Задача S. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$au_x + bu_y\,|_{AB} = 0. \tag{2}$$

$$u(\Theta_0(t)) = \alpha u(\Theta_1(t)),\ 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $\Theta_0(t) = (\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$, $\Theta_1(t) = (\frac{t+1}{2}, \frac{1-t}{2})$. *Здесь* α, a, b *- произвольные комплексные числа.*

Задача S является обобщением простейшей краевой задачи со смещением, исследованной А.М. Нахушевым [1] для $f = 0$ и $q = 0$ с неоднородными граничными условиями.

Т.Ш. Кальменовым в [2] для случая $q = 0$ установлен следующий результат: пусть $ab = 0$, тогда при $\alpha = 0$ задача S является вольтерровой, а при $\alpha(\alpha+1) \ne 0$ имеет полную систему собственных функций в $L_2(\Omega)$. Доказательство основано на продолжении решения задачи в область Ω^*, симметричную Ω относительно оси $y = 0$ и решении задачи в квадрате $\Omega \bigcup \Omega^*$ методом разделения переменных.

В [3] для $q = 0$ получен критерий корректности задачи S, и при $\alpha \ne 0$, доказан базисность в $L_2(\Omega)$ системы собственных и присоединенных функций.

Следует отметить, что в отличие от эллиптических уравнений, спектральная теория гиперболических задач не развита. Приведенные работы [2] и [3] практически исчерпывают работы по спектральным задачам для гиперболических уравнений в не тривиальных постановках. Рассмотрение спектральных задач для уравнения (1) в характеристическом треугольнике при $q \ne 0$ в нашей работе проводится впервые.

Основным результатом доклада является

Теорема 1. *Пусть* $q(y) \in C[0,1]$. *Тогда задача* S *при* $\alpha = 0$ *является вольтерровой краевой задачей, а при* $\alpha \ne 0$ *система собственных и присоединенных функций задачи* S *полна и образует базис Рисса в* $L_2(\Omega)$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* О некоторых нелокальных краевых задачах со смещением для уравнения гиперболического и смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т.5, No 1. С.44-59.

2. *Кальменов Т.Ш.* Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т.1, No 1. С. 75-78.

3. *Садыбеков М.А., Орынбасаров Е.М.* Базисность системы собственных и присоединенных функций краевой задачи со смещением для волнового уравнения // Математические заметки. 1992. Т.51, No 5. С. 86-89.

УДК 517.95

Сарсекеева А. С.

Об одной задаче с малым параметром при производной по времени

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби (Казахстан, Алматы)

aigulja@mail.ru

Пусть $D_1 = \{x \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n < 0\}$, $D_2 = \{x \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$, $D_T^{(m)} = D_m \times (0,T)$, $m = 1,2$, $R_T = \{(x,t) \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n = 0,\ 0 < t < T\}$.

Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\rho(x',t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\varepsilon \partial_t u_m - \triangle u_m = 0 \quad \text{в} \quad D_T^{(m)},\ m = 1,2, \tag{1}$$

и условиям

$$u_m\big|_{t=0} = 0,\ m = 1,2, \qquad \rho\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$\varkappa \partial_t \rho + b\partial_{x_n} u_1 - c\partial_{x_n} u_2\big|_{R_T} = \varphi(x',t), \tag{3}$$

$$u_m - d_m \rho\big|_{R_T} = 0,\ m = 1,2, \tag{4}$$

где коэффициенты b, c, d_m $(m = 1,2)$ — постоянные, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Задача (1) - (4) исследована в пространстве Гельдера $C_{x\,t}^{l,l/2}(\bar\Omega_T)$ [1].

