МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

приуроченная ко Дню науки

ТРУДЫ

Алматы-2014

1. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР.- 1964.- 28, №6.- С. 1297 - 1324.

УДК 517.948.34

Дауылбаев М. К., Атахан Н.

Асимптотические оценки решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби
(Казахстан, Алматы)
dmk57@mail7ru

Рассмотрим следующее сингулярно возмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t) y = F(t) + \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t,x) y^i(x,\varepsilon)dx \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} h_i y &\equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \alpha_{ij} y^{(j)}(0,\varepsilon) = a_i, \ \ i = \overline{1,l} \\ h_{l+i} y &\equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \beta_{ij} y^{(j)}(1,\varepsilon) = b_i, \ \ i = \overline{1,p}, \ \ l+p=n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, α_{ij}, a_i, $i = \overline{1,l}$; β_{ij}, b_i, $i = \overline{1,p}$; – некоторые известные постоянные, причем $\alpha_{1,m} \neq 0$, $m = fix \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t)$, $F(t)$, $i = \overline{1,n}$ являются достаточно гладкими на отрезке $[0,1]$, а $H_i(t,x)$, $i = \overline{0, m+1}$ – в области $D = (0 \le t \le 1, \ \ 0 \le x \le 1)$.

II. $A_1(t) \ge \gamma = const > 0$, $0 \le t \le 1$.

Рассмотрим однородное сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y = 0 \quad (3)$$

При условии I, II для фундаментальной системы решений $y_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$ уравнения (3) справедливы асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления [1]:

$$\begin{cases} y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = y_{i0}^{(j)} + O(\varepsilon), \ i = \overline{1,n-1}, \ j = \overline{0,n-1}, \\ y_n^{(j)}(t,\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon^j} exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu(x)dx\right) \cdot (\mu^j(t)y_{n0}(t) + O(\varepsilon)), \ j = \overline{0,n-1}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\mu(t) = -A_1(t) < 0$, функции $y_{i0}(t)$, $i = \overline{1,n-1}$ являются решением задачи

$L_0 y_{i0} \equiv A_1(t)y_{i0}^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y_{i0} = 0$, $y_{i0}^{(j)}(0) = \delta_{i-1,j}$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{0,n-2}$,

а $y_{n0}(t) = (A_1(0)/A_1(t))^{n-1} exp\left(\int\limits_0^t (A_2(x)/A_1(x))dx\right)$.

Пусть функция $K(t,s,\varepsilon)$ при $0 \le s \le t \le 1$ является решением задачи

$$L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon) = 0, \ \ K^{(j)}(s,s,\varepsilon) = 0, \ \ j = \overline{0,n-2}, \ \ K^{(n-1)}(s,s,\varepsilon) = 1.$$

Для функций $K(t,s,\varepsilon)$ с учетом (4) справедливы оценки:

$$\begin{aligned} &|K^{(j)}(t,s,\varepsilon)| \le C\varepsilon, \ \ j = \overline{0,n-2}, \\ &|K^{(n-1)}(t,s,\varepsilon)| \le C\left(\varepsilon + exp\left(-\frac{\gamma(t-s)}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $C > 0$ – постоянная, не зависящая от ε.

Теперь введем функции $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k = \overline{1,n}$, называемые граничными функциями, являющиеся решениями следующей задачи:

$$L_\varepsilon \Phi_k(t,\varepsilon) = 0, \ \ k = \overline{1,n}, \ \ h_i\Phi_k(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \ne k. \end{cases}$$

Граничные функции $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k = \overline{1,n}$ представимы в виде:

$$\Phi_k(t,\varepsilon) = \frac{\Delta_k(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \ \ k = \overline{1,n}, \quad (6)$$

где $\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t,\varepsilon) & \dots & h_1 y_n(t,\varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_n y_1(t,\varepsilon) & \dots & h_n y_n(t,\varepsilon) \end{vmatrix}$, а $\Delta_k(t,\varepsilon)$ – определитель, получаемый из $\Delta(\varepsilon)$ заменой его k – ой строки фундаментальной системой решений $y_1(t,\varepsilon), \dots, y_n(t,\varepsilon)$ уравнения (3). Для с учетом (2), (4) справедливо асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление

$$\Delta(\varepsilon) = (-1)^{1+n} \frac{\mu^m(0)}{\varepsilon^m} (\alpha_{1,m} \overline{\Delta} + O(\varepsilon)), \tag{7}$$

