

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА»

*приуроченная ко Дню науки*

**ТРУДЫ**

Алматы-2014

- Бидайбеков Е. Ы., Нурмухамедова Ж. М.*  
Об обучении методу параметризации решения краевых задач ..... 73
- Бойчук А. А., Головацкая И. А.*  
Импульсные краевые задачи для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений ..... 77
- Василина Г. К.*  
Об устойчивости интегрального многообразия при постоянно действующих случайных возмущениях ..... 80
- Грод И. М.*  
О существовании ограниченных решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве ..... 84
- Данилов В. Я., Кравец В. И.*  
О принципе сведения в теории разностных уравнений ... 86
- Дауылбаев М. К., Атахан Н.*  
Асимптотические оценки решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением ..... 88
- Дженалиев М. Т., Иманбердиев К. Б., Шарипов К. С.*  
О задаче выбора наилучшего температурного режима в химическом реакторе ..... 93
- Джумабаев Д. С.*  
Метод параметризации решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма 97
- Джумабаев Д. С., Абильдаева А. Д.*  
Ограниченные на полосе решения нелинейной системы гиперболических уравнений со смешанными производными уравнений ..... 101
- Zhumatov S. S.*  
О представлении уравнений Ито в виде уравнений с непо-

1. Плисс В.А. Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР.- 1964.- 28, №6.- С. 1297 - 1324.

УДК 517.948.34

Дауылбаев М. К., Атахан Н.

**Асимптотические оценки решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением**

*Казахский национальный университет им. Аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)  
dmk57@mail7ru*

Рассмотрим следующее сингулярно возмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t, x)y^i(x, \varepsilon)dx \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} h_i y &\equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \alpha_{ij} y^{(j)}(0, \varepsilon) = a_i, \quad i = \overline{1, l} \\ h_{l+i} y &\equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \beta_{ij} y^{(j)}(1, \varepsilon) = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad l + p = n, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $\alpha_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ ;  $\beta_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ ; – некоторые известные постоянные, причем  $\alpha_{1,m} \neq 0$ ,  $m = \text{fix} \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ .

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Функции  $A_i(t)$ ,  $F(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  являются достаточно гладкими на отрезке  $[0, 1]$ , а  $H_i(t, x)$ ,  $i = \overline{0, m+1}$  – в области  $D = (0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1)$ .

II.  $A_1(t) \geq \gamma = \text{const} > 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Рассмотрим однородное сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = 0 \quad (3)$$

При условии I, II для фундаментальной системы решений  $y_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n}$  уравнения (3) справедливы асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представления [1]:

$$\begin{cases} y_i^{(j)}(t, \varepsilon) = y_{i0}^{(j)} + O(\varepsilon), & i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, n-1}, \\ y_n^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \cdot (\mu^j(t)y_{n0}(t) + O(\varepsilon)), & j = \overline{0, n-1}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mu(t) = -A_1(t) < 0$ , функции  $y_{i0}(t)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  являются решением задачи

$$L_0 y_{i0} \equiv A_1(t)y_{i0}^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y_{i0} = 0, \quad y_{i0}^{(j)}(0) = \delta_{i-1, j}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, n-2},$$

$$\text{а } y_{n0}(t) = (A_1(0)/A_1(t))^{n-1} \exp\left(\int_0^t (A_2(x)/A_1(x)) dx\right).$$

Пусть функция  $K(t, s, \varepsilon)$  при  $0 \leq s \leq t \leq 1$  является решением задачи

$$L_\varepsilon K(t, s, \varepsilon) = 0, \quad K^{(j)}(s, s, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad K^{(n-1)}(s, s, \varepsilon) = 1.$$

Для функций  $K(t, s, \varepsilon)$  с учетом (4) справедливы оценки:

$$\begin{aligned} |K^{(j)}(t, s, \varepsilon)| &\leq C\varepsilon, \quad j = \overline{0, n-2}, \\ |K^{(n-1)}(t, s, \varepsilon)| &\leq C \left( \varepsilon + \exp\left(-\frac{\gamma(t-s)}{\varepsilon}\right) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $C > 0$  – постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ .

