ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
MINISTRY OF THE EDUCATION AND SCIENCES OF REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

ТАРАЗ МЕМЛЕКЕТТІК ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ИНСТИТУТЫ
TARAZ STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE
ТАРАЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор
Мұратбеков Мұсахан Байпақбайұлының
60 жас мерейтойына арналған «Операторлардың спектральді теориясының және математиканы оқыту сапасын жақсартудың қазіргі заманғы мәселелері: теориясы, әдістемесі, тәжірибесі»
атты Халықаралық ғылыми-практикалық конференциясының

ЕҢБЕКТЕРІ

SCIENTIFIC PAPERS

of the International Scientific Conference
"Modern problems of operators` spectral theory and the improvement of math teaching: Theory, Methods and Experience", dedicated to the 60th anniversary of Doctor of Physical and Mathematic Sciences, Professor Muratbekov Musakhan Baypakbaevitch

ТРУДЫ

Международной научно-практической конференции «Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике: теория, методика и опыт», посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора
Муратбекова Мусакана Байпакбаевича

27-28 қыркүйек 2013 ж.
September 27-28, 2013
27-28 сентября 2013 г.

УДК 517.948.34

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дауылбаев М.К., Ергалиев М.Г.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

В данной работе изучается двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка, в случае, когда коэффициент при второй производной тождественно равен нулю. Аналогичная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрена Нургабылом Д.Н.

Рассмотрим на отрезке [0,1] линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y''' + B(t)y' + C(t)y = F(t) + \int_0^1 \big(H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)\big)dx \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta, \quad h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \qquad (2)$$

где α, β, γ - некоторые известные постоянные, не зависящие от ε.

Предположим выполнение следующих условии:

I. Функции $B(t),\ C(t), F(t)$ будем считать достаточно гладкими на отрезке $0 \le t \le 1$, а $H_i(t,x),\ i = 0,1$ - в области $0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1$.

II. $B(t) < 0,\ \ 0 \le t \le 1$.

III. Корни $\mu_i(t), i = 1,2$ «дополнительного характеристического уравнения» $\mu^2(t) + B(t) = 0$ удовлетворяют неравенствам $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0$, $\mu_2(t) > \gamma_2 > 0$.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1):

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y''' + B(t)y' + C(t)y = 0 \qquad (3)$$

При условии I-III для фундаментальной системы решений $y_i(t,\varepsilon),\quad i = \overline{1,3}$ однородного уравнения (3) справедливы асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления:

$$y_1^{(i)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^i}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_1(x)dx\right)\cdot(\mu_1^i(t)y_{10}(t)+O(\sqrt{\varepsilon})),\ i=\overline{0,2},$$

$$y_2^{(i)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^i}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx\right)\cdot(\mu_2^i(t)y_{20}(t)+O(\sqrt{\varepsilon})),\ i=\overline{0,2},$$

$$y_3^{(i)}(t,\varepsilon)=y_{30}^{(i)}(t)+O(\varepsilon),\quad i=\overline{0,2}\,, \tag{4}$$

где $y_{i0}(t), i=1,2$ является решением задачи $2B(t)y'_{i0}(t)-(3\mu_i(t)\mu'_i(t)+C(t))y_{i0}(t)=0,$ $y_{i0}(0)=1$, а $y_{30}(t)=\exp\left(-\int_0^t\left(C(x)/B(x)\right)dx\right)$.

Для определителя Вронского $W(t,\varepsilon)$ фундаментальной системы решений $y_i(t,\varepsilon), i=1,2,3$ уравнения (3) в силу (4) справедливо

$$W(t,\varepsilon)=\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^3}y_{10}(t)y_{20}(t)y_{30}(t)B(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_1(x)dx-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx}(1+O(\sqrt{\varepsilon}))\neq 0 \tag{5}$$

Введем функции:

$$K(t,s,\varepsilon)=\frac{W(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)},\ K_1(t,s,\varepsilon)=\frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)},\ K_2(t,s,\varepsilon)=\frac{P_2(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{6}$$

где $K_1(t,s,\varepsilon)+K_2(t,s,\varepsilon)=K(t,s,\varepsilon),$ $W(t,s,\varepsilon)-$ определитель, который получается из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой третьей строки соответственно строкой $y_1(t,\varepsilon),y_2(t,\varepsilon),y_3(t,\varepsilon)$; $P_1(t,s,\varepsilon),P_2(t,s,\varepsilon)-$ определители, которые получаются из $W(s,\varepsilon)$ заменой его 3-ой строки строками $y_1(t,\varepsilon),0,y_3(t,\varepsilon)$ и $0,y_2(t,\varepsilon),0$ соответственно.