где $\overline{\Delta} = \det\{h_i y_{10} \dots h_i y_{n-1,0}\}$, $i = \overline{2,n}$. Пусть выполнено условие

III. $\overline{\Delta} \neq 0$.

Тогда для граничных функций $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k = \overline{1,n}$ из (6) с учетом (2), (4), (7) имеем следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ оценки:

$$\begin{aligned} &|\Phi_1^{(j)}(t,s)| \le C\left(\varepsilon + \varepsilon^{m-j} exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = \overline{0,n-1}, \\ &|\Phi_k^j(t,s)| \le C\left(1 + \varepsilon^{m-j} exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = \overline{0,n-1}, \quad k = \overline{2,n} \end{aligned} \tag{8}$$

где $C > 0$ – постоянная, не зависящая от ε.

IV. Пусть $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра

$$H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t,x) K^i(x,s,\varepsilon) dx.$$

Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде:

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} C_k Q_k(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \tag{9}$$

где

$$
\begin{aligned}
&Q_k(t,\varepsilon) = \Phi_k(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_k(s,\varepsilon)ds,\\
&P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds,\\
&\overline{\varphi}_k(t,\varepsilon) = \varphi_k(t,\varepsilon) + \int_0^1 R(t,s,\varepsilon)\varphi_k(s,\varepsilon)ds,\\
&\overline{F}(t,\varepsilon) = F(t) + \int_0^1 R(t,s,\varepsilon)F(s)ds,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$\varphi_k(t,\varepsilon) = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=0}^{m+1} H_i(t,x)\Phi_k^{(i)}(x,\varepsilon)dx$, а $R(t,s,\varepsilon)$ – резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$, $C_i = a_i$, $i=\overline{1,l}$, а C_i, $i=\overline{l+1,n}$ определяются из системы уравнений

$$
\begin{cases}
(1+d_{1,l+1}(\varepsilon))\cdot C_{l+1} + \ldots + d_{1n}(\varepsilon)\cdot C_n = b_1 - \sum\limits_{i=1}^{l} d_{1i}(\varepsilon)a_i - e_1(\varepsilon),\\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
d_{p,l+1}(\varepsilon)\cdot C_{l+1} + \ldots + (1+d_{pn}(\varepsilon))\cdot C_n = b_p - \sum\limits_{i=1}^{l} d_{pi}(\varepsilon)a_i - e_p(\varepsilon),
\end{cases}
\tag{11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&d_{ik}(\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \frac{\beta_{ij}}{\varepsilon}\int_0^1 K^{(j)}(1,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_k(s)ds = \overline{d}_{ik} + O(\varepsilon),\ i=\overline{1,p},\ k=\overline{1,n},\\
&e_i(\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \frac{\beta_{ij}}{\varepsilon}\int_0^1 K^{(j)}(1,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds = \overline{e}_i + O(\varepsilon),\ i=\overline{1,p}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

С учетом (5), (10), (12) для главного определителя $\delta(\varepsilon)$ системы (11) справедливо асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление $\delta(\varepsilon) = \overline{\delta} + O(\varepsilon)$, где
$\overline{\delta} = \begin{vmatrix} 1+\overline{d}_{1,l+1} & \overline{d}_{1,l+2} & \ldots & \overline{d}_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \overline{d}_{p,l+1} & \overline{d}_{p,l+2} & \ldots & 1+\overline{d}_{pn}\end{vmatrix}$.

Предположим, что выполнено условие

V. $\overline{\delta} \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I – V. Тогда для решения $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) на отрезке $0 \le t \le 1$ справедливы следующие оценки:*

$$|y^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C\left[\max_{0\le t\le 1}|\frac{a_1}{\alpha_{1,m}}H_{m+1}(t,0)-F(t)|+\sum_{i=2}^{l}|a_i|+\sum_{i=1}^{p}|b_i|+\right.$$

$$\left.+\,\varepsilon^{m-i}exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{l}|a_i|+\sum_{i=1}^{p}|b_i|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right)\right],\quad i=\overline{0,n-1}. \qquad (13)$$

Доказательство теоремы следует из (9) с учетом (5), (8), (10). Из оценок (13) следует $y^i(0,\varepsilon)=O(1)$, $i=\overline{0,m}$, $y^{(m+i)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^i}\right)$, $i=\overline{1,n-m-1}$, $\varepsilon\to 0$, т.е. решение краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ обладает явлением начального скачка m – го порядка.

Литература

1. *Дауылбаев М.К.* Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. Алматы. Изд-во "Қазақ университеті". 2009. 190 с.