Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

20–24 ноября 2017 г.

Тезисы докладов

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 17-01-20511)

Новосибирск • 2017

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

November 20–24, 2017

Collection of Abstracts

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 17-01-20511)

Novosibirsk • 2017

Содержание

I. Пленарные доклады

Алгебры Роты — Бакстера и преалгебры

В. Ю. Губарев

Алгебры Роты — Бакстера и преалгебры применяются в различных областях: универсальной алгебре, комбинаторике, математической физике и др. Изучение алгебраических свойств таких алгебр представляет собой самостоятельный интерес. В 2000 г. М. Агуиар показал, что на ассоциативной алгебре Роты — Бакстера можно так задать новые операции, что получится преассоциативная алгебра. Позже этот факт был обобщён на произвольные многообразия преалгебр. В 2013 г. П. Колесниковым и В. Губаревым было доказано, что произвольная преалгебра инъективно вкладывается в свою универсальную обёртывающую алгебру Роты — Бакстера без построения самой обёртывающей алгебры. Автором построены универсальные обёртывающие алгебры Роты — Бакстера для ассоциативных, коммутативных и лиевых преалгебр. Изучаются свойства этих универсальных обёртывающих. Исследуется вопрос о применении построенных универсальных обёртывающих для доказательства аналога теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта для пары ассоциативных и лиевых преалгебр.

Помимо указанных выше вопросов изучаются свойства операторов Роты — Бакстера как нулевого, так и ненулевого веса.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vsevolodgu@math.nsc.ru

Метод пар Хариш — Чандры в теории алгебраических групповых суперсхем

А. Н. Зубков

В докладе будет рассказано об описании алгебраических групповых суперсхем на языке пар Хариш — Чандры. Более точно, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Категория алгебраических групповых суперсхем эквивалентна категории пар Хариш — Чандры.*

Будут обсуждаться супераналог теоремы Барсотти — Шевалле, структура псевдоабелевых и абелевых (групповых) супермногообразий, структура разрешимых, нильпотентных и унипотентных (аффинных) супергрупп. Все результаты, которые будут сформулированы в докладе, получены при помощи техники пар Хариш — Чандры.

Будет приведен пример редуктивной разрешимой (аффинной) супергруппы, не являющейся геометрически редуктивной. Пример также строится при помощи техники пар Хариш — Чандры.

Институт математики им. Соболева, Омский филиал, Омск
E-mail: a.zubkov@yahoo.com

О сложности решеток квазимногообразий

А. В. Кравченко, А. М. Нуракунов, М. В. Швидефски

Найдены достаточные условия для того, чтобы квазимногообразие $\mathbf{M}$ конечной сигнатуры содержало континуум подквазимногообразий, не имеющих покрытий в решетке квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{M})$ и, следовательно, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{M}$. Полученные условия являются также достаточными для Q-универсальности квазимногообразия $\mathbf{M}$. Кроме того, найдены достаточные условия для того, чтобы квазимногообразие $\mathbf{M}$ конечной сигнатуры содержало континуум подквазимногообразий $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{M}$, таких что $\mathbf{K}$ имеет независимый базис квазитождеств относительно $\mathbf{M}$, однако, квазиквациональная теория $\mathbf{K}$ и проблема вхождения в $\mathbf{K}$ для конечно определенных систем неразрешимы. В качестве следствий получен ряд известных, а также ряд новых результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

СИУ — Филиал РАНХиГС, Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: a.v.kravchenko@mail.ru
Институт математики НАН КР, Бишкек (Кыргызстан)
E-mail: a.nurakunov@gmail.com
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: udav17@gmail.com

Локально-простые модели и реальная жизнь

А. В. Манцивода

В докладе рассматривается подход к логическому описанию предметных областей, который базируется на понятии локально-простых моделей. Концептуальной основой подхода является семантическое программирование. На примере построения и внедрения управленческих логических моделей на крупных предприятиях оценивается потенциал использования логического моделирования в задачах реальной сложности.

Иркутский госуниверситет, Иркутск
E-mail: andrei@baikal.ru

Фрагменты функциональных клонов как метод исследования последних

А. Г. Пинус

На основе вводимого понятия фрагментов функциональных клонов определяется ряд новых параметров клонов эффективных в вопросах классификации последних. В том числе некоторая метрика на совокупности всех клонов на фиксированном множестве, превращающая решетку всех клонов в топологическую решетку. Вводится понятие ограниченно порожденных клонов решетка которых наследует ряд свойств решетки всех клонов.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Частично коммутативные алгебры Ли

Е. Н. Порошенко

Частично коммутативная алгебра Ли, определенная графом $G = \langle A; E\rangle$ (конечным или бесконечным) — это алгебра с множеством порождающих $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ и множеством определяющих соотношений $[a_i, a_j] = 0$, где $\{a_i, a_j\} \in E$. Таким образом, определение частично коммутативной алгебры Ли аналогично определениям других частично коммутативных структур (групп, моноидов и т.д.). В отличие от частично коммутативных групп, частично коммутативные алгебры Ли оставались малоизученными до недавнего времени. Настоящий доклад посвящен результатам, полученным докладчиком в данной области за последние несколько лет: от явного описания базисов частично коммутативных и метабелевых частично коммутативных алгебр Ли до вопросов универсальной и элементарной эквивалентности таких алгебр.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: auto_stoper@ngs.ru

Субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы как путь к изучению максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп

Д. О. Ревин

Пусть π-фиксированное множество простых чисел. Напомним, что конечная группа называется π-группой, если любой простой делитель ее порядка принадлежит π. Теорема Л. Силова и теорема Ф. Холла соответственно дают ясное описание максимальных π-подгрупп данной конечной группы G в случаях, когда π одноэлементно или группа G разрешима. В этих случаях максимальные π-подгруппы обладают также следующим свойством: для нормальной подгруппы $N \trianglelefteq$ и любой максимальной π-подгруппы $H \leq G$ подгруппы $HN/N \leq G/N$ и $H \cap N \leq N$ будут максимальными π-подгруппами.

Изучение максимальных π-подгрупп произвольной конечной группы в общем случае сопряжено с большими трудностями, поскольку ни гомоморфный образ, ни пересечение с нормальной подгруппой уже не являются, вообще говоря, максимальными π-подгруппами в соответствующих группах. В то же время, теорема, доказанная независимо Х.Виландом и Б.Хартли, гарантирует, что пересечение максимальной π-подгруппы H группы G и подгруппы $N \trianglelefteq G$ нетривиально, если порядок подгруппы N делится хотя бы на одно простое число из π. В связи с этим Виланд предложил изучать т. н. субмаксимальные π-подгруппы — более общий объект, чем максимальные π-подгруппы.

Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Подгруппа H конечной группы G называется *субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой*, если существует мономорфизм $\phi : G \to G^*$ группы G в некоторую конечную группу G^* такой, что подгруппа G^ϕ субнормальна в G^* и $H^\phi = K \cap G^\phi$ для некоторой максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы K группы G^*.

Ясно, что максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы являются субмаксимальными $\mathfrak{X}$-подгруппами. Кроме того, если $\mathfrak{X}$ — класс всех π-групп, субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы называют субмаксимальными π-подгруппами. В отличие от максимальных π-подгрупп, пересечение субмаксимальной подгруппы H группы G с нормальной подгруппой $N \trianglelefteq G$ будет субмаксимальной π-подгруппой в N.

В своем докладе на знаменитой конференции по конечным группам в г. Санта-Круз (Калифорния, США) в 1979 году, Виланд предложил программу изучения составных групп, важной частью которой было изучение субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. В докладе планируется обсудить некоторые вопросы, связанные с реализацией этой программы.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: revin@math.nsc.ru

Реберно симметричные антиподальные дистанционно регулярные графы малого диаметра

Л. Ю. Циовкина

Антиподальные дистанционно регулярные графы малого диаметра составляют широкий класс графов, посредством которых выразима структура некоторых важных объектов алгебры и комбинаторики. Доклад посвящен проблеме классификации реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра не более пяти. Будет приведен обзор известных и новых результатов для данного класса графов. В частности, будут представлены классификация реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра три, а также полученные автором обобщенный метод нахождения таких графов в почти простом случае и их конструкции.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: tsiovkina@imm.uran.ru

On a problem of Malcev: the Poincare—Birkhoff—Witt Theorem fails for Malcev algebras

A. A. Buchnev, V. T. Filippov, I. P. Shestakov, S. R. Sverchkov

Malcev algebras were introduced in 1955 by A. I. Malcev as tangent algebras for analytic Moufang loops. They are related to alternative algebras in the same way that Lie algebras are related to associative algebras: if A is an alternative algebra then the algebra $A^{(-)}$, with the multiplication $[a, b] = ab - ba$, is a Malcev algebra, i.e., it satisfies the identities $[x, y] = -[y, x]$, $J_-(x, y, z), x] = J_-(x, y, [x, z])$, where $J_-(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$ is the commutator Jacobian of x, y, z. A Malcev algebra M is called special if it is isomorphic to a subalgebra of $A^{(-)}$ for an alternative algebra A. In this case, the alternative algebra A is called an alternative enveloping algebra for the Malcev algebra M.

The famous Poincare—Birkhoff—Witt theorem establishes the existence of an associative enveloping algebra for every Lie algebra. The Malcev problem for speciality of Malcev algebras is the question whether any Malcev algebra have an alternative enveloping algebra. We construct a nonspecial Malcev quotient algebra $M[X]/I$ of free Malcev algebra $M[X]$ on generators $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ and an ideal $I \lhd M[X]$, as a counterexample to the Malcev problem.

The principal tool in our construction is an example of Malcev analog of tetrad-eating Jordan polynomials introduced by E. Zelmanov. They play a central role in the structure theory Jordan algebras [4]. Moreover, any tetrad-eater defines a nonspecial Jordan algebra [3].

A Malcev polynomial $m(X)$ of free alternative algebra $Alt[X]$ is a *commutator eater* if $m(X) \circ ([a, b]^2)$ is a Malcev polynomial for any Malcev polynomials $a, b \in Alt[X]$, where $x \circ y = xy + yx$. The straightforward construction of commutator eaters is the following criterion.

Lemma. *If Malcev polynomial $f = f(x, \dots, y)$ satisfies the identities*

$$, f(x^2, \dots, y) = f(x, \dots, y) \circ x, \quad f([x, y]^2, \dots, z) = 0,$$

then $f = f(x, \dots, y)$ is a commutator eater, and

$$f(x, \dots, y) \circ ([a, b]^2) = f(D([a, b], [a, b], x) - D(a, [x, b], [a, b]), \dots, y),$$

where $D(x, y, z) = J(x, y, z) + 3[x, [y, z]]$.

The Filippov G-polynomial

$$G(a, a, x, y, z, t) = J(D([x, y], z, a), a, t) + J(D([x, a], y, a), z, t)$$

satisfies the identities of Lemma (see [1] for more details), hence $G(a, a, x, y, z, t)$ is a commutator eater, and

$$G(a, a, x, y, z, t) \circ ([b, c]^2) = G(a, a, D([b, c], [b, c], x) - D(b, [x, c], [b, c]), y, z, t).$$

Let G be a preimage of G in free Malcev algebra obtained by replacing the commutators with Malcev multiplication, i.e.,

$$G(a, a, x, y, z, t) = J(D(xy, z, a), a, t) + J(D(xa, y, a), z, t),$$

where $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$, $D(x, y, z) = J(x, y, z) + 3x(yz)$. We will denote by I the ideal of $M[X]$ generated by G. Set

$$S(a, b, c, x, y, z, t) = \sum_{alt(x,y,z,t)} (G(a, a, D(bc, bc, x) - D(b, xc, bc), y, z, t)).$$

Let $super(S) = G(a, a, D(bc, bc, x) - D(b, xc, bc), x, x, x)$ be a superization of S on x, y, z, t in free Malcev superalgebra $SuperMal[a, b, c, x]$ on a, b, c even and x odd generators. It is easily seen that $S = 0$ in $M[a, b, c, x, y, z, t]$ if and only if $super(S) = 0$ in $SuperMal[a, b, c, x]$ (see [2] for details). We use the `MALCEV` computer algebra system developed by authors to verify that $super(S) \neq 0$ in $SuperMal[a, b, c, x]$. Consequently, $S(a, b, c, x, y, z, t)$ is not trivial polynomial in free Malcev algebra. We use this to prove our main result.

Theorem. *Malcev quotient algebra $M[X]/I$ is not special.*

References

[1] Filippov V.T., Trivial nuclear ideals of a free alternative algebra, Algebra and Logic, (1985) 24(6): 455-471.

[2] Shestakov I.P., Zhukavets N.M., Speciality of Malcev superalgerba on one odd generator, J. Algebra, (2006) 5(4): 521-535.

[3] Sverchkov S.R., Quasivariety of special Jordan algebras, Algebra and Logic, (1983) 22(5): 406-414.

[4] Zelmanov E.I., On prime Jordan algebras II, Siberian Math. J. (1983) 24(1): 69-104.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: shestak@ime.usp.br
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk
E-mail: SverchkovSR@yandex.ru

On locally finite groups with bounded centralizer chains

A. A. Buturlakin

The class groups with uniform bound on the length of the centralizer chain is a classical object of research (see, for example, [1]). Following [2], we call the length of the centralizer lattice of a group G the c-dimension of G, that is the c-dimension of G is the maximal length of the chain of nested centralizers.

We discuss the structure of locally finite groups of finite c-dimension. In particular, we prove that the number of nonabelian composition factors of such a group is bounded in terms of c-dimension. Our work was inspired by the paper [3] in which periodic locally soluble group of finite c-dimension was considered.

The talk is bases on joint papers with A.V. Vasil'ev and D.O. Revin [4, 5].

The research is supported by RSF (project No. 14-21-00065).

References

[1] Schmidt R., Subgroup lattices of groups. De Gruyter Expositions in Mathematics, 14. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[2] Myasnikov A., Shumyatsky P., Discriminating groups and c-dimension, J. Group Theory, **7** (2004), 135–142.

[3] Khukhro E.I., On solubility of groups with bounded centralizer chains, Glasgow Math. J., 51 (2009), 49–54.

[4] Buturlakin A. A., Vasil'ev A. V., Locally finite groups with bounded centralizer chains, Algebra and Logic, **52**, no. 5 (2012), 367тАУ-370.

[5] Buturlakin A. A., Revin D.O., Vasil'ev A. V., On the Borovik-Khukhro conjecture on locally finite groups with bounded centralizer chains, in preparation.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: buturlakin@gmail.com

Dynamic contact algebras and quantifier-free logics for space and time

P. Dimitrov, D. Vakarelov

The paper is in the field of Region Based Theory of Space (RBTS), sometimes called mereotopology. RBTS is a kind of point-free theory of space based on the notion of region. Its origin goes back to some ideas of Whitehead, De Laguna and Tarski to build the theory of space without the use of the notion of point. More information on RBTS and mereotopology can be found, for instance in [**3**]. Contact algebras present an algebraic formulation of RBTS and in fact give axiomatizations of the Boolean algebras of regular closed sets of some classes of topological spaces with an additional relation of contact. An exhaustive study of this theory is given in [**2**]. Dynamic contact algebras (DCA), introduced by the second author in [**4**], are generalizations of contact algebras studying regions changing in time and present formal explications of Whitehead's ideas of integrated point-free theory of space and time.

In the present paper we propose several new types of dynamic contact algebras and quantifier-free logics based on them in the style of [**1**]. The logics are finitary, based on Modus Ponens and some nonstandard inference rules which replace the non-universal axioms of the corresponding DCA. In fact these logics can be considered as axiomatizations of the universal fragment of the first-order theory of the corresponding DCA. They can be treated as kinds of non-standard temporal logics for spatial regions changing in time. The difference with standard temporal logic is that we do not use temporal operators but temporal predicates. We present also a Kripke style semantics for some of these logics, based on relational models for the corresponding DCA. This semantics helps to use some techniques adapted from modal logic to study some metalogical properties of the studied systems.

References

[1] Balbiani Ph., Tinchev T., and Vakarelov D., Modal Logics for Region-based Theory of Space. *Fundamenta Informaticae*, Special Issue: Topics in Logic, Philosophy and Foundation of Mathematics and Computer Science in Recognition of Professor Andrzej Grzegorczyk, vol. (81), (1-3), (2007), 29–82.

[2] Dimov G., Vakarelov D., Contact Algebras and Region-based Theory of Space. A proximity approach. I and II. *Fundamenta Informaticae,* 74(2-3):209–249, 251–282, 2006.

[3] Vakarelov D., Region-Based Theory of Space: Algebras of Regions, Representation Theory and Logics. In: Dov Gabbay, Sergey Goncharov and Michael Zakharyaschev (Eds.) *Mathematical Problems from Applied Logics. New Logics for the XXIst Century. II.* Springer, 2007, 267–348.

[4] Vakarelov D., Dynamic mereotopology III. Whiteheadean type of integrated point-free theories of space and tyme. Part I, *Algebra and Logic,* vol. 53, No 3, 2014, 191-205. Part II, *Algebra and Logic,* vol. 55, No 1, 2016, 9-197. Part III, *Algebra and Logic,* vol. 55, No 3, 2016, 181-197.

Sofia University, Sofia (Bulgaria)
E-mail: xanthic223@gmail.com, dvak@fmi.uni-sofia.bg

Computational commutative and noncommutative invariant theory of classical groups

V. S. Drensky

One of the main branches of noncommutative invariant theory studies algebras of invariants of linear groups acting on finitely generated relatively free algebras of varieties of linear algebras over a field of characteristic 0. In this talk we survey some recent results mainly in the case of associative and Lie algebras.

From many points of view associative algebras satisfying a polynomial identity are considered to be very close to commutative algebras. But it has turned out that many results in classical commutative invariant theory sound completely different in the noncommutative setup.

Let W be a finite dimensional vector space over a field K of characteristic 0 and let $K\langle W\rangle$ be the free algebra associative algebra on W. For a variety $\mathfrak{V}$ of associative K-algebras with T-ideal of polynomial identities $T(\mathfrak{V}) \subset K\langle W\rangle$ we consider the relatively free algebra

$$F_W(\mathfrak{V}) = K\langle W\rangle/T(\mathfrak{V}).$$

Let KX_d be a d-dimensional K-vector space with basis $X_d = \{x_1, \ldots, x_d\}$ with the canonical action of the general linear group $GL_d = GL_d(K)$ and let $W(\lambda)$ be the irreducible polynomial GL_d-module indexed with the partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Assume that W has the structure of a polynomial GL_d-module

$$W = \bigoplus_{\lambda} m(\lambda)W(\lambda).$$

Then the action of GL_d on W is extended diagonally on $F_W(\mathfrak{V})$ and for a subgroup G of GL_d we study the algebra of G-invariants $F_W^G(\mathfrak{V})$. Assuming that we have sufficient quantitative information for $F_W(\mathfrak{V})$ (e.g., the cocharacter sequence of $\mathfrak{V}$ or the Hilbert series of $F_W(\mathfrak{V})$ as a multigraded vector space) we present efficient algorithms to compute the Hilbert series of $F_W^G(\mathfrak{V})$ when G is a classical subgroup of GL_d or a unipotent subgroup of such classical subgroup. In many cases we are able to answer the question whether the algebra $F_W^G(\mathfrak{V})$ is finitely generated and to find explicit generating sets even when the algebra of invariants is not finitely generated. Similar results are obtained for varieties of Lie, right-symmetric and Novikov algebras, and for absolutely free algebras with several multilinear multiplication operations.

Many of the results presented in the talk are obtained jointly with the late C. K. Gupta (Winnipeg, Canada) and with S. Boumova, G. K. Genov, E. Hristova, B. Kostadinov (Sofia), P. Koev (San José, California, USA), M. Domokos (Budapest, Hungary), F. Benanti and A. Valenti (Palermo, Italy), R. La Scala (Bari, Italy), R. Dangovski (Sofia, now in MIT, USA), Ş. Fındık (Adana, Turkey), L. Bedratyuk (Khmelnitsky, Ukraine), and R. Holtkamp (Bochum, now in Hamburg, Germany).

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia (Bulgaria)
E-mail: drensky@math.bas.bg

The countable spectrum, almost ω-categoricity, and smallness in quite o-minimal theories

B. Sh. Kulpeshov

The present lecture is concerned the notion of *weak o-minimality*, originally studied by D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn in [**1**]. A subset A of a linearly ordered structure M is *convex* if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $M = \langle M; =, <, \ldots \rangle$ such that any parametrically definable subset of M is a finite union of convex sets in M.

Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say [**2**] that p is not *weakly orthogonal to* q ($p \not\perp^w q$), if there exist an A-definable formula $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ and $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ such that $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ and $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$. We say [**3**] that p is not *quite orthogonal to* q ($p \not\perp^q q$), if there exists an A-definable bijection $f : p(M) \to q(M)$. We say that a weakly o-minimal theory is *quite o-minimal* if the notions of weak and quite orthogonality of 1-types coincide.

Here we present and discuss the following results:

Theorem 1. [**4**] *Let T be a quite o-minimal theory in a countable language. Then either T has 2^ω countable models or T has exactly $6^a 3^b$ countable models, where a and b are natural numbers. Moreover, for any $a, b \in \omega$ there is a quite o-minimal theory T with exactly $6^a 3^b$ countable models.*

Theorem 1 is a solution of the Vaught problem for quite o-minimal theories.

Theorem 2. [**5**] *Any Ehrenfeucht quite o-minimal theory is almost ω-categorical.*

Proposition 1. [**5**] *Let T be an almost ω-categorical quite o-minimal theory. Then the Exchange Principle for algebraic closure holds in every model of T.*

Theorem 3. *Let T be an almost ω-categorical quite o-minimal theory, $p_1, \ldots, p_m \in S_1(\emptyset)$ be non-algebraic weakly orthogonal types. Then $\{p_1, \ldots, p_m\}$ is orthogonal over $\emptyset$.*

Theorem 4. *Any almost ω-categorical quite o-minimal theory is binary.*

Proposition 2. *There exists a small quite o-minimal theory which is not binary.*

References

[1] Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C., Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society, 2000, V. 352, pp. 5435–5483.

[2] Baizhanov B.S., Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 2001, V. 66, pp. 1382–1414.

[3] Kulpeshov B.Sh., Convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories // The News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, physical and mathematical series, 2003, V. 227, pp. 26–31.

[4] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, 2017, V. 168, issue 1, pp. 129–149.

[5] Kulpeshov B.Bh, Sudoplatov S.V., Linearly ordered theories which are nearly countably categorical // Mathematical Notes, 2017, V. 101, issue 3, pp. 475–483.

International Information Technology University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Computable categoricity, index sets, and classification of structures

A. G. Mel'nikov

We will discuss several recent developments in the theory of computably categorical algebraic structures with applications to the classification problem for compact connected and profinite abelian groups.

The Institute of Natural and Mathematical Sciences, Auckland (New Zealand)
E-mail: alexander.g.melnikov@gmail.com

Semi-Heyting algebras, their expansions, and associated logics

H. P. Sankappanavar

The variety **SH** of semi-Heyting algebras was introduced in 1985 in resolving a conjecture and as a natural generalization of Heyting algebras. However, the results on **SH** only appeared in 2008 (see [**6**]). These algebras share some important properties with Heyting algebras, such as distributivity and pseudocomplementedness, arithmeticity, etc., and differ from Heyting algebras in some important ways, as well; for example, there are algebras in **SH** in which the identities $0 \to 1 \approx 0$ and $x \to y \approx y \to x$ hold, which might be of some philosophical interest.

In 2011, a new propositional logic called "semi-intuitionistic logic" was introduced by Cornejo, which has the variety of semi-Heyting algebras as its algebraic semantics and of which the intuitionistic logic is an extension. Recently, in [**2**], Cornejo and Viglizzo have given a much "simpler" axiomatization for the semi-intuitionistic logic.

Also, in 2011, several expansions of semi-Heyting algebras were studied in [**7**] that included dually pseudocomplemented semi-Heyting algebras, De Morgan semi-Heyting algebras and double semi-Heyting algebras, among others. These expansions of semi-Heyting algebras have recently led to the discovery of new non-classical logics (see [**3**]) and [**1**]), to a new variety of algebras called *semi-Nelson algebras* (see [**4**]), and to the associated logic, *semi-intuitionistic logic with strong negation* ([**5**]).

In this lecture I will attempt to survey some (hopefully all) of the above-mentioned developments.

References

[1] Cornejo J. M., *The semi Heyting-Brouwer logic*, Studia Logica,103(4) (2014):1-23.
[2] Cornejo J. M., Viglizzo I. D., *On some semi-intuitionistic logics*, Studia Logica, 103(2) (2015), 303–344.
[3] Cornejo J. M., Sankappanavar H. P., *De Morgan semi-Heyting Logic and its extensions*, (Preprint), 2017.
[4] Cornejo J. M., Viglizzo I. D., *Semi-Nelson algebras*, Order 2016. doi:10.1007/s11083-016-9416-x.
[5] Cornejo J. M., Viglizzo I. D., *Semi-Intutionistic logic with strong negation*, Stud Logica (2017). doi:10.1007/s11225-017-9737-9.
[6] Sankappanavar H. P., *Semi-Heyting algebras: An abstraction from Heyting algebras*, Proceedings of the 9th "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress (Spanish), Actas Congr. "Dr. Antonio A. R. Monteiro 2007, Bahía Blanca, Univ. Nac. del Sur, 2008, 33–66.
[7] Sankappanavar H. P., *Expansions of semi-Heyting algebras I: Discriminator varieties*, Studia Logica, 98(1-2) (2011), 27–81.

Department of Mathematics, State University of New York, New York (USA)
E-mail: sankapph@newpaltz.edu

On some modal extensions of the Lambek calculus

A. Scedrov

The Lambek calculus (1958, 1961) is a well-known logical formalism for modelling natural language syntax. The calculus can also be considered as a version of non-commutative intuitionistic linear logic. The Lambek calculus is a logical foundation of categorial grammar, a linguistic paradigm of grammar as logic and parsing as deduction. The original calculus covered a substantial number of intricate natural language phenomena. In order to address more subtle linguistic issues, the Lambek calculus has been extended in various ways.

For instance, an extension with so-called bracket modalities introduced by Morrill (1992) and Moortgat (1995) is capable of representing controlled non-associativity and is suitable for the modeling of islands. The syntax is more involved than the syntax of a standard sequent calculus. Derivable objects are sequents of the form $\Gamma \to A$, where the antecedent Γ is a structure called meta-formula and the succedent A is a formula. Meta-formulae are built from formulae (types) using two metasyntactic operators: comma and brackets. In joint work with Max Kanovich, Stepan Kuznetsov, and Glyn Morrill we give an algorithm for provability in the Lambek calculus with bracket modalities allowing empty antecedents. Pentus (2010) gave a polynomial-time algorithm for determining provability of bounded depth formulas in the original Lambek calculus with empty antecedents allowed. Pentus' algorithm is based on tabularisation of proof nets. Our algorithm for the extension with bracket modalities runs in polynomial time when both the formula depth and the bracket nesting depth are bounded. The algorithm combines a Pentus-style tabularisation of proof nets with an automata-theoretic treatment of bracketing.

Morrill and Valentin (2015) introduce a further extension with so-called exponential modality, suitable for the modeling of medial and parasitic extraction. Their extension is based on a non-standard contraction rule for the exponential, which interacts with the bracket structure in an intricate way. The standard contraction rule for exponentials is not admissible in this calculus. In joint work with Max Kanovich and Stepan Kuznetsov we show that provability in this calculus is undecidable and we investigate restricted decidable fragments considered by Morrill and Valentin. We show that these fragments belong to NP.

University of Pennsylvania, Philadelphia (USA);
National Research University Higher School of Economics, Moscow
E-mail: scedrov@math.upenn.edu

II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Алгоритм шифрования автоматом с плавающим окном

А. А. Асютиков, В. П. Добрица, Д. М. Зарубин

Клеточные автоматы впервые были введены как инструмент математического моделирования в конце 40-х годов Дж. фон Нейманом и К. Цусе [**1**]. Благодаря своей гибкости и универсальности клеточные автоматы нашли признание в теории искусственного интеллекта, в самовоспроизводящихся моделях микро- и макробиологии, вычислениях в среде с возможностью сбоев, в системах распознавания языка и изображений [**2**].

В 1983 году математик С. Вольфрам издал свою первую работу по статистическим параметрам клеточных автоматов. В дальнейшем Вольфрам развивал эту теорию, что позволило ему и другим исследователям подробно классифицировать и изучить практически все множество клеточных автоматов.

Для повышения стойкости клеточного шифрования предлагается новая модель клеточных автоматов — клеточный автомат с плавающим окном. Отличие данного автомата от выше описанного клеточного автомата на разбиении в том, что отсутствует разделение на блоки шифрования четной и нечетной решетками, причем в этом случае нельзя применить параллельное программирование. Этот подход занимает некоторое среднее положение между поточным и блочным шифрованием [**3**]. В клеточном автомате с плавающим окном блок шифрования передвигается последовательно по тексту, перемещаясь на один столбец вперед, тем самым каждый элемент текста шифруется определенное количество раз (в зависимости от размера блока шифрования), что увеличивает стойкость клеточного шифрования.

Определение. Клеточным автоматом с плавающим окном назовем 6-ку

$$CA_o = \langle Z^n, (N_1, \dots, N_n), A, (m_1, \dots, m_n), \Psi, L \rangle,$$

где: Z^n — размерность клеточного автомата ($n = 1, 2, 3$); $(N_1, \dots, N_n)$ — размер таблицы; A — алфавит внутренних состояний (часто $\{0, 1\}$); $(m_1, \dots, m_n)$ — размер блока шифрования; Ψ — таблица функций переходов; L — маршрут обхода блока шифрования клеточного автомата с плавающим окном.

Причем, выполняются равенства $N_1 = m_1, \dots, N_{n-1} = m_(n-1)$, а $N_n = qm_n + 1$, где q — неполное частное в равенстве $T = kq + r$, $0 \le r < k$, $k = m_1 \dots m_n$ — число клеток в блоке шифрования, T — длина исходного текста, а r — остаток от деления. Исходный текст записывается последовательно по слоям в таблицу исходного текста. В последнем слое будет заполнено только r клеток. Оставшиеся клетки заполняются либо нулями, либо единицами.

Процесс шифрования состоит в следующем. Блок шифрования находится в начале таблицы с исходным текстом. Содержание этого блока выписывается в строку в соответствии с маршрутом обхода L. Эта последовательность заменяется в соответствии с функцией переходов Ψ. Полученная шифр — последовательность сворачивается в блок в соответствии с маршрутом L. Исходный блок заменяется на полученный. Блок шифрования сдвигается на одну позицию по таблице данных и процесс повторяется. Процесс шифрования завершается, когда блок шифрования не имеет возможности сдвинуться в новое положение.

При шифровании клеточным автоматом с плавающим окном шифрование каждого блока зависит от результатов шифрования на предыдущих шагах.

При расшифровании плавающее окно передвигается в противоположную сторону, начиная с последнего столбца. Столбцы в функции переходов меняются местами.

Список литературы

[1] Тоффоли Т., Марголус Н. ”Машины клеточных автоматов” М.: Мир, 1991.

[2] Евсютин О.О., Шелупанов А.А. "Основные подходы к использованию математического аппарата теории клеточных автоматов для решения задач кодирования информации" - Доклады ТУСУРа, 2014.
[3] Добрица В.П., Зарубин Д.М., Зарубина Н.К., Ноздрина А.А. "Последовательные автоматные шифраторы" - Известия ЮЗГУ, 2016.

Юго-Западный государственный университет, Курск
E-mail: alexandr.asyutikov1306@gmail.com

Кластерные ансамбли в задачах машинного обучения

В. Б. Бериков

В кластерном анализе данных активно развивается подход, основанный на коллективном принятии решений [**1**]. Интерес к этому направлению особенно возрос в свете достижений в области коллективных методов распознавания и прогнозирования [**2, 3, 4**]. Для исследования свойств кластерного ансамбля в работах [**5, 6**] применяется методика, позволяющая свести задачу ансамблевой кластеризации к задаче классификации с латентными классами. При этом развивается подход, основанный на нахождении характеристик маржинальной функции (отступа, margin), предложенный Л. Брейманом для случайного леса решений [**4**]. В предлагаемом докладе будет сделан краткий обзор полученных в этом направлении результатов, рассказано о применении разработанных алгоритмов в задачах анализа изображений, а также о новом направлении, связанном с использованием комбинации кластерных ансамблей и логических решающих правил в машинном обучении.

Список литературы

[1] Ghosh J., Acharya A. Cluster ensembles // Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery. 2011. Vol. 1(4). P. 305–315.

[2] Zhuravlev Yu.I., Nikiforov V.V. Algorithms for recognition based on calculation of evaluations // Kibernetika. 1971. Vol. 3. P. 1–11.

[3] Ryazanov V.V. On the synthesis of classifying algorithms in finite sets of classification algorithms (taxonomy) // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1982. Vol 22, Iss. 2. P. 186–198.

[4] Breiman L. Random Forests // Machine Learning. 2001. Vol. 45(1). P. 5–32.

[5] Berikov V. Weighted ensemble of algorithms for complex data clustering // Pattern Recognition Letters. 2014. Vol. 38. P. 99–106.

[6] Berikov V., Pestunov I. Ensemble clustering based on weighted co-association matrices: Error bound and convergence properties // Pattern Recognition. 2017. Vol. 63. P. 427–436.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: berikov@math.nsc.ru

Разработка методов генерации онтологических знаний, основанных на предпочтениях пользователей мобильной связи

А. И. Капустина

В настоящее время пользователи мобильной связи очень много времени уделяют выбору тарифа. Каждый оператор сотовой связи представляет большое количество тарифов. Все они различаются по многим параметрам. Чтобы оценить все эти параметры и подобрать нужный тариф, пользователю нужно затратить большое количество времени.

Для того, чтобы пользователя удовлетворял его тариф, нужно чтобы он соответствовал его требованиям. К требованиям, в первую очередь, относится цена за предоставленные услуги, количество этих услуг, а также возможность добавлять и отключать услуги, там самым расширяя возможности использования своего тарифа.

Для формализации предметной области оператора сотовой связи была создана онтологическая модель тарифов и услуг, предоставляемых оператором. Онтологическая модель была построена по принципу четырехуровневой модели представления знаний.

Информация, полученная от пользователей посредством формы взаимодействия, относится к третьему уровню модели представления знаний - уровню прецедентов.

Для определения желаний пользователей по отношению к мобильной связи были определены некоторые возможные типы предпочтений такие как: точные, неточные и комбинированные. По выделенным типам предпочтениям пользователей были разработаны шаблоны для генерации новых знаний с помощью правил вывода, машины логического вывода и языка запросов SQWRL.

Правила вывода используются для получения новых знаний о предметной области, а также о предпочтениях пользователя. Они позволяют получать те знания, которые не были явно указаны у оператора сотовой связи и в предпочтенях абонента.

Машина логического вывода позволяет проверять введеные пользователем данные о своих предпочтениях, а также проверять все полученную модель на непротиворечивость.

С помощью языка запросов SQWRL мы получаем возможность извлекать информацию из онтологической модели, чтобы давать ответы на запросы пользователей.

По полученным новым знаниям, пользователю делается предложение о подходящих ему тарифах и услугах. Список подходящих тарифов вместе с набором дополнительно подключаемых услуг. Пользователь может сам оценить полученный результат и сделать правильный выбор.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.kapustina@g.nsu.ru

Методы извлечения и формального представления онтологических знаний из текстов естественного языка

И. А. Корсун, Д. Е. Пальчунов

Быстрый рост сети Интернет и увеличение объемов электронного документооборота делают технологии автоматической обработки текстов все более востребованными. Среди них значительный интерес представляют методы извлечения информации, в частности извлечения знаний о смысле понятий. Особенный интерес в связи с развитием семантического веба представляет решение этого вопроса в контексте OWL-онтологий.

В настоящее время существует большое количество систем автоматического извлечения ключевых фраз, определений из текста на естественном языке, основанных на применении генетических алгоритмов, методов машинного обучения и использовании семантических сетей. В качестве альтернативного подхода к решению этой задачи мы рассматриваем использование онтологических моделей, рассматривая проблему пополнения онтологии с точки зрения теоретико-модельного подхода к формализации естественного языка. При этом мы объединяем синтаксический и семантический подходы [**1**], рассматривая как модели и классы моделей, так и множества формул, в частности, множества атомарных предложений, являющиеся фрагментами атомарных диаграмм моделей.

Проблемы, связанные с поиском, извлечением и представлением знаний, представленных в текстах естественного языка, были подробно рассмотрены в предыдущих исследованиях [**2**]. Отметим, что из наиболее существенных проблем является представление знаний о времени и об изменениях знаний с его течением. Действительно, большинство применяемых на практике языков описания знаний основываются на логике предикатов первого порядка и используют унарные или бинарные отношения (к таким языкам относится OWL). В этом случае описание бинарных отношений с учётом вре-мени требует ввода в отношения дополнительного параметра, соответствующего вре-мени, превращая их из бинарных в тернарные и выводя их за рамки описательных воз-можностей языка.

В рамках прошлых исследований был разработан и программно реализован теоретико-модельный подход к извлечению знаний из текстов естественного языка. Этот подход основан на представлении знаний, извлекаемых из текстов, в виде конечных фрагментов атомарных диаграмм алгебраических систем (моделей). В настоящей работе предложены алгоритмы отображения конечных фрагментов атомарных диаграмм в логику описаний (Description Logic, DL) и дальнейшее отображение множеств таких предложений в язык представления онтологий OWL. Также проводятся исследования по расширению алгоритма при помощи одного из возможных подходов к решению задачи представления знаний о времени в рамках OWL-онтологий [**3**].

Список литературы

[1] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. Т. 12, вып. 2. С. 64–73, 2014.

[2] Корсун И. А., Пальчунов Д. Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, N 3. С. 34–48. ISSN 1818-7900.

[3] Welty C. A. Reusable Ontology for Fluents in OWL / C. Welty, R. Fikes // Conference on Formal Ontology in Information Systems: Proceedings of the Fourth International Conference. IOS Press Amsterdam, 2006. P. 226–23

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: irina.korsun.nsu@gmail.com
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Автоматизированное распознавание речевых действий в текстах естественного языка

Е. Д. Махина

В данный момент разработка онтологических моделей, а также их пополнение являются актуальными задачами. Реализация данных задач применяется в различных предметных областях. Предметная область, описывающая обеспечение коммуникации между человеком и компьютером, может быть представлена посредством построения онтологической модели с использованием речевых действий. Целью настоящей работы является осуществление диалога с компьютером при помощи запросов на естественном языке. Для достижения данной цели необходимо разработать и реализовать алгоритм распознавания и последующего извлечения речевых действий из текстов естественного языка. Согласно классической теории речевых действий, текст рассматривается как совокупность речевых действий. В свою очередь, речевое действие представляет из себя пропозициональную составляющую и иллокутивную силу [**1**]. Существует несколько классификаций речевых действий, одна из которых выделяет следующие классы: декларативы, репрезентативы, директивы, комиссивы, экспрессивы. Алгоритм автоматизированного распознавания речевых действий в текстах естественного языка состоит из следующих шагов:

- Распознавание речевого действия в предложении.
- Извлечение его пропозициональной части с помощью программы LogicText [**2**].
- Составление атомарной диаграммы с найденным речевым действием.
- Извлечение иллокутивной силы речевого действия.

Список литературы

[1] Pal'chunov D. E. Algebraische Beschreibung der Bedeutung von Aeusserungen der natuerlichen Sprache. In: Zelger, Josef/Maier, Martin (1999, Hrsg.): GABEK. Verarbeitung und Darstellung von Wissen. Innsbruck-Wien: STUDIENVerlag, 310–326.

[2] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, вып. 2. С. 64–73.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: ekatermakhina96@gmail.com

Разработка методов автоматизированной проверки внутренней и внешней непротиворечивости основной образовательной программы бакалавриата

Н. С. Мамеев

На сегодняшний день в ВУЗах существует проблема с соотнесением изучаемых дисциплин со специальностью, получаемой студентом после окончания ВУЗа. Причиной тому может быть отсутствие обязательных норм, контролирующих списки дисциплин и позволяющих разделять выпускников на конкретные категории, исходя из полученных знаний. Это неудобно, как с точки зрения студента, который пытается выбирать дисциплины так, чтобы в итоге обладать навыками и умениями, которые позволят ему работать в определённой области. Так и с точки зрения работодателя, которому необходимо дополнительно проверять знания человека, которого он принимает на должность.

Эту проблему можно решить с помощью построения учебного плана с ориентацией на профессиональные стандарты, т.е. учитывать при построении учебного плана тот факт, что студент, посетив некоторый набор дисциплин, суммарно должен будет развивать профессиональные навыки, которые соответствуют конкретной специальности [**1**]. Но, ввиду большого числа учебных дисциплин, зависимостей в порядке их изучения, а также направленности дисциплин на развитие различных профессиональных навыков появляется потребность контролировать корректность составленной образовательной программы.

Целью данной работы является разработка программной системы, помогающей формировать образовательную программу [**2**]. В процессе формирования образовательной программы система отслеживает необходимость изменения списка дисциплин или порядка их следования и достижимость всех заданных профессиональных стандартов, тем самым проверяет внутреннюю непротиворечивость образовательной программы. Кроме того, система проверяет образовательную программу на предмет соответствия актуальному ФГОСу, т.е. внешнюю непротиворечивостьпрограммы. Таким образом, можно будет в автоматическом режиме выявлять ошибки и неточности в структуре образовательной программы ещё на этапе её составления.

Список литературы

[1] Бахвалов С. В., Берестнева О. Г., Марухина О. В. Применение онтологического моделирования в задачах организации учебного процессса вуза. Онтология проектирования. 2015. Т. 5, N 4(18), 387–398.