Заметим, что $K_1(t,s,\varepsilon),K_2(t,s,\varepsilon)$ являются непрерывными функциями t и s вместе с производными до 3-го порядка включительно, и как функции переменной t удовлетворяют однородному уравнению (3). Из (6) с учетом (4) и (5) получим для $K_1(t,s,\varepsilon)$ и $K_2(t,s,\varepsilon)$ следующие асимптотические формулы при $\varepsilon\to 0$:

$$K_1^{(i)}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{y_{30}^{(i)}(t)}{y_{30}(s)B(s)}-\frac{y_{10}(t)\mu_1^i(t)}{(\sqrt{\varepsilon})^i y_{10}(s)\mu_1(s)(\mu_2(s)-\mu_1(s))}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_s^t\mu_1(x)dx}+\right.$$

$$\left.+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_s^t\mu_1(x)dx}\right)\right),\qquad t\geq s,\qquad i=0,1,2, \tag{7}$$

$$K_2^{(i)}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{y_{20}(t)\mu_2^i(t)}{(\sqrt{\varepsilon})^i y_{20}(s)\mu_2(s)(\mu_2(s)-\mu_1(s))}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^s\mu_2(x)dx}+\right.$$

$$\left.+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^s\mu_2(x)dx}\right)\right),\qquad t\le s,\qquad i=0,1,2$$

Введем, так называемые, граничные функции:

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{\Delta_i(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)},\quad i=1,2,3\qquad (8)$$

где $\Delta(\varepsilon)-$ определитель, составленный из ф.с.р однородного уравнения (3):

$$\Delta(\varepsilon)=\begin{vmatrix}y_1(0,\varepsilon) & y_2(0,\varepsilon) & y_3(0,\varepsilon)\\ y_1'(0,\varepsilon) & y_2'(0,\varepsilon) & y_3'(0,\varepsilon)\\ y_1(1,\varepsilon) & y_2(1,\varepsilon) & y_3(1,\varepsilon)\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\mu_1(0)y_{20}(1)+O(\sqrt{\varepsilon}))\ne 0\qquad (9)$$

а $\Delta_i(t,\varepsilon)-$ определитель, получаемый из $\Delta(\varepsilon)$ заменой его $i-$ой строки на строку $y_1(t,\varepsilon),y_2(t,\varepsilon),y_3(t,\varepsilon)$. Функции $\Phi_i(t,\varepsilon),i=1,2,3$ являются решениями задачи

$$L_\varepsilon\Phi_i(t,\varepsilon)=0,\ \ h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki},\ i,k=1,2,3.$$

Учитывая (9) и раскладывая определители $\Delta_i(t,\varepsilon)$ по элментам $i-$ой строки, из (8) получим следующие асимптотические формулы при $\varepsilon\to 0$:

$$\Phi_1^{(i)}(t,s,\varepsilon)=y_{30}^{(i)}(t)-\frac{y_{10}(t)\mu_1^i(t)y_{30}'(0)}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}\mu_1(0)}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_1(x)dx}-\frac{y_{20}(t)\mu_2^i(t)y_{30}(1)}{(\sqrt{\varepsilon})^i y_{20}(1)}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx}+$$

$$+O\left(\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-2}}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_1(x)dx}+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx}\right),\quad i=0,1,2,$$

$$\Phi_2^{(i)}(t,s,\varepsilon)=-\sqrt{\varepsilon}\frac{y_{30}^{(i)}(t)}{\mu_1(0)}+\frac{y_{10}(t)\mu_1^i(t)}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}\mu_1(0)}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_1(x)dx}+\frac{y_{20}(t)\mu_2^i(t)y_{30}(1)}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}\mu_1(0)y_{20}(1)}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-2}}e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_1(x)dx}+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx}\right),\quad i=0,1,2,$$

$$\Phi_3^{(i)}(t,s,\varepsilon)=\frac{y_{20}(t)\mu_2^i(t)}{(\sqrt{\varepsilon})^i y_{20}(1)}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx}+O\left(\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx}\right),\qquad i=0,1,2 \tag{10}$$

IV. Пусть 1 не является собственным значением ядра

$$H(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1\sum_{i=0}^1 H_i(t,x)K_1^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\sum_{i=0}^1 H_i(t,x)K_2^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx.$$

V. $1+\int_0^1\frac{y_{30}(1)}{y_{30}(s)B(s)}[H_1(s,1)+\int_0^1 R(s,p)H_1(p,1)dp]ds\neq 0$

Теорема 1. Пусть выполнены условия I-V. Тогда решение задачи (1), (2) на отрезке [0,1] существует, единственно и выражается формулой:

