of the temperature $\theta_i(r,z,t)$ and the electrical potential $\varphi_i(r,z)$

$$c_i\gamma_i\frac{\partial\theta_i}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_i\nabla\theta_i) + \sigma_{Ti}\nabla\theta_i\nabla\varphi_i + \frac{1}{\rho_i}(\nabla\varphi_i)^2 = 0, \quad \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_i}\nabla\varphi_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,4}, \tag{1}$$

in the bridge bounded by two free isotherms of phase transformation $z = \sigma_i(r,t)$, $i = 1,2$ and unknown lateral surface $r = y(z,t)$ (Fig. 1).

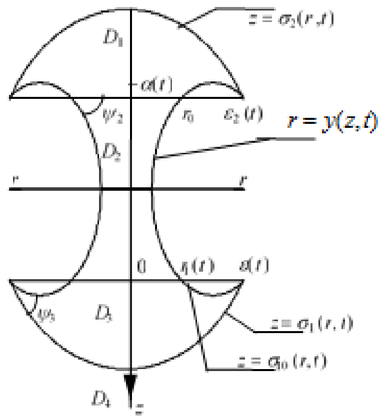

Figure 1: Geometry of a bridge and adjoining regions.

Here $c_i, \gamma_i, \lambda_i, \sigma_{Ti}, \rho_i$ are coefficients of thermal capacity, density, thermal conductivity, Thomson effect and electrical resistivity correspondingly.

The boundary conditions are described by the Stefan condition on the surfaces of phase transformation and the Young's formulas for the boundary wetting angles ψ_i and the coefficients of surface tension. The unknown shape of the quasi-stationary bridge is determined from the condition of minimum of the functional describing the total energy of the bridge using the Ritz method. Then the isotherm of the boiling temperature and the contact erosion can be calculated by the method of majorant functions [1]

2.Arc erosion in vapor and liquid phases.

The model for this form of erosion is based on the equations of motion, continuity and energy

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \overline{V}\nabla\overline{V} = \frac{1}{\gamma_1}\nabla P + \nu\Delta\overline{V} + \overline{F}, \tag{2}$$

$$\nabla\overline{V} = 0, \tag{3}$$

$$c_1\gamma_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + \overline{V}\nabla T_1\right) = \lambda_1\Delta T_1 + q_{T1} + q_{j1} \tag{4}$$

for the melted area occupying the domain $D_1 : h_\nu(r,t) \leqslant z \leqslant h_m,\ 0 \leqslant r \leqslant \alpha(t)$ (Fig.2). For the solid domain $D_2 : [(z \geqslant 0, r \geqslant 0) - D_1]$ the similar equation like (4) should be written with $\overline{V} = 0$.

Here $\overline{V}(V_r, V_z), P, T_i$ are velocity, pressure and temperature correspondingly, $\overline{F} = (\mu_0/\gamma_1)\overline{j_1}\times\overline{H_2}$ is the electromagnetic force, $q_{Ti} = -\sigma_{Ti}\overline{j_i}\nabla T_i$, $q_{ji} = \rho_i\overline{j_i}^2$, $i = 1,2$ are densities of Thomson and Joule volume heat sources.

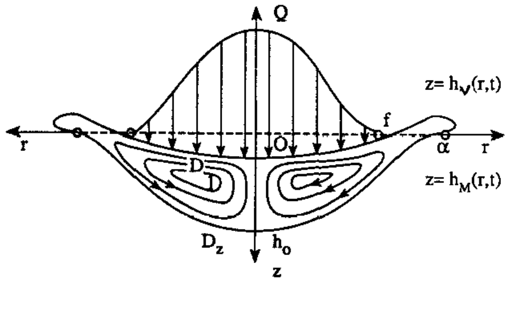

Figure 2: Model of arc erosion with melting and vaporization.

The boundary conditions on the melting and vaporizing surfaces of phase transformations are described by the Stefan conditions. The rate of vaporization can be described by the Langmuir law

$$\gamma_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{T_1}} \exp\left(A - \frac{B}{T_1}\right). \tag{5}$$

The solution of this problem is obtained using the law of energy conservation with estimation of all acting forces and characteristic times of thermal and hydrodynamic processes.

3. Thermocapillary mechanism of erosion

Sometimes erosion phenomena can be explained by the influence of thermo-capillary Marangoni effect which provokes an intensive convective flow in a narrow surface layer of melting zone owing to temperature dependence of surface tension of liquid metal. To take into account this effect it is necessary to consider the special boundary condition for thermo-capillary forces causing radial stresses on the melted surface:

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{d\sigma}{dT_1}\frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad z = h_\nu(r,t), \tag{6}$$

where μ is the dynamic viscosity and σ is the surface tension. It was shown in [2] that for tungsten with current density $j = 6.45 \cdot 10^7 A/m^2$ and heat flux $Q_0 = 3.2 \cdot 10^8 W/m^2$ the Marangoni number is $Ma = 1.13 \cdot 10^2$, while the rate of thermo-capillary convection V_r at the molten surface reaches $13 m/sec$, thus causing the ejection of metal from the molten pool by the thermo-capillary forces.

Reference

[1] S.N. Kharin, *The Method of Majorant Functions for the Calculation of the Arc Erosion.* Proc. of 65th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, 15-18 September 2019, Milwaukee, USA.

[2] S.N. Kharin, *Mathematical Models of Phenomena in Electrical Contacts.* The Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, A.P. Ershov Institute of Informatics System, Novosibirsk, 2017, pp. 1-193.

THE BESSEL EQUATION IN H-DISCRETE CALCULUS

S. Shaimardan, N.S. Tokmagambetov

L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: shaimardan.serik@gmail.com

Let $h > 0$ and $\mathbb{T}_a = \{a, a+h, a+2h, \cdots\}$ with $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definition 1 *(see [1]) Let $f : \mathbb{T}_a \to \mathbb{R}$. Then the h-derivative of the function $f(x)$ is defined by*

$$D_h f(t) := \frac{f(\delta_h(t)) - f(t)}{h}, \quad t \in \mathbb{T}_a,$$

where $\delta_h(t) = t + h$.