[2] Мамееев Н. С. Онтологическая модель основной образовательной программы бакалавриата. Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2017), 2-6 октября 2017 г., Новосибирск, с. 175.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: asm_edf@mail.ru

Построение меры сходства между новостными текстами в рассуждениях на основе прецедентов

П. В. Мызников

В [**1**] описывается постановка задачи моделирования рассуждений о новостной информации в Интернете на основе прецедентов. Одним из важнейших пунктов решения этой задачи является построение меры сходства между прецедентами.

Рассматриваются несколько вариантов построения такой меры.

К распространённым методам вычисления количественных показателей текстовых источников относят TF-IDF, word2vec, Bag of words.

Кроме того, рассматривается возможность представить текст в виде последовательности заранее заданных элементов, а затем определять близость между такими последовательностями с помощью известных алгоритмов, например вычисление длины наибольшей общей подпоследовательности или расстояния Левенштейна.

Наконец, анализируется применимость технологий чащ разбора и узорных структур для определения близости текстов. Исследования, посвящённые данным методам, описываются в [**2**].

На основе анализа этих подходов предлагается построить меру близости прецедентов, описывающих новостные тексты, где главным результатом является непротиворечивое моделирование рассуждения о тексте. Схемы построения таких рассуждений строятся на основе описанных в [**3**] моделей аргументации.

Таким образом, построение меры сходства между текстами новостей позволит разрешить ряд важных вопросов в контексте глобальной задачи моделирования рассуждений о новостной информации на основе прецедентов.

Список литературы

[1] Мызников П.В. Моделирование рассуждений о новостной информации в Интернете на основе прецедентов. Материалы Всероссийской конференции с международным участием "Знания - Онтологии - Теории" (ЗОНТ-2017) - Новосибирск, 2017. Т. 2. с. 100-104

[2] Boris A Galitsky, Dmitry Ilvovsky, Sergei O Kuznetsov, and Fedor Strok. Finding maximal common sub-parse thickets for multi-sentence search. In Graph Structures for Knowledge Representation and Reasoning, pages 39 57. Springer, 2014.

[3] Besnard P., Hunter A. Elements of Argumentation. Cambridge, MA, MIT Press, 2008, 298 p.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: miznikov72@gmail.com

Разработка автоматизированных методов интеграции знаний, извлеченных из текстов естественного языка

Е. О. Ненашева

Каждый день объемы оцифрованной информации, которую необходимо обрабатывать, растут. Сейчас человек не в состоянии справиться с данной задачей вручную. Вследствие этого появляется потребность в программном обеспечении, способном анализировать тексты естественного языка, извлекать из них необходимую информацию и интегрировать выявленные знания. Для корректной работы такой программной системы крайне важно учитывать семантику обрабатываемого текста.

В своей работе я продолжаю исследования Пальчунова Д. Е. и Махасоевой О. Г. по проблеме извлечения и формального представления знаний, заключенных в текстах естественного языка [**1**].

Для правильного понимания контекста необходимо рассматривать несколько предложений естественного языка одновременно. Поэтому доклад посвящен разработке автоматизированных методов интеграции знаний, содержащихся в разных предложениях текста. В качестве базовой конструкции построения модели знаний, извлеченных из текстов, используются атомарные предложения.

Данная задача включает в себя возможность объединения нескольких предложений текста естественного языка и построения для них общего фрагмента атомарной диаграммы. В процессе работы был предложен подход к формализации знаний, позволяющий представлять извлеченные знания в виде бескванторных формул с сигнатурой, содержащей только двухместные предикаты и константы [**2**]. В будущем это позволит использовать технологии Semantic Web и применять автоматические средства логического вывода для выявления противоречий, обработки знаний и порождения новых знаний. Разработан метод выявления и пополнения недостающих знаний путем заполнения "пустых" мест предикатов, а также методы интеграции знаний, содержащихся в нескольких предложениях текста естественного языка.

Разработанные методы позволяют извлекать и объединять знания сразу из нескольких предложений, не нарушая семантики исходного текста.

Список литературы

[1] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка. Вестник НГУ Серия: Информационные технологии. 2014. Том 12, Выпуск 2. С. 64–73.

[2] Ненашева Е.О., Пальчунов Д.Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов. Вестник НГУ Серия: Информационные технологии. 2017. Том 15, Выпуск 3. С. 49–63.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: nenasheva.zhenya@gmail.com

О дедуктивном синтезе итерационных программ

А. Б. Николенко

В работе развивается подход к дедуктивному синтезу программ с циклами, предложенный в [**1**]. В основе используемого формализма лежит система $\boldsymbol{GN_1}$, два правила вывода которой являются обобщениями правил традиционной системы натурального вывода. Объекты рассматриваемой предметной области — целые числа и массивы целых чисел. Все результаты с некоторыми модификациями переносятся на другие структуры данных.

Под выражением ««задача решена»» понимается, что по описанию задачи в виде формулы логики предикатов построен ее логический вывод, из которого извлечена программа с циклами, решающая исходную задачу. Задачи обработки массивов делятся на два класса.

1. Задача *поиска в массиве элементов с заданным свойством* решена для свойства, имеющего вид дизъюнкции конъюнкций атомных или их отрицаний.

2. Задачи *изменения состояния массива*. Здесь решены следующие задачи:

1) Пусть $k \geq 1$, а $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — одноместные предикаты такие, что:

(1) $p_i \leftrightarrow \neg p_1 \& \ldots \& \neg p_{i-1} \& \neg p_{i+1} \& \ldots \& \neg p_k$ для каждого i от 1 до k;

(2) формула $\forall a(\text{цел}(a) \rightarrow p_1(a) \vee \ldots \vee p_n(a))$ истинна; $t_1, t_2 \ldots t_k$ — термы.

В массиве целых чисел заменить все элементы, удовлетворяющие свойству p_1 — на терм t_1, удовлетворяющие свойству p_2 — на терм t_2, ... , удовлетворяющие свойству p_k — на терм t_k.

2) *Перестановка элементов и некоторые виды сортировки.*

Для решенных типов задач сформулированы и доказаны теоремы о границах параметра цикла, конструктивной истинности доказываемой формулы, полной корректности синтезируемой программы.

Список литературы

[1] Николенко А. Б. Моделирование итерационных вычислений в системе обобщенного естественного вывода // Вестник Карагандинского государственного университета. Серия Математика. Караганда, Изд-во Карагандинского государственного университета. 2013. N 1. С. 65–73.

Алматинский филиал Санкт-Петербургского гуманитарного университета профсоюзов, Алматы (Казахстан)
E-mail: abnikolenko@gmail.com

Разработка автоматизированных методов порождения шаблонов служебных документов

А. А. Финк

Каждый из нас хоть раз в жизни сталкивался с заполнением (составлением) каких-либо служебных документов. С каждым днем количество таких документов растет, а время, которое человек должен тратить на изучение правил заполнения (составление) слишком велико.

В наше время такие проблемы частично решаются разнообразными бланками и формами, на заполнение которых уходит значительно меньше времени, чем составление документов с нуля. Однако, такие формы не решают проблемы полностью, ведь их тоже приходится переделывать. Особенно остро эта проблема ощущается в государственных учреждениях, где нормативные документы часто меняются.

Для решения этой проблемы предлагается рассматривать документы как параметрические шаблоны, где в качестве параметров выступают данные, извлекаемые из нормативных документов. Подставляя извлечённые данные в параметрические шаблоны, мы получаем всем знакомые формы (бланки).

Для извлечения данных из нормативных документов мы можем использовать шаблоны. Конечно шаблоны не решают проблему автоматизированного извлечения знаний из нормативных документов. Однако можно заметить, что разные версии одного документа зачастую отличаются содержанием, но редко отличаются своей структурой. Таким образом, полагаясь на неизменяемость структуры нормативных документов, мы можем определить ряд шаблонов, по которым автоматически будет извлекаться нужная нам информация и подставляться в параметрический шаблон.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.fink@g.nsu.ru

Разработка методов определения сочетаемости слов английского языка на основе анализа контекстов их употребления

В. В. Шамова

Английский язык является одним из самых популярных и распространённых языков мира, де-факто имея статус интернационального. Он используется как в технической документации, так и в научной сфере. Многим людям требуется переводить свои работы на английский язык, не владея им на достаточном уровне, из-за чего в полученном тексте появляется большое количество смысловых, орфографических, стилистических и грамматических ошибок. Для решения вышеперечисленных проблем разрабатывается программный продукт, который поможет пользователю при переводе с русского на английский, а также проведет контекстный анализ, чтобы учесть полисемию слов. Таким образом, целью данной работы является создание полуавтоматической системы для перевода текстов с русского языка на английский, которая будет учитывать контекст введенного текста и будет предоставлять два режима использования: пользовательский и редакторский. В пользовательском режиме интерфейс предлагает все найденные переводы для входного словосочетания или предложения, учитывая общее число результатов по данному запросу в поисковой системе и контекст употребления. На основе полученного результата пользователь может либо выбрать подходящий перевод из предложенных вариантов, либо добавить новый перевод в словарь, переключившись в редакторский режим. Соответственно, в редакторском режиме есть возможность интерактивного пополнения словаря, а именно добавление новых вариантов перевода и примеров использования словосочетания. Формализация и классификация представления ситуаций осуществляется посредством теории «Смысл - текст» и автоматизированных методов построения диаграмм [**1**].

Список литературы

[1] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка. Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, вып. 2. С. 64–73.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: nikashamova@gmail.com

Development of an information training system as methodological support for the for the discipline of Discrete mathematics

R. K. Serikkazhiyeva, V. O. Maslova, M. T. Abdrazakova, V. K. Kozlov

After successful admission to the University, the program at the university provides at first the basic knowledge that is based on the selected profession, in this case, Discrete Mathematics. The basis of each profession has a great role for the formation of specialist. In the special related computer science it is relevant such important course as the discipline of Discrete Mathematics. The project is intended to create an information training portal for the discipline.

Thus, the aim of this work is to create an Internet portal for discipline, «Discrete mathematics», which is designed for the effective use of students and teachers by enabling the organization of learning process.

Actuality of work:

- with the help of the system the students can obtain educational materials for the discipline of Discrete mathematics
- has the access to all theoretical material
- can pass the tests, practical assignments on the website
- It does not require submission of the home works on paper
- convenient preparation for website
- staged mastering of the subject
- distance learning.

The system is implemented as a website. The site is planned to be simple and understandable for both students and teachers. The system has 2 entry systems, for the teachers and students, accordingly. The site is intended only for the discipline of Discrete Mathematics. For illustrating their actions there has use case diagram been drafted. Moreover, there has diagrams such as ER and UML been exemplified describing the database design and the design of the system.

ITMO University, Saint-Petersburg
E-mail: rau7-3-5@mail.ru

Polynomial completeness of quasigroups specified by proper families of Boolean functions

A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, N. A. Piven'

Given a finite set A we denote by $\mathcal{O}_n(A)$ the ensemble of all n-ary operations on A ($n \geqslant 0$) and let $\mathcal{O}(A) = \bigcup\limits_n \mathcal{O}_n(A)$. For an arbitrary subset $F \subseteq \mathcal{O}(A)$ we denote by $[F]$ the closure of F under superposition.

Definition. A quasigroup Q is said to be *polynomially (functionally) complete* if $[\{f_Q\} \cup \mathcal{O}_0(Q)] = \mathcal{O}(Q)$.

In this work we are interested in polynomially complete quasigroups constructed with the use of proper families of functions. Recall that a family $F = \{f_1, f_2 \ldots, f_n\}$ of n Boolean functions in n variables is said to be proper [**1**] if for any distinct n-tuples $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ and $x'' = (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ one can find an index α such that $x'_\alpha \neq x''_\alpha$ and $f_\alpha(x') = f_\alpha(x''))$.

An immediate example of a proper family is a triangular family $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ in which every function essentially depends only on the variables with smaller indices.

Define a matrix of size $2^n \times 2^n$ by the rule $z_i = x_i + y_i + f_i(p_1(x_1, y_1), \ldots, p_n(x_n, y_n))$, where x, y, and z denote the binary representations of the row number, the column number, and the entry, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are some binary Boolean functions. It is known that the matrix defined by these formulas is a Latin square (multiplication table of a quasigroup) for any choice of $p_1, p_2, \ldots, p_n$ if and only if the family F is proper.

Theorem 1. *No quasigroup specified by a triangular family of Boolean functions is polynomially complete.*

In the case $n = 2$ a family of Boolean functions is proper if and only if one of the functions is constant and the other one does not depend on the same-name variable [**2**].

Corollary 1. *No quasigroup of order four specified by a proper family of Boolean functions is polynomially complete.*

We suggest generalizing the above construction of quasigroups by applying arbitrary permutations to x, y, and z. It can be shown that this modification gives a Latin square isotopic to the original one. At the same time such generalization allows us to obtain a wider class of Latin squares.

Theorem 2. *For $n = 2$ proper families generate 60 distinct Latin squares, which all correspond to polynomially incomplete quasigroups; Applying further permutations produces 240 squares of which 112 correspond to polynomially complete quasigroups.*

References

[1] Nosov V. A., Pankratiev A. E., Latin squares over Abelian groups, J. Math. Sci., 2008, 149 (3), 1230–1234.

[2] Nosov V. A., Pankratiev A. E., A generalization of the Feistel cipher, in: International Conference MalTtsev meeting dedicated to 75th anniversary of Yuri L. Ershov, May 3–7, 2015, Collection of Abstracts, p. 59.

Lomonosov Moscow State University, Moscow
E-mail: apankrat@intsys.msu.ru

III. Секция «Теория вычислимости»

Примитивно рекурсивно категоричные линейные порядки

К. В. Блинов

Пусть M — примитивно рекурсивная структура, и $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — бескванторная формула. Говорим, что формула $\exists \bar{y}\ \Phi(\bar{x}, \bar{y})$ разрешима в M с примитивно рекурсивными свидетелями, если существует примитивно рекурсивная функция $g(n)$, которая по номеру набора $\bar{x}$ из M, для которого эта формула истинна, находит номер набора $\bar{z}$ такого, что истинна $\Phi(\bar{x}, \bar{z})$.

Скажем, что $\exists$-диаграмма M разрешима с примитивно рекурсивными свидетелями, если все $\exists$-формулы разрешимы в M с примитивно рекурсивными свидетелями равномерно по номеру формулы. Определим класс алгебраических структур K_Σ как класс примитивно рекурсивных структур, $\exists$-диаграмма которых разрешима с примитивно рекурсивными свидетелями.

Скажем, что две структуры примитивно рекурсивно изоморфны, если между ними существует изоморфизм f, такой что и он, и f^{-1} являются примитивно рекурсивными функциями.

Будем говорить, что алгебраическая структура M примитивно рекурсивно категорична относительно класса K, если существует изоморфная M структура M_1 из класса K, и любая другая структура M_2 из класса K, изоморфная M, примитивно рекурсивно изоморфна M_1.

В линейном порядке два элемента называются соседней парой, если они не равны друг другу, и между ними нет других элементов.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{L}$ — примитивно рекурсивный линейный порядок. Тогда он лежит в классе K_Σ тогда и только тогда, когда в нем разрешимы с примитивно рекурсивными свидетелями следующие формулы:*

$$\Psi(x, y) = \exists z\ \ (x < z < y)$$
$$\Psi_R(x) = \exists z\ \ (x < z)$$
$$\Psi_L(x) = \exists z\ \ (x > z)$$

Теорема. *Пусть $\mathfrak{L}$ — примитивно рекурсивный линейный порядок. Тогда он примитивно рекурсивно категоричен над K_Σ тогда и только тогда, когда в нем имеется лишь конечное число соседних пар.*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: kvblinov@gmail.com

Отношения эквивалентности и иерархия Ершова

Б. С. Калмурзаев, Н. А. Баженов

Множество $R \subseteq \mathbb{N}^2$ называется Σ_n^{-1}-*отношением эквивалентности* (Π_n^{-1}-*отношением эквивалентности*), если R — это отношение эквивалентности и $R \in \Sigma_n^{-1}$ ($R \in \Pi_n^{-1}$). Говорят, что отношение эквивалентности R *вычислимо сводится* к отношению эквивалентности S (обозначается через $R \leq_c S$), если существует вычислимая функция f, такая что $x\ R\ y \ \Leftrightarrow\ f(x)\ S\ f(y)$. Будем рассматривать структуру отношений эквивалентности в иерархии Ершова относительно вычислимой сводимости. Отметим, что Σ_1^{-1}-отношение эквивалентности принято называть *позитивной эквивалентностью*.

В [**1**] показано, что интервал в.п. 1-степеней $([\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_1']; \leq_1)$ изоморфно вложим в частичный порядок (относительно $\leq_c$) позитивных эквивалентностей. Отсюда вытекает, что позитивные эквивалентности не образуют полурешётку.

В данной работе строятся изоморфные вложения полурешёток m-степеней в частичные порядки отношений эквивалентности в иерархии Ершова относительно вычислимой сводимости.

Теорема. *Для любого* $n > 0$ *полурешётка* $(\Sigma_n^{-1}; \leq_m)$ *изоморфно вложима в структуру* (Π_{2n}^{-1}-отношения эквивалентности; $\leq_c$).

Следствие. *Полурешётка в.п.* m*-степеней изоморфно вложима в структуру* (Π_2^{-1}-отношения эквивалентности; $\leq_c$).

Список литературы

[1] Andrews U., Lempp S., Miller J.S., Ng K.M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, J. Symb. Log., 79, No. 1 (2014), 60–88.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (Казахстан)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Достаточные условия для подпрямой разложимости нумераций

И. В. Латкин

При изучении сложности устройства членов нижнего и верхнего центральных рядов в вычислимых группах неоднократно использовалось следующее наблюдение [1,2,3], которое излагается здесь сразу в обобщённом виде. Пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ — счётная алгебра (алгебраическая система с функциональной сигнатурой σ), H — её подпрямо разложимая подалгебра относительно этого разложения, т.е. в каждом прямом сомножителе G_i имеется такая подалгебра H_i, что $H = H_1 \times \ldots \times H_n$; и вычислимая нумерация μ алгебры G — тоже *подпрямо разложимая* относительно этого разложения, т.е. все номерные множества $\mu^{-1}G_i$ суть вычислимые. Тогда $T(G, H, \mu)$ — тьюрингова степень множества $\mu^{-1}H$ (сложность проблемы вхождения в подалгебру H) равна $\sup(T(G_i, H_i, \mu_i))$, где $\mu_i = \mu \restriction (\mu^{-1}G_i)$.

Поскольку рассматривается случай конечного разложения, то для подпрямой разложимости вычислимой нумерации ν, достаточно добиться вычислимой перечислимости каждого множества $\nu^{-1}G_i$. Последнее становится верным, если мы сможем перечислять в каждом прямом сомножителе G_i его *псевдо-базис*, т.е. такое множество его элементов, которое содержит все порождающие для G_i.

Теорема. *Предположим что имеется такое вычислимо перечислимое множество атомарных формул $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ сигнатуры σ от переменных $x_0, \ldots, x_k, y$, и в каждом прямом сомножителе G_i существуют такие элементы $a_{i,0}, \ldots, a_{i,k}$, что всякий элемент g алгебры G принадлежит псевдо-базису сомножителя G_i тогда и только тогда, когда для некоторой формулы φ_t верно, что $G \models \varphi_t(a_{i,0}, \ldots, a_{i,k}, g)$, но при этом $G \models \neg\varphi_t(a_{j,0}, \ldots, a_{j,k}, g)$ для $j \neq i$. При этих условиях каждая вычислимая нумерация алгебры G становится подпрямо разложимой.*

Этот признак очевидным образом не является необходимым — достаточно рассмотреть прямое произведение двух вычислимых изоморфных алгебр с канонической нумерацией прямого произведения. В случае групп такими различающими условиями обычно служат ««иметь простой порядок из заданного вычислимо перечислимого множества»» и ««быть перестановочным с эталонными элементами»».

Список литературы

[1] Латкин И.В. Алгоритмическая сложность проблемы вхождения в коммутанты и члены нижнего центрального ряда // Сиб. Матем. Ж. 1987. Т. 28, N 5. С. 102–110.

[2] Csima B.F., Solomon R. The complexity of central series in nilpotent computable groups // Annals of Pure and Applied Logic 2011. No 162. P. 667–678.

[3] Latkin I.V. Computability of the terms and the quotient- groups in upper and lower central series of the computable groups // Математический журнал 2017. Т. 17, N 2(64). С. 150–174.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет, Усть-Каменогорск (Казахстан)
E-mail: lativan@yandex.ru

О сложности проблемы разрешимости систем уравнений над конечными частичными порядками

А. Ю. Никитин

С точки зрения алгебраической геометрии, *частично упорядоченным множеством (частичным порядком)* является алгебраическая структура $\mathcal{P} = \langle P| \leqslant^{(2)}, A\rangle$ с носителем P, предикатным символом порядка $\leqslant$ и множеством константных символов A. Уравнениями над частичным порядком $\mathcal{P}$ от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ называются атомарные формулы над $\mathcal{P}$ от переменных X. Легко видеть, что таких уравнений 7 типов.

Системой уравнений $S(X)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ от переменных X называется любое множество уравнений над $\mathcal{P}$ от переменных X. Точка $p = (p_1, \ldots, p_n) \in P^n$ называется *решением* системы уравнений S, если для любого уравнения системы S при подстановке вместо переменных соответствующих значений получается истинное над $\mathcal{P}$ выражение.

Проблема разрешимости систем уравнений над конечными частичными порядками заключается в следующем. Пусть заданы конечный частичный порядок $\mathcal{P}$ и конечная система уравнений $S(X)$ над $\mathcal{P}$. Требуется ответить на вопрос: существует ли решение $p = (p_1, \ldots, p_n)$ системы уравнений $S(X)$ над $\mathcal{P}$, у которого попарно различны $p_i, i = 1, \ldots, n$.

Основной результат работы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Проблема разрешимости систем уравнений над конечными частичными порядками NP-полна.*

Омский Государственный Технический Университет, Омск
E-mail: nikitinlexey@gmail.com

О генерической амплификации рекурсивно перечислимых множеств

А. Н. Рыбалов

Генерическая амплификация – это метод, предложенный в работе [**1**], который позволяет из алгоритмически неразрешимых или трудноразрешимых проблем получать проблемы, неразрешимые (трудноразрешимые) на любом разрешимом генерическом множестве входов, усиливая таким образом их неразрешимость (трудноразрешимость). С его помощью была доказана генерическая неразрешимость и трудноразрешимость многих классических алгоритмических проблем: проблема остановки для машин Тьюринга, неразрешимые теории первого порядка, проблема равенства слов в некоторых полугруппах, арифметика Пресбургера, десятая проблема Гильберта, проблема выполнимости булевых формул, проблема распознавания квадратичных вычетов в группах вычетов по составному модулю, проблема дискретного логарифма, проблема поиска изоморфизма графов.

Возникает естественный вопрос: любую ли генерически неразрешимую проблему можно получить из подходящей проблемы, неразрешимой в классическом смысле? В первой следующей доказывается, что любое простое пренебрежимое множество является неразрешимым для почти всех входов, но не может быть получено с помощью амплификации из какого-либо неразрешимого множества.

Теорема 1. *Пусть $W \subseteq \mathbb{N}$ – простое пренебрежимое множество. Тогда*

(1) *Множество W генерически неразрешимо.*
(2) *Не существует непренебрежимого клонирования $C : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ такого, что $W = C(S)$ для некоторого множества $S \subseteq \mathbb{N}$.*

С другой стороны, доказывается, что любое рекурсивно перечислимое множество с ненулевой асимптотической плотностью может быть получено с помощью амплификации из множества натуральных чисел.

Теорема 2. *Пусть $W \subseteq \mathbb{N}$ – любое рекурсивно перечислимое множество с ненулевой асимптотической плотностью. Тогда существует эффективное непренебрежимое клонирование $C : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ такое, что $W = C(\mathbb{N})$.*

Список литературы

[1] *Myasnikov A., Rybalov A.* Generic complexity of undecidable problems. Journal of Symbolic Logic, 73, No. 2, (2008), 656–673.

Омский государственный технический университет, Омск
E-mail: alexander.rybalov@gmail.com

О сложности вычисления решений симметрических гиперболических систем дифференциальных уравнений с частными производными

С. В. Селиванова, В. Л. Селиванов

Рассматривается задача Коши и диссипативная краевая задача для уравнений

$$A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0,$$

где $A = A^* > 0$, $B_i = B_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – рациональные $n \times n$ матрицы. В случае задачи Коши, заданы начальные условия на неизвестную вектор-функцию: $\mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$. Для простоты считаем, что φ состоит из полиномов с рациональными коэффициентами. Вычислимость (в строгом смысле вычислимого анализа) оператора решения в более общей постановке доказана в [1, 2].

В данной работе, при фиксированных натуральных m и p установлена полиномиальная (от s, n) верхняя оценка сложности нахождения решения задачи Коши с точностью $1/p$, где s — размер битовой кодировки входных данных $A, B_1, B_2, \ldots, B_m, \varphi$. Полиномиальность оценки выводится из полиномиальной вычислимости спектральной задачи для симметрической матрицы или пучка симметричных матриц (которая следует из известных оценок сложности вычислений с алгебраическими числами [3]) и из анализа алгоритма схемы Годунова [4,5].

Список литературы

[1] Selivanova S., Selivanov V. Computing Solution Operators of Boundary-value Problems for Some Linear Hyperbolic Systems of PDEs. Logical Methods in Computer Science, 2017 (в печати). arXiv:1305.2494.

[2] Селиванова С.В., Селиванов В.Л. О конструктивных числовых полях и вычислимости решений уравнений в частных производных. ДАН 2017, No 3 (477).

[3] Loos R. Computing in Algebraic Extensions. In: Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computations, Springer-Verlag, 1982.

[4] Численные методы решения многомерных задач газовой динамики. Под ред. С.К. Годунова. Москва, Наука, 1976.

[5] Годунов С.К. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1971.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: s_seliv@math.nsc.ru
Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск
E-mail: vseliv@iis.nsk.su

О категоричности разреженных линейных порядков конструктивного ранга

А. Н. Фролов, М. В. Зубков

Вычислимая алгебраическая структура называется Δ^0_α-категоричной если между любыми двумя её вычислимыми копиями существует Δ^0_α-изоморфизм и структура называется относительно Δ^0_α-категоричной если между любыми двумя её x-вычислимыми копиями существует Δ^x_α-изоморфизм (наименьший ординал α такой, что структура Δ^0_α-категоричной назовем уровнем категоричности структуры). С.С. Гончаров и В.Д. Дзгоев [**1**] получили характеризацию вычислимо категоричных линейных порядков. Они доказали, что линейный порядок вычислимо категоричен тогда и только тогда, когда он имеет конечное число соседей. Ч. МакКой [**2**] получил описание относительно Δ^0_2 категоричных линейных порядков и показал, что если линейный порядок имеет вычислимую копию с вычислимыми отношениями соседства и предельности слева и справа, то этот порядок Δ^0_2 категоричный тогда и только тогда, когда он относительно Δ^0_2 категоричный. В то же время результаты Дж. Найт (Теорема 2.1. [**3**]) из показывают, что описание относительно Δ^0_3-категоричных линейных порядков должно быть, как минимум, чрезвычайно сложным.

Ч. Эш [**4**] получил описание уровней категоричности для конструктивных ординалов, а Н. Баженов [**5**] получил описание степеней категоричности для конструктивных ординалов. А именно Ч. Эш показал, что любой ординал α такой, что $\omega^{\delta+n} \leq \alpha < \omega^{\delta+n+1}$ является $\Delta^0_{\delta+2n}$ категоричным, но не Δ^0_β категоричным ни для какого $\beta < \delta+2n$.

Мы рассматриваем разреженные линейные порядки (порядки в которые не вкладывается η) ранги которых суть конструктивные ординалы.

Теорема. *Если разреженный линейный порядок имеет ранг $\delta + n$, где δ конструктивный предельный ординал, а n — конечный ординал, то он является является относительно $\Delta^0_{\delta+2n}$ категоричным.*

Кроме того, будут приведены и нижние оценки уровней категоричности для разреженных линейных порядков конструктивного ранга.

Список литературы

[1] Гончаров С. С., Дзгоев В. Д. Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. N 1. С. 45–58.

[2] McCoy C. F. D. Δ^0_2-categoricity in Boolean algebras and linear orderings // Annals of Pure and Applied Logic. 2003. Т. 119. N 1-3. С. 85–120.

[3] Мак-Кой Ч. О Δ^0_2-категоричности для линейных порядков и булевых алгебр // Алгебра и Логика. 2002. Т. 41. N 5. С. 531–552.

[4] Ash C. J. Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees // Transactions of the American Mathematical Society. 1986. Т. 298. N 2. С. 497–514.

[5] Баженов Н. А. О степенях автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр // Алгебра и логика. 2016. Т. 55. N 2. С. 133–155.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: andrey.frolov@kpfu.ru, maxim.zubkov@kpfu.ru

Fields of algebraic numbers computable in polynomial time

P. E. Alaev, V. L. Selivanov

A structure $\mathfrak{A} = (A, \ldots)$ for a finite language is said to be *computable in polynomial time* (shortly, *p-computable*) if there is a finite alphabet Σ such that $A \subseteq \Sigma^*$, and A and all operations and predicates are computable in polynomial time.

A number $\alpha \in \mathbb{C}$ is *algebraic* if it is a root of a nonzero polynomial in $\mathbb{Z}[x]$. The degree of α, $\deg[\alpha]$, is the minimal degree of such a polynomial. Let $\mathfrak{B}$ denote the field $(B, +, \cdot)$ of all algebraic numbers, and $\mathfrak{A}$ denote the ordered field $(A, +, \cdot, \leqslant)$ of real algebraic numbers.

Theorem 1. *The fields $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are isomorphic to some p-computable fields $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{B}_1$, where the operations $-x$ and $1/x$ (for $x \neq 0$) are also p-computable.*

The structure $\mathfrak{A}_1$ is based on coding a number α by its minimal polynomial $p(x)$ and a number of its root. The structure $\mathfrak{B}_1$ is based on coding a number α by its real and imaginary parts, which are real algebraic numbers. Theorem 1 is not really new. Theorems 2 and 3 suggest new algorithms for important operations in these fields.

Theorem 2. *There exists an algorithm that, given $k \geqslant 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in B_1$, and $t(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$, finds $\beta = t(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in B_1$.*

Let $n_i = \deg[\alpha_i]$ for $i \leqslant k$, and $n = \max_{i \leqslant k}\{n_i\}$. The computing time of the algorithm can be estimated as $(n_1 n_2 \ldots n_k)^c L^d$, or $n^{ck} L^d$, where c, d are fixed constants, and L is the length of input. The algorithm is polynomial for fixed k.

Theorem 3. *There exists an algorithm that, given $k \geqslant 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in B_1$, and terms $t_0(\bar{x}), \ldots, t_e(\bar{x}) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$, finds a list $\beta_1, \ldots, \beta_h \in B_1$ of all complex roots of the equation*

$$t_e(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)x^e + t_{e-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)x^{e-1} + \ldots + t_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0.$$

Let $n_i = \deg[\alpha_i]$ for $i \leqslant k$, $n = \max_{i \leqslant k}\{n_i\}$, and L is the length of input. The computing time of the algorithm can be estimated as $(n_1 n_2 \ldots n_k)^c L^d$, or $n^{ck} L^d$, where c, d are fixed constants. The algorithm is polynomial for fixed k.

In addition, we show that all widely known presentations of algebraic numbers are p-computably isomorphic to $\mathfrak{A}_1$ or $\mathfrak{B}_1$ (in some sense). We also propose a simple description of p-computable fields that are p-computably isomorphic to $\mathfrak{A}_1$.

Institute of mathematics SB RAS
E-mail: alaev@math.nsc.ru
Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: vseliv@iis.nsk.su

Computable bi-embeddable categoricity

N. A. Bazhenov, E. B. Fokina, D. Rossegger, L. San Mauro

We say that L-structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are *bi-embeddable* (denoted by $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$) if there are isomorphic embeddings $f\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ and $g\colon \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Such a pair (f, g) is called a *bi-embedding* from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{B}$.

Let $\mathbf{d}$ be a Turing degree. A computable structure $\mathcal{A}$ is $\mathbf{d}$-*computably bi-embeddably categorical* if for any computable structure $\mathcal{B} \approx \mathcal{A}$, there is a $\mathbf{d}$-computable bi-embedding from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{B}$. If $\mathbf{a}$ is the least degree such that $\mathcal{A}$ is $\mathbf{a}$-computably bi-embeddably categorical, then $\mathbf{a}$ is called the *degree of bi-embeddable categoricity* of $\mathcal{A}$.

Theorem 1. *Any computable equivalence structure has degree of bi-embeddable categoricity* $\mathbf{d} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}''\}$.

Theorem 2. *A computable Boolean algebra $\mathcal{B}$ is computably bi-embeddably categorical if and only if $\mathcal{B}$ is finite.*

Theorem 3. *A computable linear order $\mathcal{L}$ is computably bi-embeddably categorical if and only if $\mathcal{L}$ is finite.*

An undirected graph is *strongly locally finite* if all of its components are finite.

Proposition. *There exists a computable, strongly locally finite graph which is not hyperarithmetically bi-embeddably categorical.*

Theorem 4. *The index set of $\mathbf{0}'$-computably bi-embeddably categorical, strongly locally finite graphs is Π^1_1 complete.*

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Institute of Discrete Mathematics and Geometry, Vienna University of Technology, Vienna (Austria)
E-mail: ekaterina.fokina@tuwien.ac.at, dino.rossegger@tuwien.ac.at, luca.san.mauro@tuwien.ac.at

Degrees of categoricity of rigid structures

N. A. Bazhenov, M. M. Yamaleev

The study of effective categoricity for computable structures goes back to the works of Fröhlich and Shepherdson (1956), and Mal'tsev (1961,1962). In recent years, the focus of the research in the area is on computable categoricity relative to Turing degrees.

Let $\mathbf{d}$ be a Turing degree. We say that a computable structure $\mathcal{A}$ is $\mathbf{d}$-*computably categorical* if for every computable copy $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$, there is a $\mathbf{d}$-computable isomorphism from $\mathcal{A}$ onto $\mathcal{B}$. The *categoricity spectrum* of $\mathcal{A}$ is the set $\mathrm{CatSpec}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{d} : \mathcal{A} \text{ is } \mathbf{d}\text{-computably categorical}\}$. A Turing degree $\mathbf{d}$ is the *degree of categoricity* of $\mathcal{A}$ if $\mathbf{d}$ is the least degree in the spectrum $\mathrm{CatSpec}(\mathcal{A})$.

Categoricity spectra and degrees of categoricity were introduced by Fokina, Kalimullin, and Miller [**1**]. In particular, they proved that each 2-c.e. Turing degree $\mathbf{d}$ is the degree of categoricity of a computable structure and that each c.e. degree is the degree of categoricity of a rigid computable structure.

Assume that $\mathcal{A}$ is a computable structure. A Turing degree $\mathbf{d}$ is the *strong degree of categoricity* of $\mathcal{A}$ if $\mathbf{d}$ is the degree of categoricity for $\mathcal{A}$, and there exist computable copies $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ of $\mathcal{A}$ such that for each isomorphism f from $\mathcal{B}$ onto $\mathcal{C}$, we have $\deg_T(f) \geq \mathbf{d}$.

Fokina, Frolov, and Kalimullin [**2**] proved that for each non-zero c.e. Turing degree $\mathbf{d}$, there is a $\mathbf{d}$-computably categorical rigid structure with no degree of categoricity. They also posed the following question.

Problem[**2**, Problem 3.2]. *Can a properly 2-c.e. degree be a degree of categoricity of a rigid structure?*

In our work, we make the first step towards the solution of this problem and obtain the following result.

Theorem. *There exists a properly 2-c.e. degree* $\mathbf{d}$ *which cannot be a degree of categoricity of a rigid structure.*

The second author is supported by RFBR project No. 16-31-50048, by Federal Contract No. 1.1515.2017/4.6, and by the research grant of Kazan Federal University.

References

[1] Fokina E. B., Kalimullin I., Miller R., Degrees of categoricity of computable structures. Arch. Math. Logic 49 (1), 51–67 (2010).

[2] Fokina E., Frolov A., Kalimullin I., Categoricity spectra for rigid structures. Notre Dame J. Form. Logic. 57 (1), 45–57 (2016).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan
E-mail: Mars.Yamaleev@kpfu.ru

IV. Секция «Теория групп»

Центральные расширения свободных периодических групп

С. И. Адян, В. С. Атабекян

Нами доказано, что любая счетная абелева группа D может быть вербально вложена в качестве центра в некоторую m-порожденную группу A так, что фактор группа A/D будет изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$, где $m>1$, а $n \geq 665$ – нечетное число. Доказательство основано на некоторой модификации метода, который был использован С.И.Адяном в его монографии 1975 года для положительного решения известной проблемы П.Г. Конторовича из коуровской тетради о существовании некоммутативных аналогов аддитивной группы рациональных чисел с любым конечным числом порождающих $m>1$. Точнее, им было доказано, что искомые аналоги, в которых пересечение любых двух неединичных подгрупп бесконечно, могут быть построены в виде центрального расширения свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$, где $m>1$, а $n \geq 665$ – нечетное число, используя в качестве центра бесконечную циклическую группу. Получены также другие приложения предлагаемого обобщения техники Адяна. В частности, для нечетных $n \geq 665$ описываются свободные группы многообразия определяемого тождеством $[x^n, y] = 1$ и вычисляется мултипликатор Шура группы $B(m,n)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
E-mail: sia@mi.ras.ru
Ереванский государственный университет, Ереван (Армения)
E-mail: avarujan@ysu.am

Сравнимость по модулю 2 в группах круговых единиц

Р. Ж. Алеев, О. В. Митина

Пусть $G = \langle x\rangle$ — циклическая группа порядка $8m = 2^n \geqslant 16$ (для порядков 2 и 4 тривиально, а для 8 всё известно) и $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ — нормализованная группа единиц целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ группы G. Пусть ζ — примитивный корень степени 2^n из 1; $\chi_0 = 1_G$, $\chi_1, \ldots, \chi_{2^n-1}$ — неприводимые комплексные характеры группы G, где $\chi_j(x^k) = \zeta^{jk}$ для $j, k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$; e_j — минимальный центральный идемпотент комплексной групповой алгебры $\mathbf{C}G$, соответствующий характеру χ_j. Тогда групповым гомоморфизмом является отображение $\varphi : \mathrm{V}(\mathbf{Z}G) \to \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])$, где $\varphi\Big(\sum_{k=0}^{2^n-1}\beta_k e_k\Big) = \beta_1$. Положим $\ker\varphi = V_0$, σ_k — автоморфизм кругового поля $\mathbf{Q}(\zeta)$, продолжающий отображение $\zeta \mapsto \zeta^{2k+1}$. Пусть также

$$V_1 = \Big\{1 + \sum_{k=0}^{4m-1}(\sigma_t(\lambda) - 1)e_{2k+1}\Big|\lambda \in \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])\Big\} \cap \mathrm{V}(\mathbf{Z}G).$$

Тогда $\langle x\rangle \times V_0 \times V_1$ — подгруппа конечного индекса в группе $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ ([**1**]). В работе [**2**] показано, что в силу локального соответствия Хигмана V_1 изоморфна подгруппе

$$U = \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta]) \cap (1 + 2\mathbf{Z}[\zeta]) \leqslant \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta]).$$

Теорема. *Пусть $t_j = 1 + \zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{2j} + \zeta^{-2j}$ для любого натурального j. При введённых выше обозначениях имеем*

$$U \geqslant \langle t_1^{2m}\rangle \times \prod_{l=1}^{m-1}\langle t_{2l+1}^{2m-1} t_{4m-2l-1}\rangle \times \prod_{k=1}^{n-3}\left(\prod_{l=0}^{2^{k-1}-1}\langle t_{2l+1}^{2m-2^k} t_{2^k-2l-1}^{2^k}\rangle\right).$$

Гипотеза. *Для круговых единиц* [**3**] *вместо знака $\geqslant$ в теореме должно быть равенство.*

Тем самым в этой работе строится подгруппа группы $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ значительно меньшего индекса, чем подгруппа, построенная в [**1**].

Список литературы

[1] Алеев Р. Ж., Митина О. В., Пузач В. Н. Индуктивный подход к описанию групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп // Межд. конф. ««Мальцевские чтения»» (3–7 мая 2015 г.). Тезисы докладов. Новосибирск. 2015. С. 81.
URL: `www.math.nsc.ru/conference/malmeet/15/Malmeet2015.pdf`

[2] Алеев Р. Ж., Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды, Т.3, 1, 2000, 3–37.

[3] Sinnott W., On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field // Ann. of Math., V.108, 1, 1978, 107–134.

ФГАОУ ВО Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск
E-mail: aleev@csu.ru
Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: ovm@csu.ru

Группа единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка 16

Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко

В этой работе получено полное описание группы единиц целочисленного группового кольца циклической группы $G = \langle x \rangle$ порядка 16, начатое в [**1, 2**]. Описание даётся в терминах локальных единиц, введённых согласно определению 1 из [**3**]. Более точно, пусть λ — единица кольца целых кругового поля $\mathbf{Q}_{16}$, полученного присоединением к полю рациональных чисел $\mathbf{Q}$ примитивного корня α степени 16 из 1. Обозначим, через $u_1(\lambda)$ — локальную единицу, определяемую единицей λ и характером χ_1, для которого $\chi_1(x) = \alpha$. Аналогично определяется локальная единица $u_2(\mu)$, определяемая единицей μ кольца целых кругового поля $\mathbf{Q}_8$ круговое поле, полученное присоединением к полю рациональных чисел $\mathbf{Q}$ корня α^2, и характером χ_2, для которого $\chi_2(x) = \alpha^2$. Также положим для $k \in \{0, 1, 2\}$

$$t_{2k+1} = \alpha^{2(2k+1)} + \alpha^{2k+1} + 1 + \alpha^{-(2k+1)} + \alpha^{-2(2k+1)}.$$

Теорема. *Группа единиц $U(\mathbf{Z}G)$ целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ циклической группы G порядка 16 в определённых ранее обозначениях равна:*

$$\langle -1 \rangle \times G \times \langle u_2((1+\sqrt{2})^4) \rangle \times \langle u_1(t_1^4) \rangle \times \langle u_1(t_3^3 t_5) \rangle \times \langle u_1(t_1^3 t_3) u_2(-(1+\sqrt{2})^2) \rangle.$$

Список литературы

[1] Алеев Р.Ж, Митина О.В., Христенко Е.А., Сравнение по модулю 2 круговых единиц в полях Q_{16} и Q_{32} // Челяб. физ.-мат. журн. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 8–29.

