ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЯТИМЕРНОГО ОБОБЩЕНИЯ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

Абдуахитова Г.Е., Токибетов Ж.А.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: gulzhan_ae@mail.ru

Пусть $b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$, $\bar{b} = b_1 - ib_2 - jb_3 - kb_4$ кватернионное и сопряженное кватернионное постоянные числа, а $\partial = \partial_{x1} + i\partial_{x2} + j\partial_{x3} + k\partial_{x4}$, $\bar{\partial} = \partial_{x1} - i\partial_{x2} - j\partial_{x3} - k\partial_{x4}$ кватернионные дифференцирования, $b_l\ (l = 1,2,3,4)$ - действительные постоянные, $\rho = \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2\right)^{-1}$, i, j, k - кватернионные единицы. В пространстве R^5 рассмотрим систему уравнений первого порядка, относительно двух кватернионных функций $U = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$, $V = u_5 + iu_6 + ju_7 + ku_8$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_5} + b\,\partial V = 0, \\ -\rho\,\bar{b}\,\bar{\partial} U + \dfrac{\partial V}{\partial x_5} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем кватернионную гармоническую функцию $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) + j\varphi_3(x) + k\varphi_4(x)$, тогда решение системы (1) имеет следующее представление

$$u_l = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_5}, l = 1,2,3,4,\ u_m = \rho(B_m, M_m),\ m = 5,6,7,8 \qquad (2)$$

Здесь

$$B_5 = (b_1, b_2, b_3, b_4),\ M_5 = (m_1, m_2, m_3, m_4),\ B_6 = (b_1, -b_2, -b_3, -b_4), M_6 = (m_2, m_1, m_4, m_3),$$

$$B_7 = (b_1, b_2, -b_3, -b_4),\ M_7 = (m_3, m_4, m_1, m_2),\ B_8 = (b_1, -b_2, b_3, -b_4),\ M_8 = (m_4, m_3, m_2, m_1),$$

$$m_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_4},\ m_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4},$$

$$m_3 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4},\ m_4 = \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4}.$$

С помощью представления (2) задача Римана-Гильберта о нахождении регулярного решения системы (1) сводится к задаче о наклонной производной для гармонических функции $\varphi_l(x)$, $l = 1,2,3,4$. Таким образом, задача о нахождении в полупространстве $x_5 > 0$ гармонической функции $\varphi_l(x)$, $l = 1,2,3,4$ удовлетворяющей на границе условию $\dfrac{\partial\varphi_l}{\partial x_5} = f_l$, $l = 1,2,3,4$ имеет решение при предположении $\varphi_l(x)$, $l = 1,2,3,4$ стремятся к нулю в бесконечности, и это решение находится явно по формуле

$$\varphi_l(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_l(y)\,dy_1 dy_2 dy_3 dy_4}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i - y_i)^2 + x_5^2}},\ l = 1,2,3,4.$$

и по формуле (2) находим единственное решение задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усс А.Т. *О краевых задачах для четырехмерных аналогов систем Коши-Римана с комплексными коэффициентами* // Гомельский госуниверситет, Гомель.–2001. - Вестник - №1.

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ПЕРВОГО РОДАФАЗОВЫХ СИСТЕМ

Абдилдаева А.А., Калимолдаев М.Н., Токаш А.

Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, Казахстан

E-mail: mnk@ipic.kz, aidyn_inf@mail.ru, abass_81@mail.ru

Рассмотрим решение задачи о нахождении необходимыхи достаточных условий существования предельных циклов первого рода для системы

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma);\ \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma), \tag{1}$$

где $A, B, C, R-$ постоянные матрицы порядков $n\times n, n\times m, m\times n, m\times m$ соответственно, функция $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m))$, причем

$$\mu_{1k} \le \frac{d\varphi_k(\sigma_k)}{d\sigma_k} \le \mu_{2k},\ \forall\sigma_k,\ \sigma_k \in R^1,\ \ k = \overline{1,m} \tag{2}$$

$$\varphi_k(\sigma_k + \Delta_k) = \varphi_k(\sigma_k),\ \forall\sigma_k,\ \sigma_k \in R^1,\ \ k = \overline{1,m}, \tag{3}$$