Definition 2 *(see [1]). For arbitrary $t, \alpha \in \mathbb{R}$ the h-fractional function is defined by*

$$t_h^{(\alpha)} := h^\alpha \frac{\Gamma(\frac{t}{h}+1)}{\Gamma(\frac{t}{h}+1-\alpha)},$$

where Γ is Euler gamma function, and

$$\lim_{h\to 0} t_h^{(\alpha)} = t^\alpha.$$

Hance, by Definition 1 we find that

$$D_h\left(t_h^{(\alpha)}\right) = \alpha t_h^{(\alpha-1)}.$$

The classical Bessel functions are heavily studied special functions (see [2], [3]) that are defined via Bessel's differential equation

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2) y(t) = 0, \tag{1}$$

for some (possibly complex) parameter n called the order of the equation. In this paper, we propose the following discrete analogue of (1): the second-order delay difference equation

$$t_h^{(2)} D_h^2 y(t-2h) + t_h^{(1)} D_h y(t-h) + t_h^{(2)} y(t-2h) - n^2 y(t) = 0, \tag{2}$$

The solutions of Bessel's differential equation, J_n, are called Bessel functions (of the first kind) and have series representation

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+n}}{k!\Gamma(k+n+1)2^{2k+n}}.$$

Theorem 1 *The function*

$$J_{n,h}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t_h^{(2k+n)}}{k!\Gamma(k+n+1)2^{2k+n}},$$

solves (2).

Reference

[1] N.R.O. Bastos, R.A.C. Ferreira, and D.F.M. Torres, Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations. Discrete Contin. Dyn. Syst. 29(2), 417–437 (2011).

[2] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, vol. 55, For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964. MR0167642

[3] E. George Andrews, Richard Askey and Ranjan Roy, Special functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. MR1688958

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ТРАНСАКСИАЛЬНЫХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

Т.Ж. Шугаева, И.Ф. Спивак-Лавров, Т.С. Калиматов

Актюбинский региональный государственный университет им.К. Жубанова,Казахстан
E-mail: tlektes21@mail.ru

Для нахождения электростатических потенциалов в случае осесимметричных и трансаксиальных корпускулярно-оптических систем используют цилиндрические координаты ρ, Ψ, z. Потенциал электростатического поля для таких систем зависит только от переменных ρ , z и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Наиболее общим методом решения граничной задачи Дирихле для уравнения (1) является метод разделения переменных. При этом потенциалы представляются в виде рядов функций Бесселя [1]. Однако эти решения неудобно использовать для численных расчетов. В работе найдены приближенные выражения для потенциалов цилиндрической осесимметричной линзы и трехэлектродной трансаксиальной линзы, которые с хорошей точностью описывают поля этих систем. Цилиндрическая осесимметричная линза (рис.1) представляет собой круговой проводящий цилиндр, разрезанный плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра (ось z) в точках z_k. Эти плоскости делят цилиндр на электроды с потенциалами V_k. Здесь k=1,2,3...N-1, зазоры между электродами считались бесконечно узкими. Потенциал такой N-электродной системы с хорошей степенью точности может быть представлен в виде:

$$\phi(\rho,z)=\frac{1}{2}(V_{N-1}+V_0)+\sum_{k-1}^{N-1}\phi_k(\rho,z). \tag{2}$$

Здесь $\phi_k(\rho,z)$ определяется выражением:

$$\phi_k(\rho,z)=\frac{1}{\pi}(V_k-V_{k-1})\arctan\frac{sh\frac{\pi}{\sqrt{2}R}(z-z_k)}{\cos\frac{\pi\rho}{2R}}, \tag{3}$$

где R – внутренний радиус цилиндрической поверхности.

Трехэлектродная трансаксиальная линза (рис.2) представляет собой две параллельные пластины, разрезанные прямыми круговыми цилиндрами радиуса R_1 и R_2, ось которых перпендикулярна плоскости пластин. Расстояние между пластинами d . В гармоническом приближении получены аналитические выражения для потенциала поля трансаксиальной линзы:

$$\phi(\rho,z)=V_2+(V_0-V_1)P_1(\frac{\rho}{R_1}+(V_1-V_2P_2(\frac{\rho}{R_2,z,R}), \tag{4}$$

где V_0, V_1, V_2 – потенциалы электродов, $R=\sqrt{R_1R_2}$

$$P_k(\frac{\rho}{R_k},z,R)=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{2\cos\frac{\pi}{d}z}{(\frac{\rho}{R_k})^{\frac{\pi R}{d}}-(\frac{\rho}{R_k})^{-\frac{\pi R}{d}}}.$$

Список литературы

[1] А.Н. Тихонов,А.А. Самарский, *Уравнения математической физики.* М, Наука, 1977.

АЛГЕБРА ЖӘНЕ МОДЕЛЬДЕР ТЕОРИЯСЫ

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

ALGEBRA AND THEORY OF MODELS

ON ALMOST OMEGA-CATEGORICITY FOR QUITE O-MINIMAL THEORIES

A.B. Altayeva[1], **B.Sh. Kulpeshov**[2]

[1]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mails: vip.altayeva@mail.ru, kulpesh@mail.ru

Quite o-minimal theories are a subclass of the class of weakly o-minimal theories inheriting many properties of o-minimal theories. In [3] quite o-minimal theories having less than 2^ω countable models were studied: the Exchange Principle for algebraic closure, orthogonality of any finite family of pairwise weakly orthogonal non-algebraic 1-types over the empty set, binarity and simplicity of every non-algebraic 1-type over the empty set, and binarity of these theories were proved. By using these results Vaught's problem for quite o-minimal theories was solved: it has been proved that any countable quite o-minimal theory T is either ω-categorical, or *Ehrenfeucht* (i.e. $1 < I(T,\omega) < \omega$), or has continuum many countable models. This result generalizes L. Mayer's theorem [6] which is a solution of Vaught's problem for o-minimal theories.

Almost ω-categoricity is closely connected with the notion of Ehrenfeuchtness of a theory. So in [1] it was proved that if T is an almost ω-categorical theory with $I(T,\omega) = 3$ then a dense linear order is interpreted in T. In [4] the authors established almost ω-categoricity of Ehrenfeucht quite o-minimal theories and that Exchange Principle for algebraic closure holds in almost ω-categorical quite o-minimal theories. Here we present theorem on orthogonality of a family of pairwise weakly orthogonal non-algebraic 1-types in almost ω-categorical quite o-minimal theories.

A subset A of a linearly ordered structure M is *convex* if for all $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. This paper concerns the notion of *weak o-minimality* which was initially studied in [5]. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a union of finitely many convex sets in M.

In the following definitions M is a weakly o-minimal structure, $A, B \subseteq M$, M is $|A|^+$–saturated, $p, q \in S_1(A)$ are non-algebraic.

We say that p is not *weakly orthogonal* to q ($p \not\perp^w q$) if there exist an A–definable formula $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ and $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ such that $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ and $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

We say that p is not *quite orthogonal* to q ($p \not\perp^q q$), if there exists an A–definable bijection $f : p(M) \to q(M)$. We say that a weakly o-minimal theory is *quite o-minimal* if the notions of weak and quite orthogonality coincide ([2]).

