Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігі
Семей қаласының Шәкәрім атындағы мемлекеттік университеті
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті
РҒА В.А.Стеклов атындағы математикалық институты
ҚР БҒМ математика және математикалық моделдеу институты
Әл-Фараби атындағы ҚҰУ жанындағы математика және механика ҒЗИ
ҚР БҒМ ҒК «Қолданбалы математика институты», Қарағанды қ.

Қазақ ССР Ғылым Академиясының корреспондент мүшесі,
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор
Төлеубай Ыдрысұлы Амановтың
туғанына 90 жыл толуына арналған

«ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ, ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ»

Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының

МАТЕРИАЛДАРЫ

МАТЕРИАЛЫ

Международной научно-практической конференции

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

посвященной 90-летию со дня рождения
члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук,
профессора Толеубая Идрисовича Аманова

1-том

3 – 5 қазан 2013 ж.
Семей

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

1. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.Е. Основы теории цепей: Учебник для вузов. Под.ред. В.П. Бакалова. – 2-е изд. – М.: Радио и связь, 2000. – 592с.ил.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 624с.
3. Информационные технологии в радиотехнических сигналах. Под.ред. И.Б. Федорова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 768с.ил.
4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984 – 296с.

УДК 517.948.34

А.Н.Азанова, М.К.Дауылбаев
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Механико-математический факультет
050040,Республика Казахстан, г. Алматы, ул. аль-Фараби 71, корпус 13
alina_azanova@mail.ru, dmk57@mail.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В работе рассматривается на отрезке [0,1] линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon \cdot y''' + A(t)\cdot y'' + B(t)\cdot y' + C(t)\cdot y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{2} H_0(t,x) y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \qquad (1)$$

с краевыми условиями:

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{1} \alpha_i y^{(i)}(0,\varepsilon) = a,\ h_2 y(t,\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{1} \beta_i y^{(i)}(t_0,\varepsilon) = b,\ h_3 y(t,\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{1} \gamma_i y^{(i)}(1,\varepsilon) = c\ , \qquad (2)$$

где, a,b,c - некоторые известные постоянные, не зависящие от ε, а $0 < t_0 < 1$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I Функции *A(t), B(t), C(t) и F(t)* будем считать достаточно гладкими на отрезке $0 \le t \le 1$, а $H_0(t,x), H_1(t,x), H_2(t,x)$ - в области $0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1$, т. е. дифференцируемыми столько раз, сколько потребуется в ходе рассуждений.

II Функция *A(t)* удовлетворяет неравенству $A(t) \ge \overline{\gamma} = const > 0, \quad 0 \le t \le 1$.

В настоящей работе получена аналитическая формула решения задачи (1), (2) и доказана при определенных условиях теорема об асимптотических по малому параметру оценках решения.

Рассмотрим сингулярно возмущенное линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1):

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon \cdot y''' + A(t)\cdot y'' + B(t)\cdot y' + C(t)\cdot y = 0 \qquad (3)$$

Лемма 1. *Пусть справедливы условия I и II. Тогда для фундаментальной системы решений сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения (3) на отрезке [0,1] справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления* [1]:

$$y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \overline{y}_i^{(j)}(t) + O(\varepsilon),\ i = 1,2,\ j = 0,1,2, \qquad (4)$$

$$y_3^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)dx} (\mu(t)^j y_{30}(t) + O(\varepsilon)),\ j = 0,1,2,$$

где $\mu(t) = -A(t)$, функции $\bar{y}_i(t)$, $i=1,2$ образуют фундаментальную систему решений невозмущенного линейного однородного дифференциального уравнения

$$L_0 \bar{y}(t) \equiv A(t)\cdot \bar{y}'' + B(t)\cdot \bar{y}' + C(t)\cdot \bar{y} = 0, \tag{5}$$