Решение задачи может быть получено путем погружения исходной в следующую задачу: минимизировать функционал

$$J(v, \bar{x}, \bar{\sigma}, T) = \int_0^T |v(t) - \varphi(\theta)|^2\, dt \to inf, \tag{4}$$

при условиях

$$\dot{y} = Ay + Bv(t),\ \ y(0) = y(T) = x(0) = x(T) = \bar{x},\ \ t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\dot{\theta} = Cy + Rv(t),\ \ \theta(0) = \theta(T) = \sigma(0) = \sigma(T) = \bar{\sigma},\ \ t \in [0,T], \tag{6}$$

$$v(\cdot) \in L_2[I, R^m],\ \ \bar{x} \in R^n,\ \ \bar{\sigma} \in R^m,\ \ T \in R^1,\ \ I = [0,T], \tag{7}$$

В самом деле, если для оптимального решения $(v_*, \bar{x}_*, \bar{\sigma}_*, T_*)$ задачи (4)-(7) значение $J(v_*, \bar{x}_*, \bar{\sigma}_*, T_*)$=0, то $v_*(t) = \varphi(\theta_*(t)),\ t \in [0, T_*]$. Оптимальные траектории $y_*(t),\ \theta_*(t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_*(t) = Ay_* + B\varphi(\theta_*(t)),\ \ y_*(0) = y_*(T) = \bar{x}_*,\ \ t \in [0,T], \tag{8}$$

$$\dot{\theta}_*(t) = Cy_* + R\varphi(\theta_*(t)),\ \ \theta_*(0) = \theta_*(T) = \bar{\theta}_*,\ \ t \in [0,T], \tag{9}$$

причем $y_*(t; 0, \bar{x}_*) = y_*(t + T_*; 0, \bar{x}_*)$, , $\theta_*(t;\ 0, \bar{\theta}_*) = \theta_*(t + T_*; 0, \bar{\theta}_*)$, $\forall t,\ t \in [0, \infty)$ в силу автономности системы (8), (9).Сравнивая дифференциальные уравнения (8),(9) с уравнением (1), легко убедиться в том, что $y_*(t; 0, \bar{x}_*) = x(t; 0, \bar{x}_*)$, , $\theta_*(t;\ 0, \bar{\theta}_*) = \sigma_*(t; 0, \bar{\sigma}_*)$, $t \in [0, \infty)$ – предельные циклы первого рода системы (1)-(3). Заметим, что inf $J(v, \bar{x}, \bar{\sigma}, T) \ge 0$.

Теперь рассмотрим в отдельности краевую задачу (5), т.е.

$$\dot{y} = Ay + Bv(t),\ y(0) = y(T) = \bar{x},\ \ v(\cdot) \in L_2[I, R^m],\ \ t \in I. \tag{10}$$

Применительно к краевой задаче (10) лемма может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема. Пусть rang $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$. Для того, чтобы $y(0) = y(T) = \bar{x}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$v(\cdot) \in U = \{v(\cdot) \in L_2(I, E^m) | v(t) = w(t) + \lambda_1(t, \bar{x}, T) + N_1(t, T)z(T), t \in I\}, \tag{11}$$

где

$$\lambda_1(t, \bar{x}, T) = C(t, T)a(T, \bar{x}),\ N_1(t, T) = C(t, T)e^{-AT},\ C(t, T) = B^* e^{-A^*T} W^{-1}(0, T),$$

$$a(T, \bar{x}) = e^{-AT}\bar{x} - \bar{x}, W(0, T) = \int_0^T e^{-A\tau} BB^* e^{-A^*\tau} d\tau,$$

$w(\cdot) \in L_2(I, E^m)$ –произвольная функция, функция $z(t) = z(t, w)$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = Az + Bw(t), z(0) = 0, t \in [0, T].$$

Отметим, что условие rang$[B, AB, \dots, A^{n-1}B]=n$ является необходимым и достаточным условием того, что матрица $W(0,T)$ – положительно определенная. Следовательно, существует обратная