Let T be a complete theory, and $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. A type $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ is said to be a $(p_1, \ldots, p_n)$*-type* if $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. The set of all $(p_1, \ldots, p_n)$-types of the theory T is denoted by $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. A countable theory T is said to be *almost ω-categorical* if for any types $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ there are only finitely many types $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$ ([1, 7]).

The *disjunct union* $\bigsqcup_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ of pairwise disjoint structures $\mathcal{M}_n$ with pairwise disjoint predicate signatures Σ_n, $n \in \omega$, is said to be the structure of the signature $\bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n \cup \{P_n^{(1)} \mid n \in \omega\}$ with the universe $\bigsqcup_{n\in\omega} M_n$, $P_n = M_n$, and interpretations of predicate symbols from Σ_n, coinciding with their interpretations in the structures $\mathcal{M}_n$, $n \in \omega$. The *disjunct union of theories* T_n of pairwise disjoint predicate signatures Σ_n respectively, $n \in \omega$, is said to be the theory $\bigsqcup\limits_{n\in\omega} T_n \rightleftharpoons \mathrm{Th}\left(\bigsqcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n\right)$, where $\mathcal{M}_n \models T_n$, $n \in \omega$ ([8]).

Observe that almost ω-categorical quite o-minimal theories are not Ehrenfeucht in general. As an example of such a theory we can take a disjunct union of countably many copies of the Ehrenfeucht example with three countable models, ordered by type ω. This theory has countably many weakly orthogonal non-isolated 1-types over $\emptyset$, and therefore has the maximal number of countable models.

Observe also that almost ω-categorical quite o-minimal theories are not small in general. As an example of such a theory we can consider the structure $M = \langle \mathbb{Q}, <, q\rangle_{q\in\mathbb{Q}}$. Obviously, $Th(M)$ has 2^ω 1-types over $\emptyset$, i.e. it is not small.

Let $A \subseteq M$, A be finite, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say that a family of 1-types $\{p_1, \ldots, p_s\}$ is *orthogonal over* A if for any sequence $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$, for any increasing tuples $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}, \ldots, \bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ such that $tp(\bar{a}_1/A) = tp(\bar{a}'_1/A), \ldots, tp(\bar{a}_s/A) = tp(\bar{a}'_s/A)$ we have $tp(\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s\rangle/A) = tp(\langle \bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_s\rangle/A)$.

Theorem 1 *Let T be an almost ω-categorical quite o-minimal theory, and $p_1, \ldots, p_m \in S_1(\emptyset)$ be non-algebraic pairwise weakly orthogonal types. Then $\{p_1, \ldots, p_m\}$ is orthogonal over $\emptyset$.*

This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546).

Reference

[1] K. Ikeda, A. Pillay, A. Tsuboi, *On theories having three countable models.* Mathematical Logic Quarterly, 44 (1998), no. 2, 161–166.

[2] B.Sh. Kulpeshov, *Convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories.* News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, series physics-mathematics, 227 (2003), 26–31.

[3] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Vaught's conjecture for quite o-minimal theories.* Annals of Pure and Applied Logic, 168 (2017), no. 1, 129–149.

[4] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Linearly ordered theories which are nearly countably categorical.* Mathematical Notes, 101 (2017), no. 3, 475–483.

[5] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields.* Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), no. 12, 5435–5483.

[6] L.L. Mayer, *Vaught's conjecture for o-minimal theories.* The Journal of Symbolic Logic, 53 (1988), no. 1, 146–159.

[7] S.V. Sudoplatov, *Classification of countable models of complete theories.* Part 1, Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House. — 2018. — ISBN 978-5-7782-3527-4. — 326 p.

[8] R.E. Woodrow, *Theories with a finite number of countable models and a small language.* Ph.D. Thesis, Simon Fraser University, 1976.

О ЛИНЕЙНО МИНИМАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ

Е.Р. Байсалов, У. Дауыл

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: baisalov_yer@mail.enu.kz

Существует простой способ получения квадратичных йордановых алгебр из ассоциативных алгебр. Если дана ассоциативная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; +, \cdot \rangle$ над некоторым полем, то определив

$$U_x y := x \cdot y \cdot x$$

и

$$x^2 := x \cdot x \ ,$$

получим квадратичную йорданову алгебру $\mathfrak{A}^{(+)}$ над тем же полем. Квадратичная йорданова алгебра, изоморфная подалгебре некоторой алгебры вида $\mathfrak{A}^{(+)}$, называется *специальной*; квадратичная йорданова алгебра, не являющаяся специальной, назывется *исключительной*. С точки зрения универсальной алгебры и теории моделей исключительные алгебры представляют больший интерес, поскольку их изучение не сводится к простому изучению некоторой (лежащей в основе) ассоциативной структуры.

Теорема 1 *Пусть $\mathfrak{Q}$ — линейно минимальная, унитальная квадратичная йорданова алгебра характеристики 2, в которой идеал A тривиальных элементов бесконечен. Если фактор-алгебра $\mathfrak{Q}/A$ конечна, то алгебра $\mathfrak{Q}$ специальна.*

Эта теорема частично отвечает на вопрос из [1], где были описаны линейно минимальные квадратичные йордановы алгебры с делением и минимальные квадратичные йордановы алгебры характеристики 2. Ключевым шагом при доказательстве теоремы является то, что при условии конечности фактор-алгебра $\mathfrak{Q}/A$ оказывается изоморфной $\mathfrak{A}^{(+)}$ для некоторого конечного поля $\mathfrak{A}$.

Исследование первого автора выполнялось при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № AP05132349.

Список литературы

[1] Ye. Baissalov and A. Aljouiee, *Surjective quadratic Jordan algebras.* Eurasian mathematical journal (accepted).

[2] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras.* Springer, New York (2004).

О ЛИНЕЙНЫХ ТРЕХЭТАПНЫХ ПРОТОКОЛАХ

Е.Р. Байсалов, У. Дауыл

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: baisalov_yer@mail.enu.kz

Криптографические протоколы, основанные на линейных функциях, не обладают достаточной стойкостью к атакам. В [1] приведен обширный список таких протоколов, взлом которых возможен методом линейного разложения, подробно описанного впервые В.А. Романьковым.

В своем докладе мы хотим рассказать об аналогичной слабости трехэтапных протоколов [2], основанных на линейных преобразованиях. Сначала напомним упрощенное определение трехэтапного протокола. Платформой для такого протокола может послужить некоторое множество M, в группе перестановок S_M которого выбираются два коммутирующих множества A и B. Возможные сообщения, которые Алиса хочет отправить Бобу, закодированы с помощью элементов M, поэтому, для простоты изложения, M можно рассматривать как множество возможных сообщений. Допустим, Алиса хочет отправить Бобу сообщение $x \in M$. Тогда для этого поочередно осуществлются три следующих шага протокола:

1. Алиса выбирает случайно $a \in A$, вычисляет $a(x) = y$ и отправляет y Бобу.
2. Боб выбирает случайно $b \in B$, вычисляет $b(y) = z$ и возвращает z Алисе.
3. Алиса вычисляет $a^{-1}(z) = w$ и возвращает w Бобу.