[2] Алеев Р.Ж, Митина О.В., Ханенко Т.А., Нахождение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32 // Челяб. физ.-мат. журн. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 30–55.

[3] Алеев Р.Ж., Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды. 2000. Т. 3, вып. 1. С. 3–37.

Южно-Уральский госуниверситет, Челябинский госуниверситет, Челябинск
E-mail: aleev@csu.ru, ovm@csu.ru, tanja_1110_94@mail.ru

Локальные круговые единицы целочисленных групповых колец циклических 2-групп

Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко

Обозначим через $\mathbf{Q}_{2^n}$ круговое поле, полученное присоединением примитивного корня α из 1 степени 2^n. Пусть $P = \left\langle 1-\alpha^k \mid k \in \{1,\ldots,2^n-1\} \right\rangle \leqslant \mathbf{Q}^*_{2^n}$ — подгруппа по умножению мультипликативной группы $\mathbf{Q}^*_{2^n}$ поля $\mathbf{Q}_{2^n}$. *Группой круговых единиц* поля $\mathbf{Q}_{2^n}$ назовём группу $K = P \cap U(\mathbf{Z}[\alpha])$, где $U(\mathbf{Z}[\alpha])$ — группа единиц кольца целых $\mathbf{Z}[\alpha]$ поля $\mathbf{Q}_{2^n}$. По теореме Синнота [**1**] $|U(\mathbf{Z}[\alpha]) : K| = h(n)$, где $h(n)$ — число классов поля $\mathbf{Q}^+_{2^n} = \mathbf{Q}_{2^n} \cap \mathbf{R}$. Проблема Вебера о числе классов утверждает, что для любого натурального n число классов $h(n) = 1$. На данное время известно, что $h(n) = 1$ при $n \leqslant 8$ [**2**].

Для любого целого j положим $t_j = 1+\alpha^j+\alpha^{-j}+\alpha^{2j}+\alpha^{-2j}$. Небольшая модификация результата из [**3**] даёт, что группа $K = \langle\alpha\rangle \times \prod_{l=0}^{2^{n-2}-2} \langle t_{2l+1}\rangle$.

Пусть $\mathbf{Z}\langle x\rangle$ — целочисленное групповое кольцо циклической 2-группы $\langle x\rangle$ порядка 2^n. Группы единиц колец $\mathbf{Z}\langle x\rangle$ тривиальны при $n \in \{1,2\}$, а при $n=3$ группа хорошо известна. Поэтому положим $n \geqslant 4$. Особую роль в описании единиц группового кольца $\mathbf{Z}\langle x\rangle$ играют введённые согласно определению 1 из [**4**] локальные единицы $u(\mu)$, определяемые единицами $\mu \in U(\mathbf{Z}[\alpha])$ и характером χ, для которого $\chi(x) = \alpha$. Пусть

$$L = \{\mu \in K \mid u(\mu) \in U(\mathbf{Z}\langle x\rangle)\},$$

где $U(\mathbf{Z}\langle x\rangle)$ — группа единиц кольца $\mathbf{Z}\langle x\rangle$ и для любого $k \in \{0,1,\ldots,n-4\}$

$$M_k = \prod_{l=0}^{2^{n-3-k}-1} \langle t_{2l+1}^{-2^k} t_{2^{n-2-(k-1)}-(2l+1)}^{2^k}\rangle.$$

Теорема. *При введённых обозначениях*

$$L = \langle t_1^{2^{n-2}}\rangle \times \langle t_1^{-2^{n-3}} t_3^{2^{n-3}}\rangle \times \prod_{k=0}^{n-4} M_k.$$

Список литературы

[1] Sinnott W., On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field // Ann. of Math. 1978. Vol. 108, N 1. P. 107–134.

[2] Miller J. C Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem // Acta Arithmetica. 2014. Vol. 164, N 4. P. 381–397.

[3] Алеев Р. Ж., Такшеева В. С., Порождающие группы круговых единиц // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. Изд-во ЧелГУ, Челябинск. 2008, Выпуск 10, N 6(107). С. 121–129

[4] Алеев Р. Ж., Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды. 2000. Т. 3, вып. 1. С. 3–37.

Южно-Уральский госуниверситет, Челябинский госуниверситет, Челябинск
E-mail: aleev@csu.ru, ovm@csu.ru, tanja_1110_94@mail.ru

Степенные MR-группы: точное R-пополнение

М. Г. Амаглобели

Понятие степенной R-группы (R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей) введено Р. Линдоном в [**1**]. В [**2**] А.Г. Мясников и В.Н. Ремесленников уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. Это уточнение представляет естественное обобщение понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В честь авторов этой статьи группы с этой аксиомой в статье [**3**] М.Г. Амаглобели названы MR-группами (R — кольцо).

Хорошо известна роль тензорного произведения в категории R-модулей, в частности, тензорного расширения кольца скаляров. В [**2**] определен точный аналог последней конструкции для произвольной MR-группы G — тензорное пополнение $G^{S,\mu}$, где $\mu : R \to S$ — гомоморфизм колец. В приложениях μ чаще всего вложение колец, но и в таком случае $\lambda : G \to G^{S,\mu}$ не всегда является вложением. В [2] указано одно достаточное условие, когда λ есть вложение.

В [**4**] вводится категория $\mathcal{P}_R^0$ частичных MR-групп и устанавливается ряд интересных свойств этой категории.

Теорема. *Пусть $\mathbb{Z}$ — подкольцо кольца R и группа $G \in \mathcal{P}_R^0$, причем в G и R^+ (аддитивная группа кольца) нет элементов порядка 2. Тогда группа G точна, т.е. каноническое отображение $\lambda : G \to G^R$ является вложением.*

Список литературы

[1] Lyndon R. C. Groups with parametric exponents. Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960), 518–533.

[2] Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. Степенные группы I. Основы теории и тензорные пополнения. Сиб. мат. журн. 35 (1994), N5, 1106–1118.

[3] Amaglobeli M. G., Remeslennikov V. N. Free nilpotent R-groups of class 2. (Russian); Dokl. Akad. Nauk 443 (2012), no. 4, 410–413; translation in Dokl. Math. 85 (2012), no. 2, 236–239.

[4] Амаглобели М. Г. Функтор тензорного пополнения в категориях степенных MR-групп. Алгебра и логика (принята к печати), 2017.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси (Грузия)
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

Графы Шилла с $b_2 = sc_2$

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла положим $a = a_3$ и $b = k/a$. Ранее изучались графы Шилла с $b_2 = c_2$ [**1, 2**]. В данной работе начато исследование графов Шилла с $b_2 = sc_2$, s – целое число, большее 1. Доказано, что в графе Шилла с $\theta_2 = -1$ и псевдогеометрическим графом Γ_3 имеем $b_2 = sc_2$. Найдены также новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений графов Шилла.

Теорема. Пусть Γ является графом Шилла с $\theta_2 = -1$. Тогда $b_2 = a + 1$ и $\theta_3 = -b - c_2$. Если Γ_3 является псевдогеометрическим графом, то выполняются следующие утверждения:

(1) $b_2 = sc_2$, Γ имеет массив пересечений $\{b(sc_2 - 1), sc_2(b-1), sc_2; 1, c_2, (sc_2 - 1)(b-1)\}$, кратности собственных значений равны $(bs+1)(c_2s-1)bc_2/(b+c_2-1)$, $(bc_2s - b + 1)(bs+1)b/(c_2s+b+c_2-1)$ и $(bc_2s-b+1)(c_2s-1)(b-1)bs/((c_2s+b+c_2-1)(b+c_2-1))$, в случае $b = (s-1)c_2$ имеем $s = 2c_2$ и массив пересечений $\{(2c_2-1)c_2(2c_2^2-1), 2c_2^2((2c_2-1)c_2-1), 2c_2^2; 1, c_2, (2c_2^2-1)((2c_2-1)c_2-1)\}$ является допустимым;

(2) если $c_2 = 1$, то Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $pG_s(bs, s-1)$, $s - b$ делит $(b, s)(s-1, b-1)$ и возникают следующие бесконечные серии допустимых массивов пересечений:

(i) в случае $s = b^2$ имеем массив $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$;

(ii) в случае $s = b+2$ имеем массив $\{b(b+1), (b+2)(b-1), b+2; 1, 1, b^2-1\}$;

(iii) в случае $s = 2b-1$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$ имеем массив $\{2b(b-1), (2b-1)(b-1), 2b-1; 1, 1, 2(b-1)^2\}$;

(3) если $c_2 = (b-1)s$, $b = s+1$, то граф Γ имеет допустимый массив пересечений $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$ и является Q-полиномиальным, а граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_s(s^2+s, s^3-1)$ (в случае $s = 2$ граф с массивом пересечений $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$ не существует по [**3**]).

Найдены допустимые массивы пересечений графов Шилла в случаях $b = 4$ и $b = 5$.

Список литературы

[1] Махнев А.А., Нирова М.С. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$. Матем. заметки 2017, т. 52.

[2] Белоусов И.Н., Махнев А.А. К теории графов Шилла с $b_2 = c_2$. Сибирские электрон. матем. известия 2017, т. 14.

[3] Coolsaet K. Distance-regular graph with intersection array $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$ does not exist. Europ. J. Comb. 2005, v. 26, 709–716.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

О доминионах рациональных чисел в нильпотентных группах

А. И. Будкин

В данной работе завершается исследование вопроса о 2-замкнутости аддитивной группы рациональных чисел Q в квазимногообразиях нильпотентных групп без кручения класса не выше трёх.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы G из $\mathcal{M}$ и её подгруппы H доминион $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H в G (в $\mathcal{M}$) определяется так:

$$\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in G \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : G \to M,\ \text{ если } f\mid_H = g\mid_H,\ \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : G \to M$ обозначены гомоморфизмы группы G в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Группа H называется n-замкнутой в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы $G = gr(H, a_1, \ldots, a_n)$ из $\mathcal{M}$, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, справедливо равенство: $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = H$. Исследованию n-замкнутых групп в квазимногообразиях нильпотентных групп посвящены статьи [1,2,3].

Теорема. *Пусть $\mathcal{M}$ — любое квазимногообразие групп, $G = gr(x_1, x_2, Q)$ — группа без кручения из $\mathcal{M}$ ступени нильпотентности не более трёх, порождённая по модулю Q двумя элементами. Тогда $dom_G^{\mathcal{M}}(Q) = Q$.*

Список литературы

[1] Будкин А.И. Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства. Алгебра и логика. 2008. Т. 47, N 5. С. 541–557.

[2] Будкин А.И. О доминионах разрешимых групп. Алгебра и логика. 2015. Т. 54, N 5. С. 575–588.

[3] Шахова С.А. Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения. Матем. заметки. 2015. Т. 97, N 6. С. 936–941.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

О числе силовских подгрупп в почти простых группах со знакопеременным или спорадическим цоколем

А. С. Васильев

Всюду через p обозначается некоторое простое число. Пусть G — группа. Символом $\nu_p(G)$ обозначим количество силовских p-подгрупп группы G. Будем говорить, что группа G *удовлетворяет условию* $\mathbf{DivSyl}(p)$, если для любой подгруппы H группы G $\nu_p(H)$ делит $\nu_p(G)$.

Е. П. Вдовин и В. Го в [**1**] доказали следующую теорему:

Пусть группа G обладает следующим свойством. Для любого неабелева композиционного фактора S группы G, удовлетворяющего условию $\mathbf{DivSyl}(p)$, этому же условию удовлетворяет любая подгруппа $A \leq Aut(S)$, содержащая S и такая, что A/S — p-группа. Тогда G удовлетворяет условию $\mathbf{DivSyl}(p)$

В этой же работе сформулирована гипотеза:

Гипотеза. Если S — простая группа, удовлетворяющая условию $\mathbf{DivSyl}(p)$, то любая группа A такая, что $S \leq A \leq Aut(S)$ и индекс S в A — это степень числа p, также удовлетворяет условию $\mathbf{DivSyl}(p)$.

Теорема. *Если S — простая знакопеременная или спорадическая группа, удовлетворяющая условию $\mathbf{DivSyl}(p)$, то любая группа A такая, что $S \leq A \leq Aut(S)$ и индекс S в A — это степень числа p, также удовлетворяет условию $\mathbf{DivSyl}(p)$.*

Следствие. *Если каждый неабелев композиционный фактор конечной группы изоморфен знакопеременной или спорадической группе и удовлетворяет условию $\mathbf{DivSyl}(p)$, то и сама группа удовлетворяет условию $\mathbf{DivSyl}(p)$.*

Список литературы

[1] Guo W., Vdovin E., Number of Sylow subgroups in finite groups. J. Group Theory, в печати (arXiv:1709.00148).

Новосибирский госуниверситет, Новосибирск
E-mail: a.vasilev1@g.nsu.ru

О построении арифметических графов конечных групп

А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть G — некоторая группа, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка G. В 1968 Т. Хоукс [**1**] рассмотрел ориентированный граф $\Gamma_H(G)$ группы G, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$ и (p,q) является ребром, если $q \in \pi(G/\mathrm{O}_{p',p}(G))$. Согласно [**2**] силовским графом $\Gamma_s(G)$ называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$ и (p,q) является ребром $\Gamma_s(G)$, если $q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P))$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G. Ориентированный граф $\Gamma_{Nc}(G)$ с множеством вершин $\pi(G)$ и ребер (p,q), если в G имеется (p,q)-подгруппа Шмидта, называется N-критическим графом группы G [**3**].

Мы предлагаем общую конструкцию построения таких графов.

Определение 1. Функцию f назовем секционным функтором, если f ставит в соответствие каждой группе G (возможно пустое) множество $f(G)$ секций группы G, удовлетворяющее $\alpha(f(G)) = f(\alpha(G))$ для любого изоморфизма $\alpha : G \to G^*$.

Определение 2. Пусть θ — функция, которая каждому простому числу p ставит в соответствие секционный функтор θ_p.

(1) Γ_θ назовем θ-локальной арифметической графовой функцией, если $V(\Gamma_\theta(G)) = \pi(G)$ и $(p,q) \in E(\Gamma_\theta(G))$, если $q \in \pi(\{N_G(P)/C_G(P) | P \in \theta_p(G)\})$.

(2) $\Gamma_{\overline{\theta}}$ назовем $\overline{\theta}$–локальной арифметической графовой функцией, если $V(\Gamma_{\overline{\theta}}(G)) = \pi(G)$ и $(p,q) \in E(\Gamma_{\overline{\theta}}(G))$, если $q \neq p$ и $q \in \pi(\{N_G(P)/C_G(P) | P \in \theta_p(G)\})$.

Предложение 1. *Пусть θ — функция, которая каждому простому числу p ставит в соответствие секционный функтор θ_p. Тогда:*

(1) *Если $\theta_p(G)$ — множество всех главных p-факторов G, то $\Gamma_\theta(G) = \Gamma_H(G)$.*

(2) *Если $\theta_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп G, то $\Gamma_{\overline{\theta}}(G) = \Gamma_s(G)$.*

(3) *Если $\theta_p(G)$ — множество всех p-подгрупп G, то $\Gamma_{\overline{\theta}}(G) = \Gamma_{Nc}(G)$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q | (p,q) \in E(\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))\} \cup \{p\}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *$\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимо насыщенная формация Шеметкова.*

(2) *π-группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $N_G(P)/C_G(P)$ принадлежит $\mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для любой p-подгруппы P группы G и для любого $p \in \pi$.*

Список литературы

[1] Hawkes T. On the class of the Sylow tower groups // Math. Z. 1968. N 105. P. 393–398.

[2] D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Lattice formations and Sylow normalizers: a conjecture // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell Universita di Modena e Reggio Emilia. 2007. N 55. P. 107–112.

[3] Murashka V. I., Vasil'ev A. F. Arithmetic graphs of finite groups // ArXiv.org e-Print archive, arXiv: 1510.02568v1v1, 9 Oct 2015.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: formation56@mail.ru, mvimath@yandex.ru

Об одном свойстве обобщенных проекторов конечных групп

Т. И. Васильева

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения из [**1**]. Хорошо известно, что если H — силовская подгруппа группы G или холлова подгруппа разрешимой группы G, то она обладает следующим свойством:

(1) $H \cap NM = (H \cap N)(H \cap M)$ для любых нормальных в G подгрупп N и M.

В 1969 году Хупперт доказал, что для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ свойством (1) обладает всякий $\mathfrak{F}$-проектор H разрешимой группы G.

В работе [**2**] результаты Гашюца, Шунка, Эриксона о существовании $\mathfrak{F}$-проекторов и их свойствах в конечных группах получили развитие путем введения и изучения следующего понятия. Пусть ω — некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел, $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором* в G, если HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной ω-подгруппы N группы G.

Нам потребуются некоторые сведения из [**2**]. Пусть $\mathfrak{F}$ содержится в классе групп $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Отметим, что для наследственного гомоморфа $\mathfrak{X}$ и непустой ω–насыщенной формации $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$ всякая $\mathfrak{X}$-группа, у которой $\mathfrak{F}$-корадикал есть ω-подгруппа, обладает $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором.

В настоящем сообщении установлены новые свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов, в частности, получена

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустая ω-насыщенная формация в $\mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G является ω-подгруппой, то $H \cap NM = (H \cap N)(H \cap M)$ для любого $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора H из G и любых нормальных в G подгрупп N и M.*

Если ω — множества всех простых чисел, то в случае совпадения $\mathfrak{X}$ с классом всех разрешимых групп отсюда получается отмеченный результат Хупперта, а в случае совпадения $\mathfrak{X}$ с классом всех групп получается соответствующий результат их [**3**].

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, N 6. С. 1224–1239.

[3] Васильева Т. И., Прокопенко А. И. Проекторы и решетки нормальных подгрупп конечных групп // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2004. Т. 48, N 4. С. 34–37.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины; Белорусский государственный университет транспорта, Гомель (Беларусь)
E-mail: tivasilyeva@mail.ru

О конечных 2-группах, порожденных тремя инволюциями, с гомоциклическим коммутантом

Б. М. Веретенников

Описаны конечные 2-группы G, порожденные тремя инволюциями, с гомоциклическим коммутантом G' экспоненты 2^m. Список таких групп при $m = 1$ получил А. Д. Устюжанинов [**1**] (доказательство опубликовано не было).

При произвольном m классификация указанных групп разбивается на 5 случаев: $1 \leq d(G') \leq 5$ (где $d(G')$ — минимальное число порождающих группы G'), причем при $d(G') = 5$ группа G определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Показательным является случай, когда

$$G = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,\ G' = \langle f_{12}, f_{13}, f_{23} \rangle,\ f_{ij} = [a_i, a_j],\ 1 \leq i < j \leq 3.$$

Тогда

$$f_{12}^{a_1} = f_{12}^{-1}, f_{13}^{a_1} = f_{13}^{-1}, f_{23}^{a_1} = f_{23} f_{12}^{\alpha_{12}} f_{13}^{\alpha_{13}} f_{23}^{\alpha_{23}},$$

$$f_{12}^{a_2} = f_{12}^{-1}, f_{13}^{a_2} = f_{13} f_{12}^{\beta_{12}} f_{13}^{\beta_{13}} f_{23}^{\beta_{23}}, f_{23}^{a_2} = f_{32}^{-1},$$

$$f_{12}^{a_3} = f_{12} f_{12}^{\gamma_{12}} f_{13}^{\gamma_{13}} f_{23}^{\gamma_{23}}, f_{13}^{a_3} = f_{13}^{-1}, f_{23}^{a_3} = f_{23}^{-1}.$$

Показатели $\alpha_{23}, \beta_{13}, \gamma_{12}$ независимо друг от друга могут быть равны 0, 2^{m-1}, -2, $-2+2^{m-1}$ по модулю 2^m. Изучение всех этих вариантов показывает, что существует не более $128 + 2^{m+3} + 2^{m-1}$ таких групп, с точностью до изоморфизма. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Список литературы

[1] Ustyuzhaninov A.D., Finite 2-groups generated by exactly three involutions. In: All-union algebr. symposium (1975) (in Russian), abstracts, part I, Gomel (1975), 72.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: boris@veretennikov.ru

Инъекторы π-разрешимых групп

Н. Т. Воробьев, Т. Б. Василевич

В работе рассматриваются только конечные группы. В обозначениях мы следуем [**1, 2**]. В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп, известен результат [**3**], который обобщает фундаментальные теоремы Силова и Холла: теорема Гашюца, Фишера и Хартли о существовании и сопряженности $\mathfrak{F}$-инъекторов в разрешимых группах для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Произведением двух классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G\colon\ G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение любых двух классов Фиттинга является также классом Фиттинга.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Её называют $\mathfrak{F}$-радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Подгруппа V группы G называется её $\mathfrak{F}$-инъектором, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Пусть $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — класс всех π'-групп и $Char(\mathfrak{X}) = \{p \mid p \in \mathbb{P}$ и $Z_p \in \mathfrak{X}\}$ — характеристика класса групп $\mathfrak{X}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга и $Char(\mathfrak{X}) = \pi$. Тогда любая π-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов и каждый $\mathfrak{F}$-инъектор G является произведением π'-радикала G и $\mathfrak{X}$-инъектора некоторой холловой π-подгруппы G.*

Следствие 1. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-нильпотентных инъекторов.*

Следствие 2. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-замкнутых инъекторов.*

Следствие 3. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-специальных инъекторов.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция-2020". Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант Ф17М-064).

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups, Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992.
[2] Guo W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups, Springer, 2015.
[3] Gaschütz W., Fischer B., Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z., 1967, V. 102, p. 337–339.

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск (Беларусь)
E-mail: vorobyovnt@tut.by, tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

О π-разрешимых группах с ограниченными 2-максимальными подгруппами π-холловых подгрупп

Д. В. Грицук, А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [**1**]. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Свойства нильпотентной π-длины и производной π-длины π-разрешимой группы приведены в работах [**2, 3**]. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G.

Редеи [**4**] описал неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, Хупперт [**5**] установил сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. В работах Судзуки [**6**] и Янко [**7**] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все вторые максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в работе [**8**].

Теорема. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Тогда:

(1) если подгруппа M нильпотентна, то $l_\pi^n(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)$ и $l_\pi^a(G) \leq \max_{r\in\pi} d(G_r)\,(1 + \max_{r\in\pi} l_r(G))$;

(2) если подгруппа M абелева, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 4$.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант Ф17М-063).

Список литературы

[1] Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа, 2006.

[2] Монахов В.С. Инварианты конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – N 1. – С. 63–81.

[3] Грицук Д.В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – N 3. – С. 90–95.

[4] Redei L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Redei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.

[5] Huppert B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

[6] Suzuki M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, N 4. – P. 686–695.

[7] Janko Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424

[8] Белоногов В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, N 1. – С. 21–32.

БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com, alexander.trofimuk@gmail.com

О группах два-ранга один

Б. Е. Дураков, Е. Б. Дураков, А. И. Созутов

Как доказал Бернсайд, в конечной группе с циклической силовской 2-подгруппой все элементы нечетного порядка составляют нормальную подгруппу. Для бесконечных периодических групп это утверждение неверно даже в случае, когда силовская 2-подгруппа имеет порядок 2 и является центром группы. В 1973 г. В.П. Шунков в [**1**] поставил вопрос 4.75: *пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию i, и пусть силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально циклическими группами, либо обобщенными группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO_{2'}(G)$ центральным элементом в $G/O_{2'}(G)$?* Здесь $O_{2'}(G) = O(G)$ — максимальная нормальная в G подгруппа, не содержащая инволюций. Другими словами, верна ли теорема Бернсайда-Бруэра-Сузуки в классе периодических групп? Ответ на него неизвестен даже при условии квазицикличности централизатора $C_G(i)$ (вопрос В.Д. Мазурова 15.54 [**1**]). Ответ положителен когда G действует (точно) дважды транзитивно на множестве $G/C_G(i)$ [**3**], и когда $C_G(i)$ — квазициклическая группа, не максимальная в G [**2**]. Вопрос 4.75 тесно связан с вопросами 10.62 и 11.13 из [**1**], причем на вопрос 11.13 уже получен отрицательный ответ в [**4**].

Теорема 1. *Группа G с обособленной, не максимальной в G 2-подгруппой C и конечной инволюцией локально конечна и является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и локально циклическим, или (обобщенно) кватернионным дополнением C.*

Статья с этим результатом отправлена в печать. По более общему вопросу 4.75 получены следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть группа G удовлетворяет условиям вопроса 4.75* [**1**] *и инволюция i порождает с каждым элементом конечного порядка, не делящегося на 4, конечную подгруппу. Тогда $iO(G) \in Z(G/O(G))$.*

В частности, вопрос 4.75 [**1**] решается положительно в классе сопряженно бинарно конечных групп. Однако даже для класса сопряженно бипримитивно конечных групп вопрос 4.75 пока открыт.

Теорема 3. *Пусть группа G удовлетворяет условиям вопроса 4.75* [**1**] *и любая тройка инволюций из G порождает в G подгруппу отличную от своего коммутанта. Тогда $iO(G) \in Z(G/O(G))$.*

Работа поддержана РФФИ, проект 15-01-04897-а.

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 6-17 изд. Новосибирск, 1978–2012 гг.

[2] Созутов А. И., О группах с квазициклическим централизатором конечной инволюции // Сиб. матем. журн. Сентябрь–октябрь, 2016. Е. 57, N 5. С. 1127–1130.

[3] Сучков Н.М. О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, N 3. С. 344–351.

[4] Созутов А.И., Дураков Е.Б., О двух вопросах из Коуровской тетради // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, N 5. С. 632–637.

О пересечении двух нильпотентных подгрупп в группе $E_7(2)$

В. И. Зенков

В данной работе продолжается изучение пересечений двух нильпотентных подгрупп в конечной неразрешимой группе, цоколь которой является простой группой из [**1**]. Ранее, в [**2**] были исследованы группы, цоколь которых является классической группой, а в [**3**] начато изучение пересечений двух нильпотентных подгрупп в группах, цоколь которых является группой исключительного лиева типа. В данной работе доказана следующая

Теорема. *Пусть* $G = E_7(2)$, A *и* B — *нильпотентные подгруппы из* G. *Тогда* $A \cap B^g = 1$ *для некоторого элемента* g *из* G.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

Список литературы

[1] Atlas of finite group // Convay J. H. [et. al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

[2] Зенков В. И. О пересечении двух нильпотентных подгрупп в небольших конечных группах // Сиб. электр. матем. известия. 2016. Т. 13. С. 1099–1115.

[3] Зенков В. И. О пересечении двух нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $G_2(3)$, $G_2(4)$, $Sz(8)$, $F_4(2)$, ${}^2F_4'(2)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(2)$ // Группы и графы, метрики и многообразия. Екатеринбург, Уральский Фереральный университет. 2017. С. 104.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: v19z52@mail.ru

О конечных простых линейных и унитарных группах малых размерностей над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. Пусть $t(G)$ наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$.

В "Коуровской тетради" А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. Хаги, 2003 и М. А. Звездина, 2013 получили такое описание в случае, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор, 2014 исследовал этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики. Автор, 2016 рассмотрел две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик. Получена теорема редукции. Автор, 2017 исследовал две конечные простые группы лиева типа G и G_1 над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \geq 5$, причем одна из групп является линейной группой. Тем самым уточнен первый пункт теоремы редукции. В данной работе рассмотрены две конечные простые группы лиева типа G и G_1 над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \leq 4$, причем одна из групп является линейной или унитарной группой.

Для $\varepsilon \in \{+,-\}$ через $A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ обозначается $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\varepsilon = -$.

Теорема. *Пусть $G = A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$, где $n \leq 8$, и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем порядка q_1, где $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\{G, G_1\}$ *— одна из пар* $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$, $\{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$, $\{A_1(13), G_2(3)\}$, $\{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$;

(2) $\{G, G_1\} = \{A^{\varepsilon}_2(q), C_2(q_1)\}$;

(3) $\{G, G_1\} = \{A^{\varepsilon}_{n-1}(q), A^{\varepsilon_1}_{n-1}(q_1)\}$, *где* $n \in \{3, 5\}$ *и* qq_1 *нечетно;*

(4) $G = A^{\varepsilon}_5(q)$, $G_1 \in \{B_3(q_1), C_3(q_1), D_4(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно;*

(5) $\{G, G_1\} = \{A^{\varepsilon}_{n-1}(q), A^{\varepsilon_1}_{n-1}(q_1)\}$, *где* $n \in \{7, 8\}$;

(6) $G \in \{A^{\varepsilon}_2(q), A^{\varepsilon}_4(q)\}$, $G_1 = {}^3D_4(q_1)$.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

ИММ УрО РАН им. Н. Н. Красовского, УрФУ им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург
E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

К теореме Шеметкова о дополняемости корадикала конечной группы

С. Йи, С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные группы.

Понятие $\mathfrak{F}$-корадикала, характеризующее степень вхождения группы в формацию $\mathfrak{F}$, естественным образом инициировало исследование проблемы расщепляемости группы над $\mathfrak{F}$-корадикалом. Центральное место в решении этой проблемы занимает следующий результат Л.А. Шеметкова:

Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — конечная группа. Если для любого простого числа p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.

Как показывают примеры, условие абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала в приведенной теореме Л.А. Шеметкова существенно. Поэтому одним из подходов, направленным на ослабление этого условия, может быть введение дополнительных ограничений либо на группу G, либо на формацию $\mathfrak{F}$. Такой подход развивается в данной работе. В ней для произвольной GWP-формации $\mathfrak{F}$ исследуется существование дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу группы, порожденной системой ее K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Таким образом, условие абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала всей группы G в отмеченной теореме Л.А. Шеметкова ослабляется до условия абелевости силовских подгрупп из $\mathfrak{F}$-корадикалов K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, порождающих группу G.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — GWP-формация и G — конечная группа, обладающая следующими свойствами*:

1) *$G =< A, B >$, где A и B — K-$\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G*;

2) *для некоторого простого числа p силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы.*

Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — GWP-формация и G — конечная группа, представимая в виде $G =< A, B >$, где A и B — K-$\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Если подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимы и для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G.*

Zhejiang Sci-Tech University, Zhejiang (China)
E-mail: yixiaolan2005@126.com
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

О пересечении максимальных подгрупп конечной разрешимой группы

С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные группы.

Как известно, подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G определяется как пересечение всех ее максимальных подгрупп. Из основного результата работы [1] следует, что для получения подгруппы $\Phi(G)$ разрешимой группы G можно ограничиться пересечением лишь некоторых $3n$ ее максимальных подгрупп, где n — число дополняемых факторов некоторого главного ряда группы G.

Другой подход, направленный на сокращение числа максимальных подгрупп, пересечение которых дает подгруппу Фраттини, предложен В.С. Монаховым в [2], где установлено, что для любой разрешимой группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением всех таких максимальных подгрупп M из G, что $MF(G) = G$ (здесь $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т.е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы G).

В следующей теореме отмеченные подходы определенным образом объединяются.

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая группа, n — длина G-главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда. Тогда в G существуют $4n - 3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.*

Оценка числа максимальных подгрупп, приведенная в теореме 1, является точной, но в некоторых случаях она может быть существенно улучшена.

Теорема 2. *Пусть G — группа нечетного порядка, n — длина G-главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда. Тогда в G существуют $3n - 2k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.*

Список литературы

[1] Kamornikov S. F. Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups // Int. J. Group Theory. 2017. Vol. 6, N 2. P. 1-5.

[2] Монахов В. С. Замечание о максимальных подгруппах конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, N 4. С. 31-33.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

О конечных неразрешимых группах, графы простых чисел которых не содержат треугольников

А. С. Кондратьев

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. Граф простых чисел (или граф Грюнберга—Кегеля) $\Gamma(G)$ группы G есть граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq.

Нами исследуется задача описания строения конечной группы G, граф простых чисел которой не содержит треугольников (3-циклов). Легко видеть, что фактор-группа $G/S(G)$ группы G по ее разрешимому радикалу $S(G)$ почти проста.

В [**1**] были найдены изоморфные типы графов $\Gamma(G)$ и оценки длины Фиттинга для разрешимых групп G и определены почти простые группы G.

В [**2**] было доказано, что $|\pi(G)| \leq 8$ и $|\pi(S(G))| \leq 3$ для неразрешимых групп G. Кроме того, получено детальное описание строения неразрешимой группы G в случае, когда $\pi(S(G))$ содержит число, не делящее порядок группы $G/S(G)$ (если $|\pi(S(G))| = 3$, то это всегда так).

В данном докладе обсуждаются результаты, полученные в оставшемся случае, когда $\emptyset \neq \pi(S(G)) \subseteq \pi(G/S(G))$.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

Список литературы

[1] Кондратьев А. С., Алексеева О.А. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, 3. С. 3–12.

[2] Кондратьев А. С., Алексеева О.А. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, 1. С. 3–13.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

О сопряженности Alt_5-подгрупп подгруппы Боровика группы $E_8(q)$

А. В. Коныгин

Пусть $p \geq 7$ — простое число, k — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Кроме того, пусть $G = E_8(k)$ — простая исключительная линейная алгебраическая группа присоединённого типа над полем k, $\sigma : G \to G$ — эндоморфизм Стейнберга линейной алгебраической группы G, $G_\sigma \cong E_8(q)$, где $q = p^n$, и $M \cong (\mathrm{Alt}_5 \times \mathrm{Sym}_6).2$ — максимальная подгруппа группы G_σ (подгруппа Боровика группы G, см. [**1**]). Тогда $q^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$ и q минимально с таким свойством.

В 1998 году в работе [**2**] были описаны все классы сопряжённых Alt_5-подгрупп группы $E_8(\mathbb{C})$, за исключением двух случаев. В частности, на тот момент остался открытым вопрос о количестве классов сопряжённых Alt_5-подгрупп подгруппы Боровика группы $E_8(\mathbb{C})$.

В 2003 году в работе [**3**] был доказан некоторый более общий результат, из которого, в частности, следовало, что в подгруппе Боровика группы $E_8(k)$ ровно два класса сопряжённых подгрупп, изоморфных Alt_5.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть A — нормальная Alt_5-подгруппа группы M, B — нормальная Alt_6-подгруппа группы M, D — некоторая диагональная Alt_5-подгруппа подгруппы $A \times B$ группы M. Тогда подгруппы A и D группы G_σ сопряжены в группе G_{σ^m}, где $m \leq 6$.*

Список литературы

[1] Borovik A. V. A maximal subgroup in the simple finite group $E_8(q)$ // Contemporary Mathematics 131 (1992). Pt. 1, 67–79.

[2] Frey D. D. Conjugacy of Alt_5 and $SL(2, 5)$ Subgroups of $E_8(\mathbb{C})$ // Mem. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 133. No. 634. viii+162 p.

[3] Lusztig G. Homomorphisms of the alternating group A_5 into reductive groups // J. Algebra. 2003. Vol. 260. P. 298–322.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: konygin@imm.uran.ru

Необходимые условия нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству

А. Е. Куваев

Группу X будем называть *локально удовлетворяющей нетривиальному тождеству*, если каждая конечно порождённая подгруппа группы X удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству. Будем говорить также, что группа X *локально аппроксимируется нильпотентными группами*, если любая её конечно порождённая подгруппа нильпотентно аппроксимируема. Напомним ещё, что подгруппа Y группы X называется *p'-изолированной* в этой группе для некоторого простого числа p, если для каждого простого числа $q \neq p$ и для каждого элемента $x \in X$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Пусть $\mathcal{J}$ — непустое множество, A — некоторая группа и $\{K_j, K_{-j} \mid j \in \mathcal{J}\}$ — семейство подгрупп группы A. Пусть также для любого $j \in \mathcal{J}$ существует изоморфизм $\psi_j \colon K_j \to K_{-j}$. Тогда *HNN-расширением группы A с семейством проходных букв t_j* $(j \in \mathcal{J})$ называется группа

$$G = \langle A, t_j;\ t_j^{-1} K_j t_j = K_{-j},\ \psi_j\ (j \in \mathcal{J})\rangle,$$

образующими которой являются все образующие группы A и буквы t_j $(j \in \mathcal{J})$, а определяющими соотношениями — соотношения группы A и всевозможные соотношения вида $t_j^{-1} k t_j = k\psi_j$, где $j \in \mathcal{J}$, $k \in K_j$. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть все подгруппы K_j, K_{-j} $(j \in \mathcal{J})$ содержатся в группе A собственным образом. Пусть также группа A локально удовлетворяет нетривиальному тождеству, G локально аппроксимируется нильпотентными группами. Тогда существует простое число p такое, что подгруппы K_j и K_{-j} p'-изолированы в группе A при любом $j \in \mathcal{J}$.*

Данная теорема является обобщением основных результатов статей [**1**] и [**2**].

Список литературы

[1] Sokolov E. V. A necessary condition for the residual nilpotence of HNN-extensions // Принято к печати в Lobachevskii J. Math.

[2] Савельичева Н. С., Соколов Е. В. Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. «Естественные, общественные науки». 2015. Вып. 1 С. 64–68.

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: alexander@kuvaev.me

О свойстве класса Леви, порожденного квазимногообразием qH_2

В. В. Лодейщикова

Для произвольного класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ называется классом Леви, порожденным $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{N}_2$ — многообразие нильпотентных групп ступени не выше 2, $F_2(\mathcal{N}_2)$ — свободная группа ранга 2 в $\mathcal{N}_2$. Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в $\mathcal{N}_2$:

$$H_p = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = 1),\ H_{p^s} = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1),$$

где s — натуральное, p — простое число.

Набор qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p, $qF_2(\mathcal{N}_2)$ (p — простое число), представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т. е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы).

В работах [**1, 2, 3**] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая $L(qH_2)$). В [**4**] построена нильпотентная ступени 3 группа, которая принадлежит классу $L(qH_2)$. Дальнейшие исследования показывают, что для класса Леви, порожденного квазимногообразием qH_2, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Класс* $L(qH_2)$ *содержится в многообразии нильпотентных групп ступени не выше* 3.

Список литературы

[1] Лодейщикова В. В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Известия Алтайского государственного университета. — 2009. Т. 61. N 1. С. 26–29.

[2] Лодейщикова В. В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. N 6. С. 1359–1366.

[3] Лодейщикова В. В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2011. Т. 50. N 1. С. 26–41.

[4] Лодейщикова В. В. О классе Леви, порожденном почти абелевым квазимногообразием нильпотентных групп // Известия Алтайского государственного университета. 2016. Т. 89. N 1. С. 148–151.

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул
E-mail: lodeischikova@gmail.com

Группы, изоспектральные группам $S_4(q)$

Ю. В. Лыткин

В докладе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков элементов G. Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*. Под секцией группы G будем понимать факторгруппу H/N, где $N, H \leq G$ и $N \trianglelefteq H$. Скажем, что группа G *нераспознаваема* (по спектру в классе конечных групп), если существует бесконечное количество попарно не изоморфных групп, изоспектральных G.

Пусть ω — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Следуя [**1**], назовём группу G *критической относительно* ω (или ω-*критической*), если ω совпадает со спектром группы G и не совпадает со спектром любой собственной секции группы G (т. е. секции, отличной от G).

Для решения проблемы распознавания простых групп по спектру актуальной является задача описания групп (в частности, критических), изоспектральных нераспознаваемым простым группам. Ранее автором [**2, 3, 4**] были описаны группы, критические относительно спектров знакопеременных групп A_6 и A_{10}, спорадической группы J_2, исключительной группы ${}^3D_4(2)$ и классических групп $L_3(3)$ и $U_3(3)$. В частности, по модулю уже известных результатов это означает, что все группы, критические относительно спектров неабелевых простых знакопеременных спорадических и исключительных групп, известны.

В настоящей работе исследуются группы, изоспектральные нераспознаваемым простым симплектическим группам $S_4(q) = PSp(4, q)$, где $q > 3$.

Теорема. *Пусть G — группа, изоспектральная группе $S_4(q)$, где q — степень простого числа p и $q > 3$. Тогда в G существует нильпотентная нормальная подгруппа K, такая, что $P \leq G/K \leq \mathrm{Aut}(P)$, где группа P изоморфна $S_4(q)$ или $L_2(q^2)$. Группа K является p-группой, причём если $p = 2$ и $P \simeq S_4(q)$, то $K = 1$. Существуют примеры, в которых $G/K = S_4(q)$ и $K \neq 1$.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта N 16–31–00147 мол_а.

Список литературы

[1] Мазуров В. Д., Ши В. Дж. Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, N 2. С. 239–243.

[2] Lytkin Y. V. On groups critical with respect to a set of natural numbers // Siberian electronic mathematical reports. 2013. V. 10. P. 666–675.

[3] Лыткин Ю. В. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, N 1. С. 122–128.

[4] Лыткин Ю. В. О конечных группах, изоспектральных группе $U_3(3)$ // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, N 4. С. 813–827.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: jurasicus@gmail.com

О периодических группах 2-ранга два, насыщенных конечными простыми группами

Д. В. Лыткина, А. И. Созутов, А. А. Шлепкин

Пусть X — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества X, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [1].

