Ұ. Көшербаева, Г. Рзаева, В. Мамаева

АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДАР

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Ұ. Көшербаева, Г. Рзаева, В. Мамаева

АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДАР

Өз бетімен дайындалуға арналған

әдістемелік құрал

Алматы – 2016

Құрастырушылар: Ұ. Көшербаева, Г. Рзаева, В. Мамаева

Анықталмаған интегралдар. Өз бетімен дайындалуға арналған әдістемелік құрал (механика-математика факультетінің барлық мамандықтары үшін). –Алматы: 2016. -86б.

Бұл әдістемелік құрал студенттердің математикалық талдау пәніне өз бетімен дайындалуына нұсқау ретінде ұсынылады. Әдістемелік құралда анықталмаған интегралдарды табудың барлық әдістері берілген. Әр әдіске байланысты мысалдар шығарылу жолдарымен көрсетілген. Әр тақырып соңында СӨЖ тапсырмалары мен теориялық сұрақтар берілген.

Кіріспе

Математикалық талдау-2 пәні студенттерге математикалық білімнің негізін қалайды. Математикалық талдау-2 пәні анықталмаған интегралдар, анықталған интегралдар, қатарлар теориясы, олардың практикада және басқа да математикалық пәндерде қолданылуын үйретеді. Бұл әдістемелік нұсқауда математикалық талдау-2 пәнінің негізгі тақырыптарының бірі - анықталмаған интегралдар қарастырылған.

Бұл әдістемелік нұсқаудың көмегімен студент анықталмаған интегралдарды табу әдістерін терең меңгереді, өз бетімен білімін жетілдіруге деген ұмтылысы дамиды.

Студенттер өздік жұмысын жасау үшін келесі жоспарды ұсынамыз:

а) лекция курсын тыңдағаннан кейін студент лекцияда өткен материалдың теориялық сұрақтарын практикалық сабаққа дайындайды;

ә) практикалық сабақта емтиханның негізгі бөлігінің есептері шығарылады және студент ЖСЕ-ға (жарты семестрлік емтихан), аралық бақылауға, тапсырмаларды өз бетімен орындауға дағдыланады.

Математикалық талдау-2 пәнін оқыту негізінде алған білімдерін студент математикалық талдау-3, өрістер теориясы, алгебра, геометрия, комплекс және нақты айнымалылы функциялар теориясы, функционалдық анализ, ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика, дискретті математика, есептеу әдістері, дифференциалдық теңдеулер пәндерін оқып білуге қолданады, механикада, экономикада және т.б. пайдаланады.

§ 1. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл.

Анықтама 1. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының $\langle a,b\rangle \subseteq (-\infty,+\infty)$ аралығындағы ***алғашқы бейнесі*** деп аталады , егер бір мезгілде келесі екі шарт орындалса:

1. $F(x)$- $\langle a,b\rangle$ аралығында дифференциалданса,
2. $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$.

Егер $F(x)$ функциясы $\langle a,b\rangle$ аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы бейнесі болса, онда $F(x)+C$ (С-тұрақты сан) функциясы да осы аймақта $f(x)$ функциясының алғашқы бейнесі болатыны айқын, себебі

$$(F(x)+C)' = f(x).$$

Анықтама 2. $f(x)$ функциясының $\langle a,b\rangle$ аралығындағы барлық алғашқы бейнелерінің жиыны осы аралықтағы $f(x)$ функциясының ***анықталмаған интегралы*** деп аталады және

$$\int f(x)dx$$

символымен белгіленеді.

Мұндағы "$\int$ " – белгісі интеграл таңбасы, $f(x)dx$– өрнегін интеграл астындағы өрнек, ал $f(x)$ функциясын– интеграл астындағы функция деп атайды.

Егер $f(x)$ функциясының $\langle a,b\rangle$ аралығындағы алғашқы бейнелерінің біреуі $F(x)$ болса, онда

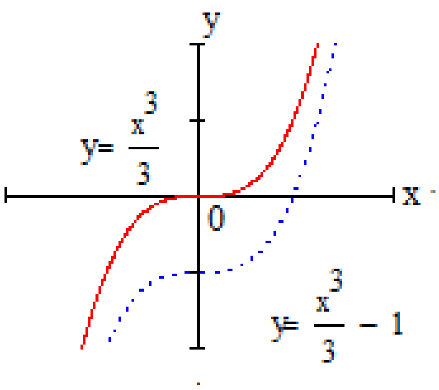
$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad C = const.$$

Мысал 1. $f(x)=x^2$ функциясын қарастырайық. Бұл функция - $(-\infty;+\infty)$ аралығында дифференциалданатын $F(x)=\frac{x^3}{3}$ функциясының туындысы.

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \quad \forall x \in (-\infty;+\infty).$$

Демек, $F(x)=\frac{x^3}{3}$ функциясы $(-\infty;+\infty)$ аралығындағы $f(x)=x^2$ функциясының *алғашқы бейнесі* болады.

Төмендегі суретте $f(x)=x^2$ функциясының $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ алғашқы бейнесінің $C=0;-1$ жағдайдағы кескіндері келтірілген.



1-сурет

Мысал 2. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ функциясы $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясының (-1,1) аралығында алғашқы бейнесі, өйткені осы аралықтың кез-келген x нүктесінде $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Мысал 3. $F(x)=arctg\frac{1}{x}$ функциясы $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ аймағында $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ функцясының алғашқы бейнесі, өйткені осы аймақтың барлық нүктелерінде $\left(arctg\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}$.

Анықталмаған интегралдардың негізгі қасиеттері.

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$ - анықталмаған интегралдың дифференциалы табылады және ол интеграл астындағы өрнекке тең.

$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ - анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең.

2. $\int dF(x)=F(x)+C, \quad \int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx$

3. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ -

екі функцияның қосындысының (айырмасының) анықталмаған интегралы әрқайсысының анықталмаған интегралдарының қосындысына (айырмасына) тең.

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad \forall A \in R \setminus \{0\}$.

Ескерту. 3 және 4 қасиеттері анықталмаған интегралдың сызықтық қасиеттері деп аталады. Бұл қасиеттердің теңдігін алғашқы бейнелерден құрылған жиындардың теңдігі ретінде түсіну керек, яғни, теңдіктің оң жағындағы кез келген функцияның сол жағындағы функциядан тұрақтыға ғана айырмашылығы бар.

Интегралдарды табу үшін интегралдар кестесін білу қажет. Ол негізгі элементар функциялардың туындыларының кестесінен шығады.

Анықталмаған интегралдардың негізгі кестесі.

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \succ 0, \ a \neq 1$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

13. $\int chxdx = shx + C$

14. $\int shxdx = chx + C$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Мұндағы $C = const$.

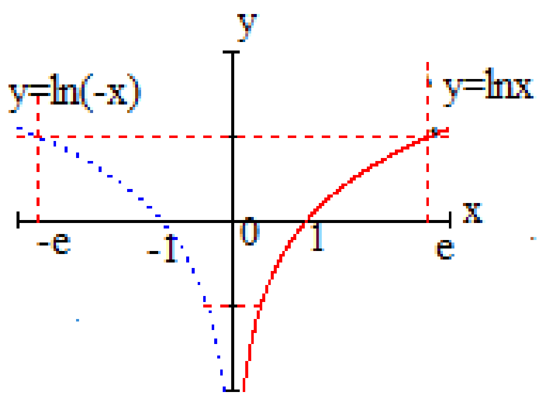
Кестедегі кейбір теңдіктерге түсініктеме берейік.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$F(x) = \ln|x| : R \setminus \{0\} \to R$ функциясын қарастырайық.

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & егер \quad x > 0 \\ \ln(-x), & егер \quad x < 0 \end{cases}$$

$\forall x > 0 \quad f(x) = F'(x) = \ln' x = \frac{1}{x}$



2-сурет

$x < 0$ болғанда $F'(x)$ туындысын табайық:

$f(x) = F'(x) = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Олай болса, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы $x > 0$ болғанда $F(x) = \ln x$ функциясының туындысы, сол сияқты $x < 0$ болғанда $F(x) = \ln(-x)$ функциясының да туындысы болады. Нәтижесінде

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$$

11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| : R \setminus \{\pm 1\} \to R$$

$$F(x) = \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \; егер \; \frac{1+x}{1-x} > 0, & (-1 < x < 1) \\ F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \; егер \; \frac{1+x}{1-x} < 0, & \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Осы функцияның туындысын табайық.