Поскольку A и B коммутируют, нетрудно видеть, что $w = a^{-1}ba(x) = a^{-1}ab(x) = b(x)$. Поэтому, применив к w перестановку b^{-1}, Боб получит желанное сообщение x.

Задача криптоаналитика состоит в восстановлении x по данным $a(x)$, $ba(x)$ и $b(x)$. Она может стать вполне разрешимой, если M — подмножество конечномерного векторного пространства, а A и B — множества обратимых линейных преобразований. Достаточно найти (любое) решение уравнения $f(y) = z$ в B : действительно, если f — решение этого уравнения, то $f^{-1}(w) = x$.

Пример 1 Пусть M — множество всех $n \times n$-матриц над некоторым вычислимым полем, A (B) состоит из линейных преобразований пространства M, полученных с помощью умножения слева (справа) на невырожденную $n \times n$-матрицу. Известно, что в этом случае невырожденное решение уравнения $f(y) = z$ находится за полиномиальное время с помощью метода Гаусса.

Список литературы

[1] В.А. Романьков, *Алгебраическая криптография.* Издательство ОГУ им. Ф.М. Достоевского, Омск (2013).

[2] Сайт: https://ru.wikipedia.org/wiki/Трёхэтапный_протокол.

ON RECURRENT FORMULAS FOR THIRD-ORDER HORADAM NUMBERS

T.P. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: tarasgoy@yahoo.com

The generalized Fibonacci sequence $h_n = h_n(a,b;p,q)$ is defined as follows

$$h_0 = a, \quad h_1 = b, \quad h_n = ph_{n-1} + qh_{n-2}, \qquad n \geqslant 2, \tag{1}$$

where a, b, p and q are arbitrary complex numbers with $q \neq 0$. Since the numbers h_n were first studied by Alwyn Horadam (see [4, 5]), they are called *Horadam numbers*.

In [6] the Horadam recurrence relation (1) is extended to higher order recurrence relations. In fact, third-order Horadam numbers $H_n = H_n(a,b,c;p,q,r)$ are defined by

$$H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2} + rH_{n-3}, \qquad n \geqslant 3, \tag{2}$$

with initial values $H_0 = a$, $H_1 = b$ and $H_2 = c$.

In equation (2), for special choices of a, b, c, p, q and r, the following recurrence relations can be obtained:

- for $a = b = c = p = q = r = 1$, it is obtained *tribonacci numbers* (sequence A000073 from [7]);
- for $a = 3$, $b = 1$, $c = 3$, $p = q = r = 1$, it is obtained *tribonacci-Lucas numbers* (sequence A001644);
- for $a = 1$, $b = c = 0$, $p = 0$, $q = r = 1$, it is obtained *Padovan numbers* (sequence A000931);
- for $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$, $p = 0$, $q = r = 1$, it is obtained *Perrin numbers* (sequence A001608);
- for $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$, it is obtained *Fibonacci-Narayana numbers* (sequence A000930).

Applying the apparatus of triangular matrices (see, for example, [8] and the bibliography given there), we proved new recurrent formulas expressing third-order Horadam numbers H_n with even and odd subscripts via recurrent determinants of four-diagonal matrix of order n.

Our approach is similar to spirit in [1, 2, 3].

Let P_n and Q_n denote the $n \times n$ four-diagonal matrices

$$P_n = \begin{pmatrix} H_1 & H_1 & 0 & & & & & \\ 0 & H_3 & H_3 & & & & 0 & \\ 0 & 0 & H_5 & H_5 & & & & \\ 0 & pH_6 & -rH_4 & qH_5 & H_7 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & pH_{2n-6} & -rH_{2n-8} & qH_{2n-7} & H_{2n-5} & 0 \\ & 0 & & & pH_{2n-4} & -rH_{2n-6} & qH_{2n-5} & H_{2n-3} \\ & & & & 0 & pH_{2n-2} & -rH_{2n-4} & qH_{2n-3} \end{pmatrix},$$

and

$$Q_n = \begin{pmatrix} H_0 & H_0 & 0 & & & & & & \\ 0 & H_2 & H_2 & & & & & & \\ 0 & 0 & H_4 & H_4 & & & & 0 & \\ 0 & pH_5 & -rH_3 & qH_4 & H_6 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & pH_{2n-7} & -rH_{2n-9} & qH_{2n-8} & H_{2n-6} & 0 \\ & 0 & & & pH_{2n-5} & -rH_{2n-7} & qH_{2n-6} & H_{2n-4} \\ & & & & 0 & pH_{2n-3} & -rH_{2n-5} & qH_{2n-4} \end{pmatrix}.$$

Theorem. *For all $n \geqslant 1$, the following formulas hold:*

$$H_{2n-1} = \frac{\det P_n}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} H_{2i-1}}, \qquad H_{2n-2} = \frac{\det Q_n}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} H_{2i-2}},$$

By choosing other suitable values on a, b, c, p, q and r, we can also obtain the tribonacci, tribonacci-Lucas, Padovan, Perrin and Fibonacci-Narayana numbers in term of recurrent determinants of four-diagonal matrix.

Reference

[1] T. Goy, *Fibonacci and Lucas numbers via the determinants of tridiagonal matrix.* Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 24 (2018), no. 1, 27-43.

[2] T. Goy, *Horadam sequence through recurrent determinants of tridiagonal matrix.* Kragujevac Journal of Mathematic, 42 (2018), no. 4, 527-532.

[3] T. Goy, *On identities with multinomial coefficients for Fibonacci-Narayana sequence.* Annales Mathematicae et Informaticae, 49 (2018), 75-84.

[4] A.F. Horadam, *Basic properties of a certain generalized sequence of numbers.* Fibonacci Quarterly, 3 (1965), no. 3, 161-176.

[5] A.F. Horadam, *Special properties of the sequence $W_n(a, b; p, q)$.* Fibonacci Quarterly, 5 (1967), no. 5, 424-434.

[6] A.G. Shannon and A.F. Horadam, *Some properties of third-order recurrence relations.* Fibonacci Quarterly, 10 (1972), no. 2, 135-146.

[7] N.J.A. Sloane (ed.), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at http://oeis.org.

[8] R. Zatorsky and T. Goy, *Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences.* Journal of Integer Sequences, 19 (2016), no. 2, Article 16.2.2.

ПОДОБИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ТИПОВ НАСЛЕДСТВЕННЫХ ТЕОРИЙ

А.Р. Ешкеев, М.Т. Омарова, Г.А. Уркен

КарГУ имени Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mails: aibat.kz@gmail.com, omarovamt_963@mail.ru, guli_1008@mail.ru

Определение 1 *Йонсоновская теория называется наследственной, если в любом ее допустимом обогащении она будет йонсоновской.*

Пусть L - язык первого порядка, T - произвольная наследственная йонсоновская теория в L сигнатуры σ, C - семантическая модель теории T, $A \subseteq C$, $\sigma_\Gamma = \sigma \bigcup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \bigcup \{c\}$.

Пусть $\overline{T}$=$Th_{\forall\exists}(C, c_a)_{a\in C} \bigcup Th_{\forall\exists}(E_T) \bigcup \{P(c)\} \bigcup \{"P \subseteq "\}$, где $\{"P \subseteq "\}$ является бесконечным множеством предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P является экзистенциально замкнутой подмоделью на языке сигнатуры σ_Γ. То есть интерпретация символа P является решением следующего уравнения $P(C) = M \in E_T$ в языке сигнатуры σ_Γ.

Рассмотрим все пополнения теории $\overline{T}$ в языке сигнатуры σ_Γ. Так как T - наследственная теория, то $\overline{T}$ будет йонсоновской теорией, поэтому у нее есть центр, и мы обозначим его через $\overline{T}^*$, и этот центр равен одному из вышеперечисленных пополнений теории $\overline{T}$. При ограничении сигнатуры σ_Γ на $\sigma \cup P$, согласно законам логики первого порядка, константа c уже не принадлежит этой сигнатуре, и мы можем заменить эту константу переменной, например x. И тогда теория $\overline{T}^*$ становится полным 1-типом для переменной x. Этот тип мы будем называть центральным типом теории $\overline{T}$ в приведенном выше обогащении.

Пусть T - произвольная йонсоновская теория, тогда $E(T)$=$\bigcup_{n<\omega} E_n(T)$, где $E_n(T)$ – есть решетка $\exists$-формул с n свободными переменными, T^* – центр йонсоновской теории T, т.е. $T^* = Th(C)$, где C – семантическая модель йонсоновской теории T.

Определение 2 Пусть T_1 и T_2 - йонсоновские теории. Мы будем говорить, что T_1 и T_2 – йонсоновски синтаксически подобны, если существует биекция $f : E(T_1) \to E(T_2)$ такая, что

1) ограничение f до $E_n(T_1)$ есть изоморфизм решеток $E_n(T_1)$ и $E_n(T_2)$, $n < \omega$;
2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in E_{n+1}(T)$, $n < \omega$;
3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Теорема 1 *Если T_1, T_2 - наследственные, $\forall\exists$ полные, йонсоновские теории. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) T_1^* синтаксически подобна T_2^* в смысле [1];
2) T_1^c синтаксически подобна T_2^c в смысле [2];
3) $(T_1^*)^f$ синтаксически подобна $(T_2^*)^f$.

Все неопределенные понятия в этом тезисе можно показать в [1,2].

Список литературы

[1] A.R. Yeshkeyev *Jonsson theories.* Karaganda: Izd-vo KarGU, (2009), 250 p.

[2] T.G. Mustafin *On similarities of complete theories.* Logic Colloquium '90. Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. — Helsinki (1990), 259–265.

СВОЙСТВА КАТЕГОРИЧНОСТИ И СТАБИЛЬНОСТИ ГИБРИДОВ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ ТЕОРИЙ

А.Р. Ешкеев Г.Е. Жумабекова, Н.М. Мусина

КарГУ им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mails: aibat.kz@gmail.com, galkatai@mail.ru, nazerke170493@mail.ru

В данном тезисе мы рассматриваем некоторые свойства понятий категоричности и стабильности гибридов одной сигнатуры для наследственных теорий. Дадим необходимые определения понятий, касающиеся основного результата.

Пусть T йонсоновская теория. C семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma = \sigma \bigcup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \bigcup \{c\}$. Пусть $\overline{T} = Th_{\forall\exists}(C, c_a)_{a\in C} \bigcup Th_{\forall\exists}(E_T) \bigcup \{P(c)\} \bigcup \{"P \subseteq "\}$, где $\{"P \subseteq "\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ_Γ. Т.е. интерпретацией символа P является решение следующего уравнения $P(C) = M \in E_T$ в языке σ_Γ. В силу наследственности теории T, теория $\overline{T}$ является йонсоновской теорией. Рассмотрим все пополнения теории $\overline{T}$ в языке сигнатуры σ_Γ. Так как $\overline{T}$ является йонсоновской теорией, она имеет свой центр и мы обозначим его через $\overline{T}^*$ и этот центр является одним из вышеуказанных пополнений теории $\overline{T}$. При обеднении сигнатуры σ_Γ до $\sigma \cup P$, в силу законов логики первого порядка так как константа c уже не принадлежит этой сигнатуре, эту константу мы можем заменить на символ переменной, например x. И тогда теория $\overline{T}^*$ становится полным 1-типом от переменной x. Этот тип мы и назовем центральным типом теории $\overline{T}$ в данном обогащении [3].

Определение 1 Гибридом $H(T_1, T_2)$ йонсоновских теорий T_1 и T_2 будем называть теорию $Th_{\forall\exists}(C_1 \boxdot C_2)$, если она йонсоновская. При этом алгебраическая конструкция $(C_1 \boxdot C_2)$ называется семантическим гибридом теорий T_1 и T_2, где C_1, C_2 - семантические модели T_1, T_2 соответственно.

Заметим следующий факт:
Факт. Для того чтобы теория $H(T_1, T_2)$ была йонсоновской достаточно, чтобы $(C_1 \boxdot C_2) \in E_T$.

Определение 2 Пусть λ – произвольный кардинал. Йонсоновская теория T называется J-P-λ-стабильной, если $|S^J_A| \leqslant \lambda$ для любого множества A мощности $\leqslant \lambda$.

Определение 3 Йонсоновская теория T называется J-P-стабильной, если теория T является J-P-λ-стабильной для некоторого λ.

Определение 4 Обогащение $\overline{T}$ йонсоновской теорий T называется допустимым, если любой ∇-тип (т.е. любая формула этого типа принадлежит ∇, где $\nabla -$ подмножество языка L_σ) в этом обогащении определим в рамках рассматриваемой $\overline{T}_\Gamma$-стабильности.

Определение 5 Йонсоновская теория называется наследственной, если в любом её допустимом обогащении её расширение в этом обогащении является йонсоновской теорией.