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^3 C_k Q_k(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \tag{11}$$

где

$$Q_k(t,\varepsilon)=\Phi_k(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_1(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_k(s,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 K_2(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_k(s,\varepsilon)ds, \tag{12}$$

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_1(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 K_2(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds,$$

$\overline{\varphi_k}(t,\varepsilon)=\varphi_k(t,\varepsilon)+\int_0^1 R(t,s,\varepsilon)\varphi_k(s,\varepsilon)ds$, $\overline{F}(t,\varepsilon)\equiv F(t)+\int_0^1 R(t,s,\varepsilon)F(s)ds$,

$\varphi_k(t,\varepsilon)=\int_0^1\sum_{i=0}^1 H_i(t,x)\Phi_k^{(i)}(x,\varepsilon)dx$, а $R(t,s,\varepsilon)$ - резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$, а $C_k, k=1,2,3$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1Q_1(0,\varepsilon)+C_2Q_2(0,\varepsilon)+C_3Q_3(0,\varepsilon)=\alpha-P(0,\varepsilon),\\ C_1Q_1'(0,\varepsilon)+C_2Q_2'(0,\varepsilon)+C_3Q_3'(0,\varepsilon)=\beta-P'(0,\varepsilon),\\ C_1Q_1(1,\varepsilon)+C_2Q_2(1,\varepsilon)+C_3Q_3(1,\varepsilon)=\gamma-P(1,\varepsilon)\end{cases}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия I-V. Тогда для решения $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) и его производных на отрезке $0\le t\le 1$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le C(|\alpha|+\sqrt{\varepsilon}|\beta|+|\gamma|\max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|)+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+$$

$$+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|)+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}}(|\alpha|+\sqrt{\varepsilon}|\beta|+|\gamma|+\sqrt{\varepsilon}\max_{0\le t\le 1}|F(t)|),\qquad i=0,1,2,$$

где $C>0, \gamma_i>0, i=1,2-$ некоторые постоянные, не зависящие от ε.

Доказательство теоремы следует из оценок для функции $Q_k(t,\varepsilon), k=1,2,3$ и $P(t,\varepsilon)$:

$$\left|Q_1^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}},\ i=0,1,2,$$

$$\left|Q_2^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C\sqrt{\varepsilon}+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}},\ i=0,1,2,$$

$$\left|Q_3^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C\max_{0\le t\le 1}\left|H_1(t,1)\right|+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}+\frac{C}{(\sqrt{\varepsilon})^{i}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}},\ i=0,1,2,$$

$$\left|P^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C\max_{0\le t\le 1}\left|F(t)\right|\left(1+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}+\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^{i-1}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}}\right),\ i=0,1,2,$$

получаемых из (12) с учетом (7), (10).

Из теоремы 2 следует, что $y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), y'(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ \varepsilon\to 0$, т.е. решение краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ обладает явлением начального скачка первого порядка, а в точке $t=1$ - нулевого порядка.

УДК 517.925:62.50

О КОНВЕРГЕНТНОМ СВОЙСТВЕ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

Жуматов С.С.
Институт математики и математического моделирования МОН РК, г. Алматы

Рассмотрим задачу построения устойчивой системы управления следующей структуры, подверженной внешним воздействиям

$$\dot{x}=f(t,x)-B\xi-g(t),\quad \dot{\xi}=\varphi(\sigma),\quad \sigma=P^T\omega-R_1\xi,\quad t\in I=[0,\infty),\tag{1}$$

по заданному $(n-s)$-мерным гладким интегральным многообразием $\Omega(t)$, определяемым векторным уравнением

$$\omega(t,x)=0,\tag{2}$$

где $B\in R^{n\times r}, P\in R^{s\times r}$ - матрицы, $x\in R^n$ -вектор состояния объекта, $f\in R^n$ -вектор-функция, $g\in R^s$ -вектор внешних возмущений, $\omega\in R^s$ -вектор $s\le n$, $\xi\in R^r$ -вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям локальной квадратичной связи в угле $[0,K]$, дифференцируемый по σ и $\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}$ удовлетворяет условию

т.е.:

$$\varphi(0)=0,\quad 0<\sigma^T\varphi(\sigma)\le\sigma^T K\sigma\quad \forall\sigma\ne 0,\tag{3}$$

$$N_1\le\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\le N_2,\ N_1>0,\quad N_2>0.$$

Известно, что при построении систем программного движения, на программное многообразие накладываются дополнительные условия, как устойчивость, оптимальность, а также другие требование на качество переходного процесса. Вопросы построения систем дифференциальных уравнений по заданному многообразию в различной постановке исследовались в /1 – 7/.