$\forall x \in (-1;1)$ үшін

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

Егер $x \in (1,+\infty)$ болса, онда

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(x-1)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

Сондықтан $\forall x \in R \setminus \{\pm 1\}$ үшін

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

Бұл теңдікті $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ және $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ жағдайлары үшін жеке-жеке қарастырайық. Бірінші жағдайда интеграл астындағы функция мен алғашқы бейнесінің анықталу облыстары R нақты сандар жиыны болғандықтан,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C \text{, бұл жағдайда}$$

$$f(x)=F'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Екінші жағдайды қарастырайық,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ болсын.}$$

Бұл функцияның анықталу облысы:

$$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)=R\setminus[-1;1].$$

$F(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| : R\setminus[-1;1]\to R$

$$F(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-1}, & \textit{егер} \quad x+\sqrt{x^2-1}>0 \quad (\textit{егер} \ \ x>1) \\ -x-\sqrt{x^2-1}, & \textit{егер} \quad x+\sqrt{x^2-1}<0 \quad (\textit{егер} \ \ x<-1) \end{cases}$$

Осы функцияның туындысын табайық. Егер $x>1$ болса, онда

$$f(x)=F'(x)=\ln'\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)==\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

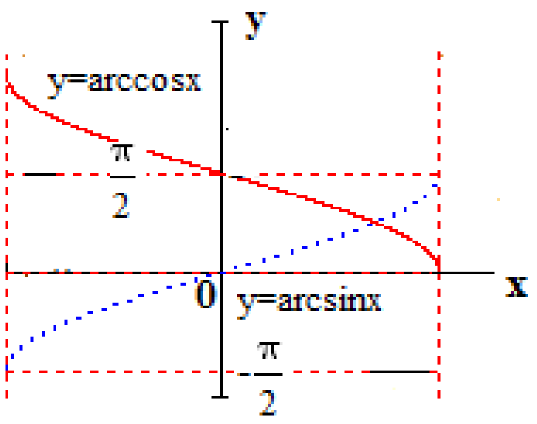
егер $x<-1$ болса, онда

$$f(x)=F'(x)=\ln'\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)==\frac{-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{-x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

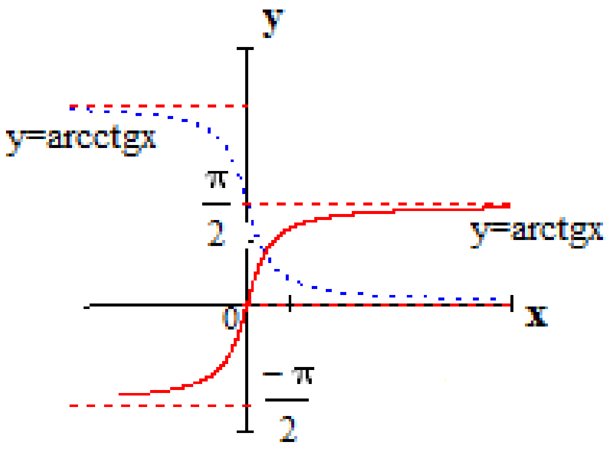
Сондықтан $\forall x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ болғанда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}+C\right|.$$

Кестедегі 9, 10 формулаларда интеграл астындағы функцияның екі алғашқы бейнелері берілген. Бұл анықталмаған интегралдың анықтамасына қайшы келмейді. Себебі, бұл алғашқы бейнелердің бір-бірінен тұрақтыға ғана айырмашылығы бар. Мұны төмендегі суреттерден көруге болады.



3-сурет



4-сурет

Енді 9, 10,11, 12 формулалардың жалпы жағдайларын қарастырайық.

9*. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$

мұнда $a -$ кез келген оң сан, оны бөлімдегі түбірден шығарып, дифференциал астына енгіземіз:

$$= \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C, \end{cases} \quad \forall a > 0$$

Дәл осы сияқты келесі үш формула шығады:

10*.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg\,\frac{x}{a} + C, \end{cases} \qquad \forall a \neq 0$$

11*. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

12*. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} =$$

мұнда $m \neq 0$ кез келген нақты сан;

1). $m > 0$ болсын:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{m}+1}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^2+1}} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{m}} + \sqrt{\frac{x^2}{m}+1}\right) + C = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{m}} + C =$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right) - \ln\sqrt{m} + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right) + C;$$

2). $m < 0$ болсын:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-m}\sqrt{\frac{x^2}{-m}-1}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{-m}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{-m}}\right)^2-1}} =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{-m}} + \sqrt{\frac{x^2}{-m}-1}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{-m}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C.$$

Алынған нәтижелерді біріктіріп:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C, \quad \forall m \neq 0$$

теңдігін аламыз.

Негізгі кесте бойынша анықталмаған интегралдарды табуға мысалдар келтірейік. Келесі мысалдарда берілген интегралдарды табу үшін кестелік интегралдарға келтіре білу керек. Ол үшін келесі тұжырымдарға назар аудару қажет: интегралдау айнымалысын кез келген әріппен немесе өрнекпен белгілеуге болады, мысалы:

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int f^2df = \frac{f^3}{3} + C$$

$$\int u^2du = \frac{u^3}{3} + C \qquad \int f^2(x)df(x) = \frac{f^3(x)}{3} + C$$

$$\int f^2(x)f'(x)dx = \frac{f^3(x)}{3} + C$$

$df(x) = f'(x)dx$ болғандықтан, дербес жағдайда,

$$\int \sin^2 xd(\sin x) = \int \sin^2 x \cdot \cos xdx = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$\int \frac{1-\cos^2 x}{(1-\sin^2 x)^2}dx = \frac{tg^3x}{3} + C$ болады, өйткені:

$$\int \frac{1-\cos^2 x}{(1-\sin^2 x)^2}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int tg^2x \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2x \quad d(tgx)$$

Мысал 4. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = \int \frac{2\cdot 2^x - \frac{1}{5}\cdot 5^x}{2^x \cdot 5^x}dx = 2\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$

$$= 2\left(\frac{1}{5}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x + C$$

Мысал 5.

$$\int th^2xdx = \int \frac{sh^2x}{ch^2x}dx = \int \frac{ch^2x-1}{ch^2x}dx = \int\left(1-\frac{1}{ch^2x}\right)dx =$$

$$= \int 1\cdot dx - \int \frac{dx}{ch^2x} = x - thx + C$$

Мысал 6. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} =$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы $(0,+\infty)$ интервалы, ал $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ болғандықтан, интегралды келесі түрде жазамыз:

$$= 2\int \frac{dx}{(1+x)2\sqrt{x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Мысал 7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} =$

интеграл астындағы функци $\forall x \neq 0$ үшін анықталған, x^2-ты квадрат түбірден шығарамыз:

$\sqrt{x^2} = |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x,$ сонда:

$$= \int \frac{dx}{\operatorname{sgn} x \cdot x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} =$$

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ бөлікті тұрақты функциясы болғандықтан, интеграл сыртына шығаруға болады, ал

$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} dx$ болғандықтан интегралдық кестедегі 12. формула бойынша

$$= -\frac{1}{\operatorname{sgn} x} \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}} = -\frac{1}{\operatorname{sgn} x} \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) + C =$$

$$= \begin{cases} -\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + C, \textit{егер} & x > 0 \\ \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + C, \textit{егер} & x < 0 \end{cases} =$$

егер $x < 0$

$$\ln \frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x} = -\ln \frac{x}{1 - \sqrt{x^2+1}} = -\ln \frac{x\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)}{\left(1 - \sqrt{x^2+1}\right)\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= -\ln \frac{x\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)}{-x^2} = -\ln \frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{-x},$$

сондықтан осы мысалдың қорытынды жауабы:

$$=\begin{cases} -\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}+C, \textit{егер } x>0 \\ -\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{-x}+C, \textit{егер } x<0 \end{cases} = -\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C$$

мұнда $\forall x \neq 0$.

Мысал 8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$

интеграл астындағы функция $\forall x \neq 0$ үшін анықталған, x^2-ты квадрат түбірден шығарамыз:

$$\int \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}, \quad |x|>1,$$

онда 9. формула бойынша :

$$-\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$$

Мысал 9. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} =$

x^2-ты жақшаның сыртына шығарамыз және $|x| = x\operatorname{sgn} x$ екенін ескеріп:

$$=\int \frac{dx}{|x|^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$=\frac{\operatorname{sgn} x}{2}2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Мысал 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} =$

анықталу облысын табамыз: $x(1+x)>0$ теңсіздігін шешсек:

$X = \{x : x>0 \vee x<-1\}$

Егер $x>0$:

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}=2\int\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}}=2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+C.$$

Егер $1+x<0$ болса

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{-x-1}\sqrt{-x}}=-2\int\frac{d\left(\sqrt{-x-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{-x-1}\right)^2}}=-2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x}\right)+C.$$

екі шешімді біріктіре отырып, жауапты аламыз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}\right)+C,\quad \forall x\notin[-1,0].$$

Мысал 11. $\int\frac{\sin x\cos xdx}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}=$

$\sin x\cos x$ көбейтіндісін дифференциал астына кіргіземіз:

$\sin x\cos xdx=\frac{d\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)}{2\left(a^2-b^2\right)}$, ендеше

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{d\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}+C,\quad a^2\neq b^2.$$

Мысал 12. $\int\frac{\sin x\cos^3x}{1+\cos^2x}dx=$

$\left(1+\cos^2x\right)=-2\cos x\sin x$ екенін ескере отырып, $-2\sin x\cos x$ көбейткішін дифференциал астына енгіземіз де кестедегі 1. және 2. пайдалансақ:

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+\cos^2x}\right)d\left(1+\cos^2x\right)=-\frac{1}{2}\left(1+\cos^2x\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2x\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2x\right)+C.$$

Мысал 13. $\int\sin^5x\cos xdx=$

интеграл астындағы $\cos x$ көбейткішін дифференциал астына енгіземіз, сонда интеграл астында $\sin x$ - ке қатысты дәрежелік функция шығады:

$$=\int\sin^5xd(\sin x)=\frac{\sin^6x}{6}+C$$

Төмендегі мысалдарды *жіктеу* әдісімен тапқан дұрыс.