Определение 6 Будем говорить, что йонсоновские теории T_1 и T_2 косемантичны $(T_1 \bowtie T_2)$, если они имеют общую семантическую модель, т.е. $C_{T_1} = C_{T_2}$.

Пусть T_1, T_2 – наследственные йонсоновские теории одной сигнатуры σ. $\sigma' = \sigma \cup P \cup \{c\}$. C_1 — семантическая модель теории T_1, C_2 — семантическая модель теории T_2. $C_1(P) = M_1 \in E_{T_1}$, $C_2(P) = M_2 \in E_{T_2}$. Пусть $T_1 \bowtie T_2$ (косемантичны) и $T_3 = Th_{\forall\exists}(M_1 \times M_2)$. В связи с вышеуказанными обозначениями имеем следующие результаты.

Теорема 1 *Если T_1 – J-P-стабильная теория, T_2 – J-P-λ-стабильная теория, тогда T_3 – J-P-λ-стабильная теория.*

Теорема 2 *Если T_1, T_2 – ω-категоричны $\exists$-полные теории, тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $\overline{T}_3^*$ – ω-категорична;
2) $\overline{T}_1^*$ – ω-категорична;
3) $\overline{T}_2^*$ – ω-категорична.

Все неопределенные в данном тезисе понятия можно извлечь из [1,2,3].

Список литературы

[1] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова, *Йонсоновские теории и их классы моделей.* Изд-во КарГУ, (2016), - 370 с.

[2] A.R. Yeshkeyev, N.M. Mussina, *Properties of hybrids of Jonsson theories.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics. 92 (2018), no. 4., P. 99–104.

[3] A.R.Yeshkeyev, M.T. Omarova, G.E. Zhumabekova, *The J-minimal sets in the hereditary theories.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics. 94 (2019), no. 2., P. 92-98.

СВОЙСТВА АТОМНОСТИ МОДЕЛИ ДЛЯ ГИБРИДА ЗАМЫКАНИЙ АТОМНЫХ МНОЖЕСТВ

А.Р. Ешкеев, А.К. Исаева, Н.М. Мусина

КарГУ им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mails: aibat.kz@gmail.com, isa_aiga@mail.ru, nazerke170493@mail.ru

Данный тезис отражает некоторые свойства нового понятия, как гибрид йонсоновских теорий. Мы определяем основные понятия атомности и простоты в рамках изучения йонсоновских теорий. Для этой цели определяется специальные подмножества, а также определимое замыкание таких множеств образуют замкнутую модель.

Определение 1 Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель теории T является насыщенной моделью T^*.

Определение 2 Гибридом $H(T_1, T_2)$ йонсоновских теорий T_1, T_2 будет называться теория $Th_{\forall\exists}(C_1 \boxdot C_2)$, если она йонсоновская. При этом алгебраическая конструкция $(C_1 \boxdot C_2)$ называется семантическим гибридом теорий T_1, T_2, где C_1, C_2 - семантические модели T_1, T_2 соответственно.

Заметим следующий факт:
Факт. Для того чтобы теория $H(T_1, T_2)$ была йонсоновской достаточно, чтобы $(C_1 \boxdot C_2) \in E_T$.

Определение 3 Пусть $X \subseteq C$. Мы будем говорить, что множество X является $\nabla - cl$-йонсоновским подмножеством C, если X удовлетворяют следующие условия:

1) X - ∇-определимое множество (это означает, что существует формула из ∇, решение которой в C является множество X, где $\nabla \subseteq L$, такой что ∇ - формула вида $\exists, \forall, \forall\exists$ и т.д.);

2) $cl(X) = M$, $M \in E_T$, где cl некоторый оператор замыкания определяющий предгеометрию над C (например $cl = acl$ или $cl = dcl$).

Определение 4 Множество A будем называть $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$ атомным в теории T, если:

1) $\forall a \in A, \exists \varphi \in \nabla_1$ такой что для любой формулы $\psi \in \nabla_2$ следует, что φ является полной формулой для ψ и $C \models \varphi(a)$;

2) $cl(A) = M, M \in E_T$, и полученная модель M называется $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$ атомной моделью теории T.

Теорема 1 *Пусть T - полная для $\exists$-предложений сильно выпуклая йонсоновская совершенная теория и пусть A_1, A_2 - $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$- атомные множества в T.*

Если $cl(A_1) = M_1 \in E_T$, $cl(A_2) = M_2 \in E_T$ тогда если $M_1, M_2 \in AP_T$ и гибрид $Th_{\forall\exists}(M_1 \times M_2) = T_1$ имеет модель N, которая $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$- атомная в T, тогда $N \in AP_{T_1}$ и N-$(\Sigma, \Sigma) - cl$-атомная модель в T_1.

Все неопределенные в данном тезисе понятия, касающиеся йонсоновских теорий, можно извлечь из [1], а относительно гибридов йонсоновских теорий из [2].

Список литературы

[1] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова, *Йонсоновские теории и их классы моделей.* Изд-во КарГУ, (2016), - 370 с.

[2] A.R. Yeshkeyev, N.M. Mussina, *Properties of hybrids of Jonsson theories.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics. 92 (2018), no. 4., P. 99–104.

THE REMARK ABOUT MODIFIED CHI-SQUARE ESTIMATION FOR POLYNOMIAL DISTRIBUTION

A.S. Iskakova

Gumilyov Eurasian University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: ayman.astana@gmail.com

It's known that polynomial distribution has form

$$P(\mathbf{U} = \mathbf{u}) = n! \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{p_\alpha^{r_{\alpha_{v_\mathbf{u}}}}}{r_{\alpha_{v_\mathbf{u}}}!}. \tag{1}$$

where vector $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$ is vector of parameters, which is not known. Consequently, formula (1) does not find actual application [1]-[2]. In this connection, it becomes necessary to determine the probability estimate (1).

Assume that there are photos in the number of k particular locality with the distortions $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ In other words, the set $\mathbf{x}$ can be interpreted as a realization of a sample $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_k\}$ with volume k, whose elements have distribution (1). We denote vector $\mathbf{r}_{v_\beta} = (r_{1_{v_\beta}}, \ldots, r_{d_{v_\beta}})$, which defines v_β - th solution of equation

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1}^{d} L_\alpha r_{\alpha_{v_\beta}} = \mathbf{x}_\beta, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{d} r_{\alpha_{v_\beta}} = n, \end{cases} \tag{2}$$

where $v_\beta = 1, \ldots, V_\beta, V_\beta$ - the number of partitions of the matrix $\mathbf{x}_\beta$ on the matrices $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\ldots$,, $\mathbf{L}_d$. Using the system of equations (2), the matrices $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\ldots$,, $\mathbf{L}_d$, and the actual data $\mathbf{x}$, we define for each $\beta = 1, \ldots, k$ the number of partitions V_β matrix $\mathbf{x}_\beta$ at $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\ldots$,, $\mathbf{L}_d$, and vectors $\mathbf{r}_{1_\beta}$, $\ldots$, $\mathbf{r}_{V_\beta}$.

