**Нұрсадық Ақанбай**

**Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика**

**Курсы I**

**Оқулық**

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ ҰСЫНҒАН**

**Алматы**

**«Қазақ университеті»**

**2011**

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Нұрсадық Ақанбай

**Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика**

**Курсы I**

Оқулық

Алматы

«Қазақ университеті»

2011

Алғы сӨз

**«**Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика» пәні – классикалық университеттердің математика және математикаға жақын бағыттар (информатика, механика, математикалық және компьютерлік модельдеу, ақпараттық жүйелер т.с.с.) мамандықтары үшін мамандықтардың жалпыға міндетті білім стандарттарының оқытылуға міндетті пәндерінің құрамына кіретін іргелі математикалық пәндердің бірі. Бұл пән сонымен қатар көптеген жаратылыстану салалары, техникалық және экономикалық мамандықтар бойынша оқытылатын жоғары математика курсының аса маңызды бөліміне жатады, тіпті, кейбіреулері (әсіресе, жаңа экономикалық бағыттардағылары) үшін бірегейі де болып табылатыны.

Қазіргі таңда бұл пәнді жоғары мектепте оқытудың екі түрлі дәстүрлі бағыты қалыптасқан. *Бірінші бағытты* ұстанушылар бұл курсты негізінен теориялық-ықтималдықтық интуицияны дамытуға арналған курс ретінде оқытуды жақтайды. Анығырақ айтсақ, олар ықтималдық, тәуелсіздік, кездейсоқ шама, т.с.с. ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарын енгізу кезінде олардың дәл (қатаң математикалық) анықтамаларының орнына интуитивті түрде түсінікті пайымдауларды негізге алады. Ал пән мазмұнын бұлайша ұғындыру ықтималдықтар теориясын анализдің әр жерінен алынған жекелеген есептерді шығарумен алмастыруға әкеп соғатыны сөзсіз. Ықтималдықтар теориясын айтылған бағытпен оқытудың кемістіктерінің дәл сипаттамасын осы теорияның негізін қалаушыларының бірі *В.Феллер*  өзінің классикаға айналған екі томдық кітабының 1-томының кіріспесінде былай деп атап көрсеткен: “*Ықтималдықтар теориясын оқыту барысында бұл теорияның өз ерекшеліктерін ұмытып, көбіне ықтималдықтық есептерді мүмкіндігінше тезірек математикалық анализдің есептеріне келтіруге тырысады. Мұндай тәсіл әдетте ең алғашқы болып енгізілетін кездейсоқ шама ұғымының жарамсыз анықтамасына негізделеді. Бұған толықтай қарсы түрде бұл кітап элементар оқиғалар кеңістігі ұғымына сүйене отырып жазылған. Кездейсоқ шамаларды бұл ұғымсыз енгізу – ол адастыруды енгізу шеберлігін көрсету”* ([18], 14-бет),- деп атап көрсеткен.

*Екінші жағынан,* математиканың бір саласы ретінде, ықтималдықтар теориясының Колмогоров аксиоматикасына негізделген (таза) математикалық пән ретінде оқытылуы қажеттігі де түсінікті. Әрине, ықтималдықтар теориясын бұл екінші бағытта оқыту үшін жалпы ықтималдық кеңістігі ұғымын енгізу, кездейсоқ шамаларды өлшенетін функциялар ретінде анықтау, математикалық күтім ұғымын ықтималдықтық өлшем бойынша құрастырылған Лебег интегралы ретінде қарастыру, т.с.с. әлдеқайда күрделі математикалық аппаратты қолдану қажеттілігі туындайды.

Осы жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, бұл оқулықты жазу барысында біз аралық бағытты ұстандық: оқушыны пәнге кіріспемен таныстыру барысында теориялық-жиындық және таза математикалық қиындықтардан қашығырақ тұру мақсатында көлемі жеткілікті үлкен алғашқы тарауды дискретті элементар оқиғалар кеңістігі тақырыбына арнадық та, басқа тараулардың барлығының дерлік материалдарын Колмогоров аксиоматикасы негізінде баяндадық.

Біздің бұл еңбегіміз автордың көптеген жылдар бойы әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің механика-математика факультетінің "Математика" және басқа да мамандықтарының студенттеріне, магистрлеріне, докторанттарына және ҚазҰУ-дің білім жетілдіру институтының тыңдаушыларына оқыған дәрістері негізінде жазылды. Оқулығымыздың бұл ұсынылып отырған бірінші бөлімі көлемді-көлемді бес тараудан тұрады және "Математика" мамандығының мемлекеттік жалпыға міндетті білім стандарты (МЖМБС) мен пәннің типтік оқу бағдарламасына енгізілген сәйкес тақырыптарды толығымен қамтиды.

*Алғашқы тарауда* дискретті ықтималдық кеңістігі ұғымы енгізіліп, ары қарай ықтималдықтың классикалық анықтамасына баса назар аударылады (ықтималдықтың қарапайым қасиеттері классикалық анықтама аясында дәлелденеді, комбинаторикадан қажетті мәліметтер келтіріледі, «шарлар-жәшіктер» схемалары тағы басқа да бірқатар классикалық модельдер қарастырылады). Тарау кең қолданыстарға ие геометриялық ықтималдықтар тақырыбымен аяқталады.