Мысал 14. $\int x(1-x)^{20}dx =$

бұл мысалда $x=1-(1-x)$ арқылы жіктесек:

$$=\int(1-x)^{20}dx-\int(1-x)^{21}dx=-\int(1-x)^{20}d(1-x)+\int(1-x)^{21}d(1-x)=$$

$$=-\frac{1}{21}(1-x)^{21}+\frac{1}{22}(1-x)^{22}+C.$$

Мысал 15. $\int\frac{dx}{\sin x}=$

Алдымен интеграл астындағы $\sin x$-ты жарты аргументтің формуласы арқылы түрлендіріп, сосын алымын да, бөлімін де $\cos\frac{x}{2}$-ке көбейтіп, $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$-ні дифференциал астына кіргіземіз:

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{dtg\,\frac{x}{2}}{tg\,\frac{x}{2}},$$

сонда кестелік интегралға келеді:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dtg\,\frac{x}{2}}{tg\,\frac{x}{2}}=\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+C,\quad x\neq k\pi,\, k\in Z$$

Мысал 16. $\int\frac{shxchxdx}{\sqrt{sh^4x+ch^4x}}=$

Бұл мысалда да интеграл астындағы функцияны түрлендіріп, дифференциал астына енгізу әдісін қолданамыз:

$$\frac{shxchxdx}{\sqrt{sh^4x+ch^4x}}=\frac{shxchxdx}{\sqrt{\frac{(sh^2x+ch^2x)^2+(ch^2x-sh^2x)^2}{2}}}=$$

$$\frac{sh2xdx}{2\sqrt{\frac{1}{2}ch^2 2x+\frac{1}{2}}}=\frac{d(ch2x)}{2\sqrt{2}\sqrt{ch^2 2x+1}}.$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(ch2x)}{\sqrt{ch^2 2x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(ch2x+\sqrt{ch^2 2x+1}\right)+C$$. Сонымен,

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{ch2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{ch^4x+sh^4x}\right)+C.$$

Мысал 17. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x}dx =$

мұнда интеграл астындағы функцияның алымынан да, бөлімінен де x^2-ті жақшаның сыртына шығарып, сосын алымындағы өрнекті дифференциал астына енгіземіз:

$$\frac{x^2-1}{x^4+x}dx = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

сонда кестелік интегралға келеді:

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Мысал 18. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx =$

x^2-ті келесі түрде түрлендірсек:

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1$$

онда интеграл:

$$\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}} = \int \frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{dx}{(1-x)^{98}} - 2\int \frac{dx}{(1-x)^{99}} +$$

$$+\int \frac{dx}{(1-x)^{100}} = \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C,\ x \neq 1$$

Мысал 19. $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx =$

интеграл астындағы x^3dx-ті келесі түрде түрлендірейік:

$$x^3dx = \frac{1}{2}x^2dx^2 = \frac{1}{2}\left(\left(1+x^2\right)-1\right)d\left(1+x^2\right),$$

сонда интеграл:

$$\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} - \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)d\left(1+x^2\right) =$$

$$= \frac{3}{14}\left(1+x^2\right)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

§ 2. Интегралдаудың негізгі әдістері

Анықталмаған интегралда айнымалыны алмастыру әдісі

Теорема. $x=\varphi(t):<\alpha,\beta>\to<a,b>$ функциясы $<\alpha,\beta>$ аралығында дифференциалдансын, $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының $<a,b>$ аралығындағы алғашқы бейнесі болсын, яғни

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

онда $\forall t\in<\alpha,\beta>$ аралығында $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функциясы үшін

$F(\varphi(t))$ алғашқы функциясы табылады, яғни

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C\,.$$

$x=\varphi(t)$ алмастыруын дұрыс таңдау қарапайым функцияны интегралдауға әкеледі, бірақ нәтижесінде жауапты x айнымалысы арқылы өрнектеу қажет: $t=\varphi^{-1}(x)$.

Мысал 1. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\cdot dx=$

интеграл астындағы функцияны иррационалдықтан құтылдыру үшін

$\sqrt[3]{1-x}$ ны t арқылы белгілейміз:

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{1-x}=t\Rightarrow 1-x=t^3\\ x=1-t^3:R\to R\\ dx=-3t^2dt\end{array}\right|=-3\int\left(1-t^3\right)^2 t\cdot t^2dt=$$

$$=-3\int\left(1-2t^3+t^6\right)t^3dt=-3\int\left(t^3-2t^6+t^9\right)dt=$$

$$=-3\left(\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{10}t^{10}\right)+C=-\frac{3}{140}t^4\left(35-40t^3+14t^6\right)+C=$$

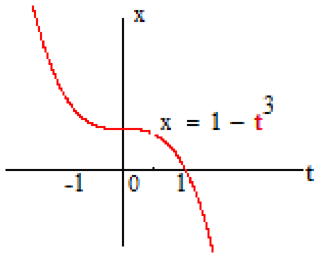
t - ның орнына x- арқылы өрнектелуін қоямыз.

$$-\frac{3}{140}(1-x)^{\frac{4}{3}}\left[35-40(1-x)+14(1-x)^2\right]+C=$$

$$-\frac{3}{140}(1-x)^{\frac{4}{3}}\left(14x^2+12x+9\right)+C.$$

Бұл мысалда $x=\varphi(t)$ функциясы - $x=1-t^3:(-\infty;+\infty)\to(-\infty;+\infty)$

және теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады.



Мысал 2. $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx=$

бұл интегралда алмастыру әдісін қолданамыз:

$1-5x^2=t$ деп алмастырсақ, $xdx=-\frac{1}{10}dt$ теңдігі орындалады. Интеграл астындағы өрнекті жаңа айнымалы арқылы өрнектейміз: $x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx=\frac{1}{50}\left(t^{11}-t^{10}\right)dt,$

сонда интегралдың жауабы:

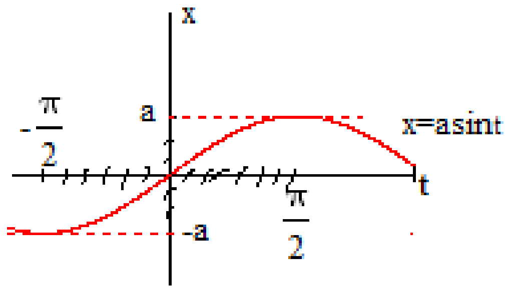
$$\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx=\frac{1}{50}\int\left(t^{11}-t^{10}\right)dt=\frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}\right)+C=-\frac{1+55x^2}{6600}\left(1-5x^2\right)^{11}+C.$$

Мысал 3. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысын табамыз: $a^2-x^2\geq 0\Leftrightarrow x\in[-a;a]$; егер $x=a\sin t$ тригонометриялық алмастыруын қолдансақ, онда интеграл астындағы иррационалдықтан құтыламыз.

$[-a;a]\ni x$ кесіндісін алу үшін $x=a\sin t$ функциясын $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\ni t$ аралығында қарастыру жеткілікті:

$$=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-a;a] \\ dx=a\cos t dt \\ t=\arcsin\frac{x}{a} \end{array}\right|=$$



$$=\int\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}a\cos tdt=$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|,\qquad \forall t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\quad \cos t\geq 0,$$

$$a^2\int\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=$$

$$\sin t=\frac{x}{a},\qquad \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C.$ Нәтижесінде

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

теңдігін аламыз.

Мысал 4. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы $\frac{x}{2a-x}\geq 0$ шартын қанағаттандыру керек. Бұдан $0\leq x\leq 2a$ аламыз. Бұл жағдайда интеграл астындағы функцияның иррационалдығынан құтылу үшін $x=2a\sin^2 t$ тригонометриялық алмастыруын жасаймыз.

$[0;2a)\ni x$ орындалу үшін $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ жартылай кесіндісін қарастырған жеткілікті:

$$= \left| \begin{array}{l} x = 2a\sin^2 t : \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \to [0 : 2a) \\ dx = 4a\sin t\cos t dt \\ t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} \end{array} \right| =$$

$$= \int 2a\sin^2 t \sqrt{\frac{2a\sin^2 t}{2a(1-\sin^2 t)}} 4a\sin t\cos t dt =$$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ үшін $\cos t > 0$ болғандықтан $|\cos t| = \cos t$:

$$= 8a^2 \int \sin^3 t \frac{\sin t}{\cos t} \cos t dt = 8a^2 \int \sin^4 t dt =$$

$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha,\quad 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ формулаларын қолданып, кестедегі интегралдық формулаларды аламыз:

$$= 2a^2 \int (1-\cos 2t)^2 dt = 2a^2 \int \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \int (3 - 4\cos 2t + \cos 4t) dt =$$

$$= 3a^2 t - 2a^2 \sin 2t + \frac{a^2}{4} \sin 4t + C =$$

$$= 3a^2 t - 4a^2 \sin t\cos t + a^2 \sin t\cos t\cos 2t + C =$$

t - ның орнына x - арқылы өрнектелуін қоямыз

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x}{2a}} = \sqrt{\frac{2a-x}{2a}},$$