Применяя к уравнениям и условиям задачи преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Фурье по переменным x' [2], находим решение задачи — функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\rho(x',t)$ — в явном виде, в виде потенциалов:

$$\rho(x',t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y',\tau) G^{\varepsilon}(x'-y', t-\tau) dy', \tag{5}$$

$$u_m(x,t) = d_m \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y',\tau) G_m^{\varepsilon}(x'-y', x_n, t-\tau) dy', \quad m = 1,2, \tag{6}$$

где функции Грина $G^{\varepsilon}(x',t)$ и $G_m^{\varepsilon}(x,t)$ имеют вид

$$G^{\varepsilon}(x',t) = \int\limits_0^t \frac{\varepsilon^{n/2} a\, v}{\varkappa^2 \big(2\sqrt{\pi(t-v)}\,\big)^n (t-v)} e^{-\frac{\varepsilon(a^2 v^2 + \varkappa^2 x'^2)}{4\varkappa^2 (t-v)}} dv,$$

$$G_1^{\varepsilon}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\varepsilon^{n/2} (a\, v - \varkappa x_n)}{\varkappa^2 \big(2\sqrt{\pi(t-v)}\,\big)^n (t-v)} e^{-\frac{\varepsilon(\varkappa^2 x'^2 + (a\, v - \varkappa x_n)^2)}{4\varkappa^2 (t-v)}} dv,$$

$$G_2^{\varepsilon}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\varepsilon^{n/2} (a\, v + \varkappa x_n)}{\varkappa^2 \big(2\sqrt{\pi(t-v)}\,\big)^n (t-v)} e^{-\frac{\varepsilon(\varkappa^2 x'^2 + (a\, v + \varkappa x_n)^2)}{4\varkappa^2 (t-v)}} dv, \quad a = bd_1 + cd_2.$$

Лемма 1. *Для функции $G^{\varepsilon}(x',t)$ выполняются оценки*

$$|G^{\varepsilon}(x',t)| \le C_1 (1 + \sqrt{\varepsilon t})\, e^{-\delta \frac{\varepsilon x'^2}{t}} \quad \text{при} \quad n = 1,$$

$$\left|\partial_x^s G_m^{\varepsilon}(x,t)\right| \le C_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{-\frac{n+|s|}{2}} e^{-\delta \frac{\varepsilon x'^2}{t}} + \left(x'^2 + t^2\right)^{-\frac{n+|s|-1}{2}} e^{-\delta_1 \frac{\varepsilon(x'^2+t^2)}{t}} \right)$$

$$\text{при} \quad n > 1, \quad \delta, \delta_1 > 0.$$

Для полученного решения задачи (5), (6) доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда для любой функции* $\varphi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ t}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$ *задача (1)-(4) имеет единственное решение*

$u_m \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(D_T^{(m)})$, $m = 1,2$, $\rho \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ t}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(R_T)$, $\partial_t \rho \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ t}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$, *которое подчиняется оценке*

$$\sum_{m=1}^{2} |u_m|_{D_T^{(m)}}^{(2+\alpha)} + |\rho|_{R_T}^{(2+\alpha)} + |\varepsilon \partial_t \rho|_{R_T}^{(1+\alpha)} \le C_3 |\varphi|_{R_T}^{(1+\alpha)},$$

где C_3 зависит от T, ε_0 и не зависит от ε.

Литература

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

2. *Бижанова Г.И.* Оценки решения n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гельдеровских нормах I,II// Известия АН РК, серия физ.-мат. 1992. № 5. С. 7-13; Известия АН РК, серия физ.-мат. 1993. № 1. С. 11-17.

УДК 517.957

Сахауева М. А.

Об одной линейной начально-краевой задаче для параболических уравнений второго порядка

Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)

maira.math@gmail.com

Пусть Ω — область, ограниченная окружностью S радиуса r. Обозначим $x = (x_1, x_2)$. Пусть в Ω содержатся замкнутые кривые Γ_j, $j = 1,2$, которые делят Ω на три подобласти: Ω_0, Ω_1, Ω_2, так что $\partial\Omega_0 = \Gamma_1$, $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\partial\Omega_2 = \Gamma_2 \cup S$. Поверхности Γ_1, Γ_2, S таковы, что $dist(\Gamma_1, \Gamma_2)$, $dist(\Gamma_2, S) \ge d_0 = const > 0$.