Теперь введем функции  $\Phi_k(t, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , называемые граничными функциями, являющиеся решениями следующей задачи:

$$L_\varepsilon \Phi_k(t, \varepsilon) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad h_i \Phi_k(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Граничные функции  $\Phi_k(t, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, n}$  представимы в виде:

$$\Phi_k(t, \varepsilon) = \frac{\Delta_k(t, \varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где  $\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t, \varepsilon) & \dots & h_1 y_n(t, \varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_n y_1(t, \varepsilon) & \dots & h_n y_n(t, \varepsilon) \end{vmatrix}$ , а  $\Delta_k(t, \varepsilon)$  – определитель, получаемый из  $\Delta(\varepsilon)$  заменой его  $k$ -ой строки фундаментальной системой решений  $y_1(t, \varepsilon), \dots, y_n(t, \varepsilon)$  уравнения (3). Для с учетом (2), (4) справедливо асимптотическое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представление

$$\Delta(\varepsilon) = (-1)^{1+n} \frac{\mu^m(0)}{\varepsilon^m} (\alpha_{1,m} \bar{\Delta} + O(\varepsilon)), \quad (7)$$

где  $\bar{\Delta} = \det\{h_i y_{i0} \dots h_i y_{n-1,0}\}$ ,  $i = \overline{2, n}$ . Пусть выполнено условие

III.  $\bar{\Delta} \neq 0$ .

Тогда для граничных функций  $\Phi_k(t, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, n}$  из (6) с учетом (2), (4), (7) имеем следующие асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оценки:

$$\begin{aligned} |\Phi_1^{(j)}(t, s)| &\leq C \left( \varepsilon + \varepsilon^{m-j} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right) \right), \quad j = \overline{0, n-1}, \\ |\Phi_k^j(t, s)| &\leq C \left( 1 + \varepsilon^{m-j} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right) \right), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{2, n} \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C > 0$  – постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ .

IV. Пусть  $\lambda = 1$  не является собственным значением ядра

$$H(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t, x) K^i(x, s, \varepsilon) dx.$$

Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n C_k Q_k(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_k(t, \varepsilon) &= \Phi_k(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_k(s, \varepsilon) ds, \\
 P(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds, \\
 \bar{\varphi}_k(t, \varepsilon) &= \varphi_k(t, \varepsilon) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) \varphi_k(s, \varepsilon) ds, \\
 \bar{F}(t, \varepsilon) &= F(t) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) F(s) ds,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$\varphi_k(t, \varepsilon) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t, x) \Phi_k^{(i)}(x, \varepsilon) dx$ , а  $R(t, s, \varepsilon)$  – резольвента ядра  $H(t, s, \varepsilon)$ ,

$C_i = a_i, i = \overline{1, l}$ , а  $C_i, i = \overline{l+1, n}$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases}
 (1 + d_{1,l+1}(\varepsilon)) \cdot C_{l+1} + \dots + d_{1n}(\varepsilon) \cdot C_n = b_1 - \sum_{i=1}^l d_{1i}(\varepsilon) a_i - e_1(\varepsilon), \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 d_{p,l+1}(\varepsilon) \cdot C_{l+1} + \dots + (1 + d_{pn}(\varepsilon)) \cdot C_n = b_p - \sum_{i=1}^l d_{pi}(\varepsilon) a_i - e_p(\varepsilon),
 \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 d_{ik}(\varepsilon) &\equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \frac{\beta_{ij}}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_k(s) ds = \bar{d}_{ik} + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, n}, \\
 e_i(\varepsilon) &\equiv \sum_{j=0}^{m+1-i} \frac{\beta_{ij}}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) F(s, \varepsilon) ds = \bar{e}_i + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, p}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

С учетом (5), (10), (12) для главного определителя  $\delta(\varepsilon)$  системы (11) справедливо асимптотическое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представление  $\delta(\varepsilon) = \bar{\delta} + O(\varepsilon)$ , где

$$\bar{\delta} = \begin{vmatrix} 1 + \bar{d}_{1,l+1} & \bar{d}_{1,l+2} & \dots & \bar{d}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{d}_{p,l+1} & \bar{d}_{p,l+2} & \dots & 1 + \bar{d}_{pn} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что выполнено условие

V.  $\bar{\delta} \neq 0$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия I – V. Тогда для решения  $y(t, \varepsilon)$  краевой задачи (1), (2) на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  справедливы следующие оценки:

$$|y^{(i)}(t, \varepsilon)| \leq C \left[ \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{a_1}{\alpha_{1,m}} H_{m+1}(t, 0) - F(t) \right| + \sum_{i=2}^l |a_i| + \sum_{i=1}^p |b_i| + \right. \\ \left. + \varepsilon^{m-i} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right) \cdot \left( \sum_{i=1}^l |a_i| + \sum_{i=1}^p |b_i| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) \right], \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (13)$$

Доказательство теоремы следует из (9) с учетом (5), (8), (10). Из оценок (13) следует  $y^i(0, \varepsilon) = O(1)$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $y^{(m+i)}(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^i}\right)$ ,  $i = \overline{1, n-m-1}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е. решение краевой задачи (1), (2) в точке  $t = 0$  обладает явлением начального скачка  $m$ -го порядка.

### Литература

1. Дауылбаев М.К. Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. Алматы. Изд-во "Қазақ университеті". 2009. 190 с.