а $y_{30}(t)$ - решение задачи

$$A^2(t) y'_{30}(t) + (2A(t)A'(t) - A(t)B(t)) y_{30}(t) = 0, \ y_{30}(0) = 1.$$

Пусть функция $K(t,s,\varepsilon)$, $0 \le s \le t \le 1$ является функцией Коши, т. е. решением следующей задачи:

$$\varepsilon K''' + A(t)\cdot K'' + B(t)\cdot K' + C(t)\cdot K = 0, \tag{6}$$

$$K(s,s,\varepsilon) = 0, \ K'(s,s,\varepsilon) = 0, \ K''(s,s,\varepsilon) = 1. \tag{7}$$

Лемма 2. *Если справедливы условия I и II, то решение $K(t,s,\varepsilon)$ задачи (6), (7) на [0,1] при $s \le t$ существует, единственно и выражается формулой [32]:*

$$K(t,s,\varepsilon) = \frac{W(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{8}$$

где $W(s,\varepsilon)$ - определитель Вронского, составленный из фундаментальной системы решений $y_1(s,\varepsilon)$, $y_2(s,\varepsilon)$, $y_3(s,\varepsilon)$ уравнения (3), а $W(t,s,\varepsilon)$ - определитель, полученный заменой третьей строки определителя $W(s,\varepsilon)$ на фундаментальную систему решений $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$, $y_3(t,\varepsilon)$.

Для функции Коши $K(t,s,\varepsilon)$, из (8) с учетом (4), при $0 \le s \le t \le 1$ справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления:

$$K(t,s,\varepsilon) = \varepsilon\left[-\frac{\bar{W}(t,s)}{\bar{W}(s)\mu(s)} + O(\varepsilon)\right],$$

$$K'(t,s,\varepsilon) = \varepsilon\left[-\frac{\bar{W}'(t,s)}{\bar{W}(s)\mu(s)} + \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx}\, y_{30}(t)\mu(t)}{y_{30}(s)\mu^2(s)} + O(\varepsilon)\right], \tag{9}$$

$$K''(t,s,\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\frac{\bar{W}''(t,s)}{\bar{W}(s)\mu(s)} + \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx}\, y_{30}(t)\mu^2(t)}{y_{30}(s)\mu^2(s)} + O(\varepsilon^2 + \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)dx}),$$

где $\bar{W}(s)$ - определитель Вронского, составленный из фундаментальной системы решений $\bar{y}_1(s)$, $\bar{y}_2(s)$ невозмущенного уравнения (5), а $\bar{W}(t,s)$ - определитель полученный заменой второй строки определителя $\bar{W}(s)$ на фундаментальную систему решений $\bar{y}_1(t)$, $\bar{y}_2(t)$ уравнения (5).

Пусть функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, $0 \le t \le 1$ являются решениями однородного дифференциального уравнения

$$\varepsilon\cdot\Phi'''_i + A(t)\cdot\Phi''_i + B(t)\cdot\Phi'_i + C(t)\cdot\Phi_i = 0, \ i = 1,2,3 \tag{10}$$

с краевыми условиями

$$h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki}=\begin{cases}1, i=k,\\ 0, i\neq k.\end{cases}, \quad k,i=1,2,3. \tag{11}$$

Функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, являющиеся решениями задачи (10), (11), назовем граничными функциями.

Составим следующий определитель:

$$\Delta(\varepsilon)=\begin{vmatrix}h_1y_1(t,\varepsilon) & h_1y_2(t,\varepsilon) & h_1y_3(t,\varepsilon)\\ h_2y_1(t,\varepsilon) & h_2y_2(t,\varepsilon) & h_2y_3(t,\varepsilon)\\ h_3y_1(t,\varepsilon) & h_3y_2(t,\varepsilon) & h_3y_3(t,\varepsilon)\end{vmatrix}$$

Для определителя $\Delta(\varepsilon)$ с учетом (4) справедливо асимптотическое представление: $\Delta(\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon}\alpha_1\mu(0)\overline{\Delta}+O(\varepsilon)$, где

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix}h_2\overline{y}_1(t) & h_2\overline{y}_2(t)\\ h_3\overline{y}_1(t) & h_3\overline{y}_2(t)\end{vmatrix}. \tag{12}$$

III. Пусть $\overline{\Delta}\neq 0$.

Тогда справедлива следующая

Лемма 3. *Если справедливы условия I - III, то граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$ на [0,1] существуют, единственны и выражаются формулами:*

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{\Delta_i(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)},\quad i=1,2,3, \tag{13}$$

где $\Delta_i(t,\varepsilon)$ -определитель, полученный из $\Delta(\varepsilon)$ заменой его i-ой строки на фундаментальную систему решений $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$, $y_3(t,\varepsilon)$ уравнения (3).