Как показали Альперин, Брауэр и Горенстейн конечными простыми группами 2-ранга 2 являются, с точностью до изоморфизмов, следующие группы:

$$\{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где q, p, r — нечетные и $q > 3$ [2].

Доказана теорема "переносящая" этот классический результат на периодические группы 2-ранга два, насыщенные конечными простыми группами.

Теорема. *Множество периодических групп 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми группами, с точностью до изоморфизмов, совпадает с множеством групп*

$$\{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R — локально конечные поля нечетных характеристик, и $|Q| > 3$.

Список литературы

[1] Шлепкин А.К., *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*, Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, (1993), 363.

[2] Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D., Finite simple groups of 2-rang two. Collection of articles dedicated to the memori of Abraham Adrian Albert. Scripta Math. **29** (1973), N 3–4, 191–214.

Сибирский гос. ун-т тлекоммун. информ., г. Новосибирск
E-mail: daria.lytkina@gmail.com
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
E-mail: sozutov_ai@mail.ru, shlyopkin@mail.ru

Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$

А. А. Махнев, М. П. Голубятников

В работе [**1**] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и числом вершин, не большим 4096. Продолжается исследование антиподальных графов с массивами пересечений из полученного списка. В случае $\mu = 2$ вершинно симметричные графы найдены в [**2**]. Если $\mu \geq 3$, то граф имеет массив пересечений $\{15{,}12{,}1; 1{,}4{,}15\}$, $\{18{,}15{,}1; 1{,}5{,}18\}$, $\{27{,}24{,}1; 1{,}8{,}27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, $\{75, 72, 1;$
$1, 12, 75\}$, $\{99, 96, 1; 1, 4, 99\}$, $\{108, 105, 1; 1, 5, 108\}$, $\{147, 144, 1; 1, 16, 147\}$, $\{171, 168,$
$1; 1, 12, 171\}$, $\{243, 240, 1; 1, 4, 243\}$ или $\{243, 240, 1; 1, 20, 243\}$.

Ранее были рассмотрены массивы $\{15{,}12{,}1; 1{,}4{,}15\}$ (Буриченко В. П., Махнев А. А.), $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ (Ефимов К. С., Махнев А. А.), $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ (Циовкина Л. Ю.), $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ (Биткина В. В., Махнев А. А.), $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$ (Махнев А. А., Циовкина Л. Ю.), $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$ (Белоусова В. И., Махнев А. А.), $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$ (Махнев А. А., Чуксина Н. В.).

В данной работе определено строение неразрешимой группы G автоморфизмов вершинно симметричного графа с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Если F – антиподальный класс графа Γ, $\bar{T}$ – цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, то $\bar{T}$ стабилизирует F и выполняется одно из утверждений:

(1) $\bar{T} \cong U_3(3)$, граф Γ существует и является реберно симметричным, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q порядка 2^{10} с помощью $G_2(2)$ и Q содержит подгруппу K порядка 2^4, регулярную на каждом антиподальном классе, либо

(2) $\bar{T} \cong L_2(7)$, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q с помощью $L_2(7)$ или $PGL_2(7)$, длины $\bar{T}$-орбит на F равны $(8, 8)$, $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$, $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}} = \langle g \rangle$, $[Q_{\{F\}}, f] = Q_a$, подграф $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ является пустым, $\alpha_3(g) = 128$, $\alpha_1(g) = 112(1 + 2n)$, $n \leq 3$, g фиксирует точно 8 антиподальных классов и $|Q_{\{F\}}| \in \{2^4, 2^7\}$.

Список литературы

[1] Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular graphs with $\lambda = 2$. Jornal of Siberian Federal Univ. 2014, v. 7, N 2, 188–194.

[2] Белоусов И.Н., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$. Труды Института математики и механики 2016, т. 22, N 2, 28–37.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург;
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, mike_ru1@mail.ru

О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$

А. А. Махнев, М. С. Нирова

В данной работе исследуются дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен (равносильно $\theta_2 = -1$).

Теорема 1 [**1**]. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_3 сильно регулярен. Тогда $b_2 = a_3 + 1$ и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b/c_2)$.

Следствие 1. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ и $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ не существуют.

Теорема 2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $a_1 = 0$ и $\theta_2 = -1$. Тогда для графа $\Delta = \bar{\Gamma}_3$ имеем разбиение подграфа $\Delta(u)$ кликами $w^\perp - \{u\}$, $w \in \Gamma(u)$. Если существует сильно регулярный граф с параметрами (176,49,12,14), в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 7, 6; 1, 1, 2\}$.

Следствие 2. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действвет транзитивно на множестве его вершин и $\bar{T}$ – цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Тогда либо $\bar{T} \cong M_{11}$, $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 11, 22$, либо $\bar{T} \cong M_{22}$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $L_3(4)$ и имеет индекс 22 в $\bar{T}$.

Существование сильно регулярного графа с параметрами (176,49,12,14), в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, остается неизвестным.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 содержит n-клику $\{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n \Gamma(u_i)$ содержит $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ вершин и для графа с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ имеем $n \le 3$, с массивом $\{31, 24, 8; 1, 4, 24\}$ имеем $n \le 7$, с массивом $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ имеем $n \le 15$, с массивом $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$ имеем $n \le 12$, с массивом $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$ имеем $n \le 6$, с массивом $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$ имеем $n \le 9$, с массивом $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$ имеем $n \le 3$, с массивом $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ имеем $n \le 7$, с массивом $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$ имеем $n \le 3$, с массивом $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ имеем $n \le 9$, с массивом $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$, имеем $n \le 6$, с массивом $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$ имеем $n \le 10$, с массивом $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$ имеем $n \le 12$, с массивом $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$ имеем $n \le 12$.

Теорема 3. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27,20,7; 1,4,21\}$ не существует.

Список литературы

[1] Махнев А.А., Нирова М.С. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$. Матем. заметки 2017, т. 52.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, nirova_m@mail.ru

Максимальные 1-коды в дистанционно регулярных графах диаметра 3 и обобщенные четырехугольники

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C| \le p^d_{dd}+2$. В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $c_d \ge a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по по [**1**] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a=a_3, c=c_2, p=p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2=-1$ и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1,a)$, а во втом случае Γ_3 является графом Шилла.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. В графе Γ любые две вершины на расстоянии 3 лежат в максимальном 1-коде тогда и только тогда, когда Γ_3 является точечным графом обобщенного четырехугольника $GQ(p+1,a)$.

Если Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ и $c=a-1$, то $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(p+1, 2a)$. В данной работе перечислены допустимые массивы пересечений в этом случае, при условии, что обобщенный четырехугольник $GQ(p+1,a)$ имеет квазиклассические параметры.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. Если $a-1=c$ и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1,a)$ с квазиклассическими параметрами $\{p+1,a\}=\{q,q\},\{q^2,q\},\{q^2,q^3\}$, $\{q-1,q+1\}$, то Γ — имеет массив пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ или $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$.

В дальнейшем предполагается найти возможные автоморфизмы графов с массивами пересечений из заключения теоремы.

Список литературы

[1] Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3, Des. Codes Cryptogr. 2012, v. 65, 29-47.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com

Критерий существования ортогональной к данной конечной квазигруппе

И. П. Мишутушкин

Квазигруппы $< A; f >$, $< A; g >$ ортогональны, если при всех значениях $(x, y) \in A^2$ множество $\{(f(x, y), g(x, y))\}$ совпадает с A^2.

Основным результатом является критерий, позволяющий установить, существует ли для данной конечной квазигруппы ортогональная к ней.

Обозначим $G(A) = \{f \mid f : A^2 \to A\}$ множество бинарных операций на A. Элементы $G(A)$ будем называть группоидами.

Определение 1. *Универсальную алгебру $C(A) =< G(A); \lambda, \rho, \tau, e_\lambda, e_\rho >$ типа <2,2,1,0,0>, операции которой определены равенствами*

$$\forall f\, \forall g\, \forall x\, \forall y\, (f \in G(A),\ g \in G(A),\ x \in A,\ y \in A):$$

$$f\lambda g(x, y) \underset{def}{=} g(f(x, y), y),$$

$$f\rho g(x, y) \underset{def}{=} f(x,\ g(x, y)),$$

$$f^\tau(x, y) \underset{def}{=} f(y, x),$$

$$e_\lambda(x, y) \underset{def}{=} x,$$

$$e_\rho(x, y) \underset{def}{=} y,$$

назовем кэлианом над множеством A.

Определение 2. *Группоид $f^\lambda \in G(A)$, для которого $f^\lambda \lambda f = e_\lambda$, назовем λ- (или лево-) обратным к f.*

Определение 3. *Группоид $f^\rho \in G(A)$, для которого $f^\rho \rho f = e_\rho$, назовем ρ- (или право-) обратным к f.*

Группоид, для которого существуют λ- или ρ- обратные группоиды, назовем, соответственно, λ- или ρ- обратимым.

Теорема. *Для того, квазигруппа $< A; f >$ имела ортогональную к ней, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая квазигруппа $< A; g >$, что группоид $< A; h >$, где $h = f^\lambda \lambda g$ был бы квазигруппой.*

Следствие. *Для того, чтобы существовала квазигруппа, ортогональная к данной конечной квазигруппе $< A; f >$, достаточно, чтобы операция $h = f \lambda f^\tau$ была ρ-обратима.*

Список литературы

[1] Белоусов В.Д., Основы теории квазигрупп и луп. Москва: Мир, 1967.

[2] Мишутушкин И. П., Об одной комбинаторной классификации конечных квазигрупп. Тезисы докладов международной конференции Мальцевские чтения 2016, с. 191. Новосибирск: 2016.

ЗАО «АСТ», Москва
E-mail: lachika@bk.ru

Группы с формационными ограничениями на силовские подгруппы

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [**1**].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа. Напомним, подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует такая цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\, H_1 <\cdot\, \ldots <\cdot\, H_n = G,$$

что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i, что равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если $L/K_L \notin \mathfrak{F}$ для всех подгрупп K и L таких, что $H \leq K <\cdot\, L \leq G$. Понятно, что для формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ таких, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, каждая $\mathfrak{X}$-субнормальная подгруппа будет $\mathfrak{F}$-субнормальна, а каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа будет $\mathfrak{X}$-абнормальна.

Если группа $G \notin \mathfrak{F}$ и каждая нетривиальная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна, то G называется $E_{\mathfrak{F}}$-группой. Свойства таких групп для различных формаций $\mathfrak{F}$ изучались в работах Фаттахи, Эберта и Баумана, Фёрстера, В. Н. Семенчука, А. Н. Скибы и других авторов, см. литературу в [**2**]. Группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными или $\mathfrak{F}$-абнормальными примарными подгруппами описаны в работах Фаттахи, А. Ф. Васильева, Т. И. Васильевой, В. Н. Тютянова, В. С. Монахова, В. Н. Князиной и других авторов, см. литературу в [**3**]. Эти исследования получили развитие в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$. В группе G каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна класса нильпотентности не больше 2 тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$, либо $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes P$, где P — неабелева $\mathfrak{F}$-абнормальная силовская p-подгруппа группы G для некоторого $p \in \pi(G)$, являющаяся подгруппой Картера и Гашюца группы G, $P' \leq Z(P)$ и $G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

Здесь $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ — формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно; $\mathfrak{A}_1$ — формация всех абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами; $\mathcal{A}$ — формация всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Skiba A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. — 2016. — Vol. 4, N 3. — P. 281–309.

[3] Монахов В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, N 2. С. 447–462.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com, irina.sokhor@gmail.com

О конечных группах, N-критический граф которых является цепью

В. И. Мурашко

Все рассматриваемые группы конечны. Используются стандартные обозначения и терминология (см. [**1**]). Напомним, что через $E(\Gamma)$ обозначается множество рёбер графа Γ, через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G, группой Шмидта называется ненильпотентная группа все собственные подгруппы которой нильпотентны, (p, q)-группой Шмидта называется группа Шмидта G для которой $\pi(G) = \{p, q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p-подгруппу.

Определение (Определение 1.4 [**2**]). N-критическим графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$ и (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G имеется (p, q)-подгруппа Шмидта.

Из свойств N-критическим графа группы G можно извлечь содержательную информацию о строении самой группы G. Например:

(1) Если $\pi_1, \dots, \pi_n$ — множества вершин компонент связности графа $\Gamma_{Nc}(G)$, то $G = \mathrm{O}_{\pi_1}(G) \times \dots \times \mathrm{O}_{\pi_n}(G)$ по по теореме 5.14 из [**2**]. В частности, если все π_i одноэлементны, то G нильпотентна.

(2) Если $\Gamma_{Nc}(G)$ не имеет циклов, то G дисперсивна по теореме 5.12 из [**2**].

(3) Если $E(\Gamma_{Nc}(G)) \subseteq \{(p_i, p_j) \mid p_j \in \pi(p_i - 1)\}$, то все подгруппы Шмидта группы G сверхразрешимы. Данный группы исследовались В. С. Монаховым [**3**].

В данной работе мы получили описание групп, N-критический граф которых является цепью:

Теорема. *Пусть G — группа и $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(*a*) $E(\Gamma_{Nc}(G)) \subseteq \{(p_i, p_{i+1}) \mid i = 1, \dots, n-1\}$.

(*b*) *Выполняются утверждения*:

(1) *Если $|i - j| \geq 2$, то всякий p_i-элемент группы G перестановочен со всяким p_j-элементом группы G.*

(2) *Если $j - i = 1$, то всякий p_j-элемент группы G перестановочен со всякой силовской p_i-подгруппой группы G.*

Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ Ф17РМ-063.

Список литературы

[1] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[2] Murashka V. I., Vasil'ev A. F. Arithmetic graphs of finite groups // ArXiv.org e-Print archive, arXiv: 1510.02568v1v1, 9 Oct 2015.

[3] Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Матем. заметки. 1995. Т. 58, N 5. С. 717–722.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: mvimath@yandex.ru

Мультипликативная группа поля по модулю группы единиц

К. Н. Пономарев

Рассмотрим поле алгебраических чисел K, обозначим $W(K)$ — множество архимедовых нормирований этого поля. *Унитарной подгруппой мультипликативной группы поля*, $U(K) \leqslant K^*$, называем подгруппу элементов на которых все архимедовы нормирования принимают тривиальное значение:

$$U(K) = \{x \in K^* | \ w(x) = 0, w \in W(K)\}.$$

Теорема. *Пусть K — поле алгебраических чисел, K^* — его мультипликативная группа, а $U(K)$ — ее унитарная подгруппа.*

Утверждается, что фактор — группа $K^*/U(K)$ является свободной группой счетного ранга.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ponomaryov@ngs.ru

О существовании A-допустимых Θ-подгрупп

М. В. Селькин, Р. В. Бородич, Е. Н. Бородич

В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяют раскрыть многие свойства самих групп (см. монографию [1]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ — гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [2] будем говорить, что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

Функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, Θ — абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной неразрешимой группе существуют ненильпотентные A-допустимые максимальные Θ-подгруппы, причем, пересечение ядер всех таких подгрупп нильпотентно.*

Следствие. *В произвольной неразрешимой группе существуют ненильпотентные абнормальные максимальные подгруппы, причем, пересечение всех таких подгрупп нильпотентно.*

Список литературы

[1] Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 144 с.

[2] Скиба А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины", Гомель (Беларусь)
E-mail: Borodich@gsu.by

Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова

Напомним, что класс групп является корневым в смысле К. Грюнберга [**1**] тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений [**2**]. В настоящей работе изучается вопрос об аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации (т. е. взятия фактор-групп) корневым классом групп HNN-расширения с бесконечными циклическими связанными подгруппами, лежащими в центре базовой группы. В случае, когда базовая группа является циклической, соответствующий критерий получен в [**3**]. Приводимая далее теорема полностью решает указанный вопрос в остальных случаях.

Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу; B — некоторая нециклическая $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа; H и K — бесконечные циклические подгруппы группы B, лежащие в ее центре; G — HNN-расширение группы B со связанными подгруппами H и K.*

1. Если существует гомоморфизм группы B на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах H и K, то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

2. Если гомоморфизма указанного вида не существует и $H \cap K \neq 1$, то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда

- *а) $[H : H \cap K] = [K : H \cap K]$,*
- *б) фактор-группы B/H и B/K $\mathcal{C}$-аппроксимируемы,*
- *в) класс $\mathcal{C}$ содержит группу порядка 2, если только подгруппа $H \cap K$ не лежит в центре группы G.*

3. Если гомоморфизма указанного вида не существует и $H \cap K = 1$, то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K отделимы семейством подгрупп

$$\Omega = \{N \trianglelefteq B \mid B/N \in \mathcal{C} \ \wedge \ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ N \cap HK = (HK)^n\},$$

т. е. $\bigcap_{N\in\Omega} HN = H$ и $\bigcap_{N\in\Omega} KN = K$.

Список литературы

[1] Gruenberg K. W., Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.

[2] Sokolov E. V., A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43, N 2. P. 856–860.

[3] Туманова Е. А., Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, N 3. С. 700–709.

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru, helenfog@bk.ru

К теореме Римана об условно сходящихся рядах

Н. М. Сучков

Рассмотрим произвольный действительный числовой ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1}$$

Ряд, который получается из (1) некоторой перестановкой его членов, можно записать в виде

$$u_{1^g} + u_{2^g} + \ldots + u_{k^g} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k^g}, \tag{2}$$

где $g \in G = Sym(\mathbb{N})$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. По теореме Коши при любом $g \in G$ из абсолютной сходимости ряда (1) следует абсолютная сходимость ряда (2) и равенство их сумм. Но если ряд (1) сходится условно, то согласно теореме Римана для некоторых подстановок $g \in G$ ряд (2) расходится и для каждого действительного числа γ найдется такая подстановка $g = g(\gamma)$ группы G, что ряд (2) сходится к γ.

Определение 1. *Будем говорить, что подстановка g группы G обладает s-свойством, если из сходимости любого ряда (1) следует сходимость ряда (2) и равенство сумм этих рядов.*

Множество

$$P = \{x | x \in G, x \text{ обладает s-свойством}\}$$

является полугруппой с единицей. Для $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$M_n(g) = \{\beta | \beta \in \mathbb{N}, \beta \le n, \beta^g > n\}, \quad L_n(g) = \{\beta | \beta \in \mathbb{N}, \beta > n, \beta^g \le n\}.$$

Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $a \le b$. Множество $\{y | y \in \mathbb{N}, a \le y \le b\}$ будем называть отрезком натуральных чисел. Очевидно, что для любого конечного непустого подмножества X из $\mathbb{N}$ существует единственное разбиение $X = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$ на такие отрезки $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ натуральных чисел, что $\Delta_i \cup \Delta_j$ не является отрезком при $i \ne j$. Обозначим $\overline{X} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$. Далее, пусть

$$\overline{m}(g) = \max_{n \in \mathbb{N}} |\overline{M}_n(g)|, \ \bar{l}(g) = \max_{n \in \mathbb{N}} |\overline{L}_n(g)|.$$

Определение 2. *Обобщенным параметром рассеивания подстановки g группы G назовем $\overline{\lambda}(g) = \max(\overline{m}(g), \bar{l}(g))$.*

Теорема. *Подстановка g множества $\mathbb{N}$ тогда и только тогда обладает s-свойством, когда $\overline{\lambda}(g^{-1}) < \infty$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-04897 А).

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: ns7654321@mail.ru

О расщеплениях, подгруппах и теориях частично коммутативных метабелевых групп

Е. И. Тимошенко

Пусть Γ конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер, X – множество вершин графа. По графу Γ определим частично коммутативную метабелеву группу M_Γ как фактор-группу M_n/R_Γ, где M_n – свободная метабелева группа с базисом X, а R_Γ порождена как нормальная подгруппа M_n теми коммутаторами $[x_i, x_j]$, для которых вершины x_i и x_j смежны в графе Γ. Граф Γ называется определяющим графом для группы M_Γ. Если множество ребер графа пусто, то $M_\Gamma = M_n$.

О.Шапю в 1995 году доказал, что универсальная теория группы M_n разрешима. При этом он использовал тот факт, что универсальная теория группы M_n и её свободного расщепления над коммутантом W_n совпадают. Вопрос о разрешимости универсальной теории частично коммутативных метабелевых групп M_Γ открыт и включен в “Коуровскую тетрадь”. Не известно ни одного примера группы M_Γ с неразрешимой универсальной теорией. Однако доказано, что свободное расщепление группы M_Γ над её коммутантом имеет разрешимую универсальную теорию для любого Γ. Поэтому возникает вопрос о совпадении универсальной теории группы M_Γ и её свободного расщепления W_Γ над коммутантом. Существуют нетривиальные примеры, когда универсальные теории групп M_Γ и W_Γ совпадают. Однако доказано, что для широкого класса определяющих графов Γ универсальные теории групп M_Γ и W_Γ различны.

Подгруппа Фиттинга $Fit(G)$ группы G – это произведение всех нильпотентных нормальных подгрупп G. Доказано, что любая нильпотентная подгруппа метабелевой частично коммутативной группы M_Γ является абелевой, а подгруппа Фиттинга $Fit(M_\Gamma)$ является прямым произведением её центра Z и коммутанта $[M_\Gamma, M_\Gamma]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01485).

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: eitim45@gmail.com

Композиционные факторы конечной факторизуемой группы с $\mathbb{P}$-субнормальными сомножителями

В. Н. Тютянов, В. Н. Княгина

Через $\Psi(X)$ обозначим множество всех композиционных факторов группы X, а $\Psi_1(X)$ — множество всех неабелевых групп из $\Psi(X)$.

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и В. Н. Тютянов [**1**] предложили следующее определение. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Подгруппа H называется $\mathbb{P}$-субнормальной в группе G, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

такая, что $|H_{i+1} : H_i| \in \mathbb{P}$ для всех i. Признаки разрешимости конечной факторизуемой группы с $\mathbb{P}$-субнормальными сомножителями получены в [**2**]–[**3**].

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $G = AB$ — конечная группа, A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G. Тогда:*

1) $\Psi_1(G) = \Psi_1(A) \cup \Psi_1(B)$;

2) *если A разрешима, то $\Psi(G) = \Psi(A) \cup \Psi(B)$.*

Теорема 2. *Пусть $G = AB$ — конечная группа, где A — $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа нечетного порядка, а B разрешима, то G разрешима.*

Требование нечетности порядка подгруппы A в теореме 2 отбросить нельзя, примером служит $PSL(2, 7)$.

Список литературы

[1] Васильев А Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сибирский математический журнал. 2010. Том 51, N 6. С. 1270–1281.

[2] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сибирский математический журнал. 2012. Том 53, N 1. С. 59–67.

[3] Monakhov V., Kniahina V. Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, N 4. P. 441–445.

Гомельский филиал Международного университета «МИТСО», Гомель (Беларусь)
E-mail: tyutyanov@front.ru
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: knyagina@inbox.ru

Критерий универсальности матрицы в группе $UT_n(R)$ над коммутативным и ассоциативным кольцом с единицей

Н. Г. Хисамиев, С. Д. Тыныбекова, А. А. Коныրханова

Через $UT_n(R)$ - группа унитреугольных матриц размерностей $n \times n$ над коммутативным ассоциативным кольцом R с единицей. Элемент g группы $UT_n(K)$ называется универсальным, если уравнение $[g, x] = f$ разрешимо для любого элемента $f \in G'$. Это понятие введено В.А.Романьковым. Доказана следующая

Теорема. *Матрица g группы $UT_n(R)$ размерности $n > 3$ над коммутативным ассоциативным кольцом R с единицей универсальна тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия:*

1. Элементы $g_{i,i+1}$, $1 < i < n-1$, первой побочной диагонали матрицы g (кроме крайних) обратимы в R;

2. Элементы $g_{1,2}$ и $g_{n-1,n}$ взаимно просты, т.е. справедливо равенство

$$g_{1,2}u + g_{n-1,n}v = 1,$$

для некоторых $u, v \in R$.

Следствие 1. *Если $(\mathbb{F}, \upsilon)$ — конструктивное поле, то множество универсальных элементов нумерованной группы $(UT_n(\mathbb{F}), \upsilon^*)$ вычислимо, т.е. по любому числу $n \in \omega$ можно эффективно определить является ли универсальной матрица $\upsilon^* n$ или нет, где нумерация υ^* такая, что по данному числу n можно эффективно определить υномера элементов матрицы номера n.*

Следствие 2. *Если (R, υ) — конструктивное кольцо, то множество универсальных элементов пары $(UT_n(R), \upsilon^*)$ вычислимо перечислимо.*

Следствие 3. *Пусть для конструктивного евклидого кольца (E, υ) с единицей e справедливы следующие условия:*

1. функция нормы $g : E \to \omega$ вычислима;

2. множество $R(E)$ обратимых элементов кольца E вычислимо.

Тогда множество универсальных элементов пары $(UT_n(E), \upsilon^*)$ вычислимо.

Список литературы

[1] Roman'kov V.A., Equations over groups // Groups Complexity Cryptology.— 2012.— Vol.4.— N2.— P.191-240.

[2] Men'shov A.V., Roman'kov V.A., On p-solvability of some regular equations over a Heisenberg p-group // Herald of Omsk University. — 2014. — N 3. — P.11–14.

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Астана (Казахстан)
E-mail: hisamiev@mail.ru, ErkeshanK@mail.ru

Об антиавтоморфизмах и биантиавтоморфизмах в некоторых классах групп

Д. Г. Храмцов

В работе [**1**] вводятся понятия антиавтоморфизма и биантиавтоморфизма группы, расширяющие одноименные понятия для конечных циклических групп, определённые ранее Г.Константиносом в [**2**]. Так, биекция f группы G на себя называется *антиавтоморфизмом*, если $f(x)f(y)^{-1} \neq xy^{-1}$ для любых различных элементов $x, y \in G$. Антиавтоморфизм f группы G называется *биантиавтоморфизмом*, если при этом f - автоморфизм группы G. Биантиавтоморфизм группы - это её автоморфизм без нетривиальных неподвижных точек.

В работе [**2**] был сформулирован вопрос: какие конечные циклические группы допускают антиавтоморфизмы? В [**1**] авторы отвечают на него, доказав, что это в точности конечные циклические группы нечётного порядка. Кроме того, там приведены примеры антиавтоморфизмов и биантиавтоморфизмов конечных нециклических абелевых групп и поставлен следующий

Вопрос ([**1**] Question 2). *Какие конечные абелевы 2-группы допускают антиавтоморфизмы? Какие из них допускают антиавтоморфизмы, но не биантиавтоморфизмы?*

В связи с этим автором доказаны следующие утверждения.

Предложение 1. *(1) Конечная абелева 2-группа допускает антиавтоморфизм тогда и только тогда, когда не является циклической. (2) Конечная абелева 2-группа допускает биантиавтоморфизм тогда и только тогда, когда в её разложении на примарные циклические множители каждый множитель не единственен.*

Следствие. *(1) Конечная абелева группа допускает антиавтоморфизм тогда и только тогда, когда её разложение на примарные циклические множители содержит больше одного 2-сомножителя. (2) Конечная абелева группа допускает биантиавтоморфизм тогда и только тогда, когда в разложении ее 2-части на примарные циклические множители каждый множитель не единственен.*

Кроме этого, доказаны следующие, относящиеся к данной теме предложения.

Предложение 2. *Любая бесконечная счётная группа допускает антиавтоморфизм.*

Предложение 3. *(1) Любая конечная группа нечётного порядка допускает антиавтоморфизм. (2) Любая конечная группа порядка $n = 4k + 2$ не допускает антиавтоморфизма.*

Можно добавить, что диэдральная группа порядка 8 и группа кватернионов допускают антиавтоморфизмы.

Список литературы

[1] Lopez-Aguayo D., Lopez-Aguayo S., Antiautomorphisms and bintiautomorphisms of some finite abelian groups, arXiv: 1710.09321v1.

[2] Problem 2014. Mathematics Magazine, Vol. 90 (2017), 75–76.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: dx@math.nsc.ru

О случайном выборе эллиптических и гиперболических винтовых движений аффинных лоренцевых пространств

В. А. Чуркин

Эллиптические и гиперболические винтовые движения аффинных лоренцевых пространств $\mathbb{R}^{1,n}$ представимы в форме $f(x) = Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, где матрица A сохраняет стандартную невырожденную симметричную билинейную форму типа $(1, n)$, имеет невырожденное подпространство W неподвижных точек коразмерности 2 и задает соответственно эллиптический или гиперболический поворот на плоскости $W^{\perp}$, вектор b принадлежит W и считается ненулевым. Такие движения содержатся в группе Пуанкаре пространства — полупрямом произведении группы Ли $SO(1, n)$ и группы $T(n+1)$ трансляций пространства. В работе [1] сравнивался случайный выбор эллиптических или гиперболических поворотов и было показано, что в окрестности единицы вида $\exp(B(r))$, где $B(r)$ — евклидов шар матриц нормы $\leqslant r$ из алгебры Ли $so(1, n)$, доля гиперболических поворотов в объеме объединения эллиптических и гиперболических близка к $1/(\sqrt{2})^{n-1}$ при малых r. В частности, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ специальной теории относительности такой случайный выбор равновероятен. Оказалось, что при замене поворотов на винтовые движения справедливы аналогичные утверждения.

Теорема. *В алгебре Ли группы Пуанкаре аффинного лоренцева пространства* $\mathbb{R}^{1,n}$ *отношение объемов множеств матриц евклидовой нормы* $\leqslant r$, *экспонента которых задает соответственно эллиптическое или гиперболическое винтовое движение, равно* $(\sqrt{2})^{n-1} - 1$ *при всех* $r > 0$.

Следствие 1. *В пространстве Минковского специальной теории относительности случайный выбор эллиптических или гиперболических винтовых движений вблизи тождественного преобразования при равномерном распределении равновероятен.*

Следствие 2. *Доля гиперболических винтовых движений в общем объеме объединения эллиптических и гиперболических винтовых движений в малой шаровой окрестности единицы близка к* $1/(\sqrt{2})^{n-1}$ *и с ростом* n *уменьшается экспоненциально.*

Список литературы

[1] Churkin V. A., Ilin A. I., On random choice of elliptic and hyperbolic rotations of the Lorentz spaces, Siberian Electronic Math. Reports, 12 (2015), 955–971.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: churkin@math.nsc.ru

Об аксиоматическом ранге класса Леви квазимногообразия, порождённого конечной p-группой

С. А. Шахова

Для произвольного класса групп M обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(a)^G$ каждого элемента $a \in G$ принадлежит M. Класс $L(M)$ называется классом Леви, порождённым классом групп M.

А.И. Будкин установил в [**1**], что если M – квазимногообразие, то $L(M)$ также является квазимногообразием. Изучению классов Леви квазимногообразий нильпотентных групп посвящены работы [2–7]. В частности, в работе [**7**] возникли классы Леви квазимногообразий, порождённых конечными группами, заданные бесконечными системами квазитождеств.

Совокупность квазитождеств, задающих квазимногообразие, называется базисом этого квазимногообразия. Говорят, что квазимногообразие имеет бесконечный аксиоматический ранг, если его нельзя задать базисом от конечного числа переменных.

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$, и обозначим через F_2 свободную в многообразии нильпотентных ступени ≤ 2 групп экспоненты p группу ранга 2, а через $F_2 \wr G$ прямое сплетение группы F_2 с группой G. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Для произвольной конечной p-группы G класс Леви $L(qF_2 \wr G)$ имеет бесконечный аксиоматический ранг.*

Список литературы

[1] Будкин А.И. Квазимногообразия Леви, Сиб. матем. ж.,40, N 2 (1999), 266–270.

[2] Будкин А.И. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами, Алгебра и логика, 39, N 6 (2000), 635–647.

[3] Будкин А.И., Таранина Л.В., О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами, Сиб. матем. ж., 41, N 2 (2000), 270–277.

[4] Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8, Изв. Алт. гос. ун-та, 65, N 1/2 (2010), 42–45.

[5] Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами, Изв. Алт. гос. ун-та, 61, N 1 (2009), 26–29.

[6] Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами, Сиб. матем. ж., 51, N 6 (2010), 1359–1366.

[7] Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s, Алгнбра и логика, 50, N 1 (2011), 26–41.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: sashakhova@gmail.com

О группах содержащих группы диэдра

А. К. Шлепкин

Пусть X — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества X, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [1].

В приводимых ниже двух теоремах получено описание групп Шункова и периодических групп, насыщенных группами из множества конечных групп диэдра

Теорема (А.К. Шлепкин, А.Г. Рубашкин, 2007). *Группа Шункова, насыщенная конечными группами диэдра обладает периодической частью которая изомрфна локально диэдральной группе .*

Теорема (Л.С.Казарин, А. Амберг, 2010). *Периодическая группа, насыщенная конечными группами диэдра изомрфна локально диэдральной группе.*

Если отказаться от ограничений на группу, то имеют место следующий результат.

Теорема 1. *Группа, насыщенная конечными группами диэдра не является простой.*

В приводимой ниже теореме мы изменяем условие насыщенности на более сильное.

Теорема 2. *Группа G в которой любая собственная подгруппа лежит в в подгруппе группы G являющейся группой диэдра, имеет следующую структуру*

$$G = (C \times L) \leftthreetimes \langle v \rangle,$$

где C — циклическая группа без кручения, L — локально циклическая группа, v — инволюция, для любого $c \in C$ $c^v = c^{-1}$, для любого $l \in L$ $l^v = l^{-1}$.

Список литературы

[1] Шлепкин А.К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы, Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, (1993), 363.

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск
E-mail: ak.kgau@mail.ru

On free Burnside groups of period 3

H. T. Aslanyan, V. S. Atabekyan, A. E. Grigoryan

An automorphism ϕ of a group G is called a *normal automorphism*, if any normal subgroup of G is invariant under ϕ. Obviously, every inner automorphism is a normal automorphism. The converse is not true, in general. However, for some well known classes of groups it is proved that all their normal automorphisms are inner. This concerns, in particular, the non-cyclic absolutely free groups (A. Lubotzky), the free product of nontrivial groups (M.V. Neshchadim), the non-cyclic relatively hyperbolic group without non-trivial finite normal subgroups (A. Minasyan, D. Osin), the free Burnside groups $B(m,n)$ of any rank $m > 1$ and odd $n \geq 1003$ (V. Atabekyan).

Theorem. *Any normal automorphism of free Burnside group $B(m,3)$ of period 3 is inner for all rank $m \geq 3$.*

Interesting contrast of this result with the mentioned result on $B(m,n)$ for odd $n \geq 1003$ is that $B(m,3)$ is a finite group.

The well known Magnus's theorem state that if in a free group F the normal closures of $r \in F$ and $s \in F$ coincide, then r is conjugate to s or s^{-1}. We will say that a group G possesses the *Magnus property*, if for any two elements r, s of G with the same normal closures we have that r is conjugate to s or s^{-1}. In [**1**], [**2**], [**3**] proved that the fundamental group of any compact surface, except of the nonorientable surface of genus 3, possesses the Magnus property.

Theorem. *A free Burnside group $B(m,3)$ of any rank m has Magnus's property.*

References

[1] Howie J., Some results on one-relator surface groups, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10 (2004) 255–262.
[2] Bogopolski O., A surface groups analogue of a theorem of Magnus, Geometric methods in group theory, Contemp. Math. 372, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005) 59–69.
[3] Bogopolski O., A Magnus theorem for some one-relator groups V, Geometry and Topology Monographs, 14 (2008) 63–73.

Russian-Armenian University, Yerevan (Armenia)
E-mail: haikaslanyan@gmail.com
Yerevan State University, Yerevan (Armenia)
E-mail: avarujan@ysu.am, artgrigrau@gmail.com

On finite $4M$-groups

V. A. Belonogov

A finite group having exactly n classes of conjugate maximal subgroups (where n is a natural number) is called *nM-group*.

Finite nM-groups for $n \leq 3$ are known. Finite $1M$-groups are evidently primary cyclic. Finite $2M$-groups were described in 1964 by G. Pazderski [**1**]; in particular, these groups are biprimary. The detailed description of finite $3M$-groups (solvable and nonsolvable) obtained by the author [**2**] in 1986. In particular, a nonsolvable group G have exactly three classes of conjugate maximal subgroups if and only if $G/\Phi(G)$ is a simple group, isomorphic to $PSL_2(7)$ or $PSL_2(2^r)$ for a prime r.

The following theorems give description of the finite $4M$-groups which coincide with their commutant.

Theorem 1. *A finite simple group G is $4M$-group if and only if one of the following conditions holds:*

(1) $G \cong PSL_2(11)$;

(2) $G \cong PSL_2(p)$, *where p is a prime, $p > 3$ and $p \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$;*

(3) $G \cong PSL_2(p^{r^m})$, *where p, r are primes, $r > 2$ for $p > 2$, $m \in \mathbb{N}$ and $pm > 2$;*

(4) $G \cong PSL_3(3)$;

(5) $G \cong PSU_3(q)$, *where $q = 3$ or $q = 2^{2^m}$ with $m \in \mathbb{N}$;*

(6) $G \cong Sz(2^r)$, *where r is an odd prime.*

Theorem 2. *Let G be a finite nonsimple group which has not a normal maximal subgroups. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *G is $4M$-group and $\Phi(G) = 1$;*

(2) *$G = P \rtimes M$, where P is a minimal normal p-subgroup in G for some prime p, $M/\Phi(M)$ is isomorphic to $PSL_2(7)$ or $PSL_2(2^r)$ for some prime r, $M_G = 1$ and any complement to P in G is conjugate with M in G.*

Note that a variant of the theorem 1 was formulated in [**3**], but there one superfluous group is indicated.

References

[1] Pazderski G., Über maximal Untergruppen endlicher gruppen. Math. Nachr. 26 (1964) 307–319.

[2] Belonogov V. A., Finite groups with three classes of maximal subgroups. Mathematics of the USSR-Sbornik. 59 (1986) 223–236.

[3] Belonogov V., Finite groups with four classes of conjugate maximal subgroup. Groups and Graphs, Metrics and Manifolds, Ekaterinburg, 2017. P. 40.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

A criterion of k-closedness for quasiregular permutation groups

D. V. Churikov

Let G be a permutation group on a finite set Ω. Denote the set of orbits of the componentwise action of G on Ω^k by $\mathrm{Orb}(G, \Omega^k)$. Wielandt [**1**] defined the k-closure of G to be the group

$$G^{(k)} = \mathrm{Aut}(\mathrm{Orb}(G, \Omega^k)) = \{g \in \mathrm{Sym}(\Omega) \mid O^g = O, O \in \mathrm{Orb}(G, \Omega^k)\}.$$

A group is called k-closed if $G = G^{(k)}$. A permutation group is quasiregular if all its transitive components are regular. The goal of this talk is to introduce a criterion of k-closedness for quasiregular permutation groups (in particular, for abelian groups). This criterion improves a criterion of 2-closedness for some abelian permutation groups obtained in [**2**] as a corollary of the main result.

References

[1] H. Wielandt, Permutation groups through invariant relations and invariant functions, Lect. Notes Dept. Math. Ohio St. Univ., Columbus (1969).

[2] A. Zelikovskiĭ, The König problem for abelian permutation groups, Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk 1989, no. 5, 34–39, 125.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: churikovdv@gmail.com

On subgroups of a finitary linear group with the minimal condition on subgroups

O. Yu. Dashkova, M. A. Salim, O. A. Shpyrko

Let $FL_\nu(K)$ be a finitary linear group where K is a ring with the unit, ν is a linearly ordered set. $FL_\nu(K)$ is investigated in [1, 2]. In particular a finitary unitriangular group $UT_\nu(K)$ is studied in [2].

A group G satisfies the minimal condition on subgroups if there are no infinite strictly-descending chains of subgroups of G (§ 1.4 [3]). In this paper we investigated subgroups of $FL_\nu(K)$ satisfying the minimal condition on subgroups.

Let $A = \bigoplus_{i=1}^{\nu} A_i$, if ν is a nonlimited order, and $A = \bigoplus_{i<\nu} A_i$, if ν is a limited order, A_i is isomorphic to the additive group of K for any i. We consider A as an $FL_\nu(K)$-module. We believe that $G \neq C_G(A)$.

The main results of this paper are the theorems.

Theorem 1. *Let G be a subgroup of $FL_\nu(K)$, K be an integral ring. If G satisfies the minimal condition on subgroups, then G is a locally (abelian-by-finite) group.*

Theorem 2. *Let G be a subgroup of $FL_\nu(K)$, K be a commutative Noetherian ring. If G satisfies the minimal condition on subgroups, then G is a locally (abelian-by-finite) group.*

References

[1] Levchuk V.M. Some locally nilpotent rings and their adjoined groups. Mat. Zametki, 1987, vol. 42, no. 5, pp. 848–853.

[2] Merzlyakov Yu. I. Equisubgroups of unitriangular groups: A criterion for selfnormalizability. Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., 1995, vol. 50, no.3, pp. 507–511.

[3] Robinson D.J.S. Finiteness conditions and generalized soluble groups. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, part 1, 210 p.

The Branch of Moscow state university in Sevastopol, Sevastopol
E-mail: odashkova@yandex.ru
United Arab Emirates university, Al Ain (United Arab Emirates)

On finite groups isospectral to symplectic and orthogonal groups of small dimensions

M. A. Grechkoseeva

We write $\omega(G)$ for the set of orders of elements of a finite group G. Groups G_1 and G_2 are said to be isospectral if $\omega(G_1) = \omega(G_2)$. Recently it was proved that a finite group G satisfying $\omega(G) = \omega(L)$, where L is a finite nonabelian simple classical group of dimension at least 38, must be an almost simple group with socle isomorphic to L (see [**1**] for details). The bound 38 is certainly not strict, and we conjecture that the implication holds for all classical groups of dimension at least 5 except $PSU_5(2)$, $PSp_8(q)$ and $\Omega_9(q)$.