Suppose that for each $j = 1, \ldots, \mu$, where

$$\mu = \prod_{\beta=1}^{k} V_\beta,$$

there is a vector $\mathbf{z}_j = (z_{1_j}, \ldots, z_{d_j})$, defined as

$$\mathbf{z}_j = \sum_{\beta=1}^{k} \mathbf{r}_{v_\beta}, \tag{3}$$

and the indices on the right and left side are linked one-to-one correspondence, which is not unique. To fully describe the studies of the presented model, adopted in statistics, it is necessary to test the hypothesis of the model's adequacy to observations [1]-[3]. The family used test criterion for the hypothesis is K. Pearson's Chi-square. When certain conditions are met, statistics

$$X_k^2\left(\widetilde{\theta}_k\right) = \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\left(\zeta_\beta^{(k)} - k \sum\limits_{\mathbf{u}\in\Omega_\beta} \widetilde{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u})\right)^2}{k \sum\limits_{\mathbf{u}\in\Omega_\beta} \widetilde{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u})}$$

has a limiting distribution χ^2 with $k - d - 1$ degrees of freedom, where $\widetilde{\theta}_k$ it is an estimate for the parameter vector $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$, the obtained modified method min χ^2 , $\beta \geqslant 2$ is a number of splits set Ω on disjoint subsets Ω_1, $\ldots$, Ω_β,

$$\widetilde{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u}) = n! \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{\widetilde{\theta}_\alpha^{r_{\alpha_{v_\mathbf{u}}}}}{r_{\alpha_{v_\mathbf{u}}}!}.$$

Thus, if we use this statistics, then for the parameter vector $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ the required estimation $\widetilde{\theta}$, obtained by the modified $\min\chi^2$ method.

Theorem 1 *Estimates for the parameters* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ *of the polynomial distribution (1) determined by the method* $\min\chi^2$ *do not exist.*

Reference

[1] Ayman I. Statistical Research for Probabilistic Model of Distortions of Remote Sensing //Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2016. 738. 1. pp. 012004.

[2] Ayman I. Construction of the most suitable unbiased estimate distortions of radiation processes from remote sensing data //Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2014. 490. 1. pp. 012113.

[3] Iskakova A.S., Zhaxybayeva G. Maximum likelihood estimates of some probability model of discrete distributions //Bulletin of the Kara-ganda University. Mathematics Series № 1(89)/2018. P. 61-69 .

TOTALLY CATEGORICAL UNIVERSAL CLASSES OF THE ROBINSON SPECTRUM

M.T. Kassymetova

Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: mairushaasd@mail.ru

Let $\mathcal{A} \in Mod\,\sigma$. Let us call the Jonsson spectrum of the model $\mathcal{A}$ a set:

$$JSp\,(\mathcal{A}) = \{T \mid T \text{ is Jonsson theory in } \sigma \text{ and } \mathcal{A} \in Mod\,T\}.$$

We say that a Jonsson theory T_1 is cosemantic to Jonsson theory T_2 ($T_1 \bowtie T_2$) if $\mathcal{C}_{T_1} = \mathcal{C}_{T_2}$, where $\mathcal{C}_{T_i}$ is semantic model of T_i, $i = 1, 2$. The relation of cosemanticness on a set of theories is an equivalence relation. Then $JSp(\mathcal{A})/_{\bowtie}$ is the factor set of a Jonsson spectrum of the model $\mathcal{A}$ with respect $\bowtie$.

We call the Robinson spectrum of model $\mathcal{A}$ the set:

$$RSp(\mathcal{A}) = \{T \,|\, T \text{ is the Robinson theory in language } \sigma \text{ and } \mathcal{A} \in Mod\,T\}.$$

Any Robinson theory is Jonsson theory. We can consider factor set $RSp(\mathcal{A})/_{\bowtie}$ of Robinson spectrum of model $\mathcal{A}$ by relation $\bowtie$. Let $[T] \in RSp(\mathcal{A})/_{\bowtie}$, then $E_{[T]} = \bigcup\limits_{\Delta \in [T]} E_{\Delta}$.

E.A. Palyutin's question (*): Is there ω-categorical universal K that is not ω_1-categorical?

Definition 1 *We say that a class $[T]$ is $\varkappa$-categorical if any theory $\Delta \in [T]$ is $\varkappa$-categorical.*

Theorem 1 *Let $[T] \in RSp(A)/_{\bowtie}$ and $[T]$ satisfies the conditions of Palyutin's question, and (*) is not true, then $[T]^*$ is not finite axiomatizable.*

Reference

[1] J. Barwise, editor *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1977), 392 pp.

[2] A.R. Yeshkeyev, M.T. Kassymetova *Jonsson theories and their classes of models.* Monograph, Karaganda, KarGu Publishing House (2016), 370 pp.

COMPUTABLE NUMBERINGS IN THE ERSHOV HIERARCHY

M. Manat
Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

In recursive mathematics and computability theory, we encounter various situations which naturally lead one to the study of classes of constructive objects. An examination of the algorithmic properties of classes of constructive objects fares best with the techniques and notions of the theory of computable numberings.

In the theory of algorithms all objects are treated with respect to some modulo of computable equivalence and the notion of equivalent numberings is just the suitable modulo. Any index n of the set $\alpha(n)$ with respect to numbering α may be thought as a description of that set in some formal language.

Therefore equivalent numberings are not distinguishable from the algorithmic point of view. This approach allows to formulate the most part of the problems on numberings in terms of Rogers semilattices. And in general setting these problems could be formulated as follows.

- Find global algebraic properties of Rogers semilattices (cardinality, type of the algebraic structure, ideals, segments, covers and etc.)
- Describe invariants and among them a number of extremal elements to distinguish different Rogers semilattices.
- Classify numberings which generate special elements in Rogers semilattices (extremal elements, limit points, splitted elements and so on).

Reference

[1] Yu. L. Ershov, *Theory of numberings.*—Nauka, Moscow, 1977 (Russian).

[2] R. M. Friedberg, *Three theorems on recursive enumeration.* J. Symbolic Logic, 1958, v. 23, no. 3, pp. 309–316.

[3] S.S. GONCHAROV, *The family with unique univalent but not the smallest enumeration.*, Trudy Inst. Matem. SO AN SSSR, v.8, pp.42-48, Nauka, Novosibirsk, 1988 (Russian).