Для граничных функций $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, справедливы из (13) следующие асимптотические при $\varepsilon\to 0$ представления:

$$\Phi_1^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}\cdot\frac{\mu^j(t)y_{30}(t)}{\alpha_1\mu(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t\mu(x)dx}\left[1+O(\varepsilon)\right],\ j=0,1,2, \tag{14}$$

$$\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\cdot\left[\overline{\Delta}_{i1}^{(j)}(t)+\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}\cdot\frac{(-1)^{i-1}y_{30}(t)\mu^j(t)\overline{\Delta}_{ii}}{\alpha_1\mu(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx}+O(\varepsilon+\varepsilon^{2-j}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx})\right],$$

$i=2,3$, $j=0,1,2$

Здесь $\overline{\Delta}$ имеет вид (12), а

$$\overline{\Delta}_{21}(t)=\begin{vmatrix}\overline{y}_1(t) & \overline{y}_2(t)\\ h_3\overline{y}_1(t) & h_3\overline{y}_2(t)\end{vmatrix},\ \overline{\Delta}_{31}(t)=\begin{vmatrix}h_2\overline{y}_1(t) & h_2\overline{y}_2(t)\\ \overline{y}_1(t) & \overline{y}_2(t)\end{vmatrix},\overline{\Delta}_{22}=\begin{vmatrix}h_1\overline{y}_1(t) & h_1\overline{y}_2(t)\\ h_3\overline{y}_1(t) & h_3\overline{y}_2(t)\end{vmatrix},\ \overline{\Delta}_{33}=\begin{vmatrix}h_1\overline{y}_1(t) & h_1\overline{y}_2(t)\\ h_2\overline{y}_1(t) & h_2\overline{y}_2(t)\end{vmatrix}.$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$y(t,\varepsilon)=C_1\Phi_1(t,\varepsilon)+C_2\Phi_2(t,\varepsilon)+C_3\Phi_3(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds \tag{15}$$

Здесь C_i, $i=1,2,3$ - неизвестные постоянные, а $z(t,\varepsilon)$ - неизвестная функция, подлежащие определению.

Подставляя формулу (15) в уравнение (1) и учитывая, что функция Коши и граничные функции удовлетворяют однородному уравнению (3), относительно $z(t,\varepsilon)$ получим неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$z(t,\varepsilon)=F(t)+\sum_{i=1}^{3}C_i\varphi_i(t,\varepsilon)+\int_0^1 H(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds, \tag{16}$$

где введены обозначения:

$$\varphi_i(t,\varepsilon)=\int_0^1\left(H_0(t,x)\Phi_i(x,\varepsilon)+H_1(t,x)\Phi_i'(x,\varepsilon)+H_2(t,x)\Phi_i''(x,\varepsilon)\right)dx,\ i=1,2,3,$$

$$H(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1\left(H_0(t,x)K(x,s,\varepsilon)+H_1(t,x)K'(x,s,\varepsilon)+H_2(t,x)K''(x,s,\varepsilon)\right)dx. \tag{17}$$

С учетом (9) ядро $H(t,s,\varepsilon)$ интегрального уравнения (16) можно представить асимптотической формулой:

$$H(t,s,\varepsilon)=\bar{H}(t,s)+\frac{H_2(t,1)y_{30}(1)\mu(1)}{y_{30}(s)\mu^2(s)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1\mu(x)dx}+O(\varepsilon),$$

где $\bar{H}(t,s)$ имеет вид:

$$\bar{H}(t,s)=\frac{H_2(t,s)}{A(s)}+\int_s^1\frac{1}{A(s)\bar{W}(s)}\sum_{i=0}^{2}H_i(t,x)\bar{W}^{(i)}(x,s)dx. \tag{18}$$

Предположим, что выполнено условие:

IV. Число 1 не является собственным значением ядра $H(t,s,\varepsilon)$.

Тогда интегральное уравнение (16) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$z(t,\varepsilon)=F(t)+\int_0^1 R(t,s,\varepsilon)F(s)ds+\sum_{i=1}^{3}C_i\left[\varphi_i(t,\varepsilon)+\int_0^1 R(t,s,\varepsilon)\varphi_i(s,\varepsilon)ds\right],\ i=1,2,3 \tag{19}$$

где $R(t,s,\varepsilon)$ - резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$.