This talk is concerned with finite groups isospectral to $PSp_6(q)$, $\Omega_7(q)$, $P\Omega_8^+(q)$ or $PSp_8(q)$. If L is one of the fist three groups with $q > 3$ and G is a finite group isospectral to L, then by earlier results, either G is an almost simple group with socle L, or G has a nonabelian composition factor isomorphic to a group of Lie type in characteristic coprime to q. Our first aim is to discuss how to eliminate the latter possibility (joint work with A. V. Vasil'ev and M. A. Zvezdina). Also it was known that a finite group G with $\omega(G) = \omega(PSp_8(q))$ either is an almost simple group with socle $PSp_8(q)$, or has $P\Omega_8^-(q)$ as a composition factor. Our second aim is to show that for all $q \neq 7^m$, finite groups isospectral to $PSp_8(q)$ and having $P\Omega_8^-(q)$ as a composition factor do exist.

References

[1] A.M. Staroletov, On almost recognizability by spectrum of simple classical groups, Int. J. Group Theory, 2017, v. 6, no. 4, 7–33.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: grechkoseeva@gmail.com

Recent progress in the classification of finite simple groups in which the subgroups of odd index are pronormal

A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin

According to Ph. Hall, a subgroup H of a group G is said to be *pronormal* in G if H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g\rangle$ for every $g \in G$. Some problems in combinatorics and permutation group theory were solved in terms of the pronormality. Obvious examples of pronormal subgroups are normal subgroups, maximal subgroups, and Sylow subgroups of finite groups; Sylow subgroups of proper normal subgroups of finite groups; Hall subgroups of finite solvable groups.

In [**1**] Vdovin and Revin proved that the Hall subgroups are pronormal in all finite simple groups and, basing on the analysis of the proof, they conjectured that the subgroups of odd index are pronormal in finite simple groups. The conjecture was verified for many families of finite simple groups in [**2**]. Namely, it was proved that the subgroups of odd index are pronormal in the following finite simple groups: A_n, where $n \geq 5$; sporadic groups; groups of Lie type over fields of characteristic 2; $PSL_{2^n}(q)$; $PSU_{2^n}(q)$; $PSp_{2n}(q)$, where $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$; $P\Omega_{2n+1}(q)$; $P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$; exceptional groups of Lie type not isomorphic to $E_6(q)$ or ${}^2E_6(q)$. In [**3, 4**] it was proved that the conjecture fails. Precisely, if $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ and $n \notin \{2^m, 2^m(2^{2k}+1) \mid m, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$, then the finite simple symplectic group $PSp_{2n}(q)$ contains a non-pronormal subgroup of odd index. Moreover, in [**4**] it was proved that the subgroups of odd index are pronormal in groups $G = PSp_{2^n}(q)$ with $n \geq 2$ and $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

In this talk we discuss a recent progress in the classification of finite simple groups in which the subgroups of odd index are pronormal.

The second author was partially supported by the grant of the President of Russian Federation for young scientists (grant no. MK-6118.2016.1). The third author was partially supported by CAS PIFI (grant no. 2016VMA078).

References

[1] Vdovin E. P., Revin D. O., Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups // Sib. Math. J. 2012. Vol. 53, no. 3. P. 419–430.

[2] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On the pronormality of subgroups of odd indices in finite simple groups // Sib. Math. J. 2015. Vol. 56, no. 6. P. 1101–1107.

[3] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 296, Suppl. 1. P. 1145–1150.

[4] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple symplectic groups // Sib. Math. J. 2017. Vol. 58, no. 3. P. 467–475.

IMM UB RAS, UrFU, Yekaterinburg
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru
IM SB RAS, NSU, Novosibirsk
E-mail: danila.revin@gmail.com

Retracts of group of unitriangular matrices over a ring

A. A. Konyrkhanova, M. K. Nurizinov, R. K. Tyulyubergenev, N. G. Khisamiev

A retract of a group G is a subgroup H, for which there exists an endomorphism $\rho : G \to H$, which the identity on H.Such an endomorphism is called a retractive endomorphism. Any idempotent endomorphism $\rho : G \to G$, $\rho^2 = \rho$, provides a retraction of the group G on the subgroup $\rho(G)$.

Theorem 1. An Abelian subgroup H of the group $G = UT_n(Z)$, $n \geq 3$ is a retract of the group G if and only if there exist matrices $g^{(i)} \in G, i < n-1$ and a number $s \leq [\frac{n}{2}]$ such that the determinant

$$\triangle = \begin{vmatrix} g_{12}^{(0)} & g_{12}^{(1)} & \cdots & g_{12}^{(n-2)} \\ g_{23}^{(0)} & g_{23}^{(1)} & \cdots & g_{23}^{(n-2)} \\ . & . & . & \\ g_{n-1,n}^{(0)} & g_{n-1,n}^{(1)} & \cdots & g_{n-1,n}^{(n-2)} \end{vmatrix} = \pm 1 \text{ and } H = \left(g^{(0)}\right) \oplus ... \oplus \left(g^{(s-1)}\right).$$

Theorem 2. Let K – be a commutative and associative unit ring with identity such that its additive group K^+ is locally cyclic and torsion-free. Then any retract H of the group $G = UT_3(K)$ is isomorphic to K^+.

Corollary 1. Any retract of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ is a pure cyclic subgroup of it.

Corollary 2. A subgroup H of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ is a retract of it if and only if there exists a matrix $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ such that $H = (h)$ and the numbers h_{12} and h_{23} are coprime.

Corollary 3. There is an algorithm that for any subgroup A of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ determines whether or not A is a retract of it.

Theorem 3. A subgroup H of the group $G = UT_3(\mathbb{Z})$ is a transvectional retract if and only if either $H = (t_{12})$ or $H = (t_{23})$,where the each t_{ij} – is a transvection.

Theorem 4. A subgroup H of the group $G = UT_3(\mathbb{Z})$ is an essentially standard retract if and only if $H = (h)$ and it holds either $h_{12} = 1$ or $h_{23} = 1$.

Corollary 4. A subgroup H of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ is not an essentially standard retract of the group G if and only if there is an element $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ such that numbers h_{12} and h_{23} are different from 1 and greatest common factor of these numbers are equal to 1.

Corollary 5. There is an algorithm that for any subgroup H of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ determines whether H is transvectional retract or essential retract of the group $UT_3(\mathbb{Z})$.

References

[1] Myasnikov A., Roman'kov V., Verbally closed subgroups of free groups // J.Group Theory, 2014, N. 17, 29–40.

[2] Roman'kov V.A., Khisamiev N.G., Verbally and existentially closed subgroups of free nilpotent groups // Algebra and logic, 2013, V.4, N. 52, 502–525.

D. Serikbaev East-Kazakhstan state technical university, Ust-Kamenogorsk (Kazakhstan)
E-mail: hisamiev@mail.ru, ErkeshanK@mail.ru

Cameron—Liebler line classes in PG(n, 5)

I. A. Matkin

Let $\mathrm{PG}(n, q)$ denote the n-dimensional projective space over the finite field $\mathbb{F}_q$ with q elements. Let A be the point-line incidence matrix of $\mathrm{PG}(n, q)$, i.e., the rows of A are indexed by the set of points of $\mathrm{PG}(n, q)$, its columns are indexed by the set of lines, and $(A)_{p,\ell} = 1$ if $p \in \ell$, and $(A)_{p,\ell} = 0$ otherwise. We consider A as a matrix over $\mathbb{Q}$, and let $\mathsf{row}(A)$ denote the row space of A.

A set $\mathcal{L}$ of lines of $\mathrm{PG}(n, q)$ is called a *Cameron-Liebler line class* [**4**], [**9**] if its characteristic vector $\chi_{\mathcal{L}}$ satisfies $\chi_{\mathcal{L}} \in \mathsf{row}(A)$. In their study of collineation groups of $\mathrm{PG}(n, q)$, $n \geq 3$, that have equally many orbits on lines and on points, Cameron and Liebler [**3**] showed that a line orbit of such a group should enjoy this property.

An empty set of lines, the set $\mathsf{Line}(H)$ of all lines in a hyperplane H or, dually, the set $\mathsf{Star}(P)$ of all lines through a point P, and $\mathsf{Star}(P) \cup \mathsf{Line}(H)$ provided that $P \notin H$ are examples of Cameron-Liebler line classes. It was conjectured in [**3**] that, up to their complements, these are the only Cameron-Liebler line classes. (This would imply two stronger conjectures from [**3**] regarding the structure of symmetric tactical decompositions of $\mathrm{PG}(n, q)$, see [**2**], and the collineation groups of $\mathrm{PG}(n, q)$ with the same number of point and line orbits, see [**1**].)

The conjecture turned out to be wrong (at least) in $\mathrm{PG}(3, q)$: the first counterexample was found by Drudge [**5**], and many more examples have been found during the last decade [**2**], [**6**]. It, however, remains open in $\mathrm{PG}(n, q)$ with $n > 3$.

For given q, one can verify the conjecture in $\mathrm{PG}(n, q)$ for all $n > 3$ provided that a complete list of Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3, q)$ is known, see [**4**], [**8**] for $q \in \{3, 4\}$. Recently we [**7**] determined a complete list of Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3, 5)$. Building on this result, we verify the conjecture in $\mathrm{PG}(n, 5)$ for $n > 3$.

References

[1] Bamberg J.,Penttila T., Overgroups of cyclic Sylow subgroups of linear groups. *Comm. Alg.* **36** (2008) 2503–2543.

[2] De Beule J., Demeyer J., Metsch K., Rodgers M., A new family of tight sets in $Q^+(5, q)$. *Des. Codes Cryptogr.* **78** (2016) 655–678.

[3] Cameron P.J., Liebler R.A., Tactical decompositions and orbits of projective groups. *Linear Algebra Appl.* **46** (1982) 91–102.

[4] Drudge K., Extremal sets in projective and polar spaces. *Ph.D. Thesis*, University of Western Ontario, 1998.

[5] Drudge K., On a conjecture of Cameron and Liebler. *European J. Combin.* **20(4)** (1999) 263–269.

[6] Gavrilyuk A.L., Matkin I., Penttila T., Derivation of Cameron-Liebler line classes. *Des. Codes Cryptogr.* (2017).

[7] Gavrilyuk A.L., Matkin I., Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3, 5)$, in preparation.

[8] Gavrilyuk A.L., Mogilnykh I.Yu., Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(n, 4)$. *Des. Codes Cryptogr.* **73(3)** (2014) 969–982.

[9] Penttila T., Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3, q)$. *Geom. Dedicata* **37(3)** (1991) 245–252.

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk
E-mail: ilya.matkin@gmail.com

Special and general linear groups over some fields do not possess the R_∞-property

T. Nasybullov

Let G be a group and φ be an endomorphism of G. Elements x, y from G are called *φ-conjugated* if there exists an element $z \in G$ such that $x = zy\varphi(z)^{-1}$. The relation of φ-conjugation is an equivalence relation and it divides G into *φ-conjugacy classes*. The number $R(\varphi)$ of these classes is called *the Reidemeister number of the endomorphism φ*. The Reidemeister number is either a positive integer or infinity and we do not distinguish different infinite cardinal numbers denoting all of them by the symbol ∞. The set $\{R(\varphi) \mid \varphi$ is an automorphism of $G\}$ is called *the Reidemeister spectrum of G* and is denoted by $Spec_R(G)$. If $Spec_R(G) = \{\infty\}$, then G is said to *possess the R_∞-property*.

The problem of determining groups which possess the R_∞-property was formulated by A. Fel'shtyn and R. Hill [**1**]. Some aspects of the R_∞-property, namely, relation with nonabelian cohomology, relation with isogredience classes and relation with representation theory can be found in [**3**].

The author studied conditions which imply the R_∞-property for different linear groups. In particular, it was proved that special linear group $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ and general linear group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ over a field $\mathbb{F}$ of zero characteristic possess the R_∞-property if $\mathbb{F}$ is an algebraically closed field of zero characteristic which has finite transcendence degree over $\mathbb{Q}$ [**2, 5**], or if the auromorphism group of $\mathbb{F}$ is periodic [**2, 4**]. Some fields of zero characteristic with infinite transcendence degree over $\mathbb{Q}$ have periodic groups of automorphisms, however, if $\mathbb{F}$ is an algebraically closed field of zero characteristic which has infinite transcendence degree over $\mathbb{Q}$, then it always has an automorphism of infinite order. So, the case of linear groups over algebraically closed fields of zero characteristic with infinite transcendence over $\mathbb{Q}$ is absolutely not studied.

In the talk we are going to discuss twisted conjugacy classes and the Reidemeister spectrum for special linear group $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ and general linear group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of zero characteristic which has infinite transcendence degree over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$.

References

[1] Fel'shtyn A., Hill R., The Reidemeister zeta function with applications to Nielsen theory and a connection with Reidemeister torsion, K-Theory, 8(4), 1994, 367–393.

[2] Fel'shtyn A., Nasybullov T., The R_∞ and S_∞ properties for linear algebraic groups, J. Group Theory, 19(5), 2016, 901–921.

[3] Fel'shtyn A., Troitsky E., Aspects of the property R_∞, J. Group Theory, 18(6), 2015, 1021–1034.

[4] Nasybullov T., Twisted conjugacy classes in general and special linear groups, Algebra and Logic, 51(3), 2012, 220–231.

[5] Nasybullov T., Twisted conjugacy classes in Chevalley groups, Algebra Logic, 53(6), 2014, 481–501.

KU Leuven, Campus Kulak, Kortrijk (Belgium)
E-mail: timur.nasybullov@mail.ru

Commutant of Sylow 2-subgroups of alternating group and minimal generating sets of Syl_2A_n

R. V. Skuratovskii

The aim of this investigation is to research the structure of a commutant and a centralizer of Sylow 2-subgroups from Syl_2A_n and Syl_2S_n and find numbers of minimal generating sets for $Syl_2S_{2^k}$ and Syl_2A_n. Let us denote by $X^{[k]}$ a regular truncated binary rooted tree with number of levels from 0 to k, where $X=\{0,1\}$. The set $X^n \subset X^*$ is called the n-th level of the tree X^* and $X^0=\{v_0\}$. The vertex of X^j having the number i we denote by $v_{j,i}$ also we denote by $v_{j,i}X^{[k-j]}$ the subtree of $X^{[k]}$ with a root in $v_{j,i}$. Let $n=2^{k_0}+2^{k_1}+...+2^{k_m}$, where $0 \le k_0 < k_1 < ... < k_m$ and $m \ge 0$. Recall that $Syl_2S_n = Syl_2S_{2^{k_0}} \times ... \times Syl_2S_{2^{k_m}}$.

Theorem. *The centralizer of $Syl_2A_{2^{k_i}}$ with $k_i > 2$, in Syl_2A_n is isomorphic $Syl_2A_{2^{k_0}} \times \ldots \times Syl_2A_{2^{k_{i-1}}} \times Syl_2A_{2^{k_{i+1}}} \times \ldots \times Syl_2A_{2^{k_m}} \times Z(Syl_2A_{2^{k_i}})$.*

Lemma. *For arbitrary $g \in Syl_2A_{2^{k_i}}$ the following inclusion holds $g^2 \in (Syl_2A_{2^{k_i}})'$.*

Theorem. *The set of commutators K of Sylow 2-subgroup $Syl_2A_{2^k}$ of the alternating group A_{2^k} is the commutant of $Syl_2A_{2^k}$.*

We will call ***diagonal base*** [**1, 2**] (S_d) for $Syl_2S_{2^k} \simeq AutX^{[k]}$ a generating set that has the on each level only one non trivial v.p. [**1**]. A number of no trivial v.p. that can be on X^j is odd and equal to 2^{j-1}. Thus, general cardinality of S_d for $Syl_2S_{2^k}$ is 2^{2^k-k-1}. There is minimum one permutation of type `T` [**1**] in S_d for $Syl_2A_{2^k}$. It can be chosen in $(2^{n-2})^2$ ways. Thus, general cardinality of S_d for $Syl_2A_{2^k}$ is $2^{2^{k-1}-k-2}(2^{n-2})^2$. The cardinality of all bases for $Syl_2S_{2^k}$ is equal to $2^{k(2^k-k-1)} \cdot (2^k-1)(2^k-2)(2^k-2^2)...(2^k-2^{k-1})$. Hence this bases can be applied in cryptography [**2**].

Theorem. *Any minimal set of generators for Syl_2A_n has $\sum\limits_{i=0}^{m} k_i - 1$ generators, if $m>0$, and it has k_0 generators, if $m=0$.*

References

[1] Skuratovskii R. V., Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups. Source: https://arxiv.org/pdf/1702.05784.pdf, 2017.

[2] Pawlik B., The action of Sylow 2-subgroups of symmetric groups on the set of bases and the problem of isomorphism of their Cayley graphs. Algebra and Discrete Mathematics. (2016), Vol. 21, N. 2, pp. 264-281.

[3] Myasnikov A.G., Shpilrain V., Ushakov A., A practical attack on some braid group based cryptographic protocols, Springer Lect., Notes Comp. (2005), Sc. 3621, pp. 86-96.

[4] Skuratovskii R. V. Corepresentation of a Sylow p-subgroup of a group S_n. Cybernetics and systems analysis, volume 1, (2009), pp. 27-41.

[5] Drozd Y. A., Skuratovskii R. V. Generators and and relations for wreath products. Ukr. Math. J., vol. 60., No. 7, (2008), pp. 1168–1171.

MAUP, Kiev (Ukraine)
E-mail: ruslan@imath.kiev.ua

V. Секция «Теория колец»

Деривации в групповых алгебрах

А. Арутюнов

Доклад основан на совместных результатах с профессором А. С. Мищенко и А. И. Штерном.

Будет рассмотен достаточно известный вопрос, восходящий к таким математикам как Б. Джонсон и В. Лозер, а именно описание алгебры дериваций в некоммутативной алгебре, например в групповой алгебре, порожденной некоторой бесконечной некоммутативной дискретной группой G. Под деривацией подразумевается линейное отображение $C[G] \to C[G]$, удовлетворяющее правилу Лейбница $d(uv) = d(u)v + ud(v)$. Фактически, этот вопрос равносилен описанию первых когомологий Хохшильда. Более точно, интересует описание дериваций по модулю внутренних, то есть задающихся по формуле $x \to [a, x]$.

В докладе будет предложен категорный подход к данной задаче. Идея состоит в рассмотрении группоида Γ, ассоциированного с действием сопряжениями. Оказывается, что деривации задаются характерами на данном группоиде (т.е. комплекснозначными отображениями $\chi : Mor(\Gamma) \to C$, удовлетворяющим условию $\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\psi) + \chi(\phi)$ для пар морфизмов, между которыми возможна композиция).

Данный подход позволяет получить следующие результаты. Описание дериваций в комбинаторных терминах группы G, что позволяет применять инструментарий комбинаторной теории групп. Достаточные условия нетривиальности алгебры внешних дериваций. Удается детально описать алгебру дифференцирований для некоторых нетривиальных примеров, например для групповой алгебры группы Гейзенберга.

Кроме того, при помощи данного подхода упрощаются доказательства некоторых хорошо известных фактов, например тривиальность алгебры внешних дифференцирований на конечных алгебрах.

Также, при исследовании данного вопроса, возникают некоторые естественные примеры 2-категорий и некоторые дополнительные связи с категорными структурами.

МФТИ, Москва

Тернарные композиционные алгебры

А. Т. Гайнов

В работе вводится в рассмотрение новый класс алгебр.

Определение. Алгебру A над полем F, $char \neq 2$, назовём *тернарной композиционной алгеброй* (кратко, ТК-алгеброй), если на ней задана невырожденная симметрическая билинейная форма $n(x, y)$, такая что

$$n(xy, zt) = n(x, y) \cdot n(z, t)$$

для всех $x, y, z, t \in A$.

Композиционные алгебры и монокомпозиционные алгебры являются тернарными композиционными алгебрами. ТК-алгебры существуют любой конечной размерности и бесконечной размерности.

Теорема. *Существуют лишь следующие двумерные ТК-алгебры над полем $F = C$ комплексных чисел:*

Случай 1. $bas\ A = \{e_1; e_2\}$; $n(e_1; e_2) = 1$; $n(e_1; e_1) = 0 = n(e_2; e_2)$;

$$e_1e_1 = 0;\ e_2e_2 = 0;\ e_2e_1 = e_1e_2 = e_1 + e_2.$$

(Это алгебра $A^{(1)}$.)

Случай 2. $bas\ A = \{e_1; e_2\}$; $n(e_1; e_1) = 1$; $n(e_2; e_2) = 1$; $n(e_1; e_2) = 0$;

$$e_1e_2 = 0;\ e_2e_1 = 0;\ e_2e_2 = e_1e_1.$$

(Это — во всех алгебрах Случая 2.)

Семейство $A^{(2)}$: $e_1e_1 = +e_1$.
Семейство $A^{(3)}$: $e_1e_1 = -e_1$.
Семейство $A^{(4)}$: $e_1e_1 = +e_2$.
Семейство $A^{(5)}$: $e_1e_1 = -e_2$.
Семейство $A^{(6)}$: $e_1e_1 = \alpha_{11}e_1 + \beta_{11}e_2$.

$$0 < \alpha_{11} < 1;\ 0 < |\beta_{11}| < 1;\ (\beta_{11})^2 = 1 - (\alpha_{11})^2.$$

Две алгебры, принадлежащие различным семействам, будут неизоморфными.

ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: gainov@math.nsc.ru

Симметричные сечения некоторых вещественно замкнутых подполей поля формальных степенных рядов

Н. Ю. Галанова

Пусть G — линейно упорядоченная делимая абелева группа, β — регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ = cf(G) = |G|$, $\mathbb{R}[[G,\beta]]$ — поле ограниченных формальных степенных рядов $x = \sum\limits_{g\in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbb{R}, supp(x) = \{g \in G | r_g \neq 0\}$ — вполне антиупорядоченное подмножество группы G, $|supp(x)| < \beta$. Так как $\beta^+ = cf(G)$, найдётся $\Gamma = \{g_\gamma\}_{\gamma\in\beta^+}$ — подмножество группы G такое, что отображение $\gamma \mapsto g_\gamma$ задаёт инверсное подобие кардинала β^+ и множества Γ. Зададим ряд $x_{\beta^+} = \sum\limits_{g\in\Gamma} 1g$, $x_{\beta^+} \in \mathbf{R}[[G]] \backslash \mathbf{R}[[G,\beta^+]]$. Для каждого γ, $\beta \leq \gamma < \beta^+$ обозначим через $x_\gamma = \sum\limits_{g_\delta\in\Gamma,\delta>\gamma} 1g_\delta$ усечение ряда x_{β^+}. Полагаем $H = \bigcup\limits_{\beta\leq\gamma<\beta^+} \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$ — объединение вещественных замыканий простых трансцендентных расширений поля $\mathbb{R}[[G,\beta]]$.

Сечение (A,B) упорядоченного поля F называется симметричным (по Пестову), если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$ и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 - (b - b_1)) \in A$.

С использованием результатов [**1, 2, 3**], в данной работе продолжается исследование симметричных сечений вещественно замкнутых полей.

Теорема. *$\overline{H(x_{\beta^+})} \setminus H \neq \emptyset$ и каждый элемент разности $\overline{H(x_{\beta^+})} \setminus H$ порождает в поле H симметричное сечение конфинальности β^+.*

Список литературы

[1] Галанова Н. Ю., Пестов Г. Г., Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов. Алгебра и логика, 2008, Т. 47, N 2, 174-185.

[2] Shelah S., Quite Complete Real Closed fields. Israel Journal of Mathematics 142 (2004): 261-272.

[3] Kuhlmann F.-V., Kuhlmann S., Marshall M., Zekavat M., Embedding ordered fields in formal power series fields. Journal of Pure and Applied Algebra Volume 169, Issue 1 (2002), P. 71-90.

ТГУ, Томск
E-mail: galanova@math.tsu.ru

О проектированиях полупростых алгебр Ли

А. Г. Гейн

Вопрос о том, какие абстрактные свойства алгебры определяются её решёткой подалгебр, относится к числу классических вопросов современной алгебры. Для конечномерных алгебр Ли вопросы о решеточной определяемости свойств разрешимости и полупростоты алгебры сначала были решены для алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 (Д. Барнс, 1964), над полем действительных чисел (М. Гото, 1969) и, наконец, над произвольным полем характеристики 0 (А. Г. Гейн, 1978). В частности, в [**1**] показано, что в классе конечномерных алгебр Ли над полем характеристики 0 среди всех полупростых алгебр трёхмерные простые нерасщепляемые и только они допускают проектирование (решёточный изоморфизм) на разрешимую алгебру Ли. Для полей простой характеристики вопрос оказался намного сложнее из-за отсутствия достаточно развитой структурной теории простых и полупростых алгебр. Нами получен следующий результат.

Теорема. *Пусть L — локально конечномерная полупростая алгебра Ли над совершенным полем F простой характеристики $p, p > 3$. Если L отлична от трёхмерной простой нерасшепляемой, то алгебра, решёточно изоморфная алгебре L, также полупроста.*

Список литературы

[1] Гейн А.Г., Проектирования алгебр Ли характеристики 0 // Изв. вузов. Математика, 4 (1978), 26–31.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: A.G.Geyn@urfu.ru

О конечных ассоциативно-коммутативных кольцах с модулярной решеткой подколец

А. Г. Гейн, Е. А. Чайка

Хорошо известно описание конечных групп с модулярной решёткой подгрупп [**1**]. Однако аналогичный вопрос для конечных ассоциативных колец даже в коммутативном случае практически не исследован. Отметим только, что в [**2**] было получено исчерпывающее описание колец с дистрибутивной решёткой подколец. Ниже через $GF(p^n)$ обозначено поле Галуа, содержащее p^n элементов, где p — простой число, а n натуральное; через $\mathbb{Z}_n$ обозначено кольцо вычетов по модулю n.

Теорема 1. *Решётки подколец* $GF(p^{q^{n-1}})\times GF(p)$ *и* $\mathbb{Z}_{p^n}\times\mathbb{Z}_p$*, где* p *и* q *— простые числа, а* n *натуральное, модулярны, но не дистрибутивны.*

В обозначениях теоремы 1 имеет место

Теорема 2. *Решётки подколец* $GF(p^{q^{n-1}})\times GF(p)$ *и* $\mathbb{Z}_{p^n}\times\mathbb{Z}_p$ *дуальны друг другу.*

Отметим, что согласно [**2**] решетка подколец кольца $GF(p^n)\times GF(q^m)$ для $p\neq q$ дистирибутивна при любых натуральных n и m. Поскольку для взаимно простых n и m кольцо $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_{nm}$, решётка подколец кольца $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$ также дистрибутивна.

Список литературы

[1] Iwasawa K., Über die endlichen Gruppen und die Verband ihrer Untergruppen. J. Univ. Tokio, v. 4, 3 (1941), p. 171–199.

[2] Фрейдман П.А., Кольца с дистрибутивной структурой подколец, Матем. сб., т. 73(115), 4 (1967), с. 513–534.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: A.G.Geyn@urfu.ru, Lena-chajka@yandex.ru

О мере включения градуированных подпространств

А. В. Гришин

Пусть $V = V_1 \bigoplus \ldots \bigoplus V_i \bigoplus \ldots$ — бесконечная прямая сумма конечномерных векторных пространств, причем $\dim V_{i+1} > \dim V_i > 0$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$. Любое однородное подпространство в V, имеющее вид $U = U_1 \bigoplus \ldots \bigoplus U_i \bigoplus \ldots$, где $0 \neq U_i \subset V_i$, назовем *градуированным*. Пусть $W = W_1 \bigoplus \ldots \bigoplus W_i \bigoplus \ldots$ — другое градуированное подпространство и $W_i \subset U_i$. Назовем *мерой включения* W *в* U предел (если он существует)

$$\mu(W, U) = \lim_{n\to\infty} \dim W_n / \dim U_n.$$

Пусть $V = M(F)$ — *полилинейная часть* относительно свободной счетнопорожденной ассоциативной алгебры $F = k < x_1, \ldots, x_i, \ldots >$ некоторого многообразия над бесконечным полем k характеристики $\neq 2, 3$, т.е. $V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — подпространство в F полилинейных многочленов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим градуированные подпространства $D_m = \bigoplus_{n=1}^{\infty}([F, F]^m \cap F_n)$ и $M(Z(F)) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_n$, где $[F, F]$ — T-пространство, порожденное коммутатором $[x_1, x_2]$, $Z(F)$ — центр алгебры F, а $Z_n = Z(F) \cap F_n$.

Всюду ниже $F = F^{(l)}$ — относительно свободная алгебра многообразия, заданного длинным коммутатором $[x_1, \ldots, x_l]$.

В [1, 2] дано полное описание центра $Z(F)$ при $l = 3$ и 4 с помощью $[F, F]$ и $[F, F]^2$. В [3, 4] начато исследование центра $F^{(l)}$ при $l \geq 5$.

Теорема. *Если* $F = F^{(3)}$, *то* $\mu\big(D_m, M(F)\big) = \mu\big(M(Z(F)), M(F)\big) = 1/2$.

Если $F = F^{(4)}$ *и* k *— поле нулевой характеристики, то*

$$\mu\big(D_m, M(F)\big) = \mu\big(M(Z(F)), M(F)\big) = 1/2.$$

Нулевая характеристика в случае $l = 4$ нужна в доказательстве, так как для оценки размерностей используются диаграммы Юнга. Весьма вероятно, что данный факт имеет место и при более широких предположениях.

Оценка меры включения m-й степени T-пространства $[F, F]$ и центра алгебры F в пространство $M(F)$ при $l \geq 5$ — интересная нерешенная задача. Аналогичные вопросы можно ставить и для других относительно свободных алгебр.

Список литературы

[1] Гришин А. В. О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана. Успехи мат. наук, **65**:4 (2010), 191–192.

[2] Гришин А. В. О центре относительно свободной лиевски нильпотентной алгебры индекса 4. Матем заметки, **91**:1 (2012), 42–45.

[3] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности. Матем. сб., **206**:11 (2015), 113–130.

[4] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6. Матем. сб., **207**:12 (2016), 3–21.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Ручные и дикие автоморфизмы алгебры дифференциальных многочленов ранга 2

Б. А. Дуйсенгалиева, А. С. Науразбекова, У. У. Умирбаев

Кольцо R называется дифференциальным кольцом [**1**] или Δ-кольцом, если на R определено множество коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$. Пусть $\mathbf{k}$ – дифференциальное поле характеристики 0 и $\mathbf{k}\{x, y\}$ – алгебра дифференциальных многочленов над $\mathbf{k}$ от двух переменных x, y. Если $|\Delta| = 0$, то $\mathbf{k}\{x, y\}$ становится алгеброй многочленов $\mathbf{k}[x, y]$ и все автоморфизмы $\mathbf{k}[x, y]$ – ручные [**2, 3**]. Более того, группа автоморфизмов алгебры $\mathbf{k}[x, y]$ имеет хорошо известное представление в виде амальгамированного свободного произведения [**3, 4**].

В данной работе мы покажем, что группа ручных автоморфизмов алгебры $\mathbf{k}\{x, y\}$ допускает структуру амальгамированного свободного произведения для любого множества дифференцирований Δ. Кроме того, используя эту структуру, мы даем пример дикого автоморфизма алгебры $\mathbf{k}\{x, y\}$ при $|\Delta| \geq 2$. Этот пример является аналогом известного автоморфизма Аника [**5**, стр. 398].

Вопрос о ручных и диких автоморфизмах алгебры $\mathbf{k}\{x, y\}$ остается открытым при $|\Delta| = 1$.

Список литературы

[1] Kolchin E.R., Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure and Applied Mathematics. 54. Academic Press, New York-London (1973).

[2] Jung H.W.E., Uber ganze birationale Transformationen der Ebene. J. reine angew. Math. 184 (1942), 161–174.

[3] Van der Kulk W., On Polynomial Rings in Two Variables. Nieuw Archief voor Wiskunde (3)1 (1953), 33–41.

[4] Nagata M., On Automorphism Group of $\mathbf{k}[x, y]$, Lectures in Math., Kyoto Univ., No. 5 (1972) Kinokuniya-Tokyo.

[5] Cohn P.M., Free ideal rings and localization in general rings. New Mathematical Monographs, 3. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана (Казахстан)
E-mail: bibinur.88@mail.ru, altyngul.82@mail.ru
Wayne State University, Detroit (USA)

О конструкции Херстейна для почти конечномерных супералгебр

В. Н. Желябин, А. С. Панасенко

Для супералгебры B стандартным образом определяется супералгебра $B^{(+)_s}$ с суперсимметризованным произведением. При переходе от ассоциативной супералгебры B к йордановой супералгебре $B^{(+)_s}$ сохраняется ряд свойств исходной супералгебры. Например, сохраняется простота [**1**] (это утверждение известно под названием конструкции Херстейна). Для полупервичных супералгебр нами получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $B = A + M$ — полупервичная ассоциативная супералгебра, причем B не является коммутативной алгеброй, I — ненулевой идеал супералгебры $B^{(+)_s}$, содержащийся в M. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $I[M, M] = [M, M]I = 0$

2. $MI + M^2I$ *— собственный ненулевой идеал супералгебры B и* $MI + M^2I \subseteq Z(B)$,

3. $[B, B](MI + M^2I)^2 = 0$.

Определение. Супералгебра называется *почти конечномерной*, если она имеет бесконечную размерность, но каждый ее ненулевой идеал имеет конечную коразмерность.

Почти конечномерные ассоциативные алгебры изучались во многих работах, например, в [**2**]. Сохранение свойства почти конечномерности при переходе от ассоциативной алгебры к алгебре с симметризованным произведением отмечено в [**3**]. Нами доказан аналог этого результата для супералгебр.

Теорема 2. *Пусть $B = A + M$ — почти конечномерная ассоциативная супералгебра, не являющаяся коммутативной алгеброй. Тогда $B^{(+)_s}$ — почти конечномерная йорданова супералгебра.*

Работа поддержана РНФ (проект 14-21-00065).

Список литературы

[1] Gomez-Ambrosi C., Montaner F., On Herstein's Constructions Relating Jordan and Associative Superalgebras, Comm. in Algebra, vol. 28, No. 8, 2000, pp. 3743-3762.

[2] Farkas D.R., Small L.W., Algebras which are nearly finite dimensional and their identities, Israel J. Math, 127 (2002) 245-251.

[3] Pendergrass-Rice C., Extending a theorem of Herstein, available at: arxiv.org/pdf/0710.5545v1, 2007.

Институт Математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: tom-anjelo@mail.ru

О группе обратимых элементов конечных коммутативных локальных колец характеристики p

Е. В. Журавлев

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными и содержат единицу. Пусть $J = J(R)$ и R^* соответственно радикал Джекобсона и мультипликативная группа обратимых элементов кольца R, $F = GF(p^r)$ – конечное поле (p – простое число, $r \in \mathbb{N}$) и $\mathbb{Z}_n$ – кольцо классов вычетов по модулю n. Выражением $(\mathbb{Z}_n)^m$ обозначим прямое произведение $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \ldots \times \mathbb{Z}_n$ из m циклических групп порядка n ($m, n \in \mathbb{N}$).

Кольцо R называется локальным, если $R/J = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал J и всякий элемент кольца является либо обратимым, либо нильпотентным.

Теорема 1. *Пусть R – коммутативное локальное кольцо характеристики p,*

$$\dim_F J/J^2 = 3,\ \dim_F J^2/J^3 = 1,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

Тогда

(1) *если $p = 2$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times (\mathbb{Z}_4^r)^2 \times \mathbb{Z}_2^r$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_4^r \times (\mathbb{Z}_2^r)^3$;*

(2) *если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times (\mathbb{Z}_3^r)^3$;*

(3) *если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$.*

Теорема 2. *Пусть R – коммутативное локальное кольцо характеристики p,*

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

Тогда

(1) *если $p = 2$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times (\mathbb{Z}_4^r)^2 \times \mathbb{Z}_2^r$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_4^r \times (\mathbb{Z}_2^r)^3$;*

(2) *если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times (\mathbb{Z}_3^r)^3$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times (\mathbb{Z}_3^r)^5$;*

(3) *если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$.*

Список литературы

[1] Zhuravlev E.V., On unit group of a finite local rings of characteristic p, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 362–371.

[2] Zhuravlev E.V., On unit group of a finite local rings with 4-nilpotent radical of Jacobson, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 552–567.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: evzhuravlev@mail.ru

О критических векторных пространствах

И. М. Исаев, А. В. Кислицин

Ю. П. Размыслов ввел понятие ассоциативно лиевой пары (A, L), где L — алгебра Ли, A — ассоциативная обертывающая для L, а также понятие многообразия пар и изучил свойства таких многообразий [**1**].

Пусть $F = GF(q)$ — конечное поле, $F\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, A — ассоциативная алгебра полем F, E — подпространство алгебры A, порождающее A как алгебру. Под *тождеством пары* (A, E) понимается многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, что $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$ при всех $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$. В этом случае пару (A, E) назовем *мультипликативной векторной парой.*

Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$ — множество многочленов. Класс всех пар, в которых выполняются все тождества $g = 0$, где $g \in G$, называется *многообразием мультипликативных векторных пар* или просто *L-многообразием, заданным множеством тождеств G.* Если G — множество всех тождеств пары (A, E), то L-многообразие, заданное множеством тождеств G, будем называть *L-многообразием, порожденным парой* (A, E).

На множестве мультипликативных векторных пар можно ввести понятия подпары, гомоморфного образа пары, а также прямого произведения пар. Любое L-многообразие замкнуто относительно взятия подпар, гомоморфных образов и декартовых произведений пар. Верно и обратное: любой класс мультипликативных векторных пар, замкнутый относительно этих трех операций, образует L-многообразие. L-многообразие $\mathfrak{M}$ назовем *локально конечным*, если для любой пары $(A, E) \in \mathfrak{M}$, где E — конечномерное векторное пространство, алгебра A конечна.

Теорема Львова–Крузе [**2, 3**] утверждает, что многообразие, порожденное конечным кольцом (конечной линейной алгеброй), является кроссовым, т. е. тождества этого многообразия конечно базируемы, и оно имеет конечное число подмногообразий. Для тождеств L-многообразий порожденных конечными мультипликативными векторными парами, ситуация другая [**5**]. В частности, пара $\big(M_2(F), M_2(F)\big)$ не имеет конечного базиса тождеств. В то же время L-многообразие, порожденное парой $\big(M_2(F), M_2(F)\big)$, содержит конечное число L-подмногообразий [**5**]. Для произвольной пары (A, E), где A— конечная ассоциативная алгебра, вопрос о конечности числа L-подмногообразий многообразия, порожденного (A, E) остается открытым.

Фактором пары (A, E) будем называть гомоморфный образ пары (A_1, E_1) при гомоморфизме ϕ, где (A_1, E_1) — подпара пары (A, E). Если ϕ не является изоморфизмом, либо $E_1 \subsetneqq E$, то фактор называется *собственным.* Пару (A, E) назовем *критической*, если алгебра A конечна, и пара (A, E) не лежит в L-многообразии, порожденном ее собственными факторами. Всякое локально конечное L-многообразие порождается своими критическими парами.

Ю. Н. Мальцев показал, что кольцо матриц над критическим кольцом является критическим, в частности, алгебра $M_2(F)$ является критической [**4**]. В настоящей работе доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пара $\big(M_2(F), M_2(F)\big)$, где $M_2(F)$ — алгебра матриц второго порядка над конечным полем $F = GF(q)$, является критической.*

Исследование второго автора поддержано грантом Российского научного фонда (проект 16-11-10002).

Список литературы

[1] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений (Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., Москва, 1989.

[2] Львов И. В. О многообразиях ассоциативных колец I // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. 3. С. 269–297.

[3] Kruse R. Identities satisfied by a finite ring // Journal of Algebra. 1973. Vol. 26. 2. pp. 298–318.
[4] Мальцев Ю. Н. Кольцо матриц над критическим кольцом является критическим // Успехи математических наук. 1984. Т. 39. 4 (238). С. 171–172.
[5] Исаев И. М. Кислицин А. В. О тождествах векторных пространств, вложенных в конечные ассоциативные алгебры // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. 2015. Т. 15. 3. С. 69–77.

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: isaev@uni-altai.ru
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск
E-mail: kislitsin@uni-altai.ru

О почти коммутативных L-многообразиях векторных пространств

А. В. Кислицин

Пусть $F = GF(q)$ — конечное поле, E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (в этом случае будем говорить о векторном пространстве E, вложенном в ассоциативную алгебру A). Тождеством векторного пространства E назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E.

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства E, будем называть L-многообразием, порожденным пространством E и обозначать $\mathrm{Var}_L E$. L-многообразие $\mathfrak{M}$ назовем почти коммутативным, если всякое его собственное L-подмногообразие является коммутативным.

Ю. Н. Мальцевым описаны почти коммутативные многообразия ассоциативных колец [**1**], а также почти коммутативные многообразия ассоциативных алгебр над нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Джекобсона [**2**]. В настоящей работе дано частичное описание почти коммутативных L-многообразий над конечным полем.

Теорема. *Пусть $F = GF(q)$ — конечное поле, A — алгебра над полем F и $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ — ненильпотентное L-многообразие, порожденное алгеброй A, рассматриваемой как векторное пространство. Тогда пространство A совпадает с одним из следующих пространств:*

Теорема. *Пусть $F = GF(q)$ — конечное поле, A — алгебра над полем F и $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ — ненильпотентное L-многообразие, порожденное алгеброй A, рассматриваемой как векторное пространство. Тогда $\mathcal{M}$ является почти коммутативным тогда и только тогда, когда оно порождено одним из следующих пространств:*

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}.$$

В частности, показано, что L-многообразие, порожденное векторным пространством

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in P \right\},$$

где $\sigma \in \mathrm{Aut} P$, $\sigma \neq 1$ и поле инвариантов $F = P^{\sigma}$ является максимальным подполем в P, содержит собственное некоммутативное L-подмногообразие.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10002).