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = \frac{2a-}{a} - 1 = \frac{a-x}{a}:$$

$$= 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - a\sqrt{\frac{x}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{2a-x}{2a}} \left(4 - \frac{a-x}{a}\right) + C =$$

$$= 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C\ 7$$

Мысал 5. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx =$

тригонометриялық алмастырулармен бірге гиперболалық тригонометриялық алмастыруларды да қолдануға болады:

$$= \left| \begin{array}{l} x = asht : (-\infty; +\infty) \to (-\infty; +\infty) \\ dx = achtdt \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 \left(1 + sh^2 t\right)} achtdt =$$

$$= a^2 \int ch^2 tdt =$$

интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетеміз де, 13 формула бойынша

$$= \frac{a^2}{2} \int \left(1 + ch2t\right) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} sh2t \right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + shtcht \right) + C =$$

$$t = Arcsh \frac{x}{a} = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{a + \frac{x^2}{a^2}} \right) = \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$cht = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{a + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a},$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) - \ln a \right] + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + C =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C.$$

Мысал 6. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$

Алғашқы функцияны табу үшін алмастыру әдісін қолданамыз:

$\sqrt{1 - x^2} = t$ -деп алмастырсақ , онда $\frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = -dt$ теңдігі орындалады.

$$= \int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\int \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = -\left(t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{15} \left(8 + 4x^2 + 3x^4 \right) \sqrt{1 - x^2} + C, \ |x| < 1.$$

Мысал 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}} =$

$t = e^{-\frac{x}{2}}$ жаңа айнымалысын енгіземіз де жаңа айнымалы бойынша интегралдаймыз:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C = x - 2\ln\left(1 + \sqrt{e^x+1}\right) + C.$$

Мысал 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}} =$

тригонометриялық алмастырулар қолданамыз:

$x = atgt, \quad a \neq 0$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

Мысал 9. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx. =$

$x = a\cos 2t$ тригонометриялық алмастыруын жасаймыз, сонда $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = ctgt$ теңдігін аламыз. Осы теңдіктен x-ті тауып теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз:

$$dx = -2a\sin 2tdt$$

сонда интеграл:

$$= \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = -4a\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C = a \cdot \arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C, \; -a \leq x < a.$$

Мысал 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} =$

$x - a = (b-a)\sin^2 t$ алмастыруын жасаймыз, сонда

$dx = 2(b-a)\sin t \cos tdt$

орындарына қойсақ, интеграл қарапайым түрге келеді:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C, \;\; a < x < b.$$

Мысал 11. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx =$

$x = asht$ алмастыруын жасаймыз, теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз:

$$dx = achtdt$$

интеграл астындағы функция

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2\left(1+sh^2t\right)} = acht$$ түрге келеді.

жаңа айнымалы бойынша интегралын табамыз:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = a^2\int ch^2tdt = \frac{a^2}{4}sh2t + \frac{a^2t}{2} + C.$$

$sht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \dfrac{x}{a}$ $e^t = \dfrac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. $e^t > 0$ екенін ескеріп

$t = \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| - \ln a$ табамыз, орындарына апарып қойсақ:

$$sh2t = 2shtcht = 2sht\sqrt{1+sh^2t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2},$$

$$= \int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$$

Мысал 12. $\int \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}dx.$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы: $x < -a$ $x \geq a$

Айталық $x \geq a$ болсын,

$x - a = 2ash^2t$ алмастыруын жасаймыз. Теңдіктің екі жағын дифференциалдап, dx-ті табамыз:

$$dx = 4ashtchtdt$$

Сонда интеграл

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = 4a\int sh^2tdt = ash2t - 2at + C.$$

$ash2t = \sqrt{x^2-a^2}$, $sht = \sqrt{\dfrac{x-a}{2a}} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ теңдіктерін ескеріп, t-ны табамыз:

$$t = \ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right) - \ln\sqrt{2}a$$

орнына апарып қойсақ:

$$= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \sqrt{x^2 - a^2} - 2a\ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}\right) + C.$$

Енді $x < -a$ болсын. Онда $x + a = -2ash^2t$ алмастыруын жасаймыз. Екі жағын дифференциалдап dx-ті табамыз:

$$dx = -4ashtchtdt$$

орындарына апарып қойсақ:

$$= \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = -4a\int sh^2tdt = -ash2t + 2at + C =$$

$$= -\sqrt{x^2 + a^2} + 2a\ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x+a}\right) + C.$$

§ 3. Бөліктеп интегралдау

Теорема. $u(x), v(x)$ функциялары $< a, b >$ аралығында дифференциалдансын және осы аралықта $u'(x)v(x)$ функциясының алғашқы бейнесі бар болсын. Онда $< a, b >$ аралығында $u(x)v'(x)$ функциясының да алғашқы бейнесі бар болады, әрі $\int udv = uv - \int vdu + C$ орындалады. $\int udv$ табу үшін *бөліктеп интегралдау* әдісін қолданады, интеграл астындағы өрнекті екі көбейткішке бөлеміз, біреуі - $u(x)$, екіншісі- $dv(x)$. Бірінші көбейткіштің дифференциалын $du(x)$, екінші көбейткіштің $dv(x)$ белгілі дифференциалы арқылы $v(x)$ табамыз. Содан соң $\int vdu$

табамыз.

Бөліктеп интегралдау әдісі келесі жағдайларда қолданылады:

I. Интеграл астындағы функциялар әртүрлі атаулы функциялардың көбейтіндісі, мысалы, дәрежелік пен тригонометриялық, дәрежелік пен көрсеткіштік, логарифмдік пен тригонометриялық, т.с.с.
II. Интеграл астындағы функцияның құрамында негізгі интегралдық кестеде жоқ элементар функциялар бар болса, мысалы, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$,.... Осындай интегралдарда дәл осы функцияларды $u(x)$ ретінде алу керек.

Айталық, $\int (3x-1)\cos 2x\,dx$ интегралын табу керек. Интеграл астындағы өрнекте төмендегідей тривиалды емес бөліктеулер болуы мүмкін:

1. $u=(3x-1)\cos 2x,\ dv=dx$

2. $u=\cos 3x,\ \ dv=(3x-1)\,dx$

3. $u=(3x-1),\ dv=\cos 2x\,dx$

$u(x)$ -ті дифференциалдау керек, онда бірінші жағдайда бір интегралдың орнына екеу аламыз, әрі оның бірі берілген интегралға ұқсас, тек косинустың орнында синус отырады. Екінші жағдайда $dv=(3x-1)\,dx$ интегралдау берілген интегралды қиындатады, көпмүшеліктің дәрежесі өседі, ал, $u(x)$-ті дифференциалдау тек косинусты синусқа ауыстырады. Үшінші жағдайда көпмүшелікті дифференциалдау дәрежені төмендетеді, косинусты интегралдау оны синусқа ауыстырады, демек, осы жағдайда қарапайым интеграл аламыз.

Сонымен:

$$\int(3x-1)\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=3x-1,\ du=3\,dx,\ \ dv=\cos 2xdx, \\ v=\int\cos 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}(3x-1)\sin 2x-\frac{3}{2}\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}(3x-1)\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x+C.$$

Мысал 1. $\int x\sin xdx=$

интеграл астындағы функция дәрежелік пен тригонометриялық функциялардың көбейтіндісі, сондықтан бөліктеп интегралдаймыз; әр функция - кестелік; $u(x)$ ретінде дәрежелік функцияны алу керек:

$$=\left|\begin{array}{l} u=x,\ dv=\sin xdx \\ du=dx,\ v=-\cos x \end{array}\right|=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$$

Мысал 2. $\int arctgxdx=$

интеграл астындағы функция – кері тригонометриялық; кестелік емес, сондықтан бөліктеп интегралдаймыз:

$$=\begin{vmatrix} u = arctgx & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2} & v = x \end{vmatrix} = x\ arctg\ x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\ arctg\ x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x\ arctg\ x + \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Мысал 3. $\int \frac{\arccos x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx =$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы – $(-1;1)$ интервалы; интеграл астындағы функция - әртүрлі атаулы функциялардың көбейтіндісі, біреуі кестелік емес ($\arccos x$), сондықтан бөліктеп интегралдаймыз; бұл мысалда алдын-ала айнымалыны алмастырсақ, интегралдау процесі жылдамдайды:

$$=\begin{vmatrix} t = \arccos x \\ x = \cos t : (0;\pi) \to (-1;1) \\ dx = -\sin tdt \end{vmatrix} = -\int \frac{t \sin tdt}{\left(1-\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$t \in (0;\pi)$ интервалда $sint > 0$, сондықтан $|sint| = sint$:

$$= \int \frac{t}{sin^2 t} dt =$$

енді бөліктеп интегралдаймыз:

$$= \begin{vmatrix} u = t & dv = -\dfrac{dt}{sin^2 t} \\ du = dt & v = ctgt \end{vmatrix} =$$

$$= tctgt - \int ctgtdt = tctgt - \int \frac{cost}{sint} dt = t\frac{cost}{sint} - lnsint + C =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} arccosx - ln\sqrt{1-x^2} + C.$$

Мысал 4. $I = \int e^{ax} \cos bxdx =$

интеграл астындағы функция көрсеткіштік және тригонометриялық функциялардың көбейтіндісі, сондықтан бөліктеп интегралдаймыз; әр функция - кестелік; $u(x)$ ретінде кез келген функцияны алуға болады, мысалы, тригонометриялық функцияны алсақ:

$$\left|\begin{matrix} u=\cos bx, du=-b\sin bxdx \\ dv=e^{ax}dx, v=\frac{1}{a}e^{ax} \end{matrix}\right| = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx=$$

Соңғы интегралды да бөліктеп интегралдаймыз. $u(x)$ ретінде тағы да тригонометриялық функцияны аламыз.

$$=\left|\begin{matrix} u=\sin bx, du=b\cos bx \\ dv=e^{ax}dx, v=\frac{1}{a}e^{ax} \end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{a\ \cos bx+b\sin bx}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I.$$

Осы табылған теңдіктен $I=\dfrac{a\cos bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$

Мысал 5. $I=\int e^{2x}\cos 3x\,dx=$

Алдыңғы мысалда $u(x)$ ретінде тригонометриялық функцияны алғанбыз. Енді $u(x)$ ретінде көрсеткіштік функцияны алсақ:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{2x},\ du=2e^{2x}\,dx,\ dv=\cos 3x\,dx, \\ v=\int\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right| =\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=$$

Соңғы интегралды да бөліктеп интегралдаймыз. $u(x)$ ретінде тағы да көрсеткіштік функцияны аламыз. Кері жағдайда бастапқы интегралға ораламыз.