Подставляя (19) в правую часть (15), получим следующее представление для решения задачи (1), (2):

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{3}C_iQ_i(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \tag{20}$$

где

$$Q_i(t,\varepsilon)=\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)\left[\varphi_i(s,\varepsilon)+\int_0^1 R(s,p,\varepsilon)\varphi_i(p,\varepsilon)dp\right]ds,\ i=1,2,3, \tag{21}$$

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)\left[F(s)+\int_0^1 R(s,p,\varepsilon)F(p)dp\right]ds.$$

Для функций $Q_i(t,\varepsilon)$ и $P(t,\varepsilon)$, определяющихся по формуле (21), с учетом (9), (14) и (17) получаем следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления:

$$Q_1^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{H_2^{(j)}(t)}{\alpha_1} + \frac{\varepsilon^{1-j} y_{30}(t)\mu^j(t)}{\alpha_1\mu(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{2-j} e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx}\right), \quad j = 0,1,$$

$$Q_1''(t,\varepsilon) = \frac{\overline{H}_2''(t)}{\alpha_1} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{y_{30}(t)\mu^2(t)}{\alpha_1\mu(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx} + O\left(\varepsilon + e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx}\right), \tag{22}$$

$$Q_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{T_i^{(j)}(t)}{\overline{\Delta}} + \frac{(-1)^{i-1} H_2^{(j)}(t)\overline{\Delta}_{ii}}{\alpha_1\overline{\Delta}} + \frac{(-1)^{i-1}}{\varepsilon^{j-1}}\cdot\frac{\mu^j(t) y_{30}(t)\overline{\Delta}_{ii}}{\alpha_1\mu(0)\overline{\Delta}} e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{2-j} e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx}\right), \quad i = 2,3, \; j = 0,1,$$

$$Q_i''(t,\varepsilon) = \frac{\overline{T}_i''(t)}{\overline{\Delta}} + (-1)^{i-1}\frac{\overline{H}_2''(t)\overline{\Delta}_{ii}}{\alpha_1\overline{\Delta}} + \frac{(-1)^{i-1}}{\varepsilon}\frac{\mu^2(t) y_{30}(t)\overline{\Delta}_{ii}}{\alpha_1\mu(0)\overline{\Delta}} e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx} + O\left(\varepsilon + e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^t \mu(x)dx}\right), \quad i = 2,3,$$

$$P^{(j)}(t,\varepsilon) = -\int_0^t \frac{\overline{W}^{(j)}(t,s)}{\overline{\overline{W}}(s)\mu(s)}\left(F(s) + \int_0^1 \overline{R}(s,p)F(p)dp\right)ds + O(\varepsilon), \quad j = 0,1,$$

$$P''(t,\varepsilon) = \frac{1}{\mu(t)}\left(F(t) + \int_0^1 \overline{R}(t,s)F(s)ds\right) - \int_0^t \frac{\overline{W}''(t,s)}{\overline{\overline{W}}(s)\mu(s)}\left(F(s) + \int_0^1 \overline{R}(s,p)F(p)dp\right)ds + O(\varepsilon),$$