[4] A.B. Khutoretsky, *On the cardinality of the upper semilattice of computable numberings*, Algebra and Logic, 1971, v.10, n.5, pp.348–352.

[5] S.S. Goncharov, A. Sorbi, *Generalized computable numerations and non-trivial Rogers semilattices.* Algebra and Logic, 1997, v.36, n.4., pp.359–369.

[6] , M. KUMMER, *Some applications of computable one-one numberings*, Arch. Math. Log., v.30, n.4 (1990), 219-230.

[7] Badaev, Serikzhan A. and Goncharov, Sergey S., *The theory of numberings: open problems*, in: “Computability theory and its applications. Current trends and open problems” (eds. Cholak, Peter A.; Lempp, Steffen; Lerman, Manuel; and Shore, Richard A.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 23–38.

ЭКЗИИСТЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

А.Т. Нуртазин

ИИВТ, Алматы, Казахстан
abyznurtazin@mail.ru

Модельно полные теории и экзистенциально замкнутые структуры, открытые Абрахамом Робинсоном в пятидесятых годах прошлого столетия образуют один из важных и наиболее развитых разделов теории моделей.

Определение 1 *Говорят, что структура* $\mathscr{M} = \langle M; \Sigma\rangle$ *экзистенциально замкнута в классе* $\mathscr{S}$*, если она имеет расширения из этого класса и в любом таком расширении* $\mathscr{N} = \langle N; \Sigma\rangle$ *для* $\bar{a}$ *из* M, $\bar{b}$ *из* N *и конечной подсигнатуры* σ *сигнатуры* Σ *в подструктуре* $\mathscr{M}$ *найдётся кортеж* $\bar{b}'$ *такой что* $\langle|\bar{a}\bar{b}'|; \sigma\rangle \approx \langle|\bar{a}\bar{b}|; \sigma\rangle$.

Мы же назовём просто экзистенциально замкнутой каждую структуру, экзистенциально замкнутую хотя бы в одном аксиоматизируемом классе. Нетрудно видеть, что предложенное упрощение, делая самостоятельным понятие экзистенциально замкнутой структуры, приводит к возникнвению целого ряда новых вопросов в этой области. Одним из первых таких вопросов можно считать следующий:

— *Выделить в данном аксиоматизируемом классе моделей подкласс всех экзистенциально замкнутых.*

Из результатов Ангуса Макинтайра следует, что сформулированный вопрос оказывается чрезвычайно сложным для класса всех групп. Из предыдущих работ автора следует, что экзистенциально замкнутые структуры удобно изучать в рамках компаньон-классов, в которых любые структуры порождают одни и те же подклассы конечных вложимых в них структур, а сами эти классы аксиоматизируются предложениями кванторной сложности один и обязательно содержат экзистенциально замкнутые. Подкласс экзистенциально замкнутых структур любого компаньон-класса мы называем экзистенциально замкнутым компаньоном, а семейство всех счётных из них — счётным экзистенциально замкнутым компаньоном.

Теорема 1 *Любой счетный экзистенциально замкнутый компаньон абелевых групп содержит либо одну, либо счётное число экзистенциально замкнутых.*

Теорема 2 *Имеется континуум попарно не элементарно эквивалетных экзистенциально закнутых абелевых групп.*

Теорема 3 *Элементарная теория любого экзистенциально замкнутого компаньона абелевых групп полна, модельно полна и тотально трансцендентна.*

Теорема 4 *Класс всех экзистенциально замкнутых абелевых групп аксиоматизируем, а его элементарная теория разрешима.*

Исследование поддерживалось грантом Комитета Науки МОН РК (№ госрегистрации 0118РК 00111).

Список литературы

[1] Fraisse R., *Sur quelques classifications des systemes de relations,* Publ. scient. de l'univ. d'Algers, 1955, A1, 35–182.

[2] Robinson A., *On the Metamathematics of Algebra,* Amsterdam: North-Holland, 1951.

[3] Macintyre A., *On algebraically closed groups,* Ann. Math., 1972, 96, 53–97.

ЙОНСОНОВСКАЯ СОВЕРШЕННОСТЬ J-КАТЕГОРИЧНОГО МОДУЛЯ

О.И. Ульбрихт

КарГУ имени Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: ulbrikht@mail.ru

Теоретико-модельные вопросы модулей являются актуальными задачами современной алгебры. Модуль является одним из основным понятий общей алгебры. В данном тезисе мы будем иметь дело с йонсоновскими теориями модулей, которые, вообще говоря, не являются полными.

Определение 1 [1] Теория T называется йонсоновской, если
(1) T имеет бесконечную модель;
(2) T индуктивна, т.е. T эквивалентна множеству $\forall\exists$-предложений;
(3) T обладает свойством совместного вложения (JEP);
(4) T обладает свойством амальгамируемости (AP).

Определение 2 [2] Семантической моделью C_T йонсоновской теории T называется ω^+-однородная-универсальная модель теории T.

Определение 3 [1] Семантическим пополнением (центром) йонсоновской теории T называется элементарная теория T^* семантической модели C_T теории T, т.е. $T^* = \mathrm{Th}(C_T)$.

Определение 4 [1] Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^*.

R-модули – это L_R-структуры, где язык L_R содержит $0, +, -$ и унарный функциональный символ для каждого $r \in R$. Обозначим через T_R L_R-теорию R-модулей.

Лемма 1 *Теория T_R – йонсоновская теория.*

Заметим, что теория T_R, вообще говоря, не является совершенной, а совершенной является в случае, когда кольцо R когерентно.

Пусть E_T – класс всех экзистенционально замкнутых моделей теории T.

Определение 5 Будем говорить, что йонсоновская теория T J-$\varkappa$-категорична, если для любых двух моделей $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in E_T$ таких, что $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = \varkappa$, следует $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Йонсоновская теория T называется J-категоричной, если T J-$\varkappa$-категорична для некоторого $\varkappa$.

Получен следующий результат, описывающий J-категоричные йонсоновские совершенные R-модули:

Теорема 1 *Пусть T_R – $\forall\exists$-полная йонсоновская теория. Тогда, если T_R – J-$\varkappa$-категорична, где $\varkappa \geqslant \omega$, то T_R – совершенна.*

Все неопределённые понятия и связанные с ними результаты в данном тезисе относительно йонсоновских теорий можно найти в [1].

Список литературы

[1] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова, *Йонсоновские теории и их классы моделей: монография.* Караганда, КарГУ (2016), 370 с.

[2] Y.T. Mustafin, *Quelques proprietes des theories de Jonsson.* The Journal of Symbolic Logic, 67 (2002), no. 2., 528–536.