*Екінші тарауда* алгебра, сигма-алгебра, өлшенетін кеңістік ұғымдары енгізілген, А.Н.Колмогоровтың аксиомалары келтіріліп, олардан шығатын ықтималдықтың (ықтималдықтық функцияның (өлшемнің)) қарапайым да маңызды қасиеттері дәлелденген; жалпы ықтималдық кеңістігі ұғымы анықталған; өлшенетін кеңістіктердің маңызды мысалдарымен қатар оларда ықтималдықтық өлшемдерді беру әдістері қарастырылған. Айта кететін нәрсе, ол бұл тарауда өлшемдер теориясынан белгілі өлшемді жалғастыру туралы Каратеодори теоремасының (кейініректе, IV тарауда Радон-Никодим және Фубини теоремаларының) дәлелдеусіз берілгендігі. Тарау жалпы ықтималдық кеңістігі жағдайы үшін шартты ықтималдық, тәуелсіздік ұғымдарын және оларға қатысты тәуелсіз бөліктеулер, алгебралар, сынақтар, сигма-алгебралар және олардың тізбектері, толық ықтималдықтар және Байес формулалары секілді ұғымдар мен тақырыптарды қарастырумен аяқталады

*Үшінші тарауда* алдымен кездейсоқ шаманың жалпы (өлшенетін функция ретіндегі) анықтамасы берілген де, бұл анықтамаға эквивалентті басқа да, іс жүзінде тексеруге ыңғайлы критерилері (анықтамалары) келтірілген. Ары қарай үлестірім функциясының ІI тарауда дәлелденген қасиеттерінің кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы үшін де дұрыс болып қала беретіндігі негізінде кездейсоқ шаманың *дискретті, абсолютті үзіліссіз және сингулярлы* деп аталатын үш түрі анықталған. Тарау соңында көп өлшемді (векторлық) кездейсоқ шамалар, кездейсоқ шамалардың функциялары және олардың үлестірімдері, кездейсоқ шамалардың тәуелсіздігі, кездейсоқ шамаларды сызықтық түрлендіру, шартты үлестірімдер, т.с.с. қатысты материалдар берілген.

Келесі *төртінші тарау* математикалық күтім ұғымын ықтималдықтық өлшем бойынша құрастырылған Лебег интегралы ретінде анықтап, зерттеуге арналған. Тарауда математикалық күтімнің ақиқат-дерлік және жинақталу қасиеттеріне жеткілікті назар аударылып, математикалық күтімді есептеу формулалары алынған, жолай әртүрлі интегралдар (Лебег, Лебег-Стильтес, Риман-Стильтес, т.с.с.) арасындағы байланыстарға қатысты сұрақтар да қарастырыла кеткен; сигма-алгебраларға байланысты шартты математикалық күтім және шартты ықтималдық ұғымдары енгізіліп, олардың қарапайым қасиеттерімен бірге оларға қатысты бірқатар маңызды нәтижелер (сигма-алгебраларға байланысты шартты математикалық күтімнің бар болуы; кездейсоқ шаманың екінші кездейсоқ шамаға байланысты шартты математикалық күтімінің құрылымы және оларды есептеу формулалары, т.с.с.) келтірілген.

*Бесінші тарау* Бернулли схемасы үшін классикалық шектік теоремаларды (үлкен сандар заңы, Муавр-Лаплас және Пуассон теоремалары) тікелей әдістермен дәлелдеуге арналған және олардың әртүрлі қолданыстары туралы сұрақтар қарастырылған.

Пәннің типтік бағдарламасына сәйкес қамтылуға тиісті басқа сұрақтар (туындатқыш және сипаттамалық функциялар, шектік теоремалар, математикалық статистиканың негіздері (таңдамалық теория, бағалар теориясы, сенімділік интервалдары, статистикалық гипотезаларды тексеру, т.с.с.) және кездейсоқ процестер теориясының элементтері оқулығымыздың екінші бөлімінде қарастырылатын болады.