где введены обозначения:

$$H_2^{(j)}(t) = \int_0^t \frac{\overline{W}^{(j)}(t,s)}{\overline{\overline{W}}(s)\mu(s)}\cdot\overline{H}_2(s,0)ds,, \quad j = 0,1,2,$$

$$\overline{H_2''}(t) = H_2''(t) - \frac{\overline{H}_2(t,0)}{\mu(t)}, \tag{23}$$

$$T_i^{(j)}(t) = \overline{\Delta}_{i1}^{(j)}(t) - \int_0^t \frac{\overline{W}^{(j)}(t,s)}{\overline{\overline{W}}(s)\mu(s)}\int_0^1 \left[\overline{H}_0(s,x)\cdot\overline{\Delta}_{i1}(x) + \overline{H}_1(s,x)\overline{\Delta}'_{i1}(x) + \overline{H}_2(s,x)\cdot\overline{\Delta}''_{i1}(x)\right]dxds, \quad i = 2,3, \; j = 0,1,$$

$$\overline{T}_i''(t) = T_i''(t) - \frac{1}{\mu(t)}\int_0^1 \left[\overline{H}_0(s,x)\cdot\overline{\Delta}_{i1}(x) + \overline{H}_1(s,x)\overline{\Delta}'_{i1}(x)\right]dx, \quad i = 2,3$$

$$\overline{H}_2(t,0) = H_2(t,0) + \int_0^1 \overline{R}(t,s)H_2(s,0)ds,$$

$\overline{R}(t,s)$ - не зависящая от ε часть резольвенты $R(t,s,\varepsilon)$.

Теперь определим неизвестные постоянные C_i, $i = 1,2,3$. Для этого подчиним решение $y(t,\varepsilon)$ из (20) краевым условиям (2). Тогда получаем относительно C_i, $i = 1,2,3$ следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &C_1\cdot h_1Q_1(t,\varepsilon) + C_2\cdot h_1Q_2(t,\varepsilon) + C_3\cdot h_1Q_3(t,\varepsilon) = a - h_1P(t,\varepsilon), \\ &C_1\cdot h_2Q_1(t,\varepsilon) + C_2\cdot h_2Q_2(t,\varepsilon) + C_3\cdot h_2Q_3(t,\varepsilon) = b - h_2P(t,\varepsilon), \\ &C_1\cdot h_3Q_1(t,\varepsilon) + C_2\cdot h_3Q_2(t,\varepsilon) + C_3\cdot h_3Q_3(t,\varepsilon) = c - h_3P(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{24}$$

Для главного определителя системы (24)

$$\omega(\varepsilon)=\begin{vmatrix} h_1Q_1(t,\varepsilon) & h_1Q_2(t,\varepsilon) & h_1Q_3(t,\varepsilon) \\ h_2Q_1(t,\varepsilon) & h_2Q_2(t,\varepsilon) & h_2Q_3(t,\varepsilon) \\ h_3Q_1(t,\varepsilon) & h_3Q_2(t,\varepsilon) & h_3Q_3(t,\varepsilon) \end{vmatrix}, \qquad (25)$$

пользуясь представлениями (22), получим асимптотическое представление:

$$\omega(\varepsilon)=\frac{1}{\alpha_1\bar{\Delta}^2}\left(\bar{\varpi}+O(\varepsilon)\right), \qquad (26)$$

где

$$\bar{\varpi}=\begin{vmatrix} h_1H_2(t)+\alpha_1 & h_1T_2(t) & h_1T_3(t) \\ h_2H_2(t) & h_2T_2(t) & h_2T_3(t) \\ h_3H_2(t) & h_3T_2(t) & h_3T_3(t) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (27)$$

функции $H_2(t)$, $T_i(t)$, $i=2,3$ выражаются формулами (23).

Предположим, что:

V $\bar{\varpi}\neq 0$.

Тогда при достаточно малых ε определитель $\omega(\varepsilon)$ отличен от нуля, и из системы (24) однозначно определяются коэффициенты C_i, $i=1,2,3$. Подставив их в (20) получаем, окончательно, решение задачи (1), (2) в виде следующей формулы:

$$y(t,\varepsilon)=\left(a-h_1P(t,\varepsilon)\right)\Psi_1(t,\varepsilon)+\left(b-h_2P(t,\varepsilon)\right)\Psi_2(t,\varepsilon)+\left(c-h_3P(t,\varepsilon)\right)\Psi_3(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \quad (28)$$

где функции $\Psi_i(t,\varepsilon)$ $i=1,2,3$ выражаются формулами:

$$\Psi_i(t,\varepsilon)=\frac{\omega_i(t,\varepsilon)}{\omega(\varepsilon)}, \quad i=1,2,3, \qquad (29)$$

в которой $\omega(\varepsilon)$ имеет вид (25), $\omega_i(t,\varepsilon)$ - определитель, полученный из $\omega(\varepsilon)$ заменой его i-ой строки строкой $Q_1(t,\varepsilon)$, $Q_2(t,\varepsilon)$, $Q_3(t,\varepsilon)$.