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{2x},\ du=2e^{2x}\,dx,\ dv=\sin 3x\,dx, \\ v=\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right| =\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right)$$

Теңдіктің оң жағында берілген интеграл шықты. Жақшаларды ашып, теңдікті қайта жазсақ:

$$I=\frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right)-\frac{4}{9}I\,,$$

I-ге қатысты теңдеуді шешеміз:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{3}{13}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right)+C.$$

Қорытынды. Интеграл астындағы өрнек көрсеткіштік пен тригонометриялық функциялардың көбейтіндісі болып кездессе, $u(x)$ ретінде кез келген функцияны алуға болады. Бөліктеп интегралдау әдісін екінші рет қолданғанда $u(x)$ ретінде бастапқы атаулы функцияны алу керек.

Мысал 6. $\int\frac{3x+5}{\cos^2 2x}dx=$

Екімүшелікті дифференциалдасақ дәрежесі төмендейді, ал $\cos^{-2}x$-ң интегралы кестелік:

$$=\left|\begin{array}{l} u=3x+5,\ du=3\,dx,\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 2x} \\ v=\int\dfrac{dx}{\cos^2 2x}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2x \end{array}\right|=\frac{1}{2}(3x+5)\operatorname{tg}2x-\frac{3}{2}\int\operatorname{tg}2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}(3x+5)\operatorname{tg}2x+\frac{3}{4}\ln|\cos 2x|+C$$

Мысал 7. $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{a^2-x^2},dv=dx \\ du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,v=x \end{array}\right|=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+$$

$$+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-I+\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Осы табылған теңдіктен $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

Келешекте аса маңызды рөлі бар

$$K_\lambda = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} \quad (a = const, \quad \lambda = 1,2.......)$$

интегралын табайық. Бұл интеграл да жоғарыдағы топтарға енбейді. Алдымен K_λ интегралын былай жазып алайық:

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left[\left(t^2+a^2\right)-t^2\right]dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} =$$

$$= \frac{1}{a^2}K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} = \left| \begin{array}{l} u = t, \ du = dt \\ dv = \dfrac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda}, \ v = -\dfrac{1}{(\lambda-1)\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}K_{\lambda-1} + \frac{t}{2a^2(\lambda-1)\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2(\lambda-1)}K_{\lambda-1}$$

рекуренттік формуласын аламыз. Ал,

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C$$

екенін ескеріп, рекуренттік формуладан $K_2, K_3,......$ таба береміз.

Ескерту. 4 және 5 мысалдарда қарастырылған интегралдарды ***циклдік*** деп атайды.

§ 4. Рационал функцияларды интегралдау

Рационал функция **(**немесе ***рационал бөлшек)*** деп екі алгебралық көпмүшеліктердің қатынасын айтамыз:

$$R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n},$$

$$k, n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \quad a_i \in \Re, \quad i = 0,...,k;$$

$$b_j \in \Re, \quad j = 0,...,n; \quad a_k \neq 0, \quad b_n \neq 0.$$

Рационал бөлшек ***дұрыс*** деп аталады, егер $k < n;$ егер $k \geq n$ бөлшек ***бұрыс*** деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін бұрыштап бөлу арқылы дұрыс бөлшекке келтіреміз. Дұрыс рационал функцияны интегралдау үшін жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз. Жай бөлшектердің төмендегідей типтері бар:

$$I.\ \frac{A}{x-a}, \qquad II.\ \frac{B}{(x-a)^k}, \qquad III.\ \frac{Cx+D}{x^2+px+q}, \qquad IV.\ \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^l},$$

мұнда A, B, C, D, E, F -- тұрақтылар.

Жалпы жағдайда m-ретті көпмүшелік

$$Q_m(x) = A_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)^k \cdots (x^2+p_h x+q_h)\cdots(x^2+p_l x+q_l)^l \cdots$$

типті көбейткіштерге жіктеледі.

Дұрыс рационал $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ функцияны төмендегі тәртіппен жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз:

1. Бөлшектің бөліміндегі көпмүшеліктің түбірлерін $Q_m(x) = 0$ теңдеуін шешу арқылы табамыз.

2. Көпмүшелікті табылған түбірлердің көмегімен $Q_m(x) = A_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)^k \cdots (x^2+p_h x+q_h)\cdots(x^2+p_l x+q_l)^l \cdots$ көбейткіштерге жіктейміз.

3. Көбейткіштерге жай бөлшектерді сәйкес қоямыз:

I. *Нақты бір еселі* түбірге сәйкес: $(x - x_i) \Rightarrow \dfrac{A_i}{x - x_i}$,

II. *Нақты* k *еселі* түбірге k бөлшектің қосындысы сәйкес:

$$(x-x_k)^k \Rightarrow \frac{B_1}{x-x_k} + \frac{B_2}{(x-x_k)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-x_k)^k},$$

III. *Бір еселі өзара түйіндес комплекс* түбірдің жұбына сәйкес:

$$x^2 + p_h x + q_h \Rightarrow \frac{C_h x + D_h}{x^2 + p_h x + q_h},$$

IV. l *еселі өзара түйіндес комплекс* түбірдің жұбына l бөлшектің қосындысы сәйкес:

$$\left(x^2+p_lx+q_l\right)^l \ \Rightarrow \ \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{E_2x+F_2}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^2}+\ldots+\frac{E_lx+F_l}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^l}$$

4. Барлық енгізілген жай бөлшектердің қосындысын берілген рационал функцияға теңестіреміз:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_i}{x-x_i}+\ldots+\frac{B_1}{x-x_k}+\frac{B_2}{(x-x_k)^2}+\ldots.+\frac{B_k}{(x-x_k)^k}+$$

$$\ldots.+\frac{C_hx+D_h}{x^2+p_hx+q_h}+\ldots+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{E_2x+F_2}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^2}+\ldots+\frac{E_lx+F_l}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^l}+\ldots$$

5. Тұрақтыларды табу үшін теңдікті ортақ бөлімге келтіреміз. Алымды теңестіру үшін төмендегі тұжырымдарды ұстанамыз:

1) егер көпмүшеліктер тең болса, онда айнымалының орнына белгілі санды қойғанда мәндері тең болу керек;

2) егер көпмүшеліктер тең болса, x-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттері тең болу керек.

6. Табылған жай бөлшектердің қосындысын интегралдаймыз.

I, II типті жай рационал бөлшектерді интегралдасақ:

$$\int (x-a)^{-\lambda}dx=\begin{cases}\frac{1}{-\lambda+1}(x-a)^{-\lambda+1}+C, & \lambda\neq 1\\ \ln|x-a|+C, & \lambda=1\end{cases}$$

III, IV типті жай рационал бөлшектерді интегралдасақ:

$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\lambda}dx$ интегралын есептеу үшін x^2+px+q көпмүшелігін $(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$ түрінде (мұндағы $q-\frac{p^2}{4}>0$) жазамыз. Сонан соң $x+\frac{p}{2}=u,\quad q-\frac{p^2}{4}=a^2$ деп белгілесек,

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\lambda}dx=\int\frac{Bu+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{(u^2+a^2)^\lambda}du=$$

$$= B\int \frac{udu}{(u^2+a^2)^\lambda} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^\lambda} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^\lambda} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)K_\lambda =$$

$$= \frac{B}{2(1-\lambda)}(u^2+a^2)^{-\lambda+1} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)K_\lambda, \qquad \boldsymbol{\lambda \neq 1}$$

Егер $\lambda = 1$ болса, онда $\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)} = \ln(u^2+a^2) + C,$

$$K_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{u}{a} + C.$$

K_λ интегралы 7-мысалда реккуренттік формула арқылы табылған.