Кітабымыздағы материалдарды баяндау барысында қарастырылып отырған жекелеген сұрақтарға қатысты көптеген мысалдар келтіріп отырдық. Бұл жерде біз ықтималдықтар теориясына арналған көптеген тамаша оқулықтар мен оқу құралдарының авторы, өткен ғасырдың екінші жартысында ұзақ жылдар бойы М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультетінің ықтималдықтар теориясы кафедрасын басқарған аса көрнекті математик, тамаша педагог *Б.В. Гнеденконың* бұрынғы КСРО ғана емес, басқа да көптеген әлем елдерінің студент жастарының ықтималдықтар теориясын оқып үйренуіне негіз болған «*Ықтималдықтар теориясы курсы*» атты оқулығының 6-басылымының алғы сөзінде жазған *"Мен математикалық пәндермен, әсіресе ықтималдықтар теориясымен алғашқы танысыу кезінде өзіндік теориялық-ықтималдықтық интуицияны, абстрактылы идеялар мен әдістерді практикалық жағдайлармен ұштастыру қабілетін дамытуға көмектесетін көптеген мысалдарды қарастыру қажет деп есептеймін. Бұл жетістік әрбір математикке, әсіресе қолданбалылық бағыттағы ғылыми-зерттеу институттарында жұмыс істеу күтіп тұрған математик студенттердің басым көпшілігіне қажет. Оның үстіне бүгінгі күні көптеген мамандар ықтималдықтар теориясымен танысуға мәжбүр, өйткені олардың күнделікті жұмысында теориялық-ықтималдықтық концепциялар аса қажет"*  ([15], 7-бет) деген ой - пікірін басшылыққа алдық. Сонымен бірге біз маңызды ұғымдарға, нәтижелерге, т.с.с. оқушы назарын ерекше аудара отыру мақсатында оларға байланысты көптеген ескертулер жасап отырдық. Тағы бір айта кететін мәселе, ол – әр параграфтың соңында оқушының өз бетімен орындауына арналған тапсырмалар (есептер мен жаттығулар, теориялық мағынадағы сұрақтар, т.с.с.) берілуі. Бұл тапсырмалардың біреулерінде негізгі тексте дәлелденбей келтірілген немесе дәлелдеу схемасы не идеясы ғана келтірілген қайсыбір тұжырымдарды толық дәлелдеу талап етілсе, екіншілерінде аталған параграфта қарастырылған сұрақтарға қатысты кейбір қосымша нәтижелерді өз бетінше алу ұсынылды, ал үшіншілерінде текстегі тұжырымдарда талап етілген нендей де бір шарттардың маңыздылығына көз жеткізетін мысалдар және қарсы мысалдар құрастыру мақсаты көзделсе, төртіншілерінде жаңа ұғымдар енгізіліп, оларға қатысты сұрақтар қойылған. Бірқатар тапсырмалар оқушының ықтималдықтар теориясы есептерін шығаруға машықтанып, тәжірибе жинақтауына көмектесу мақсатында қарапайым жаттығулар ретінде берілді. Дегенмен де, автор біздің оқулығымыздағы материалдарды оқып-үйрену, игеру барысында оқушы қандай да бір есептер жинақтарын, мәселен [5], [6], [16], [17], [31], [40], [41] әдебиеттерді тұрақты пайдаланады деп үміттенеді. Кітап соңында есептердің жауаптары, әдебиеттер тізімі, пәндік сілтемелер және белгілеулерге сілтемелер келтірілген.

Оқулықтағы материалдарды баяндау барысында автор өз талғамына қарай және көзделген негізгі мақсаттарға орай кітап соңында келтірілген әдебиеттердің жекелеген материалдарын пайдаланды немесе жетекшілікке алды.

Оқулықта мынадай нөмірлеу және сілтеме жасау реті қолданылған. Әр тараудың әр параграфының ішінде осы параграфтағы формуланы, анықтаманы, теореманы, лемманы, ескертуді және келтірілген мысалдар мен ұсынылған есептерді, т.с.с. өзіндік нөмірлеу тәртібі бар. Осы тараудың басқа параграфындағы немесе басқа тараудағы нендей де бір параграфтардағы тұжырымға (формулаға, теоремаға, т.с.с.) сілтеме жасау үшін тараудың, параграфтың, пункттің және тұжырымның нөмірлері толық көрсетіліп отырады (мәселен, IV тарау, §1, 1.2-пункт, 1-теорема), ал дәстүрлі қалыптасқан атқа ие болған тұжырымдарға сілтемелер негізінен олардың сәйкес аттарын атау арқылы жасалынады (мәселен, *тығыздықтар үшін композиция формуласы* бойынша, *математикалық күтімнің мультипликативтік қасиеті* бойынша ...).

Мүмкіндікті пайдаланып, осы кітаптың құрылымы, материалдарды орналастыру және баяндау әдістері, т.с.с. басқа да ықтималдықтар теориясы және математикалық статистиканың университеттерге арналған курсына қойылатын талаптар тұрғысынан орынды сын-ескертпе айтқан әр оқырманға алдын ала алғысымды айтамын және осы кітаптың келесі басылымы, болмаса басқа да оқулықтар, оқу құралдарын дайындау барысында міндетті түрде ескеруге уәде беремін. Сонымен бірге оқулықтың қолжазбасымен танысқандары, айтқан сын-ескертпелері, жазған пікірлері үшін физика-математика ғылымдарының докторлары, профессорлар А.Сақабеков, Б.Е.Кангужин және М.Н.Қалимолдаевтарға үлкен рақмет айтамын. Оқулықтың компьютерлік терімін орындағандары үшін Г.К.Бұхарбаева мен С.М.Нарбаеваларға да білдірер алғысым ерекше.

 *Нұрсадық Ақанбай*

 *Алматы,*

*қаңтар–желтоқсан,* 2010