Тем самым, доказана следующая

Теорема 1. *Если справедливы условия I - V, то решение $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) на отрезке [0,1] существует, единственно и представимо в виде (28), где $\Psi_i(t,\varepsilon)$ $i=1,2,3$ выражаются формулой (29), а $P(t,\varepsilon)$ имеют вид (21).*

Следует заметить, что функции $\Psi_i(t,\varepsilon)$ $i=1,2,3$ являются решениями однородного сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения:

$$L_\varepsilon\Psi_i=\int_0^1\left(H_0(t,x)\Psi_i(x,\varepsilon)+H_1(t,x)\Psi_i'(x,\varepsilon)+H_2(t,x)\Psi_i''(x,\varepsilon)\right)dx, \quad i=1,2,3$$

с краевыми условиями $h_k\Psi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki}$, $k,i=1,2,3$.

Для $\Psi_i(t,\varepsilon)$ $i=1,2,3$ по формуле (29) с учетом (22), (26) можно получить следующие асимптотические при $\varepsilon\to 0$ представления:

$$\Psi_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\varpi}_i^{(j)}(t)}{\overline{\varpi}}+\frac{\mu^j(t)y_{30}(t)A_{i1}}{\varepsilon^{j-1}\overline{\varpi}\mu(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx}+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{j-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx}\right), i=1,2,3, j=0,1,2, \quad (30)$$

где $\overline{\varpi}$ имеет вид (27), $\overline{\varpi}_i^{(j)}(t)$- определитель, получаемый из $\overline{\varpi}$ заменой его i-ой строки на строку $H_2^{(j)}(t),T_2^{(j)}(t),T_3^{(j)}(t)$ при $j=0,1$, и на строку $\overline{H}_2''(t),\overline{T}_2''(t),\overline{T}_3''(t)$ при $j=2$, а A_{i1} - алгебраическое дополнение элемента, стоящего в i-ой строке 1-го столбца определителя $\overline{\varpi}$.

Теорема 2. *Пусть справедливы условия I – V. Тогда для решения сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) и его производных на отрезке [0,1] имеют место асимптотические при $\varepsilon\to 0$ оценки:*

$$|y(t,\varepsilon)|\le\frac{C}{\overline{\varpi}}\left[\left(|a|+|b|+|c|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right)\left(\max_{0\le t\le 1}|H_2(t,0)|+\varepsilon e^{-\overline{\gamma}\frac{t}{\varepsilon}}\right)+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right],$$

$$|y'(t,\varepsilon)|\le\frac{C}{\overline{\varpi}}\left[\left(|a|+|b|+|c|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right)\left(\max_{0\le t\le 1}|H_2(t,0)|+e^{-\overline{\gamma}\frac{t}{\varepsilon}}\right)+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right], \quad (31)$$

$$|y''(t,\varepsilon)|\le\frac{C}{\varepsilon\overline{\varpi}}\left[\left(|a|+|b|+|c|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right)\left(\varepsilon\max_{0\le t\le 1}|H_2(t,0)|+e^{-\overline{\gamma}\frac{t}{\varepsilon}}\right)+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right],$$

где $C>0,\overline{\gamma}>0$ – некоторые постоянные, не зависящие от ε.

Доказательство теоремы непосредственно следует из формулы (28), с учетом асимптотических представлений (30) и (22) для функций $\Psi_i(t,\varepsilon), i=1,2,3$ и $P(t,\varepsilon)$.