Мысал 1. Интегралды табыңыз. $\int \frac{2x^4-2x^2+1}{x^3-2x^2-3x}dx.$

Шешуі. Бөлшек бұрыс. Бұрыштап бөліп, бүтін бөлігін айырып аламыз:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 2x^2 + 1 & x^3-2x^2-3x \\ \cline{2-2} -\ \ 2x^4-4x^3-6x^2 & 2x+4 \\ \hline 4x^3+4x^2+1 & \\ -\ \ 4x^3-8x^2-12x & \\ \cline{1-1} 12x^2+12x+1 & \end{array}$$

Ендеше, $\frac{2x^4-2x^2+1}{x^3-2x^2-3x} = 2x+4+\frac{12x^2+12x+1}{x^3-2x^2-3x}$. Орнына апарып қойсақ:

$$\int \frac{2x^4-2x^2+1}{x^3-2x^2-3x}dx = x^2+4x+\int \frac{12x^2+12x+1}{x^3-2x^2-3x}dx =$$

Бөлімдегі көпмүшеліктің түбірлерін табамыз және оны көбейткіштерге жіктейміз :

$$x^3-2x^2-3x=0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2-2x-3\right)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=3.$$

Барлық түбірлер жай, нақты. Жіктеудің түрі:

$$x^3-2x^2-3x=x(x+1)(x-3).$$

Дұрыс рационал бөлшекті жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз, қосындыны ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{12x^2+12x+1}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1)}{x^3-2x^2-3x}$$

Алымдағы көпмүшеліктерде айнымалының орнына түбірлерін қойып, мәндерін салыстыра отырып, коэффициенттерді анықтаймыз:

$$x=0 \;\Rightarrow\; 1=-3A \;\Rightarrow\; A=-\frac{1}{3};$$

$$x=-1 \;\Rightarrow\; 1=4B \;\Rightarrow\; B=\frac{1}{4};$$

$$x=3 \;\Rightarrow\; 145=12C \;\Rightarrow\; C=\frac{12}{145};$$

Жай бөлшектердің қосындысын интегралға қойып және интегралдасақ:

$$\int\frac{2x^4-2x^2+1}{x^3-2x^2-3x}dx=x^2+4x+\int\left(-\frac{1/3}{x}+\frac{1/4}{x+1}+\frac{12/145}{x-3}\right)dx=$$

$$=x^2+4x-\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{12}{145}\ln(x-3)+C=$$

$$=x^2+4x+\ln\frac{(x+1)^{1/4}(x-3)^{12/145}}{x^{1/3}}+C.$$

Мысал 2. Интегралды табыңыз. $\int\frac{3x^2-2x+2}{(x+2)^2\left(x^2-2x+10\right)}dx$.

Шешуі. Бұл жағдайда дұрыс бөлшек берілген. $(x+2)^2\left(x^2-2x+10\right)=0$ теңдеуін шешсек: нақты түбірі $x=-2,$ 2 еселі; ал, квадрат үшмүшелікке б*ір еселі өзара түйіндес комплекс* түбірдің жұбы сәйкес. Интеграл астындағы функцияның жай бөлшектердің қосындысына жіктелу түрі:

$$\frac{3x^2-2x+2}{(x+2)^2(x^2-2x+10)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+10}=$$

$$=\frac{A(x+2)(x^2-2x+10)+B(x^2-2x+10)+(Cx+D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2-2x+10)}.$$

Бір ғана нақты түбірі болғандықтан:

$$x=-2\Rightarrow 18=18B \ \Rightarrow \ B=1.$$

Басқа коэффициенттерді анықтау үшін x айнымалының бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$x^3\Rightarrow 0=A+C$$

$$x^2\Rightarrow 3=B+4C+D$$

$$x \ \Rightarrow -2=6A-2B+4C+4D,$$

немесе

$$\begin{cases}A+C=0\\4C+D=2\\6A+4C+4D=0\end{cases}.$$

Жүйенің шешімі: $A=-\frac{4}{9},\ \ C=\frac{4}{9},\ \ D=\frac{2}{9}.$

Осылайша,

$$\frac{3x^2-2x+1}{(x+2)^2(x^2-2x+10)}=-\frac{1}{9}\left(\frac{4}{x+2}-\frac{9}{(x+2)^2}-\frac{4x+2}{x^2-2x+10}\right)$$

Интегралға қойсақ:

$$\int\frac{3x^2-2x+1}{(x+2)^2(x^2-2x+10)}dx=-\frac{4}{9}\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\frac{2}{9}\int\frac{2x+1}{x^2-2x+10}dx$$

Табамыз:

$$\int\frac{dx}{x+2}=\ln|x+2|+C,$$

$$\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\int(x+2)^{-2}\,dx=-\frac{1}{x+2}+C,$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+10}dx = \left| \begin{matrix} x^2-2x+10=(x-1)^2+3^2 \\ t=x-1,\ x=t+1,\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t+3}{t^2+3^2}dt =$$

$$= \int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3^2} + 3\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \ln\left(t^2+3\right) + \operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \left|t=x-1\right| =$$

$$= \ln\left((x-1)^2+3\right) + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.$$

Қорытындысында:

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{(x+2)^2\left(x^2-2x+10\right)}dx = -\frac{4}{9}\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{9}\ln\left((x-1)^2+3\right) + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C,$$

немесе:

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{(x+2)^2\left(x^2-2x+10\right)}dx = \frac{2}{9}\ln\frac{(x-1)^2+3}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2} + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C$$

Осылай дұрыс рационал бөлшекті жіктеу әдісін *белгісіз коэффициенттерді анықтау* әдісі деп те атайды.

$$\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{(x-a_1)}} + \cdots \frac{\boldsymbol{A_n}}{\boldsymbol{(x-a_n)}}.$$

осыдан A_k еселеуішін табу үшін $(x-a_k)$ жақшасын сызып тастап, қалған өрнекке $x=a_k$ деп қоямыз.

Теорема. *Кез келген рационал бөлшектің алғашқы функциясы бар және ол алғашқы функция элементар функциялар арқылы өрнектеледі.*

Мысал 3.

$$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \int \frac{3}{x-2}dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= 3\ln(x-2) + 2arctgx + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = 3\ln(x-2) + 2arctgx = \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

(*коэффициентті анықтаудың* ***алақан әдісі)*** $\frac{x+1}{(x-1)(x^2-2x)}$ бөлшегінің жіктеуін табайық.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x}$$

деп жазып, А – ны табу үшін $\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$ бөлшегінде $(x-1)$ жақшасын сызып тастаймыз, сонда $\frac{x+1}{x(x-2)}$ қалады, енді осыған $x=1$ деп қойсақ, $A=-2$. Дәл осылай B табу үшін $\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$ −ден $(x-2)$ ні сызып тастап, одан шыққан $\frac{x+1}{x(x-1)}$ −ге $x=2$ десек, $B=\frac{3}{2}$. С – ні табу үшін берілген рационал бөлшекті x ке қысқартып, қалған $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$ өрнегінде $x=0$ десек, С – ні табамыз, $C=\frac{1}{2}$.

§ 5. Остроградский әдісі.

Рационал бөлшектің туындысы да рационал бөлшек болады. Ал, рационал бөлшекті интегралдаса тек қана екі жағдайда, интеграл астындағы функция II немесе IV типті жай рационал бөлшек болса ғана жауап рационал бөлшек болады. ***М.В.Остроградский*** (1801-1862) әдісі рационал бөлшекті интегралдағанда жауаптың рационал бөлігін бөліп алуға мүмкіндік береді.

Айталық, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - дұрыс рационал бөлшек. $Q(x)$-ті мүмкін болатын жақшалардың көбейтіндісіне жіктейміз. $Q(x)$-ті екі көпмүшеліктің көбейтіндісі $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$ түрінде жазамыз. Мұнда $Q_1(x)$- $Q(x)$ көпмүшелігінің барлық еселі түбірлерінен 1 есеге кем түбірлері бар көпмүшелік;

Ал, $Q_2(x)$- $Q(x)$ көпмүшелігінің барлық 1еселі түбірлері бар көпмүшелік.

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (1)$$

Мұндағы $P_1(x)$ - дәрежесі $Q_1(x)$-ң дәрежесінен 1-ге кем, коэффициенттері анықталмаған көпмүшелік, $P_2(x)$ дәрежесі $Q_2(x)-$ ң дәрежесінен 1-ге кем, коэффициенттері анықталмаған көпмүшелік. Ол коэффициенттерді табу үшін (1) теңдіктің екі жағын да дифференциалдап, теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз, сосын алымындағы көпмүшеліктердің сәйкес дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп, $P_1(x), P_2(x)$ көпмүшеліктерінің белгісіз коэффициенттерін анықтаймыз. (1) теңдіктің оң жағындағы $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$ интегралын табу үшін интеграл астындағы рационал функцияны жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз. I және III типті жай бөлшекрді ғана интегралдаймыз.