Список литературы

[1] Мальцев Ю. Н. Почти коммутативные многообразия колец // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17. 5. С. 1086–1096.

[2] Maltsev Yu. N. Just non commutative varieties of operator algebras and rings with some conditions on nilpotent elements // Tamkang Journal of Mathematics. 1996. Vol. 27. 1. pp. 59–65.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск
E-mail: kislitsin@altspu.ru

Теоремы факторизации обобщенных степенных рядов

В. К. Козлов, В. О. Маслова, Р. К. Сериккажиева, М. Т. Абдразакова

Поля обобщенных степенных рядов (или поля Хана) с коэффициентами в поле и показателями в делимой упорядоченной абелевой группе являются фундаментальным инструментом при изучении значных и упорядоченных полей и асимптотических разложений. Подстрока ряда с неположительными показателями естественно возникает при обсуждении возведения в степень, как это делается в транссериях или целых частях. Примечательным примером является кольцо целых чисел в поле сюрреалистических чисел Конвея.

В общем случае элементы таких подколец не имеют факторизаций в неприводимые. В контексте целых чисел Конвей предположил в 1976 году, что некоторые серии неприводимы (доказано Берардуччи в 2000 году) и что любые две факторизации данной серии имеют общую доработку.

В работе доказана теорема факторизации для кольца рядов с неположительными действительными показателями: каждый ряд представлен как произведение неприводимых рядов с бесконечным носителем и фактором с конечным носителем, единственным с точностью до констант. Отсюда выводится общая теорема о факторизации для рядов с показателями в произвольной делимой упорядоченной абелевой группе, включая целые числа в виде частного случая. Также получены новые критерии неприводимости и примитивности.

Доказывается, что новая ординальнозначная функция, называемая степенью, является нормированием на кольце обобщенных степенных рядов с вещественными показателями, и формулируются некоторые структурные результаты на ассоциированном RV-моноиде.

Университет ИТМО, Санкт-Петербург
E-mail: 172652@niuitmo.ru

Кольца на прямых произведениях абелевых групп без кручения

Е. И. Компанцева

Умножением на абелевой группе G называют гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением μ определяет некоторое кольцо, которое называется кольцом на группе G и обозначается (G,μ) или $(G,\times)$, если $\mu(g_1\otimes g_2)=g_1\times g_2$ для любых $g_1,g_2\in G$.

Продолжено изучение колец на прямых произведениях $\prod\limits_{i\in I}A_i$ узких абелевых групп $A_i(i\in I)$, начатое в [**1**]. Отметим, что класс узких абелевых групп, определенных в [**2**], достаточно широк, в частности любая счетная редуцированная абелева группа без кручения узка.

Все определения и обозначения соответствуют [**3**]. Через π_k будем обозначать проекцию группы $G=\prod\limits_{i\in I}A_i$ на группу $A_k(k\in I)$. Умножение $\times$ на прямом произведении $G=\prod\limits_{i\in I}A_i$ абелевых групп $A_i(i\in I)$ называется покомпонентно конечным, если для любого $k\in I$ существует такое конечное множество $F_k\subseteq I$, что $\pi_k(G\times\prod\limits_{i\in I\setminus F_k}A_i)=\pi_k(\prod\limits_{i\in I\setminus F_k}A_i\times G)=0$.

Теорема 1. *Пусть $(G,\times)$ — кольцо на группе $G=\prod\limits_{i\in I}A_i$, где $A_i(i\in I)$ — узкие абелевы группы. Пусть также множество I неизмеримо и $S=\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$. Тогда из того, что $S\times S=0$, следует, что $G\times G=0$.*

Показано, что результат теоремы 1 нельзя улучшить в том смысле, что если хотя бы одна из групп $A_i(i\in I)$ не является узкой или множество I измеримо, то из $S\times S=0$ уже не следует, что $G\times G=0$.

Следующая теорема позволяет строить умножения на неизмеримых прямых произведениях редуцированных абелевых групп без кручения конечного ранга.

Теорема 2. *Пусть $G=\prod\limits_{i\in I}A_i$, где $A_i(i\in I)$ — редуцированные абелевы группы без кручения конечного ранга, и множество I неизмеримо. Тогда любое умножение на G покомпонентно конечно.*

Приведен пример, показывающий, что теорема 2 неверна, если хотя бы одна из групп $A_i(i\in I)$ имеет бесконечный ранг (даже если все $A_i(i\in I)$ узки).

Список литературы

[1] Kompantseva E. I. Torsion free rings // J. of Math. Sciences. 2010. V. 171. N 2. P. 213–247.

[2] Los J. On the complete direct sum of coutable abelian groups // Publ. Math. Debrecen. 1954. V. 3. P. 269–272.

[3] Fuchs L. Abelian Groups, Springer Int. Publ. Switzerland. 2015.

МПГУ, Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
E-mail: kompantseva@yandex.ru

Решеточные изоморфизмы конечных ненильпотентных колец

С. С. Коробков

Под решёточным изоморфизмом (иначе, проектированием) кольца R на кольцо R^φ понимается изоморфизм φ решётки подколец $L(R)$ кольца R на решётку подколец $L(R^\varphi)$ кольца R^φ. Продолжается изучение решёточных изоморфизмов конечных ассоциативных колец. В работах [**1**] – [**4**] изучались решёточные изоморфизмы коммутативных ненильпотентных колец. Переход от коммутативного случая к общему связан с изучением проективных образов матричных колец, рассматриваемых над кольцами Галуа. В работе [**5**] доказана решёточная определяемость кольца квадратных матриц порядка $n \geqslant 2$, рассматриваемого над кольцом Галуа $GR(p^k, 1)$, где $k \in \mathbb{N}$. Следующая теорема обобщает этот результат:

Теорема 1. *Пусть $R = M_n(K)$, где $K = GR(p^k, m)$, $n > 1$, $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда $R \cong R^\varphi$.*

Следствием этой теоремы и теоремы 2.1 [**1**] является

Теорема 2. *Пусть R — конечное простое кольцо, $L(R)$ — не цепь и $|L(R)| > 5$. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда R^φ — простое кольцо.*

Теорема 3. *Пусть конечное кольцо R разложимо в прямую сумму колец: $R = R_1 \dotplus \cdots \dotplus R_l$, где $l > 1$, $R_i \cong M_{n_i}(K_i)$, $n_i \geqslant 1$, $K_i \cong GR(p^{k_i}, m_i)$ $(i = \overline{1,l})$. Предположим, что в случае, когда $l = 2$, кольцо R не изоморфно кольцам $GF(p) \dotplus GF(p)$ и $GF(p^q) \dotplus GF(p)$ (q — простое). Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) кольцо R^φ разложимо в прямую сумму: $R^\varphi = R_1^\varphi \oplus \cdots \oplus R_l^\varphi$;

2) $(\forall i = \overline{1,l})(R_i$ — простое кольцо $\Rightarrow R_i^\varphi$ — простое кольцо);

3) $R^\varphi = R_1^\varphi \dotplus \cdots \dotplus R_l^\varphi$, если $n_i m_i > 1$ для всех $i = \overline{1,l}$;

4) $R_j^\varphi \cong R_j$ $(j = \overline{1,l})$, если $n_i k_i > 1$ для всех $i = \overline{1,l}$;

5) $R^\varphi \cong R$, если $n_i m_i > 1$ и $n_i k_i > 1$ для всех $i = \overline{1,l}$.

Список литературы

[1] Коробков С. С., Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов, Изв. Урал. гос. ун-та, 2002, N 22, Матем. и механ., Вып. 4, 81—93.

[2] Коробков С. С., Проектирования колец Галуа, Алгебра и логика, 54, N 1 (2015), 16—33.

[3] Коробков С. С., Проектирования конечных однопорождённых колец с единицей, Алгебра и логика, 55, N 2 (2016), 192—218.

[4] Коробков С. С., Решёточные изоморфизмы конечных коммутативных колец с единицей. Международная конференция "Мальцевские чтения-16" 21–25 ноября 2016 г., Тезисы докладов. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, с. 148.

[5] Коробков С. С., Решёточная определяемость некоторых матричных колец, Матем. сб., 208:1 (2017), 97–110.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

Изотопно простые алгебры с ниль-базисом

А. А. Крылов, С. В. Пчелинцев

В 1942 г. А. А. Алберт [**1**] ввел понятие изотопа. Согласно Р.Х. Браку [**2**], алгебра называется *изотопно простой*, если всякий её изотоп является простой алгеброй. Известно [**1**], [**2**], что простая унитальная алгебра изотопно проста; всякая конечномерная алгебра обладает изотопом, в котором существует композиционный ряд с изотопно простыми факторами; наименьшая размерность изотопно простой алгебры над алгебраически замкнутым полем равна 3.

Будем говорить, что алгебра обладает *ниль-базисом*, если она линейно порождается элементами, квадраты которых равны нулю. Изучаются простые алгебры с ниль-базисом над алгебраически замкнутым полем характеристики не 2.

Теорема 1. *Простая антикоммутативная 3-мерная алгебра является изотопно простой алгеброй.*

Теорема 2. *Простая коммутативная 3-мерная алгебра с ниль-базисом является изотопно простой алгеброй, обладающей коммутативным унитальным изотопом с ниль-базисом.*

Теорема 3. *Простые коммутативные 3-мерные алгебры с ниль-базисом изотопны.*

Кроме того, описаны изотопы в классе простых коммутативных 3-мерных алгебр с ниль-базисом.

Пусть $C_n^\varepsilon; (\varepsilon = \pm 1)$ — алгебра с базисом $e_1, \ldots, e_n; (n \geq 4)$ и таблицей умножения:

$$e_i e_{i+1} = \varepsilon e_{i+1} e_i = e_{i+2} \ (1 \leq i \leq n-2), \qquad e_{n-1} e_n = \varepsilon e_n e_{n-1} = e_1;$$
$$e_n e_1 = \varepsilon e_1 e_n = e_2.$$

Заметим, что C_n^- — антикоммутативна, C_n^+ — коммутативна с ниль-базисом.

Доказано, что алгебры $C_n^\pm$ при $n \geq 4$ изотопно просты.

Список литературы

[1] Albert A.A., Non-associative algebras, *Ann. Math.*, **43** (1942), 685-707.

[2] Bruck R.H., Some results in the theory of linear non-associative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **56** (1944), 141–199.

Московский городской педагогический университет, Москва
E-mail: oncetoblack@list.ru
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
Институт математики им. С.Л. Соболева, СО РАН, Новосибирск
E-mail: pchelinzev@mail.ru

Конечные кольца, нильпотентные графы которых удовлетворяют условию Дирака

Ю. Н. Мальцев, А. С. Монастырева

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу), если не оговаривается специально другое.

Сформулируем понятие нильпотентного графа кольца. Итак, пусть R – произвольное ассоциативное кольцо и $N(R)$ – множество нильпотентных элементов кольца R. Вершинами нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$ кольца R являются элементы множества

$$Z_N(R)^* = \{x \in R \setminus \{0\} \mid (\exists y \in R \setminus \{0\})(xy \in N(R))\},$$

при этом две различные вершины $x, y \in Z_N(R)^*$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy \in N(R)$. Легко видеть, что если $(xy)^n = 0$, то $(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = 0$. Кроме того, из определений следует, что граф делителей нуля $\Gamma(R)$ является подграфом нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$. Напомним, что *графом делителей нуля* $\Gamma(R)$ кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Цель настоящей работы — описать конечные ассоциативные кольца, нильпотентный граф которых удовлетворяет условию Дирака. Ранее, в работах [**1, 2**], описываются свойства конечных колец, у которых граф делителей нуля удовлетворяет условию Дирака. Однако полного описания таких колец пока получить не удалось. В настоящей работе полностью описаны конечные кольца, нильпотентные графы которых удовлетворяют условию Дирака. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть R – конечное кольцо. Граф $\Gamma_N(R)$ удовлетворяет условию Дирака в том и только в том случае, когда выполняется одно из двух условий:*

(1) R – нильпотентное кольцо порядка $n \geq 3$;

(2) $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$.

Список литературы

[1] Kuzmina A.S., Maltsev Yu.N. Finite rings with some restrictions on zero-divisor graphs // Izvestiya vyzov. Matematika. 2014. 12. pp. 49–59.

[2] Kuzmina A. S., Maltsev Yu. N. On Finite Rings in Which Zero-Divisor Graphs Satisfy the Dirac's condition // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. 4(36). pp. 376–384.

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: maltsevyn@gmail.com, akuzmina1@yandex.ru

Слова Штурма и почти нильпотентные многообразия линейных алгебр

С. П. Мищенко, Н. П. Панов

Исследуются многообразия неассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики. В рассматриваемом случае относительно свободная алгебра

$$F(X,\mathbf{V}) = F(X)/Id(\mathbf{V})$$

многообразия $\mathbf{V}$ полностью определяется последовательностью подпространств $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, полилинейных элементов. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет квадратичный рост, если существует такая константа α, что $\dim P_n(\mathbf{V}) \le \alpha n^2$, $n \ge 1$. Алгебрам с тождествами посвящена монография [**1**].

Словом Штурма называют бесконечное двоичное непериодическое слово, в котором для любого $n \ge 0$ существует ровно $n+1$ различных подслов длины n. Конечные двоичные слова полезны тем, что позволяют представлять скобочные структуры в мономах следующим образом. Обозначим через L_x, R_x операторы левого, соответственно правого умножения на свободную образующую x, например $x^2 L_x R_x = (x(xx))x$. В алфавите $\{0,1\}$ символу 0 сопоставим оператор L_x, символу 1 — оператор R_x, тогда из любого двоичного слова $v = v_1 v_2 \ldots v_k$, $k \ge 1$, $v_i \in \{0,1\}$, получим композицию операторов $v(x) = v_1(x) v_2(x) \ldots v_k(x)$ в результате замены символов v_i на соответствующие операторы $v_i(x) \in \{L_x, R_x\}$, $v(x) \in End(F(X))$. Мы рассматриваем слова Штурма в алфавите $\{0,1\}$, соответствующие различным иррациональным числам из отрезка $[0;1]$. Информацию о словах Штурма можно найти в монографии [**2**].

В работе [**3**] представлена однопорожденная алгебра A, в которой выполняется тождество $(xy)(zt) \equiv 0$, и все ненулевые элементы степени не меньше трех имеют вид $a^2 v(a)$, v — некоторое двоичное слово. Пусть w — слово Штурма, I_w — идеал в A, порожденный элементами вида $a^2 u(a)$, где слово u не является подсловом w. Обозначим через $\mathbf{V}_w$ многообразие, порождаемое алгеброй $A_w = A/I_w$.

Теорема. *Многообразие $\mathbf{V}_w$, где w — слово Штурма, является почти нильпотентным квадратичного роста*, $\dim P_n(\mathbf{V}_w) = n^2 - 1$, $n \ge 3$.

Так как различным словам Штурма w соответствуют различные многообразия $\mathbf{V}_w$, то полученное множество многообразий является несчетным.

Список литературы

[1] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs, 122. Amer. Math. Soc., Providence, RI: 2005. xiv+352 pp.

[2] Lothaire M. Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge University Press. 2002. 520 p.

[3] Мищенко С. П., Верёвкин А. Б. О многообразиях с тождествами однопорожденной свободной метабелевой алгебры // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. 2(58). С. 21–55.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск
E-mail: mishchenkosp@mail.ru, nppanov@yandex.ru

Формальные модули в конструктивной теории полей классов

И. И. Некрасов, С. В. Востоков

Важным направлением для констуктивной теории полей классов является изучение формальных модулей $F(\mathfrak{m})$ для максимальных идеалов колец целых и произвольных формальных групповых законов. Данные модули являются областями опредения явных спариваний Гильберта, нахождение явных формул для которых является первостепенной задачей для современной теории полей классов.

В докладе будут данны результаты касательно описания данных модулей как модулей Галуа с соответствующей формальной структурой, в том числе будет дано недавно полученное

- описание данных модулей через группу когомологий $H^1(Gal(L/K), F(\mathfrak{m}_L))$ для произвольного расширения локальных полей L/K;
- описание последней группы когомологий $H^1(Gal(L/K), F(\mathfrak{m}_L))$ в случаях неразветвленного расширения L/K, а также в случаях классических формальных групповых законов $F_a = X + Y$ и $F_m = X + Y + XY$.

Содержание доклада основано на работах [**1, 2, 3**]. Работа поддержана грантом РНФ 16-11-10200.

Список литературы

[1] Востоков С. В., Некрасов И. И., Формальный модуль Любина — Тейта в циклическом неразветвленном p-расширении как модуль Галуа, Зап. научн. сем. ПОМИ, 430 (2014), 61–66.

[2] Vostokov S. V., Nekrasov I. I., Lutz filtration as Galois module, Lobachevskii Journal of Mathematics 36(2), 2016.

[3] Некрасов И. И., Востоков С. В., Когомологии формальных модулей над локальными полями, подана в печать.

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышва, Санкт-Петербург
E-mail: geometr.nekrasov@yandex.ru, sergei.vostokov@gmail.com

О степени стандартного тождества в 2-порожденной нильпотентной алгебре R над полем характеристики, не равной 2, с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ при $N > 2$.

Е. П. Петров

В работе [1] было показано, что всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $dimR^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка является точной.

В процессе обобщения указанного результата выяснилось, что ассоциативная нильпотентная 2-порожденная алгебра R, над полем характеристики, не равной 2, с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$ при $N > 2$, удовлетворят при достаточно больших значениях числа N стандартному тождеству значительно меньшей степени, чем N.

Теорема. *Произвольная 2-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$, $N \geq 3$, удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \ldots, x_T) = 0$, где $T = \lceil \frac{N+2^{m+1}}{m} \rceil - 2$, параметр m вычисляется по формуле:*

$$m = \begin{cases} \lfloor \log_2 \frac{N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N < \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}; \\ \lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor, & \text{если } N \geq \lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor 2^{\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \rfloor}. \end{cases}$$

Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол), $\lceil x \rceil$ обозначает округление числа x в большую сторону (потолок).

Для лучшего восприятия взаимосвязи N и T приведем некоторые начальные значения функции $T = T(N)$:

N	$3,4$	$5,6$	$7,8$	$9,10,11$	$12,13,14$	$\ldots$	$30,31,32$	$33,34,35,36$	$\ldots$
T	4	5	6	7	8	$\ldots$	14	15	$\ldots$

N	$\ldots$	$93,94,95,96$	$97,98,99,100,101$	$\ldots$	$252,253,254,255,256$	$\ldots$
T	$\ldots$	30	31	$\ldots$	62	$\ldots$

Замечание. *Если $m \geq 3$, то для $N = (m-2)2^m + mr$, где $1 \leq r < 2^m$, найдется такая 2-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $(T-1)$.*

Список литературы

[1] Petrov E.P., Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^2/R^3 = 2$ // Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052–1066.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: pep@email.asu.ru

Первичные алгебры, связанные с монстрами

С. В. Пчелинцев

Следуя К. МакКриммону [**1**], первичные вырожденные алгебры будем называть *монстрами*. В данной работе, примыкающей непосредственно к [**2, 3**], продолжается изучение монстров. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть A — первичная строго $(-1,1)$–алгебра, J — подалгебра йордановой алгебры A^+. Если A является обёртывающей для J, т.е. A порождается множеством J, то алгебра J также первична.*

Отсюда немедленно вытекает следствие о надалгебрах йорданова монстра.

Следствие. *Пусть $A[X]$ и $J[X]$ — свободные $(-1,1)$ и йорданов монстры соответственно. Тогда йорданова алгебра J, расположенная между монстрами $J[X] \subseteq J \subseteq (A[X])^+$, является первичной алгеброй.*

Йорданову алгебру J назовем *St–специальной*, если существует вложение $J \to A^+$ для подходящей строго $(-1,1)$–алгебры A.

Теорема 2. *Если первичная алгебра St–специальна, то она обладает первичной St–обёртывающей.*

Теорема 3. *Идеал первичной St–специальной алгебры является первичной алгеброй.*

Следствие. *Всякий метаидеал йорданова монстра $J[X]$ является первичной алгеброй.*

Список литературы

[1] McCrimmon K., A Taste of Jordan Algebras, Universitext, Springer-Verlag. New York, 2004.

[2] Пчелинцев С.В., Первичные алгебры и абсолютные делители нуля, *Изв. АН СССР, сер. матем.* **50**:1 (1986), 79–100.

[3] Pchelintsev S.V., Shestakov I.P., Prime $(-1,1)$ and Jordan monsters and superalgebras vector type, *J. Algebra*, **423** (2015), 54–86.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
Институт математики им. С.Л. Соболева, СО РАН, Новосибирск
E-mail: pchelinzev@mail.ru

Простые конечномерные унитальные правоальтернативные супералгебры над алгеброй матриц порядка 2

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

В работе [**1**] были описаны простые унитальные правоальтернативные супералгебры над алгебраически замкнутым полем Φ, четная часть которых – алгебра $\mathrm{M}_2(\Phi)$ матриц 2-го порядка, а нечетная часть является неприводимым бимодулем над четной частью размерности не большей 6. Более точно, было доказано, что неальтернативная супералгебра такого типа изоморфна одной из 8-мерных супералгебр: $B\left(0,1,\frac{1}{2},1\right)$, $B\left(0,0,\sigma,1\right),\ 0\neq\sigma\in\Phi$.

Доказана следующая

Теорема. *Всякая простая конечномерная правоальтернативная супералгебра $B = A\oplus M$ над полем Φ характеристики, отличной от 2, у которой чётная часть совпадает с алгеброй матриц $A = \mathrm{M}_2(\Phi)$ порядка 2, изоморфна либо ассоциативной супералгебре Уолла $W_{2|2}\left(\omega\right)$, либо альтернативной супералгебре Шестакова $S_{4|2}\left(\lambda\right)$ $\left(\mathrm{char}\left(\Phi\right)=3\right)$, либо асимметричному дублю: 8-мерной супералгебре, зависящей от матричного параметра.*

Если основное поле алгебраически замкнуто, то ассоциативная супералгебра $W_{2|2}(\omega)$ изоморфна супералгебре Уолла $\mathrm{M}_2[\sqrt{1}]$, являющейся удвоением алгебры $\mathrm{M}_2(\Phi)$ (см. [**2**]); супералгебра $S_{4|2}\left(\lambda\right)$ изоморфна $B_{4|2}$ (см. [**3**]); асимметричный дубль изоморфен супералгебре Силва-Мураками-Шестакова (см. [**1**]).

Список литературы

[1] Picanço da Silva J., Murakami L. S. I., Shestakov I., On right alternative syperalgebras, *Comm. Algebra*, **44**:1 (2016), 240–252.

[2] Wall C.T.C., Graded Brauer groups, *J. Reine Angew. Math.*, **213** (1964), 187–199.

[3] Шестаков И.П., Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики, *Алгебра и логика*, **36**:6 (1997), 675–716.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru
Институт математики им. С.Л. Соболева, СО РАН, Новосибирск

Топологическое упорядоченное поле секвенциальных чисел

Л. Я. Савельев

Описывается расширение поля вещественных чисел, полученное добавлением простейшей шкалы бесконечно малых и обратных им бесконечно больших чисел. Рассмотрим базовую мультипликативную группу $\mathcal{B} = \epsilon^i$ с единицей $\epsilon^0 = 1$, образованную целыми степенями последовательности $\epsilon = (1/n)$. Лорановские полиномы с вещественными коэффициентами и переменной ϵ образуют кольцо $\mathcal{Z}$ целых секвенциальных чисел. Оно не содержит делителей нуля и для него определено поле частных $\mathcal{S}$. Назовем элементы поля $\mathcal{S}$ секвенциальными числами (s-числами). С каждым s-числом естественно связывается рациональная функция вещественной переменной, а s-числа делятся на постоянные и переменные. Постоянные s-числа отождествляются с вещественными: $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$.

Поле $\mathcal{S}$ изоморфно полю формальных степенных рядов. Наименьший номер $m = ord(x)$ ненулевого коэффициента s-числа $x = \sum_{i=m}^{\infty} a_i\, \varepsilon^i$ называется порядком этого числа. Соотношения $x > 0 \Leftrightarrow a_m > 0$ и $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$ определяют согласованный с операциями порядок для поля s-чисел. Он также согласован с поведением в окрестности нуля представляющих s-числа рациональных функций. Верен аналог свойства Архимеда: для каждого s-числа существует строго большее базовое s-число. Иррациональным расширением поля $\mathcal{S}$ могут служить лорановские ряды бесконечного порядка.

Все s-числа делятся на бесконечно малые (ord (x) $\gg 0$ и ноль), конечные (ord (x) $=$ 0 и ноль), бесконечно большие (ord (x) $\ll 0$). Обозначим их множества соответственно $\mathcal{O}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$. Множество $\mathcal{O}$ составляет максимальный идеал в кольце $\mathcal{F} + \mathcal{O} = \mathcal{R} + \mathcal{O}$ и поэтому $(\mathcal{F} + \mathcal{O})/\mathcal{O}$ изоморфно $\mathcal{R}$. Каждое конечное s-число есть сумма некоторых конкретных вещественного и бесконечно малого. Не все ограниченные множества в $\mathcal{S}$ имеют грани, в частности $\mathcal{O}$. При пополнении возникают проблемы с определением операций.

Порядок определяет для $\mathcal{S}$ интервальную топологию $\mathcal{T}$. Выделяются интервалы бесконечно малой, конечной и бесконечно большой длины. С топологией $\mathcal{T}$ поле $\mathcal{S}$ становится не локально компактным несвязным топологическим полем. Топология $\mathcal{T}$ индуцирует на поле $\mathcal{R}$ стандартную топологию. Кольца $\mathcal{R} + \mathcal{O}$, $\mathcal{Z}$ с индуцированными $\mathcal{T}$ топологиями сравнивается с простыми спектрами $Spec(\mathcal{R} + \mathcal{O})$, $Spec(\mathcal{Z})$.

Существование бесконечно малых s-чисел позволяет дать простые алгебраические определения основных операций математического анализа, рассматривать s-функции с бесконечно малыми и большими значениями на бесконечно малых и больших интервалах, сглаживать разрывные функции и производить последовательные вычисления по достаточно простым алгоритмам. Гладкие s-функции Дирака, Хевисайда и знак можно эффективно использовать при замене разрывных коэффициентов в дифференциальных уравнениях различных типов.

НГУ, ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: savelev@math.nsc.ru

Изоморфизмы решеток подалгебр полуполей непрерывных положительных функций

В. В. Сидоров

Кольцо $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций является алгеброй над $\mathbb{R}$. Подмножество $A \subseteq C(X)$ будет подалгеброй, если $f+g, fg, rf \in A$ для любых $f, g \in C(X)$ и $r \in \mathbb{R}$. По аналогии подмножество A полуполя $U(X)$ непрерывных положительных функций назовем подалгеброй, если $f+g, fg, rf \in A$ для любых функций $f, g \in U(X)$ и числа $r > 0$. Обозначим через $\mathbb{A}(U(X))$ решетку подалгебр полуполя $U(X)$ относительно включения, а через $\mathbb{A}_1(U(X))$ — ее подрешетку подалгебр с 1. Точная нижняя грань подалгебр равна их пересечению, которое для полуполя $U(X)$ может оказаться пустым. Поэтому будем считать пустое множество элементом решетки $\mathbb{A}(U(X))$ — ее нулем.

Пространство X называется хьюиттовским, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени $\mathbb{R}$. Важно, что для любого пространства X найдутся тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и полуполя $U(X)$, $U(\tau X)$ и $U(\nu\tau X)$. Кроме того, для любых пространств X и Y любой изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$, а значит, и полуполей $U(X)$ и $U(Y)$ порождается некоторым гомеоморфизмом пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$.

Наша работа является естественным продолжением работы [**1**], центральными результатами которой являются следующие две теоремы: топология любого хьюиттовского пространства X определяется как решеткой $\mathbb{A}(U(X))$, так и ее подрешеткой $\mathbb{A}_1(U(X))$; для любых пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U(Y))$ или $\mathbb{A}_1(U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(Y))$ влечет изоморфизм полуполей $U(X)$ и $U(Y)$. Поскольку при изоморфизме полуполей образом подалгебры (с единицей) служит подалгебра (с единицей), верно и обратное. Существуют ли изоморфизмы решеток подалгебр (с единицей) полуполей $U(X)$ и $U(Y)$, которые не порождаются изоморфизмами самих полуполей? Ответим на данный вопрос.

Теорема. *Для любых топологических пространств X и Y имеем*:

1) *каждый изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(Y))$ порождается некоторым однозначно определенным изоморфизмом полуполей $U(X)$ и $U(Y)$*;

2) *если $|\tau X| \neq 2$, то каждый изоморфизм решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U(Y))$ порождается некоторым изоморфизмом полуполей $U(X)$ и $U(Y)$*;

3) *если $|\tau X| = 2$, то изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U(Y))$ порождаются парами автоморфизмов цепи $(0, 1]$ и двумя биекциями между τX и τY.*

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки, проект 1.5879.2017/8.9.

Список литературы

[1] Сидоров В. В., Определяемость полуполей непрерывных положительных функций решетками их подалгебр // Математический сборник. 2016. Т. 207, N 9. С. 91–110.

Вятский государственный университет, Киров
E-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Группы точек суперсингулярных кривых Эдвардса над F_{p^n} и их свойства

Ю. В. Скрункович, Р. В. Скуратовский

Напомнимим, что скрученной кривой Эдвардса [**1**] $E_{E\mathrm{a,d}}$ над F_{p^n} называется

$$ax^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, a, d \in F^*_{p_n}, ad(a\text{-}d) \neq 0,\ d \neq 1,\ p \neq 2. \tag{1}$$

Мы обнаружили ошибку в работе [**2**], в условии суперсингулярности для кривой E_d. Действительно, если $p \equiv -3(\mathrm{mod}8)$, то мы не имеем вырожденной пары кривых, несмотря на то, что это утверждается в теореме 3 из [**2**]. Кроме того, если $p \equiv \pm 7(\bmod 8)$, то порядки пар скрученных кривых следующие: $N_{E_2} = N_{E_{2^{-1}}} = p - 3$, что не совпадает с $p + 1$, заявленным в теореме 3 из [**2**].

Теорема. *Если $p \equiv 3\,(mod\ 4)$ и p — простое, то для $d = 2$ и $d = 2^{-1}$ количество точек кривой $x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2$ и кривой $x^2 + y^2 = 1 + d^{-1}x^2y^2$ над F_p совпадают и равны $N_E = p + 1$, если $p \equiv 3(\mathrm{mod}8)$ и $N_E = p - 3$, если $p \equiv 7(\mathrm{mod}8)$. Также свойством суперсингулярности обладают и кривые с коэффициентами $d = 17 + 12\sqrt{2}$ и $d = 17 - 12\sqrt{2}$ при $p \equiv 7(\mathrm{mod}8)$.*

Над полем F_{p^n}, где $n \equiv 1(mod2)$, порядки указанных выше кривых составляют $N_E = p^n + 1$, если $p \equiv 3(\mathrm{mod}8)$ и $N_E = p^n - 3$, если $p \equiv 7(\mathrm{mod}8)$.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием делимости точки $G = (X, Y)$ на 2 [**2**] скрученной кривой Эдвардса (1), не являющейся точкой 2-го или 4-го порядка, является условие $\left(\frac{1-aX^2}{p}\right) \neq -1$.*

Список литературы

[1] Bernstein D. J., Birkner P., Joye M., Lange T., Peters C. Twisted Edwards Curves. IST Programme under Contract IST-2002-507932 ECRYPT, and in part by the National Science Foundation under grant ITR-0716498, 2008. P. 1–17.

[2] Бессалов А. В., Цыганкова О. В. Взаимосвязь семейства точек больших порядков кривой Эдвардса над простым полем. Защита информации. 2015. Т. 17, N 1. С. 73–80.

[3] Skuratovskii R. V. Finding normal basis of finite field during deterministic polynomial time. Vol. 25. Visnuk of Kiev's National University. Mechanics and mathematics. pp. 49–54, 2011.

KNU, Kiev (Ukraine)
E-mail: julian.Skrunkovych@gmail.com
MAUP IKIT, Kiev (Ukraine)
E-mail: ruslan@imath.kiev.ua

Вполне идемпотентность группы гомоморфизмов абелевых групп

А. Р. Чехлов

Пусть $f \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$ и $H_r(f) = \Big\{\sum\limits_i g_i f s_i \,|\, g_i \in \mathrm{Hom}\,(B, A), s_i \in \mathrm{Hom}\,(A, A)\Big\}$, $H_l(f) = \Big\{\sum\limits_i s_i f g_i \,|\, g_i \in \mathrm{Hom}\,(B, A), s_i \in \mathrm{Hom}\,(B, B)\Big\}$.

Группа $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ называется:

1) *вполне идемпотентной справа* (*слева*), если $f \in f H_r(f)$ ($f \in H_l(f) f$);

2) *вполне идемпотентной*, если $f \in \mathrm{Hom}\,(B, B) f H_r(f)$

при всех $f \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$.

Вполне идемпотентность группы $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ в случае, когда A и B — произвольные модули была определена и изучалась в [**1**] и [**2**]. Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$ называется *регулярным*, если существует такой гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}\,(B, A)$, что $f = fgf$.

Рассматривается вполне идемпотентность группы $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ в случае, когда A и B — абелевы группы. Так, справедливо

Предложение. *Пусть D и K — делимые, а C и G — редуцированные части групп A и B соответственно. Тогда для периодической группы A эквивалентны следующие условия:*

1) *группа* $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ *вполне идемпотентна* (*соответственно справа, слева*)*;*

2) *группа* $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ *регулярна;*

3) *если $\Pi = \{p \in P \,|\, C_p, B_p \neq 0\}$, то группы $A' = \bigoplus_{p\in\Pi} C_p$ и $B' = \bigoplus_{p\in\Pi} B_p$ элементарны, а если $D_p \neq 0$, то $K_p = 0$.*

Если же хотя бы одна из групп A или B есть редуцированная группа без кручения, а их группа гомоморфизмов отлична от нуля, то она не является вполне идемпотентной. Для группы $\mathrm{Hom}\,(A, A)$ доказана

Теорема. *Если группа* $\mathrm{Hom}\,(A, A)$, *где* $A \neq 0$, *вполне идемпотентна* (*соответственно справа, слева*), *то A будет одной из следующих групп:*

1) *A — делимая группа без кручения;*

2) *A — элементарная группа;*

3) *A — нередуцированная группа, у которой делимая часть есть группа без кручения, а редуцированная часть является элементарной группой;*

4) *A — редуцированная смешанная группа с делимой факторгруппой $A/T(A)$ и с элементарной периодической частью $T(A)$.*

Список литературы

[1] Абызов А. Н., Вполне идемпотентность Hom // Известия вузов. Матем. 2011. 8. С. 3–8.

[2] Абызов А. Н., Туганбаев А. А., Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, 7. С. 3–38.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

The Malcev computer algebra system for nonassociative identities in algebras and superalgerbas

A. A. Buchnev, V. T. Filippov, I. P. Shestakov, S. R. Sverchkov

A characteristic feature of the theory of nonassociative rings is that the solution of many problems of this theory reduces to the proof of certain nonassociative identities. For most varieties of algebras, there are no effective algorithms for checking identities in a "manual" way, until now the main tool of their proof is authors' intuition. At the same time, the capabilities of modern computers, including personal computers, allow implementing various algorithms for verifying identities of a sufficiently large degree.

One of the first programs to prove a number of new interesting identities was the Albert program [4], developed at Clemson University (USA) on the basis of the algorithm proposed by I. R. Henzel and D. P. Jacobs [3]. This program is UNIX-based and it is designed rather for workstations.

We have developed a series of special algorithms for Jordan, alternative, Malcev algebras and superalgebras, which can be run on IBM personal computers. The corresponding program is developed in C++ in the Microsoft Visual Studio system and has a window user interface in Windows-Vista / Windows-10. The special algorithms of parallel programming OpenMP under Windows OS are included in the program for accelerating calculations. The program possesses a number of extra functions to analyze the solutions obtained.

The next two examples demonstrate the application of the program for solving problems in Malcev algebras.

Let us recall that a Jordan polynomial f is called s-identity if it is identity in all special Jordan algebras but not in all Jordan algebras. The classical example is Glennie's identity of degree 8 [1].

I. Hentzel [2] used computational linear algebra based on the representation theory of the symmetric group to prove that there are no s-identities of degree less than 8. We prove analogue Hentzel theorem for Malcev algebras by using `MALCEV` program.

Theorem 1. *There are no Malcev -identities of degree less than 9.*

A Malcev polynomial $m(X)$ of free alternative algebra $Alt[X]$ is called a *Malcev commutator eater* if $m(X)\circ([a,b]^2)$ is a Malcev polynomial for any Malcev polynomials $a, b \in Alt[X]$, where $x \circ y = xy + yx$.

Theorem 2. *If Malcev commutator eater $m(X)$ has degree less than 6, then $m(X) = 0$.*

References

[1] Glennie C.M., Some identities valid in special Jordan algebras but not in all Jordan algebras, Pacific Journal of Mathematics, (1966) 16(1): 47–59.

[2] Hentzel I.R., Special Jordan identities, Communications in Algebra, (1979) 7(16): 1759–1793.

[3] Hentzel I.R., Jacobs D.P. A Dynamic Programming Method for Building Free Algebras, Computers & Mathematics with Applications, (1991) 22(12): 61–66.

[4] Jacobs D.P., Muddana S.V., Offutt A.J., A Computer Algebra System for Nonassociative Identities, Hadronic Mechanics and Nonpotential Interactions, Proceedings of the Fifth International Conference. Cedar Falls, Myung, H.C. (Ed.), Nova Science Publishers, Inc., New York: 185–195.

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk

On connection between solution of the classical Yang—Baxter equation and Rota—Baxter operators on simple Lie and Malcev algebras

M. E. Goncharov

Given an algebra A over a field F and scalar $\lambda \in F$, a linear operator $R : A \to A$ is called a Rota—Baxter of the weight λ if for all $a, b \in A$ the following identity holds:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy).$$

Let L be a simple finite-dimensional Lie or Malcev algebra over a field of characteristic zero.

For an element $r = \sum a_i \otimes b_i \in L \otimes L$ an equation

$$C_L(r) = [a_i, a_j] \otimes b_i \otimes b_j - a_i \otimes [a_j, b_i] \otimes b_j + a_i \otimes a_j \otimes [b_i, b_j] = 0 \tag{1}$$

is called the classical Yang—Baxter equation on L. A solution is called skew-symmetric if $\tau(r) = -r$ where τ is a switch morphism.

There is a standard method for constructing Rota-Baxter operations of zero weight on a simple Lie algebra L from skew-symmetric solutions of the classical Yang—Baxter equations (CYBE): if $r = \sum a_i \otimes b_i$ is a skew-symmetric solution of CYBE, then one can define an operator R on L by $R(a) = \sum \langle a_i, a \rangle b_i$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a Killing form on L. It turns out that R is a Rota—Baxter operator of weight 0. In this work we consider the case when r is not a skew-symmetric solution of CYBE (1).

Theorem. *Let $r = \sum\limits_i a_i \otimes b_i$ is a non skew-symmetric solution of CYBE* (1) *such that $r + \tau(r)$ is L invariant. Then an operator $R : L \to L$ defined as*

$$R(a) = \sum_i \langle a_i, a \rangle b_i$$

is a Rota—Baxter operator of a non-zero weight.

Note that if $r + \tau(r)$ is not L-invariant then the statement of the theorem is false.

Malcev algebras were introduced by A.I. Malcev as tangent algebras for local analytic Moufang loops.

Definition. An anticommutative algebra is called a Malcev algebra if for all $x, y, z \in M$ the following equation holds:

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)x, \tag{2}$$

where $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ is the jacobian of elements x, y, z.

The class of Malcev algebras generalizes the class of Lie algebras and has a well developed theory.

We prove that the statement of theorem 1 is also true for simple Malcev algebras.

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk
E-mail: gme@math.nsc.ru

The geometric classification of Leibniz algebras

N. Ismailov, I. Kaygorodov, Yu. Volkov

The general linear group $GL_n(F)$ acts naturally on the set of all algebras of fixed dimension n in a given variety M over a field F (whcih is an algebraic variety). Given A and B in M, we say that B degenerates to A if A belongs to the closure of $GL_n(F)$-orbit of B (in the Zariski topology on M). The notion of degeneration is closely connected with the notion of deformation of algebras, and it has connections with filtrations and gradings as well. There are many results concerning degenerations of algebras of low dimensions from some variety defined by a set of identities. An important problem in this direction is the description of so-called rigid algebras. These algebras are of big interest, since the closures of their orbits under the action of general linear group form irreducible components of a variety under consideration. For example, rigid algebras were classified in the varieties of low dimensional associative [**5**] and Lie [**1**] algebras.

Several conjectures state that nilpotent Lie algebras form a very small subvariety in the variety of Lie algebras. Grunewald and O'Halloran conjectured in [**2**] that for any n-dimensional nilpotent Lie algebra A there exists an n-dimensional non-nilpotent Lie algebra B that degenerates to A. At the same time, Vergne conjectured in [**6**] that a nilpotent Lie algebra cannot be rigid in the variety of all Lie algebras. In the paper [**3**] the Grunewald–O'Halloran Conjecture was proved for nilpotent Lie algebras of rank ≥ 1.

Leibniz algebras were introduced by Bloh as a non-anticommutative generalization of Lie algebras. In our paper [**4**] we study the varitey $\mathfrak{Leib}_4$ of variety of four dimensional Leibniz algebras over $\mathbb{C}$. In particular, we describe all rigid algebras and irreducible components in that variety. As a consequence, we show that the Grunewald–O'Halloran conjecture does not hold and the Vergne conjecture holds for $\mathfrak{Leib}_4$.

The work was supported by the President's Program "Support of Young Russian Scientists" (grant MK-1378.2017.1).