Определение. *Будем говорить, что решение $y(t,\varepsilon)$ интегро-дифференциальной задачи обладает явлением начального скачка m–го порядка в точке $t=0$, если оно в этой точке имеет следующий порядок роста:*

$$y^{(i)}(0,\varepsilon)=O(1),\ i=0,1,\dots,m$$

$$y^{(m+1)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ y^{(m+2)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\ \dots,\ y^{(n-1)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1-m}}\right),\ \varepsilon\to 0.$$

Тогда согласно определению из оценок (31) теоремы 2 следует, что решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ обладает явлением начального скачка первого порядка, т.е.

$$y(0,\varepsilon)=O(\varepsilon),\ y'(0,\varepsilon)=O(1),\ y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ \varepsilon\to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат А.Б. Краевые задачи с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. // УМН 1962, т. XVII, Вып 1 (103), С.235-241.

$$-|a_{12}|^2\left[\frac{e^{-i\mu}-1}{\mu}i+\frac{y_1(1)e^{-i\mu}-1}{1-y_1(1)}\right]\left[\frac{e^{-i\mu}-1}{\mu}i+\frac{y_2(1)e^{-i\mu}-1}{1-y_2(1)}\right]+$$

$$+\left\{\frac{z_1(0,\mu)-z_1(1,\mu)}{y_1(0)-y_1(1)}-a_{11}\left[\frac{e^{-i\mu}-1}{\mu}i+\frac{y_1(1)e^{-i\mu}-1}{1-y_1(1)}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{z_2(0,\mu)-z_2(1,\mu)}{y_2(0)-y_2(1)}-a_{22}\left[\frac{e^{-i\mu}-1}{\mu}i+\frac{y_2(1)e^{-i\mu}-1}{1-y_2(1)}\right]\right\}=0$$

Из (15) получаем, что

$$z_j(t,\mu)=y_j(t)e^{-i\mu t}=e^{-i\mu t}e^{i\int_0^t q_j(\eta)d\eta}$$

Тогда

$$\frac{z_j(0,\mu)-z_j(1,\mu)}{y_j(0)-y_j(1)}=\frac{1-y_j(1)e^{-i\mu}}{1-y_j(1)}$$

Обозначим $y_j(1)=e^{i\mathrm{dj}}$

Таким образом, если $a_{jj}, d_j\, j=(1,2)$ действительные числа и $d_j\neq 2k\pi$ для любого целого числа κ, а a_{12} -любое комплексное число, при этом выполняется условие (9), $a_{21}=\overline{a}_{12}$ то уравнение

$$\prod_{j=1}^{2}\left[(1+a_{jj})\frac{1-e^{i(dj-\mu)}}{1-e^{idj}}-a_{jj}\frac{e^{-i\mu}-1}{\mu}i\right]-|a_{12}|^2\prod_{j=1}^{2}\left[\frac{1-e^{i(dj-\mu)}}{1-e^{idj}}-\frac{e^{-i\mu}-1}{\mu}i\right]=0$$

имеет действительные корни.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокебаев Б., Отелбаев М., Шыныбеков А., К вопросам расширения и сужения операторов. // ДАН СССР .-271, №6.1983, с.1307-1311.

УДК 517.956

Т.Ж. Елдесбай

г.Алматы, Казахский национальный университет имени аль-Фараби)

E-mail: *yeldesbay@mail.ru*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛО - ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, где $\Omega_1=\{(x,t){:}-1\le x\le 0, t>0\}$, $\Omega_2=\{(x,t){:}0<x<1, t>0\}$ рассмотрим уравнение смешанного гиперболо - параболического типа

$$0=\begin{cases}t^m u_{tt}-u_{xx}+c_1(x)u, -1<x<0, t>0, 0<m<1,\\ t^\alpha u_t-u_{xx}+c_2(x)u, 0<x<1, t>0, 0<\alpha<1,\end{cases}\qquad(1)$$

решение которого обращаются в нуль при $t\to+\infty$ и удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{x\to 0-}u(x,t)=\lim_{x\to 0+}u(x,t), t>0,$$

$$\forall\, t>0\ \int_0^1|u(x,t)|^2dx<+\infty,\ \forall\, t>0\ -\infty<\int_{-1}^0|u(x,t)|^2dx<+\infty.\qquad(*)$$