УДК 517.956.3

Кабдрахова С.С., Мусалимова А.

Об одном алгоритме нахождения решения краевой задачи для линейного гиперболического уравнения с интегральными краевыми условиями

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: S_Kabdrachova@maii.ru

На $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для линейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\int_0^T \Big[P_2(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial x} + P_1(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau} + P_0(x,\tau)u(x,\tau)\Big]d\tau = \phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где функции $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, $f(x,t)$, $P_i(x,t)$, $i = 0,1,2$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и функция $\phi(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$.

Пусть $C(\overline{\Omega})$ -пространство непрерывных на функций $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Для функции при фиксированном введем норму $\|u\|_C = \max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,t)|$.

Решением задачи (1)-(3) называется функция $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$ которая имеет частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2),(3).

В работах [1-2] были получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи для систем гиперболических уравнений с интегральными краевыми условиями. В интегральном условии (3) присутствовали так же значения искомой функции на характеристиках $t = 0$, $t = T$. На основе метода параметризации и корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальной краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений.

В настоящем сообщений на основе метода модификации ломаных Эйлера [3] построен алгоритм нахождения приближенного решения, получены признаки однозначной разрешимости краевой задачи (1)-(3) и установлены оценки обеспечивающие сходимость модификации метода ломаных Эйлера к решению исходной задачи.

С помощью замены $v(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $w(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ задачу (1)-(3) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = A(x,t)v + B(x,t)w + C(x,t)u + f(x,t), \tag{4}$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi,\ w(x,t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\int_0^T \Big[P_2(x,\tau)v(x,\tau) + P_1(x,\tau)w(x,\tau) + P_0(x,\tau)u(x,\tau)\Big]d\tau = \phi(x), \tag{6}$$

Для нахождения решения задачи (4)-(6) используем модификацию метода ломаных Эйлера. Разобьем отрезок $[0.\omega]$ с шагом $h > 0$ на N частей, $Nh = \omega$ и на каждом шаге решаем нелокальные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Алгоритм нахождения решения краевой задачи (4)-(6).

Для начального приближения функции определим $v^{(0)}(t), \dot{v}^{(0)}(t), u^{(0)}(t), w^{(0)}(t)$ равенствами: $v^{(0)}(t) = 0$, $\dot{v}^{(0)}(t) = 0, u^{(0)}(t) = \psi(t)$, $w^{(0)}(t) = \psi(t)$.

Шаг-1. Решая нелокальную краевую задачу

$$\frac{dv^{(1)}}{\partial t} = A(0,t)v^{(1)} + B(0,t)\dot{\psi}(t) + C(0,t)\psi(t) + f(0,t),$$

$$\int_0^T \Big[P_2(0,\tau)v^{(1)}(\tau) + P_1(0,\tau)\dot{\psi}(\tau) + P_0(0,\tau)\psi(\tau)\Big]d\tau = \phi(0)$$

находим функцию $v^{(1)}(t)$.

Шаг-2. Найденную функция $v^{(1)}(t)$ подставляя в правую часть (5) находим функции $u^{(1)}(t) = \psi(t) + hv^{(1)}(t)$, $w^{(1)}(t) = \dot{\psi}(t) + h\dot{v}^{(1)}(t)$.

Функцию $v^{(2)}(t)$ найдем решая нелокальную краевую задачу

$$\frac{dv^{(2)}}{\partial t} = A(h,t)v^{(2)} + B(h,t)(\dot{\psi}(t) + h\dot{v}^{(1)}(t)) + C(h,t)(\psi(t) + hv^{(1)}(t)) + f(h,t),$$

$$\int_0^T \Big[P_2(h,\tau)v^{(2)}(\tau) + P_1(h,\tau)(\dot{\psi}(\tau) + \dot{v}^{(1)}(\tau)) + P_0(h,\tau)(\psi(\tau) + hv^{(1)}(\tau))\Big] d\tau = \phi(h).$$

На $i-$ **ом шаге** алгоритма считая известными $v^{(i-1)}(t)$, $\dot{v}^{(i-1)}(t)$, $i = \overline{1, N+1}$ функцию $v^{(i)}(t)$ находим решая нелокальную краевую задачу

$$\frac{dv^{(i)}}{\partial t} = A((i-1)h,t)v^{(i)} + B((i-1)h,t)\Big(\dot{\psi}(t) + h\sum_{j=0}^{i-1}\dot{v}^{(j)}(t)\Big) +$$

$$+ C((i-1)h,t)\Big(\psi(t) + h\sum_{j=0}^{i-1}v^{(j)}(t))\Big) + f((i-1)h,t), \qquad (7)$$

$$\int_0^T \Big[P_2((i-1)h,\tau)v^{(i)}(\tau) + P_1((i-1)h,\tau)\Big(\dot{\psi}(\tau) + \sum_{j=0}^{i-1}\dot{v}^{(j)}(t)\Big) +$$

$$+ P_0((i-1)h,\tau)\Big(\psi(\tau) + h\sum_{j=0}^{i-1}v^{(j)}(t)\Big)\Big] d\tau = \phi((i-1)h). \qquad (8)$$

Теорема. *Пусть выполняется неравенство* $\Big|\int_0^T P_2(x,\tau)\exp\Big(\int_0^\tau A(x,\tau_1)d\tau_1\Big)d\tau\Big| \geq \delta > 0$ *для всех* $x \in [0,\omega]$. *Тогда для любого* $h > 0 : Nh = \omega$ *нелокальная краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (7),(8) имеет единственное решение* $\{v^{(i)}(t)\}$, $i = \overline{1, N+1}$.

По найденным функциям $v^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N+1}$ на $\overline{\Omega}$ строятся функции:

$$U_h(x,t) = \psi(t) + h\sum_{j=0}^{i-1}v^{(j)}(t) + v^{(i)}(t)(x-(i-1)h), \quad x \in [(i-1)h, ih),$$

$$W_h(x,t) = \dot{\psi}(t) + h\sum_{j=0}^{i-1}\dot{v}^{(j)}(t) + \dot{v}^{(i)}(t)(x-(i-1)h), \quad x \in [(i-1)h, ih),$$

$$V_h(x,t) = v^{(i+1)}(t)\frac{x-(i-1)h}{h} + v^{(i)}(t)\frac{ih-x}{h}, \quad x \in [(i-1)h, ih), \quad i = \overline{1, N}.$$

Система троек $\{U_h(x,t), W_h(x,t), V_h(x,t)\}$ является приближенным решением задачи (4)-(6), построенным при помощи модификации метода ломаных Эйлера.

Литература

1. Асанова А.Т. О краевой задаче для систем гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием //Матем. журнал, Алматы - 2006. - Т. 6, №4(22). - С.17-25.

2. A.T.Asanova. D.S.Dzhumabaev Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations //Journal Mathematical Analysis and Applications, -2013, №402. -С. 167-178.

3. Кабдрахова С.С. Об оценках сходимости модификации метода ломаных Эйлера решения линейной полупериодической краевой задачи для гиперболического уравнения//Математический журнал, Алматы - 2008. Т. 8, №2(28).- С. 55-62.