Мысал 1. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} =$

интеграл астындағы рационал функцияның бөлімі 5-дәрежелі көпмүшелік; оның әртүрлі екі түбірі бар: -1 және 1, екеуі де еселі: сәйкесінше 3 және 2 еселі; сондықтан $Q_1(x) = (x-1)(x+1)^2$, - 3-дәрежелі көпмүшелік, түбірлері -1 және 1, сәйкесінше 3-1=2, 2-1=1 еселі; ендеше $P_1(x)$ - 2-дәрежелі көпмүшелік;

$Q_2(x) = (x-1)(x+1)$,- 2-дәрежелі көпмүшелік; ендеше $P_2(x)$ - 1-дәрежелі, яғни, сызықтық көпмүшелік;

интегралды мынадай түрде іздейміз:

$$= \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{mx+n}{(x-1)(x+1)}dx \qquad (2)$$

теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2 - (ax^2+bx+c)((x+1)^2+2(x-1)(x+1))}{(x-1)^2(x+1)^4} + + \frac{mx+n}{(x-1)(x+1)}$$

теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x^2-1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(mx+n)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

Бұл теңдіктен:

$$(2ax+b)(x^2-1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(mx+n)(x^2-1)(x+1)=x$$

көпмүшеліктердің сәйкес дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$\begin{array}{c|c}
x^4 & m=0 \\
x^3 & 2a-3a+n=0 \\
x^2 & b+a-3b+n=0 \\
x & -2a+b-3c-n=1 \\
x^0 & -b+c-n=0
\end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=a \\ b=a \\ c=2a \\ a=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b=n=-\dfrac{1}{8} \\ c=-\dfrac{1}{4} \\ m=0 \end{cases}$$

табылған коэффициенттерді (2) теңдікке қойып, кестелік интегралды табамыз:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{8}\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2-1} =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Ескерту. Егер интеграл астындағы функцияны жай бөлшектердің қосындысына жіктесек те, 5 коэффициентті анықтау керек еді:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \int \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{m}{(x-1)^4} + \frac{n}{(x-1)^5} \right) dx, \text{ -}$$

Әр интегралды жеке тапқаннан кейін жауапта барлық бөлшекті ортақ бөлімге келтіріп, ықшамдау керек. Ал, М.В.Остроградский әдісімен бұл жұмыс орындалып тұрады.

Мысал 2. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} =$

Интеграл астындағы функция – 6-дәрежелі көпмүшелік; оның түбірлері – 3-дәрежелі комплекс түйіндес $\pm i$ сандары; сондықтан $Q_1(x) = (x^2+1)^2$, $Q_2(x) = (x^2+1)$; ендеше $P_1(x)$ - 3-дәрежелі, $P_2(x)$ - сызықтық көпмүшелік;

интегралды мынадай түрде іздейміз:

$$= \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+1)^2} + \int \frac{mx+n}{x^2+1}dx \qquad (3)$$

теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(x^2+1\right)-2\cdot 2x\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{mx+n}{x^2+1}$$

теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіріп, алымдарды теңестіреміз:

$$\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(x^2+1\right)-4x\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)+\left(mx+n\right)\left(x^2+1\right)^2=1$$

$$\left.\begin{array}{l|c} x^5 & m=0 \\ x^4 & 3a-4a+n=0 \\ x^3 & 2b-4b+2m=0 \\ x^2 & 3a+c-4c+2n=0 \\ x & 2b-4d+m=0 \\ x^0 & c+n=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{8} \\ b=0 \\ c=\dfrac{5}{8} \\ d=0 \\ m=0 \\ n=\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Табылған коэффициенттерді (2) теңдікке қойып, кестелік интегралды табамыз:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{3x^3+5x}{8\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x\left(3x^2+5\right)}{8\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}arctgx+C.$$

§ 6. Квадраттық иррационалдықтарды интегралдау

$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ түріндегі функцияны *квадраттық иррационалдық* деп атайды. Мұндағы a, b және c - тұрақты нақты сандар, $a\neq 0$. Әрі түбір астындағы квадрат үшмүшеліктің түбірлері бірдей емес деп ұйғарамыз, ал түбірлер бірдей болса, онда үшмүшелік түбірі рационалдық өрнек болар еді.

Жалпы жағдайда $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, $a\neq 0$, квадраттық иррационалдықты интегралдау *Эйлер алмастыруының*:

1) егер $a>0$, онда $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\cdot x$
2) егер $c>0$, онда $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$
3) егер $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, яғни, ax^2+bx+c квадрат үшмүшеліктің x_1, x_2 нақты түбірлері бар болса, онда $\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=t\left(x-x_1\right)$

көмегімен жаңа t айнымалыдан тәуелді рационал функцияны интегралдауға келтіріледі. Барлық үш жағдайда да теңдіктің екі жағын квадраттап, x-ті t

арқылы өрнектейміз; алынған өрнекті интеграл астындағы функцияға қойып, t -дан тәуелді бөлшек рационал функция аламыз. Енді дербес жағдайларды қарастырайық.

1. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ ***түріндегі интегралдар***

$x = a\sin t,\ dx = a\cos t\,dt$ немесе $x = a\,\mathrm{th}\,t,\ dx = a\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}dt$ алмастыруларын жасау арқылы табылады.

Мысал 1. Интегралды табыңыз $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

Бірінші алмастыруды пайдаланайық:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t, \\ dx = 3\cos t\,dt \end{array} \right| = 27\int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{9(1-\sin^2 t)}}\cos t\,dt = 9\int \sin^2 t\,dt =$$

$$= 9\int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \left| t = \arcsin\frac{x}{3} \right| = \frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{9}x\sqrt{9-x^2}\right) + C.$$

2. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ ***түріндегі интегралдар***

$x = a\,\mathrm{tg}t,\ dx = a\dfrac{1}{\cos^2 t}dt$ немесе $x = a\,\mathrm{sh}t,\ dx = a\,\mathrm{ch}t\,dt$ алмастыруларын жасау арқылы табылады.

Мысал 2. Интегралды табыңыз $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Бірінші алмастыруды пайдаланайық:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\,\mathrm{tg}t, \\ dx = 2\dfrac{1}{\cos^2 t}dt \end{array} \right|. = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{1}{\cos^2 t}dt}{\mathrm{tg}^2 t\sqrt{4(\mathrm{tg}^2 t + 1)}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{d\sin t}{\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin t} + C = \left| t = \mathrm{arctg}\frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C.$$

3. $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ ***түріндегі интегралдар***

$x=\dfrac{a}{\cos t}$, $dx=a\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ немесе $x=a\,\mathrm{ch}t,\ dx=a\,\mathrm{sh}t\,dt$ алмастыруларын жасау арқылы табылады.

Мысал 3. Интегралды табыңыз $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

Екінші алмастыруды пайдаланайық:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx=\left|\begin{matrix}x=\mathrm{ch}\,t,\\ dx=\mathrm{sh}\,t\,dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\mathrm{ch}^2t}{\sqrt{\mathrm{ch}^2t-1}}\mathrm{sh}\,t\,dt=\int\frac{\mathrm{ch}^2t}{\sqrt{\mathrm{ch}^2t-1}}\mathrm{sh}\,t\,dt=\int\mathrm{ch}^2t\ dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\mathrm{ch}\,2t)\ dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2\mathrm{t}\right)+C=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2\mathrm{t}\right)+C=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\ \mathrm{t}\sqrt{\mathrm{ch}^2t-1}\right)+C=\boldsymbol{4.}$$

$$=|t=\mathrm{arch}\,x|=\frac{1}{2}\left(\mathrm{arch}\,x+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

4. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ***түріндегі интегралдар***

мұнда $a\neq 0$ және $\dfrac{b^2}{4a}-c\neq 0$ квадрат үшмүшелікте толық квадратты бөліп алу арқылы $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$ және $x+\dfrac{b}{2a}=t,\ dx=dt$ алмастыруын жасау арқылы табылады.

Алмастырудан кейін радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)}$

түрінде болады және төмендегі жағдайлардың бірі орын алады:

а). $a>0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}>0$. Егер $a=m^2,\ c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$ деп алсақ, берілген интеграл

$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt$ түрге енеді.

б). $a>0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. Егер $a=m^2,\ c-\dfrac{b^2}{4a}=-n^2$ деп алсақ, берілген интеграл

$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt$ түрге енеді.

c). $a<0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}>0$. Егер $a=-m^2,\ c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$ деп алсақ, берілген интеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(t,\sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt$ түрге енеді.

Сондай-ақ $a<0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}<0$ болуы мүмкін, бірақ, бұл жағдайда $\sqrt{ax^2+bx+c}$ -комплекс сан.

Сонымен, қолайлы алмастырулардың көмегімен $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ интегралды жоғарыда қарастырылған ***1., 2.*** және ***3***. жағдайлардың біріне келтіреміз.

Кей жағдайларда квадраттық иррационалдық жеңіл интегралданады.