References

[1] Burde D., Steinhoff C., Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras, Journal of Algebra, 214 (1999), 2, 729—739.

[2] Grunewald F., O'Halloran J., Deformations of Lie algebras, Journal of Algebra, 162 (1993), 1, 210–224.

[3] Herrera-Granada J.F., Tirao P., The Grunewald–O'Halloran Conjecture for Nilpotent Lie Algebras of Rank ≥ 1, Communications in Algebra, 44 (2016), 5, 2180–2192.

[4] Ismailov N., Kaygorodov I., Volkov Yu., The geometric classification of Leibniz algebras, arXiv:1705.04346.

[5] Mazzola G., The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five, Manuscripta Mathematica, 27 (1979), 81–101.

[6] Vergne M., Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes, Bulletin de la Socit Mathmatique de France, 98 (1970), 81–116.

Suleyman Demirel University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: nurlan.ismail@gmail.com
Universidade Federal do ABC, CMCC, Santo André (Brazil)
E-mail: ivan.kaygorodov.84@mail.ru
Saint Petersburg state university, Saint Petersburg
E-mail: wolf_666@list.ru

Combinatorial rank of quantum groups of infinite series

V. K. Kharchenko

In general, an intersection of two Hopf ideals of a Hopf algebra is not a Hopf ideal. By this reason, one may not define a Hopf ideal generated by a set of elements, and the Hopf algebras do not admit a usual combinatorial representation by generators and relations. Nevertheless, Heyneman–Radford theorem implies that each nonzero Hopf ideal of a pointed Hopf algebra has a nonzero skew primitive element. Each ideal generated by skew primitive elements is a Hopf ideal. Therefore, the Heyneman–Radford theorem allows one to define a combinatorial representation step-by step by means of skew primitive relations. By definition the combinatorial rank is the minimal number of steps in that representation. We find the combinatorial ranks of the multiparameter versions of the small Lusztig quantum groups (Frobenius–Lusztig kernels) of infinite series A_n, B_n, C_n, D_n. This is a joint work with M. L. Díaz Sosa (Universidad Nacional Autónoma de México, FESC-Acatlán)

FES-C UNAM, México (Mexico);
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: vlad@unam.mx

Self-dual binary quadratic operads

P. S. Kolesnikov

Varieties of linear algebras defined by polylinear identities of degree 3 (e.g., associative, alternative, Novikov, Poisson, et al.) give rise to corresponding binary quadratic operads [**1**]. The most common case in practice is related with varieties of algebras with one binary operation. The corresponding operads $\mathcal{P}$ are generated by 1- or 2-dimensional S_2-module $V(2) = \mathcal{P}(2)$. In this paper, we solve the following natural question: which binary quadratic operads $\mathcal{P}$ governing varieties of algebras with one binary operation are isomorphic to their Koszul dual operads $\mathcal{P}^!$?

For example, it is well known that the operads of associative algebras As coincides with $\mathrm{As}^!$, the same holds for the operad of Poisson algebras Pois. For the operad of (left) Novikov algebras Nov, it is known that $\mathrm{Nov}^! = \mathrm{Nov}^{op}$, the opposite operad of right Novikov algebras [**2**].

For $\dim V(2) = 1, 2$, the isomorphism between $\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}^!$ is possible only if S_2-module $V(2)$ is isomorphic to its skew transpose dual $V(2)^\vee$, i.e., the decomposition of $V(2)$ into irreducible S_2-modules is $M_+ \oplus M_-$, where $M_\pm = \Bbbk u_\pm$ are 1-dimensional spaces with $(12)u_\pm = \pm u_\pm$.

We explicitly describe *self-dual* operads $\mathcal{P}$, i.e., those isomorphic to $\mathcal{P}^!$. First, we split the operads that include self-dual ones into two disjoint classes. Operads of the first and second class are in one-to-one correspondence with the points of the Grassmannian $G(2,4) \subset \mathbb{P}^5$ and of $G(2,4) \times S(1,1)$, respectively. Here $S(1,1) \subset \mathbb{P}^3$ is the Segre variety representing $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Next, we determine equations defining explicitly those points in these varieties that correspond to self-dual operads. These relations turn to be linear with respect to Plücker coordinates in $G(2,4)$ http://front.math.ucdavis.edu/1711.03696.

The work was supported by RSF (project 14-21-00065).

References

[1] Loday J.-L., Vallette B., Algebraic Operads, Gründlehren Math. Wiss., **346**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.

[2] Dzhumadil'daev A. S., Codimension growth and non-Koszulity of Novikov operad, Comm. Algebra, 39, (2011), 2943–2952.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: pavelsk@math.nsc.ru

On representations of symmetric groups on free anticommutative n-ary algebras

B. K. Zhakhayev

Let $(A, \cdot_n)$ be a n-ary algebra. Algebra A is called anti-commutative n-ary, if for any $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ and $\sigma \in S_n$ (symmetric group) the following condition is valid,

$$a_1 a_2 \dots a_n = sgn(\sigma) a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}.$$

Let P_n^k be a space of multilinear identities of anti-commutative n-algebras of ω-degree k. Let $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{kn-(k-1)}\}$ be a set of generators. Then basis of P_n^k consists all multilinear anti-commutative n-ary monomials of degree $kn-(k-1)$. We define left action $S_{kn-(k-1)}$ on the space P_n^k in a natural way, that is, by permuting $kn-(k-1)$ letters. We study space P_n^3 as a module over symmetric group.

Theorem. *As S_{3n-2}-module*

$$P_n^3 \cong \bigoplus_{\lambda \vdash 3n-2} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{(2^{n-i}, 1^{2i-1})(1^{n-1})} + \sum_{k=odd} c^{\lambda}_{(n+k, n-k)'(n-2)} \right) S^{\lambda},$$

where $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ is Littlewood—Richardson coefficient of shape λ/μ with content ν, and S^{λ} is Specht module for partition $\lambda \vdash n$.

References

[1] Bremner M., Varieties of Anticommutative n-ary Algebras, *Journal of Algebra* **191**, 76–88 (1997).

[2] Rotkiewicz M., Irreducible Identities of n-Algebras, *Acta. Math. Univ. Comenianae*, Vol. LXXII, 1(2003), pp. 23–44.

Suleyman Demirel University, Kaskelen (Kazakhstan)
E-mail: bekzat22@hotmail.com

VI. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

Об одном критерии полноты множества мультифункций

С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев

Пусть $A = \{0, 1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^{\overline{*}} = \{f | f : A^n \to F\}, P_2^{\overline{*}} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{\overline{*}},$

$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}.$

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на A.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

где $f, f_1, \dots, f_n \in P_2^{\overline{*}}$, определяла мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$, следуя [1], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества A следующим образом: если $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in A^m$, то

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$. Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1, \dots, x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in F^n$.

Обозначим через K класс мультифункций, рассматриваемый в работе [2].

Теорема. *Для того, чтобы множество мультифункций B, содержащее все унарные булевы функции, было полным относительно данной суперпозиции, необходимо и достаточно, чтобы в B содержались следующие мультифункции:*

1) не принадлежащая классу K;

2) принимающая значение $\{0, 1\}$ хотя бы на одном наборе;

3) принимающая значение $\varnothing$, но не на всех наборах.

Работа выполнена при поддержке грантом Бурятского государственного университета.

Список литературы

[1] Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах // Известия Иркутского гос. университета. Серия Математика, 2012, Т. 5, N 4, 46–53.

[2] Badmaev S. A. On some maximal clone of partial ultrafunctions on a two-element set // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физика, 2017, Т. 10, N 2, 140–145.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: badmaevsa@mail.ru, goran5@mail.ru

Обогащение моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий бинарными предикатами

С. С. Байжанов, Б. Ш. Кулпешов

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [**1**]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

В работе [**2**] было доказано, что при обогащении модели слабо о-минимальной теории унарным предикатом, выделяющим конечное число выпуклых множеств, обогащенная теория остается слабо о-минимальной. Здесь мы исследуем вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости отношением эквивалентности, разбивающим основное множество модели на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Рассмотрим следующий пример:

Пример 1. *Пусть $M := \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Очевидно что M — счетно категоричная о-минимальная структура. Обогатим модель M новым бинарным отношением $E(x, y)$ следующим образом: пусть $M' := \langle \mathbb{Q}, <, E^2 \rangle$ так что для любых $a, b \in \mathbb{Q}$*

$$E(a, b) \Leftrightarrow (2n-1)\sqrt{2} < a, b < (2n+1)\sqrt{2}$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда нетрудно понять, что $E(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $\mathbb{Q}$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E-классы упорядочены по типу $\omega^* + \omega$. Может быть доказано, что M' — слабо о-минимальная структура, но $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Здесь мы обсуждаем необходимые и достаточные условия того, чтобы при обогащении 1-неразличимой счетно категоричной слабо о-минимальной теории конечного ранга выпуклости отношением эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов обогащенная теория оставалась как слабо о-минимальной, так и счетно категоричной.

Список литературы

[1] Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society, 2000, V. 352, 5435–5483.

[2] Baizhanov B. S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // J. of Symb. Logic, 2001, V. 66, 1382–1414.

Институт математики и математического моделирования, Международный университет информационных технологий, Алматы (Казахстан)
E-mail: sayan-5225@mail.ru, b.kulpeshov@iitu.kz

О базисах квазитождеств канторовых алгебр

А. О. Башеева, М. В. Швидефски

Пусть $\mathbf{K}_0$ — класс алгебраических систем произвольной фиксированной сигнатуры σ. Класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_0$ называется $\mathbf{K}_0$-*квазимногообразием*, если существует множество квазитождеств Σ сигнатуры σ, такое что класс $\mathbf{K}$ совпадает с множеством всех систем из $\mathbf{K}_0$, на которых истинны все квазитождества из Σ, т.е. $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathbf{K}_0 = \{\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0 \mid \mathcal{A} \models \Sigma\}$. В этом случае множество квазитождеств Σ называется *базисом квазитождеств* класса $\mathbf{K}$ *относительно* $\mathbf{K}_0$. Базис квазитождеств Σ класса $\mathbf{K}$ относительно класса $\mathbf{K}_0$ является *независимым*, если для любого $\varphi \in \Sigma$ существует алгебраическая система $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0$ такая, что $\mathcal{A} \models \Sigma \backslash \{\varphi\}$ и $\mathcal{A} \models \neg\varphi$. Базис квазитождеств Σ класса $\mathbf{K}$ относительно класса $\mathbf{K}_0$ называется ω-*независимым*, если существует разбиение $\Sigma = \bigcup_{n<\omega} \Sigma_n$, такое что $\mathbf{K} \neq \mathrm{Mod}\big(\Sigma \backslash \Sigma_n\big) \cap \mathbf{K}_0$ для любого $n < \omega$.

Пусть $0 < m < n < w$. Многообразие $\mathbf{C}_{mn}$ алгебраических систем сигнатуры $\sigma_{mn} = \{\lambda_1, ..., \lambda_m, \alpha_1, ..., \alpha_n\}$, состоящей из m n-местных функциональных символов $\lambda_1, ..., \lambda_m$ и n m-местных функциональных символов $\alpha_1, ..., \alpha_n$ определяется следующими тождествами:

$$\forall x_1...x_m \ \lambda_i(\alpha_1(x_1...x_m), ..., \alpha_n(x_1...x_m)) = x_i, \ 1 \leq i \leq m;$$

$$\forall x_1...x_n \ \alpha_j(\lambda_1(x_1...x_n), ..., \lambda_m(x_1...x_n)) = x_j, \ 1 \leq j \leq n.$$

Канторовой алгеброй называется произвольная система из $\mathbf{C}_{mn}$. (При этом обычно предполагается, что m и n фиксированы и легко определяются из контекста.)

Теорема. *Для любых $0 < m < n < \omega$ существует континуум подквазимногообразий многообразия канторовых алгебр $\mathbf{C}_{mn}$, не имеющих независимого базиса квазитождеств, но имеющих w-независимый базис квазитождеств. Пересечение этих квазимногообразий имеет независимый базис квазитождеств.*

Отметим, что первая часть этой теоремы следует также из результатов [**1**].

Список литературы

[1] Kravchenko A., Nurakunov A., Schwidefsky M. On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras // Submitted for publicaion in 2017.

Евразийский Национальный Университет им. Л. Н. Гумилева, Астана (Казахстан)
E-mail: basheeva@mail.ru
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: semenova@math.nsc.ru

Свойства уравнений над свободными полурешетками

М. А. Вахрамеев

С помощью работ [**1, 2**] понятие уравнения можно определить для произвольной алгебраической системы функционального языка. Таким образом, можно рассматривать и изучать характеристики уравнений над многими классами алгебраических систем, в частности над полурешетками.

Уравнением над полурешеткой F является выражение вида $t(X)c = s(X)d$, где $t(X), s(X)$ — произведения переменных, а c и d — элементы полурешетки F (константы).

В работах автора [**3, 4**] изучались свойства уравнений над свободными полурешетками конечных и бесконечных рангов. Были получены следующие результаты:

Теорема 1. *Асимптотическая плотность множества совместных уравнений ровно от m переменных над свободной полурешеткой счетного ранга равна $1 - \frac{2}{3^m}$.*

Теорема 2. *Среднее число решений уравнений от одной переменной над полурештой конечного ранга n равно $\frac{3^n+2\cdot 2^n}{3\cdot 2^n}$.*

Теорема 3. *Среднее число неприводимых компонент алгебраических множеств, определяемых уравнениями над свободной полурешеткой счетного ранга с константами из свободной полурешетки конечного ранга, равно 1.*

Список литературы

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry // Algebra and Discrete Mathematics, 1, 2008, 80–112.

[2] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания // Фундамент. и прикл. матем, 17:1, 2012, 65–106.

[3] Вахрамеев М. А. Асимптотическая плотность множества совместных уравнений над свободной полурешеткой счетного ранга // Вестник ОмГУ, 2017. Принята к публикации.

[4] Вахрамеев М. А. Случайные уравнения над свободными полурешётками // ПДМ, 36, 2017, 5–12.

ОФ ИМ СО РАН, Омск
E-mail: vahrmih@yandex.ru

О богатых типах в многозначных и многосортных системах и коллективные кластеризации многозначных высказываний логических исчислений баз знаний

А. А. Викентьев

Доклад посвящен *обобщению и уточнению результатов и теорем о богатых множествах типов,* доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[1] *на случай богатых семейств типов над параметрами модели многозначной и многосортной теории с $\varkappa$–компактными (насыщенными, однородными) измеримыми и вычислимыми моделями со свойством $\varkappa$–отделимости новых элементов, реализующих вычислимые типы (над малыми подмножествами модели) совместных с этими множествами, от элементов вложенной модели и наличия реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых, вычислимых(стабильных) типов или неразличимых элементов. Стабильность теорий не предполагается, а некоторые известные теоремы получаются как следствия.*

Основными инструментами доказательств являются теоремы типа компактности, развитая техника современной теории моделей,вычислимости, в частности, для логических исчислений, локальной стабильности и наличия (даже локально) подходящих компактных измеримых (нужных малых мощностей $\varkappa$) моделей теории со свойствами $\varkappa$–отделимости над реализациями семейств стабильных (определимых, рекурсивных) типов. Продолжено изучение предельных и двукардинальных моделей в классе теорий с покрытиями. Рассмотрены вопросы определимости систем с метрикой в наследственно конечных надстройках, и о мощностях типово определимых подмножеств и их свойств двукардинальности. Интерес к этим вопросам и таким моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (нетривиальных) типов прикладной теории, логических закономерностей для кластеризации и упорядочения таких 'знаний' с помощью привлечения метрических или измеримых систем и расстояний между множествами моделей. Все это служит для введения новых метрик на классах эквивалентных формул и типов на измеримых подклассах измеримых, вычислимых (метрических) моделей, необходимых для разработки алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий и кластеризации многозначных формул–знаний в логике Лукасевича. Рассмотрены модели релевантных логик для введения по ним расстояний с учетом упорядочения переменных многими экспертами. Найдены различные коллективные метрики, методы кластеризации по введенным метрикам для конечных множеств формул в различных логиках, начато изучение различных индексов качества для сравнений и способов введения новых коллективных метрик. Проведены совместно с Фефеловой В.В. модельные эксперименты с помощью программы, поддерживающей все необходимые алгоритмы и получение по коллективным расстояниям кластеризаций. Показано, что коллективные расстояния имеют более высокие индексы кластеризаций по сравнению с другими введенными метриками и описаны модельные метрики в многозначных логиках. Разработано использование лучших кластеризаций

[1] Некоторые из них вошли в диссертацию автора "Теории с покрытием и формульные подмножества", ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, а также опубликованы в сборнике, посвященному 90–летию академика А.Д. Тайманова — "Two cardinal theorems for sets of types in stable theory", Казахстан, Алма–Ата, 2007, с. 67–69, были доложены Алма–Ате и Новосибирске — на ежегодных Мальцевских чтениях с 2006 г., в том числе к 100–летию акад. А.И. Мальцева и др.

в локальной структуризации баз знаний. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты No. 14-07-00851a, 14-07-00249a, кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

Нейтральные и костандартные элементы решетки многообразий моноидов

С. В. Гусев

Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называют *нейтральным*, если для всех $y, z \in L$ подрешетка в L, порожденная x, y и z, дистрибутивна;

костандартным, если $\quad \forall\, y, z \in L\colon \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z);$

модулярным, если $\quad \forall\, y, z \in L\colon \quad y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$

верхнемодулярным, если $\quad \forall\, y, z \in L\colon \quad y \le x \longrightarrow x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z).$

Нижнемодулярные элементы определяются двойственно к верхнемодулярным.

Специальным элементам решетки $\mathbb{SEM}$ всех многообразий полугрупп посвящено значительное число работ (см. обзор [**1**]). Однако в решетке всех многообразий моноидов, которую будем обозначать через $\mathbb{MON}$, специальные элементы до настоящего времени не изучались. Данная работа посвящена полному описанию нейтральных и костандартных элементов решетки $\mathbb{MON}$.

Через $\mathbf{T}$ обозначим тривиальное многообразие моноидов, а через $\mathbf{MON}$ – многообразие всех моноидов. Многообразие всех полурешеток будем обозначать через $\mathbf{SL}$. Первым основным результатом работы является

Теорема 1. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *является модулярным, нижнемодулярным и верхнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *является нейтральным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ *или* $\mathbf{MON}$.

Через $\mathbf{C}$ обозначим многообразие моноидов, заданное тождествами $x^2 \approx x^3$ и $xy \approx yx$. Вторым основным результатом работы является следующая

Теорема 2. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *является модулярным и верхнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *является костандартным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$, $\mathbf{C}$ *или* $\mathbf{MON}$.

Отметим, что в $\mathbb{SEM}$ свойства быть нейтральным и костандартным элементом равносильны (см. [**1**, Теорема 3.4]). Теоремы 1 и 2 показывают, что в решетке $\mathbb{MON}$ эти свойства не эквивалентны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 17-01-00551) и Министерства образования и науки РФ (проект 1.6018.2017/8.9).

Список литературы

[1] Vernikov B. M. Special elements in lattices of semigroup varieties // Acta Sci. Math. (Szeged), 81, 2015, 79–109.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: sergey.gusb@gmail.com

Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий симплексов

Д. Ю. Емельянов

Определение [**1**]. *Симплекс* или *n-мерный тетраэдр* (от лат. simplex простой) — геометрическая фигура, являющаяся n-мерным обобщением треугольника.

В случае, который мы рассматриваем, симплекс — это треугольник. Из-за разных вариаций компоновки одинаковое количество симплексов может иметь разный диаметр. Мы будем рассматривать алгебры для теории симплексов с учетом диаметра. Здесь под диаметром понимается диаметр для графа.

Алгебры бинарных изолирующих формул [**2**] для теории симплексов будем обозначать через $\mathfrak{S}_n$, где n — диаметр.

Для диаметров 1, 2, 3, 5 представлены таблицы Кэли алгебр $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_5$ соответственно. На основе этих данных получено описание алгебр $\mathfrak{S}_n$.

Теорема. *Для симплексов с диаметром, равным n, алгебра бинарных изолирующих формул имеет вид $\mathfrak{S}_n$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0830/ГФ4).

Список литературы

[1] Александров П. С. Комбинаторная топология. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.

[2] Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Стабильность класса главно слабо инъективных полигонов

Е. Л. Ефремов

В работе описаны моноиды, над которыми класс всех главно слабо инъективных полигонов стабилен и суперстабилен. Понятие главно слабо инъективного полигона является обобщением понятия инъективного полигона. Классы инъективных и главно слабо инъективных полигонов с точки зрения их аксиоматизируемости изучены в [**1, 2**].

Вопросы стабильности теории полигонов рассмотрены в [**3, 4, 5**]. В частности, в [**3**] доказано, что теория любого полигона над S стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид (вполне упорядоченный моноид).

Напомним некоторые понятия из теории полигонов и теории моделей. Пусть S — моноид. Под *(левым) полигоном* $_SA$ *над моноидом* S понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Полигон $_SA$ над S называется *главно слабо инъективным*, если он инъективен относительно вложений всех главных левых идеалов S. Через **S-PWInj** обозначим класс всех главно слабо инъективных полигонов над S. Моноид S называется **S-PWInj**-*стабилизатором* (**S-PWInj**-*суперстабилизатором*), если теория любого полигона $_SA \in$ **S-PWInj** над S стабильна (суперстабильна). Моноид S называется *линейно* (*вполне*) *упорядоченным*, если множество $\{Ss \mid s \in S\}$ линейно (вполне) упорядочено относительно $\supseteq$.

Теорема 1. *Моноид S является* **S-PWInj**-*стабилизатором тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид.*

Теорема 2. *Моноид S является* **S-PWInj**-*суперстабилизатором тогда и только тогда, когда S — вполне упорядоченный моноид.*

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531).

Список литературы

[1] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом и над группой // Сибирский математический журнал, 2015, Т. 56, N 3, 650–662.

[2] Ефремов Е. Л., Степанова А. А. Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов // Сибирский математический журнал, 2017, Т. 58, N 4, 785–795.

[3] Мустафин Т. Г. О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е. — 1988. — (Тр.АН СССР. Сиб.отд-е. Ин-т математики; Т.8). — 92–107.

[4] Михалев А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фундаментальная и прикладная математика, 2004, Т. 10, N 4, 107–157.

[5] Гоулд В., Михалев А. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фундаментальная и прикладная математика, 2008, Т. 14, N 7, 63–110.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: efremov-el@mail.ru

Минимально полные эпигруппы

О. В. Князев

В обзоре [**1**] ставится задача (проблема 3.10) характеризации минимально полных алгебр данного многообразия алгебр. Мы изучаем минимально полные эпигруппы. Напомним, что полугруппа A называется эпигруппой, если некоторая степень любого элемента A содержится в некоторой ее подгруппе. Мы рассматриваем эпигруппы как унарные полугруппы (см. [**2**]). Напомним некоторые определения. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех эпигрупп, $L(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. Произвольное дизъюнктное семейство подэпигрупп эпигруппы A называют *россыпью* эпигруппы A, а эпигруппы, которые ее составляют, — *компонентами* россыпи. Пусть $\mathbf{X}(A)$ есть $\mathbf{X}$-вербал эпигруппы A т.е. россыпь, компоненты которой в точности все классы $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции эпигруппы A. Эпигруппу A называют *полной*, если равенство $\mathbf{X}(A) = A$ имеет место для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $L(\mathbf{V})$. Эпигруппа называется *минимально полной*, если она содержит более одного элемента и является полной, но любая ее неодноэлементная собственная подэпигруппа не является полной. *Нильполугруппа* — эпигруппа с нулем, некоторая степень каждого элемента которой равна нулю. Через A_m и $B_{n,k}$ обозначим полугруппы, которые в классе полугрупп с нулем можно задать следующими копредставлениями:

$$A_m = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = a, b^m = 0\rangle, \text{ где } m \geq 2;$$

$$B_{n,k} = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^n = b^k = 0\rangle, \text{ где } n, k \geq 2.$$

Теорема. *Если эпигруппа A является минимально полной эпигруппой, то A есть либо минимально полная группа, либо минимально полная нильполугруппа, либо A_m, либо гомоморфный образ полугруппы $B_{n,k}$.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электрон. мат. изв., 2016, N 13, 181–241.

[2] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп I, II // Матем. сб., 185, 1994, N 8, 129-160; N 9, 153–176.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev50@rambler.ru

Примитивная нормальность класса делимых полигонов

А. И. Красицкая

Примитивно нормальные теории S-полигонов изучаются в работах [**1, 2**]. В [**1**] дана характеризация моноидов S таких, что класс всех S-полигонов примитивно нормален. В [**2**] описывается строение S-полигонов с примитивно нормальной теорией. В данной работе исследуются моноиды, над которыми класс делимых S-полигонов примитивно нормален.

Напомним некоторые определения (см. [**2, 3**]). Пусть S моноид, т.е. полугруппа с единицей. Моноид S называется *линейно упорядоченным*, если множество $\{Sa \mid a \in S\}$ линейно упорядочено относительно $\subseteq$. Элемент $c \in S$ называется *сократимым справа*, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. Под (левым) *полигоном* ${}_SA$ над моноидом S понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Класс всех S-полигонов обозначается $S-Act$. *Делимый S-полигон* — это S-полигон ${}_SA$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$. Через $S - Div$ обозначим класс всех делимых S-полигонов. Заметим, что класс $S - Div$ аксиоматизируем. Аксиоматизируемый класс алгебр называется примитивно нормальным, если теория этого класса примитивно нормальна.

Теорема. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*
1) класс $S - Div$ примитивно нормален;
2) класс $S - Act$ примитивно нормален;
3) S – линейно упорядоченный моноид.

Список литературы

[1] Степанова А. А. Примитивно связные аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика, 2006, Т. 45, N 3, 300–313.

[2] Степанова А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика, 2008, Т. 47, N 4, 491–508.

[3] Михалев А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фундаментальная и прикладная математика, 2004, Т. 10, N 4, 107–157.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stasyakras@gmail.com

Кластерные алгебры и многочлен Джонса

В. О. Маслова, В. К. Козлов, Р. К. Сериккажиева, М. Т. Абдразакова

Кластерные алгебры были введены Фоминым и Зелевинским в 2002 году в контексте основных положений теории Ли. С тех пор кластерные алгебры превратились в собственную теорию со связями в ряде исследовательских областей, включая алгебру Ли, теорию чисел, динамических систем, геометрию Лобачевского, алгебраическую геометрию и т.д.

В данной работе исследована связь между кластерными алгебрами и теорией узлов. Основополагающим в этой связи является использование непрерывных дробей в обеих областях. С каждой непрерывной дробью можно связать узел или двухкомпонентную связь, которая строится из последовательности, соответствующей одной записи непрерывной дроби. Значительная часть теории узлов связана с инвариантами узлов и многочленом Джонса. Кластерные переменные основываются на многочленах Джонса двухмостовых узлов.

Двухмостовой узел однозначно определяется непрерывной дробью. Многочлен Джонса полностью определяемой кластерной переменной, и это устанавливает прямую связь между теорией узлов и кластерными алгебрами.

Также рассмотрен пример многочлена Джонса с 10 пересечениями, соответствующий непрерывной дроби и прямые формулы для первых трех и последних трех коэффициентов многочленов.

Университет ИТМО, Санкт-Петербург
E-mail: victoria_95m@mail.ru

Счетно-насыщенные суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов

В работе исследуется класс суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины n (далее K_n). Для $n \geq 3$ класс K_n содержит континуум различных элементарных теорий [1]. В [1] дано описание локальных и конечно-аксиоматизируемых алгебр из класса K_n и, как следствие, получена элементарная классификация алгебр из класса K_n.

Известно [2], что элементарная теория атомной булевой алгебры имеет как простую, так и счетно-насыщенную модели. В [3] показано, что имеется ровно счетное число различных элементарных теорий суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом; в [4] показано, что элементарная теория любой суператомной булевой алгебры с одним выделенным идеалом имеет счетно-насыщенную модель и, как следствие, имеет простую модель. Для класса суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй вопрос существования простых и счетно-насыщенных моделей является открытым.

Определение 1 [1]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй ширины* n, если под любым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$ найдется не более n атомов алгебры $\mathfrak{A}$, лежащих под ним, и любой атом алгебры $\mathfrak{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$.

Определение 2 [1]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *плотной*, если $\mathfrak{A} = sub_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, F(\mathfrak{A}))$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая в себе подалгебру $\mathfrak{B}$ и идеал Фреше $F(\mathfrak{A})$.

Теорема 1. *Для каждого $n \geq 3$ существует континуум суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины n, элементарные теории которых различны и имеют счетно-насыщенные модели.*

Теорема 2. *Для любого $n \geq 3$ существует континуум суператомных булевых алгебр с выделенными плотными подалгебрами конечной ширины, элементарные теории которых различны и не имеют счетно-насыщенных моделей.*

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е. Трофимов А. В. Конечно-аксиоматизируемые суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины // Сиб. матем. журн., 57:6, 2016, 1361–1375.

[2] Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры и разрешимость, Новосибирск, Наука, 1996, 373 с.

[3] Пальчунов Д. Е. О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенными идеалами // Алгебра и логика, 25:3, 1986, 326–346.

[4] Пальчунов Д.Е. Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели // Труды Института Математики, Том 25, 1993, 104–132.

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru, tr0f@mail.ru

Обогащения категоричных квазимногообразий

Е. А. Палютин

Теорема. *Существует категоричное квазимногообразие, которое нельзя обогатить до категоричной хорновой теории, в которой бы была определима бесконечная группа.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а), Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0830/ГФ4) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

Список литературы

[1] Палютин Е. А. Описание категоричных квазимногообразий // Алгебра и логика, 1975, Т. 14, N 2, 145–185.

[2] Палютин Е. А. Категоричные хорновы классы, 1 // Алгебра и логика, 1980, Т. 19, N 5, 582–614.

[3] Палютин Е. А. Категоричные хорновы классы, 2 // Алгебра и логика, 2010, Т. 49, N 6, 782–802.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palyutin@math.nsc.ru

Решетки ограниченно базируемых подмногообразий дискриминаторных многообразий

А. Г. Пинус

Подмногообразие W многообразия V универсальных алгебр назовем *ограниченно базируемым* в V, если W для некоторого натурального n аксиоматизируемо внутри V некоторой системой тождеств зависящих лишь от переменных $x_1, \cdots, x_n$. Совокупность ограниченно базируемых в V подмногообразий образует решетку L_V^{rb} относительно теоретико-множественного включения. В общем случае решетка L_V^{rb} может не являться подрешеткой решетки L_V всех подмногообразий многообразия V. Для дискриминаторных же многообразий V решетка L_V^{rb} является подрешеткой решетки L_V зачастую меньшей чем мощность L_V мощности. При этом имеет место

Теорема. *Для любого дискриминаторного многообразия V решетка L_V^{rb} универсально эквивалентна (в теоретико-модельном смысле) решетке L_V.*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Элементы решетки E-замкнутых классов гиперфункций ранга 2

Л. В. Рябец

Пусть $E_2 = \{0,1\}$ и 2^{E_2} — множество всех подмножеств E_2. Определим множество H_2 — множество всех гиперфункций ранга 2:

$$H_{2,n} = \left\{ f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\} \right\}, \; H_2 = \bigcup_n H_{2,n}.$$

Определения суперпозиции гиперфункций и оператора разветвления по предикату равенства для множества гиперфункций можно посмотреть, например, в работе [**2**].

Определим E-замыкание множества $Q \subseteq H_2$ как множество всех гиперфункций из H_2, которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства.

В [**1**] описаны все E-замкнутые классы частичных булевых функций.

Теорема *Любой E-замкнутый класс гиперфункций из H_2 E-порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от двух переменных.*

Пусть гиперфункции g_1, g_2, h_1, h_2 зависят не более чем от двух переменных. Определим обобщенный оператор разветвления по предикату равенства.

Пусть (α_1, α_2) — двоичный набор. Если $h_1(\alpha_1, \alpha_2), h_2(\alpha_1, \alpha_2) \in E_2$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & \text{если } h_1(\alpha_1, \alpha_2) = h_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = \{0,1\}$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = \{0,1\}$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Также определим оператор ограниченной суперпозиции:

$$f(x_1, x_2) = g_1(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

В обоих случаях в качестве h_1, h_2 могут выступать селекторные функции.

Теорема *Существует не менее 78 E-замкнутых классов гиперфункций ранга 2.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-31-00209 мол_а.

Список литературы

[1] Матвеев С. А. Построение всех E-замкнутых классов частичных булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. М.: Физматлит, 2013. С. 239–244.

[2] Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 // Вестн. ИГУ, Сер. Математика, 2014, Т. 10, 93–105.

Иркутский государственный университет, Иркутск
E-mail: riabets@rambler.ru

Сократимые элементы решетки многообразий эпигрупп

Д. В. Скоков

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым элементом*, т. е. принадлежит некоторой подгруппе в S. Обширную информацию об эпигруппах можно найти, например, в работе [**3**]. Эпигруппы естественно рассматривать как *унарные полугруппы*, т. е. полугруппы с дополнительной унарной операцией. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как о многообразиях унарных полугрупп.

Мы продолжаем изучение специальных элементов в решетке **EPI** всех многообразий эпигрупп, начатое в работах [**1, 2, 5**].

Элемент x решетки L называется

модулярным, если $\quad (\forall y, z \in L) \quad y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y,$

сократимым, если $\quad (\forall y, z \in L) \quad x \vee y = x \vee z \ \& \ x \wedge y = x \wedge z \longrightarrow y = z.$

Легко заметить, что сократимые элементы являются модулярными. Некоторую информацию о сократимых и модулярных элементах в абстрактных решетках можно найти, например, в [**4**].

Модулярные элементы решетки **EPI** раннее рассматривались в работе [**5**]. В частности, в ней было получено описание коммутативных многообразий эпигрупп, являющихся модулярными элементами в решетке **EPI**. Сократимые элементы этой решетки ранее не рассматривались.

Теорема. *Для коммутативного многообразия эпигрупп* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathbf{V}$ — *сократимый элемент решетки* **EPI**;
б) $\mathbf{V}$ — *модулярный элемент решетки* **EPI**;
в) $\mathbf{V} = \mathbf{M} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{M}$ — *либо тривиальное многообразие, либо многообразие полурешеток, а* $\mathbf{N}$ — *нильмногообразие, удовлетворяющее тождествам* $x^2y \approx 0$ *и* $xy \approx yx$.

Список литературы

[1] Скоков Д. В. Дистрибутивные элементы решетки многообразий эпигрупп // Сиб. электрон. матем. изв., 12, 2015, 723–731.

[2] Скоков Д. В. Специальные элементы некоторых типов в решетке многообразий эпигрупп // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН, 22 (3), 2016, 244–250.

[3] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. I, II // Матем. сб., 185 (8), 1994, 129–160; 185 (9), 1994, 153–176.

[4] Šešelja B., Tepavčević A. Weak Congruences in Universal Algebra // Institute of Mathematics, Novi Sad, Symbol, 2001.

[5] Shaprynskiĭ V. Yu., Skokov D. V., Vernikov B. M. Special elements of the lattice of epigroup varieties // Algebra Universalis, 76 (1), 2016, 1–30.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: dmitry.skokov@gmail.com

Дистрибутивные решетки конгруэнций над цепью

А. А. Степанова, М. С. Казак

Изучению полигонов с заданными условиями на их решетки конгруэнций посвящено значительное количество работ. В частности, унары с дистрибутивной, модулярной решеткой конгруэнций, являющиеся цепью, полностью описаны в [**1**]. Решетки конгруэнций несвязных полигонов над полугруппами изучены в [**2**]. В работе [**3**] дана характеристика полигонов над полугруппами правых или левых нулей, имеющих дистрибутивную решетку конгруэнций.

Пусть S – моноид. Левым *S-полигоном* (или просто *полигоном*) ${}_SA$ называется непустое множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Через $Con({}_SA)$ обозначим решетку конгруэнций полигона ${}_SA$.

В приведенных ниже теоремах $(S;\leq)$ – линейно упорядоченное множество с минимальным элементом 1, $(S;\cdot)$ – моноид относительно операции $ab = max\{a,b\}$, где $a, b \in S$.

Теорема 1. *Пусть S – линейно упорядоченное множество с минимальным элементом. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ линейна тогда и только тогда, когда $|A| \leq 2$.*

Теорема 2. *Пусть S – вполне упорядоченное множество. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда*

1) полигон ${}_SA$ не содержит 3-х компонент связности;

2) если $Sa_1 \cup Sa_2 \subseteq A$, $s \in S$ и $Sa_1 \cap Sa_2 = Ssa_1 \cap Ssa_2$, то $sa_1 = ra_1$ или $sa_2 = ra_2$ для некоторого $r \in S$, $r < s$.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531).

Список литературы

[1] Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Межвуз. Научн. Сб. “Упорядоченные множества и решётки”. Саратов, 1978, вып. 5, 11–44.

[2] Птахов Д. О., Степанова А. А. Решетки конгруэнций несвязных полигонов // Дальневосточный математический журнал, 2013, Т.13, N 1, 107–116.

[3] Халиуллина А.Р. Условия модулярности решетки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей // Дальневосточный математический журнал, 2015, Т.15, N 1, 102–120.

Дальневосточный федеральный университет, Институт прикладной математики, Владивосток
E-mail: stepltd@mail.ru, kazak_ms@students.dvfu.ru

О бесповторных функциях алгебры логики в предэлементарных базисах

И. К. Шаранхаев

Все неопределяемые понятия можно найти в [**1, 2**]. Здесь удалось обобщить результаты из [**2**]. Функцию f будем называть *n-нетвердой*, где $n \geq 2$, если либо $\mathrm{rank}\, f \ll 2$, либо для любой $x \in \rho(f)$ выполняется одно из условий:

(1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subsetneqq \delta(f_x^1)$; (2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subsetneqq \delta(f_x^0)$;

(3) $\delta(f) = \delta(f_x^0) = \delta(f_x^1)$, $f \notin M_x$ и существуют $y_1, \ldots, y_{n-1} \in \rho(f_x')$ такие, что $\delta(f_x') \subsetneqq \delta\left(\dfrac{\partial f_x'}{\partial y_1 \ldots \partial y_{n-1}}\right)$; и кроме этого, если для всех существенных переменных выполняется третье условие, то $\mathrm{rank}\, f \neq 3(n+1)/2$.

Функцию f будем называть *наследственно n-нетвердой*, если сама f и все ее остаточные функции являются n-нетвердыми.

Теорема 1. *Функция f бесповторна в базисе $B_{1,n} = \{-, \vee, \cdot, 0, 1, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n\}$, где $n \geq 3$, тогда и только тогда, когда она является наследственно $(n-1)$ - нетвердой.*

Функцию f будем называть *n-неплотной*, где $n \geq 3$, если либо $\mathrm{rank}\, f \ll 2$, либо для любой $x \in \rho(f)$ выполняется одно из условий:

(1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subsetneqq \delta(f_x^1)$; (2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subsetneqq \delta(f_x^0)$;

(3) $\delta(f) = \delta(f_x^0) = \delta(f_x^1)$ и существуют $y_1, \ldots, y_{n-1} \in \rho(f_x')$ такие, что $\delta(f_x') \subsetneqq \delta\left(\dfrac{\partial f_x'}{\partial y_1 \ldots \partial y_{n-1}}\right)$; и кроме этого:

— если для любой переменной из $\rho(f)$ выполняется третье условие, то неверно, что $f \in M_x$ для любой $x \in \rho(f)$;

— существует $x_1 \in \rho(f)$ такая, что $f \in M_{x_1}$;

— если $\mathrm{rank}\, f = n+1$ и существует переменная из $\rho(f)$, для которой верно третье условие, то это условие выполняется для всех переменных из $\rho(f)$;

— если $\mathrm{rank}\, f = n+2$ и существует переменная из $\rho(f)$, для которой выполняется третье условие, то для любой $y \in \rho(f)$ такой, что $\delta(f) \subsetneqq \delta(f_y^\alpha)$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, верно $|\delta(f_y^\alpha)| = |\delta(f)| + 1$ или $\delta(f_y^\alpha) = \chi(f_y^\alpha)$.

Функцию f будем называть *наследственно n-неплотной*, если сама f и все ее остаточные функции являются n-неплотными.

Теорема 2. *Функция f бесповторна в базисе $B_{3,n} = \{-, \vee, \cdot, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \vee x_2\bar{x}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n$, где $n \geq 4$, тогда и только тогда, когда она является наследственно $(n-1)$ - неплотной.*

Список литературы

[1] Перязев Н. А. Основы теории булевых функций. — М.: Физматлит, 1999. — 112 с.

[2] Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3 // Дискрет. матем., 2005, Т. 17, N 2, 127–138.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: goran5@mail.ru

Двухэлементный частичный группоид без конечного базиса тождеств

М. С. Шеремет

Рассмотрим группоид $\mathcal{G}$ из [**1**], в котором умножение на множестве $\{0, 1, 2\}$ задается по правилам $2 \cdot x = 2$, $1 \cdot 2 = 1$, а остальные произведения равны 0. Известно, что этот группоид является наименьшим по мощности примером алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств.

В своем докладе мы допускаем, что основные операции могут быть определены не всюду, а равенство интерпретируется в семантике Клини: частичные функции считаются равными, если их графики совпадают (очевидно, что для всюду определенных функций такая интерпретация равносильна обычной). Рассмотрим частичный группоид $\mathcal{H}$, полученный из $\mathcal{G}$ отбрасыванием элемента 0. В докладываемой работе мы доказываем, что $\mathcal{H}$ не имеет конечного базиса тождеств в семантике Клини.

Фактически, мы доказываем, что тождества $\mathcal{H}$ разбиваются на два непересекающихся фрагмента, один из которых является общим с $\mathcal{G}$ и, согласно его описанию, неявно содержащемуся в [**1**], не имеет конечного базиса.

Список литературы

[1] Мурский В. Л. Существование в трехзначной логике замкнутого класса с конечным базисом, не имеющего конечной полной системы тождеств // ДАН СССР, 163, N 4, 1965, 815–818.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
СИУ — Филиал РАНХиГС, Новосибирск
E-mail: sheremet@math.nsc.ru

Конгруэнц-характеризация слабых многообразий частичных алгебр

М. С. Шеремет

В докладе рассматриваются частичные алгебры, а равенство интерпретируется в слабой семантике, т. е. соотношение $p \approx q$ считается выполненным при данном означивании, если значения для p и q совпадают, при условии, что они определены. Слабым многообразием называется класс частичных алгебр, определенный слабыми тождествами.

Проблема характеризации слабых многообразий привлекала внимание по меньшей мере с начала 1970-х годов — см. [**3, 4, 5**]. Однако, ошибочность [**3**] была отмечена в [**2**], а в [**4**] и [**5**] решение давалось лишь при дополнительных условиях на аксиомы. Сложность проблемы заключается в том, что все известные алгебраические операторы не отличают слабые тождества от импликаций вида

если значения термов $u, v, \ldots, w$ определены, то для u и v они совпадают.

В [**1**] найдена алгебраическая характеризация слабых многообразий с помощью определения нового оператора смешанных произведений. Тем не менее, оставалось неясным, возможно ли охарактеризовать слабые многообразия в терминах конгруэнций или теоретико-категорных конструкций (по аналогии со случаем всюду определенных операций). В докладываемой работе мы доказываем, что слабые многообразия имеют естественную характеризацию через свойства расширенных решеток конгруэнций, введенных в [**6**].

Список литературы

[1] Bińczak G., A characterization theorem for weak varieties // Algebra universalis, 45, no. 1, 2001, 53–62.

[2] Burmeister P., Rosselló F., Rudak L. On Höft's characterization of weak model classes // Algebra universalis, 34, no. 2, 1995, 214–219.

[3] Höft H. Weak and strong equations in partial algebras // Algebra universalis, 3, no. 1, 1973, 203–215.

[4] Poythress V. S. Partial morphisms on partial algebras // Algebra universalis, 3, no. 1, 1973, 182–202.

[5] Rudak L. Algebraic characterization of conflict-free varieties of partial algebras // Algebra universalis, 30, no. 1, 1993, 89–100.

[6] Schmidt J. A homomorphism theorem for partial algebras // Colloquium Mathematicae, 21, no. 1, 1970, 5–21.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
СИУ — Филиал РАНХиГС, Новосибирск
E-mail: sheremet@math.nsc.ru

О вложении свободной решетки ранга 3 в свободную решетку, порожденную тремя вполне правомодулярными элементами

М. П. Шушпанов

Определение 1. Элемент a решётки L называется *левомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x < y \to x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

Легко видеть, что свойство левомодулярности самодвойственно.

Определение 2. Элемент a решётки L называется *правомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x < a \to x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge a.$$

Двойственно определяется коправомодулярный элемент.

Для краткости удобно использовать

Определение 3. Элемент решётки называется *вполне правомодулярным*, если он правомодулярен и коправомодулярен одновременно.

В [**1**] показано, что свободная решётка, порождённая тремя левомодулярными элементами изоморфна свободной модулярной решётке ранга 3. В [**2**] найдены все тройки порождающих элементов, обладающих определёнными выше свойствами или их комбинациями, для которых свободная решётка, порождённая такой тройкой, также изоморфна свободной модулярной решётке ранга 3. В частности, показана необходимость для этого хотя бы одного левомодулярного элемента среди порождающих. Однако вопрос о том, насколько свободные решётки, порождённые тройкой без левомудулярных элементов, могут оказаться "далёкими" от 3-порождённых модулярных решёток, там не обсуждается.

Доказана следующая

Теорема. *Свободная решётка, порождённая тремя вполне правомодулярными элементами, содержит в качестве подрешётки свободную решётку ранга 3.*

Список литературы

[1] Шушпанов М. П. Решётки, порождённые модулярными элементами // Изв. вузов. Математика, N 12, 2015, 84–86.

[2] Гейн А. Г., Шушпанов М. П. Достаточные условия модулярности решётки с порождающими элементами, обладающими свойствами типа модулярности // Сибирский математический журнал, т. 56, N 4, 2015, 798–804.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: mikhail.shushpanov@gmail.com

Об ω-независимых базисах квазитождеств

А. В. Яковлев

Класс $\mathbf{K}$ называется *квазимногообразием*, если он является классом моделей для некоторого множества квазитождеств Φ. Множество Φ называется *базисом* квазитождеств для $\mathbf{K}$. Базис Φ называется *независимым*, если для любого $\varphi \in \Phi$ существует система, на которой истинны все квазитождества из $\Phi \setminus \{\varphi\}$, а квазитождество φ ложно. Базис Φ называется *ω-независимым*, если существует разбиение $\Phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует система, на которой истинны все квазитождества из $\Phi \setminus \Phi_n$, но ложно некоторое квазитождество из Φ_n.

В докладе будут рассмотрены решетки квазимногообразий. Доказано, что среди квазимногообразий $\mathbf{V}_I$ (неориентированных) графов (без петель), не имеющих независимого базиса квазитождеств, есть 2^ω квазимногообразий, имеющих ω-независимый базис квазитождеств. Результат также установлен для квазимногообразия ориентированных графов, многообразий унаров и точечных абелевых групп.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: yakor1191@gmail.com

On groupoids of relations

D. A. Bredikhin

A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra that is called an *algebra of relations*. For any set Ω of operations on binary relations, let $R\{\Omega\}$ denote the class of all algebras isomorphic to ones whose elements are binary relations and whose operations are members of Ω.

One of the most important classes of operations on relations is the class of *primitive-positive* operations [**1**] (in other terminology – Diophantine operations [**2, 3**]). An operation on relations is called primitive positive, if it can be defined by a formula containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. Equational and quasiequational theories of algebras of relations with primitive positive operations are described in [**2**].

We we will consider algebras of relations with one binary operation, i.e., groupoids of relations. The motivation of these investigations and some results can be found in [**4, 5**].

Let as focus our attention on the following $*$ binary primitive-positive operation:

$$\rho * \sigma = \{(u, v) \in U \times U : (u, v) \in \rho \wedge (v, u) \in \sigma\},$$

where ρ and σ are relations on U.

Note that $\rho * \sigma = \rho \cap \sigma^{-1}$ where $^{-1}$ is the operation of relation inverse. It follows that this type groupoids of this type can be considered as generalized reducts of Tarski's relation algebras [**6**].

Theorem. *The class $R\{*\}$ forms a variety. A groupoid $(A, \cdot)$ belongs to the variety $R\{*\}$ if and only if it satisfies the identities:*

$$\textit{(1)}\ \ (xy)(yx) = xy, \quad \textit{(2)}\ \ (xy)z = (xy)(zx), \quad \textit{(3)}\ \ x(yz) = (xy)(yz),$$
$$\textit{(4)}\ \ (xy)z = (xz)y, \quad \textit{(5)}\ x(yz) = z(yx), \quad \textit{(6)}\ \ (x(yz))t = x(t(zy)),$$
$$\textit{(7)}\ \ (xy)(zt) = (xz)(yt), \ \textit{(8)}\ \ (xy)(zt) = (tz)(yx).$$

References

[1] Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebra, 7, 1991, 50–70.

[2] Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations // Siberian Mathematical Journal, 38, 1997, 23–33.

[3] Bredikhin D. A. On algebras of relations with Diophantine operations // Doklady Mathematics, 57, 1998, 435–436.

[4] Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 54, 1991, 111–124. (1991)

[5] Bredikhin D. A. On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrofication // Alg. Univers., vol. 73, 2015, 43–52.

[6] Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic, 1941, 73–89.

SSTU, Saratov
E-mail: bredikhin@mail.ru

Universal equivalence of linear groups

E. I. Bunina, G. A. Kaleeva

A. I. Maltsev was the first to study logical properties of linear groups over fields. In 1961 he proved that the groups $\mathrm{G}_n(K)$ and $\mathrm{G}_m(L)$ ($\mathrm{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$; K, L are fields of characteristic 0) are elementary equivalent if and only if $m = n$ and the fields K and L are elementary equivalent.

In the present paper we also consider logical properties of linear groups, namely universal equivalence.

Definition 1. *A formula φ of the signature Σ is called universal if it has the following normal form*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

where $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ does not have quantifiers.

Definition 2. *Two algebraical systems $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of the signature Σ are called universally equivalent if for every universal formula φ of the signature Σ the following condition holds:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.$$

The following criteria of universal equivalence for linear groups similar to Maltsev's one are true.

Theorem 1. *Let K and L be infinite fields. The groups $\mathrm{G}_n(K)$ and $\mathrm{G}_m(L)$ ($\mathrm{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}$) are universally equivalent iff $n = m$ and the fields K and L are universally equivalent.*

Theorem 2. *Let R_1 and R_2 be commutative local rings with $1/2$. The groups $\mathrm{G}_n(R_1)$ and $\mathrm{G}_m(R_2)$ ($\mathrm{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, n, m \geqslant 3$) are universally equivalent iff $n = m$ and the rings R_1 and R_2 are universally equivalent.*

Lomonosov Moscow State University, Moscow
E-mail: galinakaleeva@yandex.ru

The complexity of the subsemigroup lattices of elementary theories

S. M. Lutsak, M. V. Schwidefsky

We study the complexity of the structure of the subsemigroup lattice $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ of the semigroup of elementary theories of the class $\mathbf{K}$ of algebraic structures of a signature σ. Let $\mathbf{K}(\sigma)$ denote the class of all algebraic structures of a signature σ. Let $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ be closed with respect to direct products and let $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_F \mid F \in P_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$. We consider the following properties:

(T_0) $\mathcal{A}_\varnothing$ is a trivial structure;
(T_1) if $\mathcal{A}_F \equiv \mathcal{A}_G$ then $F = G$ for any $F, G \in P_{fin}(\omega)$;
(T_2) $\mathcal{A}_F \times \mathcal{A}_G \equiv \mathcal{A}_{F\cup G}$ for any $F, G \in P_{fin}(\omega)$;
(T'_2) $\mathcal{A}_F \times \mathcal{A}_G \equiv \mathcal{A}_{F\cap G}$ for any $F, G \in P_{fin}(\omega)$.

Definition 1. If $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_F \mid F \in P_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$ satisfies (T_0)-(T_1) and (T_2) then $\mathbf{A}$ is $\mathrm{T}_{\mathbf{K}}$-*class*. If $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_F \mid F \in P_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$ satisfies (T_0)-(T_1) and (T'_2) then $\mathbf{A}$ is $\mathrm{T}'_{\mathbf{K}}$-*class*.

Definition 2. For algebraic structures $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{K}$ let $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) * \mathrm{Th}(\mathcal{B}) = \mathrm{Th}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$. The algebra $\mathcal{T}_{\mathbf{K}} = \big\langle \{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathbf{K}\}, * \big\rangle$ is a commutative semigroup with unit. We name it *the semigroup of elementary theories of the class* $\mathbf{K}$.

Theorem. *Let $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ be closed with respect to direct products, and $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_F \mid F \in P_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$ be $\mathrm{T}_{\mathbf{K}}$-class or $\mathrm{T}'_{\mathbf{K}}$-class, then the lattice $\prod_{n<\omega} \mathrm{Sub}(\mathcal{B}_n)$ is embedded in the lattice $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$. In particular, the lattice $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ contains a sublattice which is isomorphic to the ideal lattice of a free lattice of countable rank, and it is Q-universal.*

Corollary 1. *For a signature σ let one of the following cases take place:*
(1) *σ contains at least one functional symbol;*
(2) *σ contains at least one at least binary relation symbol;*
(3) *σ is at least countable.*

Then the lattice $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}(\sigma)})$ contains a sublattice which is isomorphic to the ideal lattice of a free lattice of countable rank, and it is Q-universal.

Corollary 2. *Let $\mathbf{K}$ is one of the following classes of algebraic structures:*
(1) *the variety of all unars;*
(2) *the quasivariety of all [directed] graphs;*
(3) *the variety of all Abelian groups;*
(4) *the variety of all differential groupoids;*
(5) *the variety of all commutative rings with unit;*
(6) *the variety of MV-algebras;*
(7) *the variety of modular lattices.*

Then the lattice $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ contains a sublattice which is isomorphic to the ideal lattice of a free lattice of countable rank, and it is Q-universal.

The M. Kozybayev North-Kazakhstan State University, Petropavlovsk (Kazakhstan)
E-mail: sveta_lutsak@mail.ru
Sobolev Institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: semenova@math.nsc.ru

On generative subclasses of generative classes and their spectra

S. V. Sudoplatov

We consider variations for generic structures [**1**] and their theories generated by generative subclasses of a generative class $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ with respect to the following three spectral characteristics:

1) the cardinality $\mathrm{gss}_{\mathrm{fin}}$-$\mathrm{Sp}(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ of the set of isomorphism types of all finite $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$-generic structures $\mathcal{M}$, where $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ is a conservative generative subclass of $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$, i.e., the cardinality of the set of all theories $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ of the structures $\mathcal{M}$;

2) the cardinality $\mathrm{gss}_{\mathrm{inf}}$-$\mathrm{Sp}(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ of the set of isomorphism types of all infinite $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$-generic structures $\mathcal{M}$, where $(\mathbf{D}'_0; \leqslant')$ is a conservative generative subclass of $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$;

3) the cardinality $\mathrm{egss}_{\mathrm{inf}}$-$\mathrm{Sp}(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ of the set of theories for isomorphism types of infinite structures above.

We have the following triplet of characteristics for the generative class $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$:

$$\langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle \rightleftharpoons \langle \mathrm{gss}_{\mathrm{fin}}\text{-}\mathrm{Sp}(\mathbf{D}_0; \leqslant), \mathrm{egss}_{\mathrm{inf}}\text{-}\mathrm{Sp}(\mathbf{D}_0; \leqslant), \mathrm{gss}_{\mathrm{inf}}\text{-}\mathrm{Sp}(\mathbf{D}_0; \leqslant) \rangle \,,$$

with $\lambda_2 \leq \lambda_3$ and $\lambda_3 = 0$ if $\lambda_2 = 0$. This triplet is denoted by $c_3(\mathbf{D}_0; \leqslant)$.

Theorem. *Assuming the continuum hypothesis, for any self-sufficient generative class $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ with countably many generating diagrams, the triplet $c_3(\mathbf{D}_0; \leqslant) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$ is exhausted by the following possibilities: $\langle n, 0, 0 \rangle$, $n \in \omega \setminus \{0\}$; $\langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$, $\lambda_1 \in \omega + 1$, $\lambda_2, \lambda_3 \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega, 2^\omega\}$, $\lambda_2 \leq \lambda_3$. All described triplets are realizable.*

Corollary. *In the hypothesis of Theorem, if diagrams in $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$ are complete then $c_3(\mathbf{D}_0; \leqslant) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$ is exhausted by the following possibilities: $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 1, \lambda_3 \rangle$, $\lambda_3 \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega, 2^\omega\}$. All described triplets are realizable.*

As shown in [**2, 3**], there are generative classes $(\mathbf{D}_0; \leqslant)$, in uncountable languages, without generic structures. It implies the possibility $c_3(\mathbf{D}_0; \leqslant) = \langle 0, 0, 0 \rangle$.

The research was partially supported by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (Grant NSh-6848.2016.1), by Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 17-01-00531), and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0830/GF4).

References

[1] Sudoplatov S. V. Classification of countable models of complete theories. Novosibirsk: NSTU, 2014.

[2] Kudaibergenov K. Zh. On Fraïssé Theorem for an uncountable class of finitely generated structures / Siberian Advances in Mathematics (to appear).

[3] Kiouvrekis Y., Stefaneas P., Sudoplatov S. V. Definable sets in generic structures and their cardinalities // Siberian Advances in Mathermatics, 2018 (to appear).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan)

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

On free commutative n-tuple semigroups

A. V. Zhuchok

A nonempty set G equipped with n binary operations $\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}$, satisfying the axioms $(x\boxed{r}y)\boxed{s}z = x\boxed{r}(y\boxed{s}z)$ for all $x, y, z \in G$ and $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$, is called an n-tuple semigroup [**1**]. In [**2**], examples of n-tuple semigroups are given, the independence of axioms of an n-tuple semigroup is established and free n-tuple semigroups are constructed. An n-tuple semigroup will be called commutative if every its operation is commutative. The class of all commutative n-tuple semigroups forms a subvariety of the variety of n-tuple semigroups. An n-tuple semigroup which is free in the variety of commutative n-tuple semigroups will be called a free commutative n-tuple semigroup. If ρ is a congruence on an n-tuple semigroup $G^{'}$ such that $G^{'}/\rho$ is a commutative n-tuple semigroup, we say that ρ is a commutative congruence.

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. Let X be an arbitrary nonempty set and ω an arbitrary word in the alphabet X. The length of ω will be denoted by l_ω. By definition, the length of the empty word is equal to 0. Fix $n \in \mathbb{N}$ and let $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ be an arbitrary set consisting of n elements. Let further $F^*[X]$ be the free commutative semigroup on X, $F_*^\theta[Y]$ the free commutative monoid on Y and $\theta \in F_*^\theta[Y]$ the empty word. Define n binary operations $\boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n}$ on $XY_{(n)} = \{(w, u) \in F^*[X] \times F_*^\theta[Y] \,|\, l_w - l_u = 1\}$ by

$$(w_1, u_1)\boxed{i}(w_2, u_2) = (w_1w_2, u_1y_iu_2)$$

for all $(w_1, u_1), (w_2, u_2) \in XY_{(n)}$ and $i \in \{1, 2, ..., n\}$. The algebra

$$(XY_{(n)}, \boxed{1}, \boxed{2}, ..., \boxed{n})$$

will be denoted by $FC_nS(X)$.

Theorem 1. *$FC_nS(X)$ is the free commutative n-tuple semigroup.*

Proposition 1. *For any $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ the semigroups $(XY_{(n)}, \boxed{i})$ and $(XY_{(n)}, \boxed{j})$ are isomorphic.*

Denote by $\Im[X]$ the symmetric group on X and by $Aut\, G^{'}$ the automorphism group of an n-tuple semigroup $G^{'}$.

Proposition 2. $Aut\, FC_nS(X) \cong \Im[X]$.

We also consider separately one-generated free commutative n-tuple semigroups and describe the least commutative congruence on a free n-tuple semigroup.

References

[1] Koreshkov N. A. n-Tuple algebras of associative type // Russian Mathematics, 52, 2008, no. 12, 28–35.
[2] Zhuchok A.V. Free n-tuple semigroups // Math. Notes, 103, 2018, to appear.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Starobilsk (Ukraine)
E-mail: zhuchok.av@gmail.com

On free idempotent abelian dimonoids

Yu. V. Zhuchok

A nonempty set D with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ is called a *dimonoid* [**1**] if for all $x, y, z \in D$ the following conditions hold:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z).$$

An idempotent semigroup S is called a *left* (respectively, *right*) *normal band* if $axy = ayx$ (respectively, $xya = yxa$) for all $a, x, y \in S$. A dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is called a (ln, rn)-*diband* [**2**] if $(D, \dashv)$ is a left normal band and $(D, \vdash)$ is a right normal band.

Let X be a nonempty set and $FS(X)$ the free semilattice of all nonempty finite subsets of X with respect to the operation of the set theoretical union. Define two binary operations $\dashv$ and $\vdash$ on the set $\{(a, A) \in X \times FS(X) | a \in A\}$ as follows:

$$(x, A) \dashv (y, B) = (x, A \cup B),$$

$$(x, A) \vdash (y, B) = (y, A \cup B).$$

According to [2] this algebra is the free (ln, rn)-diband and it is denoted by $B_{lz,rz}(X)$.

A dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is called *abelian* if $x \dashv y = y \vdash x$ for all $x, y \in D$. For example, any left zero and right zero dimonoid [**2**] is abelian. Free abelian dimonoids were described in [**3**].

The following theorem gives necessary and sufficient conditions under which an arbitrary dimonoid is an abelian diband.

Theorem 1. *A dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is idempotent abelian if and only if $(D, \dashv, \vdash)$ is a (ln, rn)-diband.*

From here we immediately obtain

Corollary 1. *The variety of idempotent abelian dimonoids coincides with the variety of (ln, rn)-dibands and $B_{lz,rz}(X)$ is the free idempotent abelian dimonoid.*

References

[1] Loday J.-L. Dialgebras, in: Dialgebras and related operads // Lect. Notes Math., 1763, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 7–66.

[2] Zhuchok A. V. Free (lr, rr)-dibands // Algebra Discrete Math., 15, 2013, no. 2, 295–304.

[3] Zhuchok Yu. V. Free abelian dimonoids // Algebra Discrete Math., 20, 2015, no. 2, 330–342.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Starobilsk (Ukraine)
E-mail: zhuchok.yu@gmail.com

VII. Секция «Неклассические логики»

О нижней оценке числа полных по П. С. Новикову расширений логики Габбая — де Йонга в языке с одной дополнительной константой

А. К. Кощеева, Е. В. Ворончихина

Логикой Габбая — де Йонга с индексом ветвления n называется си-логика, характеризуемая классом конечных деревьев с ветвлением n, в каждой немаксимальной точке: $T_n = Int + \bigwedge\limits_{i=0}^{n}((p_i \to \bigvee\limits_{j \neq i} p_j) \to \bigvee\limits_{j \neq i} p_j) \to \bigvee\limits_{i=0}^{n} p_i$ $(n \geq 1)$ [**1**].

Пусть Fm — множество формул стандартного пропозиционального языка. Обогатим язык дополнительной логической константой φ.

φ-логикой называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

φ-логика $\mathcal{L}$ называется *полным по П.С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi) \setminus \mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L.

В работе [**2**] дано исчерпывающее описание семейства всех полных по Новикову расширений каждой из предтабличных си-логик в языке с несколькими дополнительными константами (для $L3$ подобное описание дано для случая одной константы).

Основная цель этой работы — изучение семейства максимальных консервативных над T_n φ-логик (для каждого $n \geq 2$).

В качестве первого шага к описанию этого семейства предполагается оценить снизу его мощность для каждого $n \geq 2$ (при $n = 1$ получается известная логика Даммета).

Теорема. *Существует счетное число консервативных расширений логики Габбая — де Йонга с ветвлением 2 в языке с одной дополнительной константой.*

Расширения строятся так называемым *методом наростов*. Этот метод разработан А. Д. Яшиным для построения полных по Новикову расширений Int в языке с дополнительными константами [**3**].

Список литературы

[1] Gabbay D.M., de Jongh D.H.J., A Sequence of Decidable Finitely Axiomatizable Intermediate Logics with the Disjunction Property // The Journal of Symbolic Logic, 1974, 39, 67–78.

[2] Кощеева А.К., Новые константы в предтабличных суперинтуиционистских логиках: подход П.С. Новикова // Изв. ИМИ УдГУ, 2016, 1(47), 3–33.

[3] Яшин А.Д., О количестве новых логических констант в интуиционистском исчислении высказываний // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1, матем., механика, 1997, 1, 7–10.

Удмуртский государственный университет, Ижевск
E-mail: kannakst@mail.ru, elena.voronchi@gmail.com

О парамодуляционном расширении метода элиминации моделей

А. В. Лялецкий

Предлагается (корректное и полное) парамодуляционное расширение метода элиминации моделей в его оригинальной формулировке, который был предложен Д.В. Лавлендом в [**1**] для поиска опровержения в классической логике первого порядка без равенства. Напомним, что метод элиминации моделей содержит два правила вывода – правило входной резолюции и правило редукции (см. [**1**] или [**2**]) и оперирует упорядоченными дизъюнктами, содержащими так называемые обрамленные литеры, которые несут информацию о том, какие литеры были задействованы в применениях правила входной резолюции, и которые не только могут, но в общем случае, для обеспечения полноты метода элиминации моделей, должны участвовать в применениях правила редукции.

Предлагаемое расширение содержит наряду с правилами входной резолюции и редукции ещё три правила парамодуляционного типа: одно осуществляет парамодуляцию из литеры равенства выбранного входного дизъюнкта в крайнюю справа литеру так называемого центрального дизъюнкта, второе — парамодуляцию из крайней справа (необрамленной) литеры равенства центрального дизъюнкта в любую литеру выбранного входного дизъюнкта и третье — парамодуляцию из обрамленной литеры равенства центрального дизъюнкта, правее которой в этом дизъюнкте необрамленной является только его крайняя справа литера, в эту крайнюю справа необрамленную литеру.

Теорема. *Пусть S — исходное конечное множество упорядоченных дизъюнктов, $x = x$ — единичный дизъюнкт, представляющий аксиому рефлексивности, и $F(S)$ — множество всех аксиом функциональной рефлексивности для S. Если $D \in S$ и $S \setminus \{D\}$ есть E-выполнимое множество, то множество S E-невыполнимо тогда и только тогда, когда в предложенном парамодуляционном расширении метода элиминации моделей существует вывод пустого дизъюнкта из множества $S \cup \{x = x\} \cup F(S)$ с D в качестве начального центрального дизъюнкта.*

Заметим, что можно построить пример, показывающий необходимость использования в общем случае аксиом функциональной рефлексивности для обеспечения полноты предложенного парамодуляционного расширения.

Список литературы

[1] Loveland D. V., Mechanical theorem proving by model elimination // Journal of the ACM, 1968, 15, 236–251.

[2] Чень Ч., Ли Р., Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, М.: Наука, 1987.

Институт математики и информатики, Кишинев (Молдова)
E-mail: forlav@mail.ru

Об элементарной эквивалентности моделей модальной логики

С. С. Магазов

Вопросы, касающиеся выразительной способности языка модальной логики, стали рассматриваться с 1971. В частности были изучены вопросы, касающиеся трансформаций модели Крипке, сохраняющие истинность формул. Рассмотрим способ определения элементарной эквивалентности моделей с помощью специально определённой φ-игры.

Пусть даны две модели Крипке Φ_1, Φ_2, формула модальной логики φ и состояния $s_1 \in \Phi_1$и $s_2 \in \Phi_2$. В φ-*игру* играют игрок и $\Diamond$-игрок. В процессе игры они дописывают к меткам вершины синтаксического дерева φ пары состояний s_1, s_2. Под синтаксическим деревом подразумевается дерево синтаксического разбора формулы. В результате игры получится размеченное дерево.

Лемма 1. *Если $\Diamond$-игрок имеет выигрышную стратегию в φ-игре на моделях Φ_1, Φ_2, тогда $\Phi_1\varphi$ и $\Phi_2\varphi$.*

Лемма 2. *Если модели Φ_1, Φ_2 элементарно эквивалентны, то $\Diamond$-игрок имеет выигрышную стратегию в φ-игре для любой φ.*

Список литературы

[1] Milner R., An algebraic definition of simulation between programs // Proc. 2nd Int. Joint Conferences on Artificial Intelligence. British Comp. Soc., London, 1971.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
E-mail: 2006mag@mail.ru

Распознавание свойств исчислений по правилам вывода

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Работа посвящена проблемам сильной разрешимости и сильной узнаваемости над минимальной логикой J Йохансона [**1**]. Семейство логик, содержащих J, называется *сильно разрешимым над* J, если существует алгоритм, позволяющий по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода установить, принадлежит ли этому семейству логика с аксиомами и правилами $J + Rul$.

Доказано, что некоторые важные семейства логик сильно разрешимы над J:

Теорема 1. *Следующие семейства логик сильно разрешимы над* J*:*

(1) *семейство нетривиальных логик,*
(2) *семейство негативных логик,*
(3) *семейства расширений логик* JK, KC, Gl, LC, NC.

В [**2**] было доказано, что проблема включения в LC сильно разрешима над Int, т.е. существует алгоритм для проверки соотношения $Int + Rul \leq LC$. В этой работе доказана

Теорема 2.

(1) *Проблема включения в* LC *сильно разрешима над* J.
(2) *Проблема включения в* NC *сильно разрешима над* Neg.

Конечно аксиоматизируемую логику L назовем *сильно узнаваемой над* J, если для любой конечной системы Rul схем аксиом и правил вывода можно эффективно проверить равенство $J + Rul = L$.

Формула A *сильно различима над* J, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода устанавливает, является ли A теоремой $J + Rul$.

Доказано, что из разрешимости логики по допустимости правил вывода и сильной различимости ее аксиомы следует сильная узнаваемость. Доказана сильная узнаваемость над J некоторых известных логик, а также всех расширений LC и NC:

Теорема 3. *Следующие логики сильно узнаваемы над* J*:* For, J, Neg, Gl, KC, LC *и все ее расширения*, NC *и все ее расширения.*

Список литературы

[1] Johansson I., Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compositio Mathematica, 1937, 4, 119–136.

[2] Maksimova L., Strongly Decidable Properties of Modal and Intuitionistic Calculi // Logic Journal of IGPL, 2000, 8(6), 797–819.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru

О некоторых расширениях логики Даммета

А. Д. Яшин, А. Г. Макаров

Изучаются расширения суперинтуиционисткой *логики Даммета* ($\equiv LC$ [**1**]) в языке, содержащем, помимо стандартных связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\leftrightarrow$, дополнительную одноместную связку $\varphi(\cdot)$; понятие формулы соответственно расширяется.

φ-Логикой называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int, замкнутое относительно правил модус поненс и подстановки, и содержащее формулу $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q))$ (*аксиома замены для* φ). φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативной над* LC, если для любой формулы B, не содержащей φ, из $B \in \mathcal{L}$ следует $B \in LC$.

Связка φ интерпретируется в моделях Крипке как *иррефлексивная модальность*:

$$x \Vdash \varphi(A) \rightleftharpoons \forall y > x(y \Vdash A).$$

Рассматриваем бесконечные цепи вида $\omega+n$ и $\lambda+n$ (здесь ω и λ — порядковые типы множества натуральных чисел, и множества неотрицательных действительных чисел соответственно, n — натуральное число), снабжённые иррефлексивной модальностью, и порождаемые ими φ-логики $\mathcal{L}(\alpha + n)$.

Теорема. *Каждая из указанных φ-логик содержат аксиому замены для φ. Все указанные φ-логики попарно несовместимы над LC, т.е. объединение любых двух из них порождает φ-логику, неконсервативную над LC. При всех натуральных $n \geq 0$ $\mathcal{L}(\omega + n)$ не допускает присоединения явных соотношений для φ, т.е. формул вида $\varphi(p) \leftrightarrow B$, где B не содержит φ. При всех натуральных $n > 0$ $\mathcal{L}(\lambda + n)$ также не допускает присоединения явных соотношений для φ.*

Иначе говоря, каждая φ-логика, указанная в теореме, *определяет новую связку в логике Даммета* в соответствии с подходом П.С. Новикова [**2**]. Полученную теорему можно рассматривать как нижнюю оценку числа *полных по П.С. Новикову* расширений логики LC [**3**].

Список литературы

[1] Dummett M. A propositional calculus with denumerable matrix // J. Symb. Logic, v.24, N1 (1959), p.97–106.

[2] Я.С. Сметанич. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // ДАН СССР, 1959, Т. 139, N2, С. 309–312.

[3] А.Д. Яшин. Иррефлексивная модальность как новая логическая связка в логике Даммета // Сиб. матем. журнал, 2014. Том 55, вып. 1, с.228–234.

МГППУ, Москва
E-mail: yashin.alexandr@ya.ru, magrus87@gmail.com

Projective unification for linear non-transitive temporal logic with the operator of universal modality

S. I. Bashmakov

We investigate modal logic, based on the novel idea of non-transitive time [**1**]. Let $\mathcal{LITL}$ be the linear non-transitive temporal logic characterized by the Kripke frame $F = \langle \mathbb{N}, Next\rangle$, where $\mathbb{N}$ is the natural line, and $Next$ is the binary relation s.t.

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : aNextb \Leftrightarrow b = a + 1.$$

We extend the language of $\mathcal{LITL}$ by the operator $\Box_U$ called an universal modality and define the truth values of a formulas containing $\Box_U$ on the model $M = \langle F, V\rangle$:

$$\forall x \in F, \langle F, x\rangle \Vdash_V \Box_U \varphi \Leftrightarrow [\forall y \in F, \langle F, y\rangle \Vdash_V \varphi].$$

The logic $\mathcal{LITL}$ containing $\Box_U$ is called the linear bimodal logic based on non-transitive time with universal modality. We denote it as $\mathcal{ULITL}$.

Unification problem can be formulated as the possibility of a formula to become a theorem after replacing a part of variables [**2**]. In the study of the unification problem in $\mathcal{ULITL}$ we used an approach based on the projective formulas first proposed by S. Ghilardi [**3, 4**] for intuitionistic, and later efficiently applied for a many others non-standard logics, including temporal cases (e.g. see [**5, 6**]).

We proved that all formulas unifiable at $\mathcal{ULITL}$ are projective [**7**]. This implies that any such formula has most general unifier (mgu). An algorithm for constructing mgu is proposed: it suffices to write out the following substitution $\sigma(p_i)$ instead of all variables p_i of a given unifiable formula φ:

$$\sigma(p_i) := (\Box_U \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \Box_U \varphi \wedge gu(p_i)).$$

An important consequence of the projective unification in $\mathcal{ULITL}$ is its almost structural completeness [**8**]: every admissible non-passive rule is derivable in $\mathcal{ULITL}$.

References

[1] Rybakov V.V., Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations // J. Logic Comput, **26(3)**, 2015, 945-958.

[2] Odintsov S.P., Rybakov V.V., Unification Problem in NelsonтАЩs Logic N4 // Sib. Elect. Math. Reports, 2014, 11, 434–443.

[3] Ghilardi S., Unification Through Projectivity // J. Logic and Comput, 1997, 7(6), 733–752.

[4] Ghilardi S., Unification in Intuitionistic logic // J. Symbolic Logic, 1999, 64(2), 859–880.

[5] Rybakov V.V., Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU // Logic J. IGPL, 2014, 22(4), 665–672.

[6] Bashmakov S.I., Kosheleva A.V., Rybakov V., Projective formulas and unification in linear discrete temporal multi-agent logics // Sib. Elect. Math. Reports, 2016, 13, 923–929.

[7] Bashmakov S. I. *Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality*, J. SibFU. Math & Phys, **10(4)**, 2017 — forthcoming.

[8] Dzik W. *Remarks on projective unifiers*, Bull. Sect. Logic, **40(1)**, 2011, 37–45.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: krauder@mail.ru

Comparison of some hypersequent calculi for infinite-valued first-order Lukasiewicz logic

A. S. Gerasimov

Infinite-valued first-order Lukasiewicz logic Ł∀ and its extension by rational truth constants, rational first-order Pavelka logic RPL∀, are among the most important mathematical fuzzy logics that provide the basis for approximate reasoning.

With the purpose of developing proof search methods for RPL∀, we eliminated all the structural rules from the hypersequent calculus GŁ∀ [**3**, Sec. 8.5.2] for Ł∀ and thus obtained the cumulative hypersequent calculus G^1Ł∀ [**1**] for RPL∀. Next we introduced the noncumulative and invertible hypersequent calculus G^3Ł∀ [**2**] for RPL∀ without structural rules as well. Each rule of G^3Ł∀ is repetition-free, i. e., does not have a designation of a multiset of formulas repeated in any premise. G^1Ł∀ proves any GŁ∀-provable hypersequent and G^3Ł∀ proves any G^1Ł∀-provable hypersequent. Now we establish other relationships between the mentioned calculi.

We formulate an intermediate hypersequent calculus G^0Ł∀ such that its hypersequents are defined just as G^3Ł∀-hypersequents, it does not contain structural rules, and its logical rules are cumulative and similar to ones of GŁ∀.

Theorem 1. (a) *For any* GŁ∀*-hypersequent* $\mathcal{H}$, $\vdash_{\mathrm{G\L\forall}} \mathcal{H}$ *iff* $\vdash_{\mathrm{G^0\L\forall}} \mathcal{H}$. (b) *For any* $i = 1, 3$ *and* G^iŁ∀*-hypersequent* $\mathcal{H}$, *if* $\vdash_{\mathrm{G^0\L\forall}} \mathcal{H}$, *then* $\vdash_{\mathrm{G^i\L\forall}} \mathcal{H}$.

Some repetition-free rules of G^1Ł∀ and G^3Ł∀ are based on the rules:

$$\frac{\mathcal{G} \,|\, \Gamma, \mathfrak{p} \Rightarrow \Delta \,|\, C \Rightarrow \mathfrak{p}}{\mathcal{G} \,|\, \Gamma, C \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{den}_1), \qquad \frac{\mathcal{G} \,|\, \Gamma \Rightarrow \mathfrak{q}, \Delta \,|\, \mathfrak{q} \Rightarrow C}{\mathcal{G} \,|\, \Gamma \Rightarrow C, \Delta}\ (\mathrm{den}_0),$$

where C is an RPL∀-formula, $\mathfrak{p}$ (resp., $\mathfrak{q}$) is a so-called semi-propositional variable that is assigned a value from $(-\infty, 1]$ (resp., $[0, +\infty)$) in an interpretation and does not occur in the conclusion of the corresponding rule. The rules (den_1) and (den_0) can be characterized as non-standard variants of the density rule, cf. [**3**, Sec. 4.5].

Theorem 2. *The rules* (den_1) *and* (den_0) *are admissible for* G^0Ł∀.

For each rule (den_1) and (den_0) our proof of Theorem 2 yields an algorithm that transforms a G^0Ł∀-proof of a premise to one of the corresponding conclusion.

Theorem 3. *For any* $i = 1, 3$ *and* G^iŁ∀*-hypersequent* $\mathcal{H}$, $\vdash_{\mathrm{G^i\L\forall}} \mathcal{H}$ *iff* $\vdash_{\mathrm{G^0\L\forall}} \mathcal{H}$.

Corollary 4. (a) *For any* $i = 0, 1, 3$ *and* Ł∀*-formula* A, $\vdash_{\mathrm{G\L\forall}} A$ *iff* $\vdash_{\mathrm{G^i\L\forall}} A$. (b) *For any* RPL∀*-formula* A, $\vdash_{\mathrm{G^0\L\forall}} A$ *iff* $\vdash_{\mathrm{G^1\L\forall}} A$ *iff* $\vdash_{\mathrm{G^3\L\forall}} A$.

References

[1] Gerasimov A.S., Infinite-valued first-order Lukasiewicz logic: hypersequent calculi without structural rules and search for proofs of prenex sentences // Siberian Advances in Mathematics. Accepted.

[2] Gerasimov A.S., Proof search for non-prenex sentences of rational first-order Pavelka logic // Int. Conf. "Mal'tsev Meeting 2016": Collection of Abstracts, 2016, Novosibirsk, 220.

[3] Metcalfe G., Olivetti N., Gabbay D.M., Proof theory for fuzzy logics, Dordrecht, Springer, 2009.

Saint Petersburg
E-mail: alexander.s.gerasimov@ya.ru

Hybrid logics with strong negation

K. A. Kaushan

A hybrid version $\mathcal{H}yb\mathcal{BK}$ of Belnapian modal logic is introduced and studied. The author defines it semantically, constructs its faithful embedding into the Torben Brauner logic [**1**], introduces a Hilbert-style axiomatic system and proves its completeness with respect to the semantics of $\mathcal{H}yb\mathcal{BK}$. By modifying a translation presented in [**1**] the author obtains an embedding of $\mathcal{H}yb\mathcal{BK}$ into a non-classical first order logic. In the course of work a calculus of natural deduction $N_{\mathcal{H}yb\mathcal{BK}}$ is defined and its soundness and completeness are proved.

References

[1] Brauner T., Hybrid Logic and its Proof-Theory, Berlin, Springer, 2011.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: kaushan@nsu.ru

Temporal multi-valued logic with lost worlds in past

V. V. Rybakov

We study many-valuated temporal multi-agent logics based at non-transitive models. Semantical bases—relational frames—model computational processes and analysts of knowledge databases with incomplete information, e.g. with forgettable past. That is agents' accessibility relations may have lacunas; agents may have no access to some potentially known and stored information. Yet innovative point is that at the relational models we consider different valuations V_i for agents knowledge and a global valuation based on these valuations. Besides, agents' logical operations inside formulas may be nested, and so may interfere, that is we consider not autonomous but cooperating agents. Satisfiability and decidability issues are discussed. We find algorithms solving satisfiability problem and hence decidability. Open problems are discussed.

Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk
Institute of Informatics Systems, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk
E-mail: Vladimir_Rybakov@mail.ru

On the consistency problem for probabilistic inference

E. E. Vityaev, S. P. Odintsov

One of reasons for arising the statistical ambiguity is using in the course of reasoning laws which have probabilistic, but not logical justification. Carl Hempel supposed that one can avoid the statistical ambiguity if we will use in the probabilistic reasoning maximal specific probabilistic laws. The logical reconstruction of the notion of maximal specificity was investigated in the series of works of the first author. In [**1**], it was proved that the inference from a consistent set of premisses with the help of maximal specific rules of the form $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$, where $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ are literals, does not lead to a contradiction. In the present work we essentailly generalize the system of notions and the results of [**1**] dealing with laws of the form $\varphi \Rightarrow \psi$, where φ and ψ are arbitrary propositional formulas. Given a probability on the set of formulas we define the notion of a maximal specific probabilistic law of the form $\varphi \Rightarrow \psi$. Further, we define a prediction operator as an inference with the help of maximal specific laws and prove that applying the prediction operator to some consistent set of formulas we obtain a consistent set of consequences.

References

[1] Vityaev E.E., Martynovich V.V., Probabilistic formal concepts with negation // A. Voronkov and I. Virbitskaite (eds.) PSI 2014, LNCS 8974, 2015, Springer, 1–15.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk

VIII. Авторский указатель