Мысал 4. Интегралды табыңыз $\int\dfrac{1-2x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=$

Алымында түбір астындағыдай өрнекті бөліп аламыз да, интегралды екіге бөлеміз:

$$=\int\frac{(1+x-x^2)-2+x}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=-\int\sqrt{1+x-x^2}\,dx+\int\frac{2-x}{\sqrt{1+x-x^2}}=.$$

Түбір астындағы квадрат үшмүшеліктен толық квадратты бөліп аламыз және екінші интеграл астындағы функцияның алымынан $1-2x=\left(1+2x-x^2\right)'$ өрнегін бөліп аламыз да, оны дифференциал астына енгіземіз:

$$=\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{(1-2x)+3}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

Барлық интгералдар –кестелік;

$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{8}{5}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+\sqrt{1+x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=\frac{5-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}+\frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

Мысал 5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

Бұл квадраттық иррационалдықта $a=-1<0,$ сондықтан, Эйлердің 1) - алмастыруы жарамсыз; $D=8$ болғандықтан 3) - алмастыру жасауға болады, бірақ, түбірлер-нақты, иррационал сандар; $c=1>0,$ 2) - алмастыру қолданайық. Ыңғайлылық үшін $\sqrt{c}$ «-» таңбасымен алынады.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-2x-x^2} = tx-1 \\ 1-2x-x^2 = t^2x^2-2tx+1 \\ x^2\left(t^2+1\right) = 2x(t-1) \\ x = \frac{2(t-1)}{t^2+1} \\ dx = 2\frac{t^2+1-2t(t-1)}{\left(t^2+1\right)^2}dt = 2\frac{1+2t-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{\left(t^2+1\right)\left(1+2t-t^2\right)}{t\cdot 2(t-1)\left(t^2+1\right)^2}dt = \int \frac{1+2t-t^2}{t\cdot(t-1)\left(t^2+1\right)}dt =$$

Дұрыс рационал функцияның интегралын алдық; оны жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз де, интегралды табамыз:

$$= \int \left(\frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{ct+d}{t^2+1}\right)dt =$$

$$a(t-1)\left(t^2+1\right) + bt\left(t^2+1\right) + (ct+d)t(t-1) = 1+2t-t^2$$

егер $t=0,$ онда $-a=1, \Rightarrow a=-1;$

егер $t=1,$ онда $2b=2, \Rightarrow b=1;$

енді c, d коэффициенттерінің мәндерін табу үшін тек t^2 және t^3-ң коэффициенттерін теңестірсек жеткілікті:

$$\left.\begin{array}{ll} t^2\big| & a+b+c=0 \\ t^3\big| & -a-c+d=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=-2 \end{cases}$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2arctgt + C,$$

мұнда $t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x};$

Мысал 6. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx=$

мұнда $ax^2+bx+c=x^2-2x+2$ $a=1>0$, $c=2>0$, $D=-4<0$;

Эйлердің алғашқы екі алмастыруы жарамды; айталық, **1.** алмастыруын қолданайық:

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+2}=t-x\\ x^2-2x+2=t^2-2tx+x^2\\ x=\dfrac{t^2-2}{2(t-1)}\\ dx=\dfrac{1}{2}\dfrac{2t(t-1)(t^2-2t+2)^2}{(t-1)^4}dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{t^2-2}{2(t-1)}\left[t-\frac{t^2-2}{2(t-1)}\right]\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}dt=\frac{1}{8}\int\frac{(t^2-2)(t^2-2t+2)^2}{(t-1)^4}dt=$$

Алынған интеграл астындағы функция-бұрыс рационал бөлшек; алымын $(t-1)$-ң дәрежесі бойынша таратайық:

$$\begin{array}{r|l} & \underline{t=1}\\ f(t)=t^2-2 & -1\\ f'(t)=2t & 2\\ f''(t)=2 & 2\end{array}\qquad\Rightarrow t^2-2=-1+2(t-1)+\frac{2}{2!}(t-1)^2$$

ал, $t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

жазудың қысқалығы үшін $(t-1)=z$ деп белгілейік:

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2+2z-1)(z^2+1)^2}{z^4}dz=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2+2z-1)(z^4+2z^2+1)}{z^4}dz=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(z^2+2z+1+\frac{4}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{1}{z^4}\right)dz=\frac{1}{8}\left(\frac{z^3}{3}+z^2+z+4\ln|z|+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3z^3}\right)+C=$$

кестелік интегралдарды алдық, бастапқы айнымалыға оралсақ:

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{(t-1)^3+(t-1)^{-3}}{3}+\left[(t-1)^2+(t-1)^{-2}\right]+\left[(t-1)+(t-1)^{-1}\right]\right)+\frac{1}{2}\ln|t-1|+C,$$

мұнда $t=x+\sqrt{x^2-2x+2}.$

Осы мысалдардан көргеніміздей, Эйлер алмастырулары арқылы интегралдау көлемді түрлендірулерге әкеледі. Кей жағдайларда Эйлер алмастыруларын пайдаланбаса да болады. $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ түріндегі квадрат иррационалдықты интегралдауды қарастырайық, мұнда $R(x)$-рационал бөлшек. Егер рационал бөлшек $R(x)=\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$-бұрыс болса, яғни, $k \geq m$, онда оның бүтін бөлігін бөліп алу арқылы дұрысқа келтіреміз де, дұрыс рационал бөлшекті жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз. Нәтижесінде $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ функцияның интегралы келесі үш түрдегі интегралдарға келтіріледі:

I,1. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, мұнда $P_n(x)$ - x бойынша көпмүшелік, $n \geq 1$.

I,2. $\int \frac{dx}{(x-x_0)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\quad r \geq 1, \quad x_0 \in \Re.$

I,3. $\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\quad r \geq 1, \quad D=\frac{p^2}{4}-q<0.$

Рационал функцияның бүтін бөлігін $\sqrt{ax^2+bx+c}$ түбірге бөлгенде **I,1.** интегралы; I және II типті жай рационал бөлшектерді осы түбірге бөлгенде **I,2.** ; III және IV типті жай рационал бөлшектерді $\sqrt{ax^2+bx+c}$ түбірге бөлгенде **I,3.** түрдегі интегралдар шығады.

Енді осы интегралдардың алғашқы функцияларын табу әдістерін қарастырайық.

I,1. $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

-бірінші түрдегі квадрат иррационалдықтың интегралы - екі қосылғыштан тұрады: біріншісі - $\sqrt{ax^2+bx+c}$ түбір мен берілген көпмүшеліктен дәрежесі 1-ге кем $Q_{n-1}(x)$ көпмүшелігінің көбейтіндісі; екінші қосылғыш- λ сандық коэффициентімен берілген кестелік интегралға келтірілетін $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралы. λ сандық коэффициентін және $Q_{n-1}(x)$ көпмүшелігін табу үшін бұл көпмүшелікті $Q_{n-1}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}$ түрінде жазып, (1) теңдігінің екі жағын дифференциалдап, x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз.

Мысал 7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx =$

Интеграл сатындағы функцияның алымы - $n=3$дәрежелі көпмүшелік, сондықтан (1) формулаға сәйкес жазсақ:

$$=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}= \qquad (2)$$

алынған теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\left(2ax+b\right)\sqrt{1+2x-x^2}+\left(ax^2+bx+c\right)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\frac{\left(2ax+b\right)\left(1+2x-x^2\right)+\left(ax^2+bx+c\right)\left(1-x\right)+\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

бөлшектердің алымдарын теңестіріп, x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін салыстырсақ, төмендегі жүйені аламыз:

$$x^3=\left(2ax+b\right)\left(1+2x-x^2\right)+\left(ax^2+bx+c\right)\left(1-x\right)+\lambda$$

$$\left.\begin{array}{l|c} x^3 & -2a-a=1 \\ x^2 & 4a-b+a-b=0 \\ x & 2a+2b+b-c=0 \\ x^0 & b+c-\lambda=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{5}{6} \\ c=-\frac{19}{6} \\ \lambda=4 \end{array}\right.$$

Коэффициенттердің табылған мәндерін (2) теңдікке қойып, интегралды тапсақ:

$$=\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{d\left(1-x\right)}{\sqrt{2-\left(1-x\right)^2}}=$$

$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}+C.$$

Ескерту. Интегралдаудың бұл әдісі $n=1;2$ үшін тиімсіз, бұл жағдайларда 4-мысалдағыдай қарастырған жөн. $n\geq 3$ болса, Эйлер алмастыруын пайдалағаннан гөрі, осы әдіс жеңіл.

I,2. $\int \frac{dx}{(x-x_0)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $r\geq 1$, $x_0\in\Re$.

Бұл түрдегі интегралдар $\frac{1}{x-x_0}=t$ алмастыруын жасау арқылы **I,1.**-ге келтіріледі.

Мысал 8 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=$

Мұнда интеграл астындағы функция – II типті $\frac{1}{x^3}$ жай бөлшектің $\sqrt{x^2+1}$-ге қатынасы; көрсетілген алмастыруды жасаймыз:

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}=t\\ x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=-\int\frac{tdt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=-\operatorname{sgn}t\cdot\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

алымын $t^2=(t^2+1)-1$ түрінде жазып, екі интегралдың қосындысына жіктейміз:

$$=-\operatorname{sgn}t\cdot\int\left(\sqrt{1+t^2}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt=-\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|-\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right)\operatorname{sgn}t+C=$$

енді t -ң орнына оның x арқылы өрнектелуін қойсақ:

$$=-\left(\frac{1}{2x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|\right)\operatorname{sgn}\frac{1}{x}+C=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x|x|\operatorname{sgn}x}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x\cdot\ln\frac{\operatorname{sgn}x+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$$

Біз мұнда

$$\operatorname{sgn} x \cdot \ln \frac{\operatorname{sgn} x + \sqrt{x^2+1}}{|x|} = \begin{cases} \ln \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}, \quad \textit{егер} \quad x > 0 \\ -\ln \dfrac{-1+\sqrt{x^2+1}}{-x} = \ln \dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}} = \ln \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{-x} \quad \textit{егер} \quad x < 0 \end{cases}$$

ескердік.

Енді

I,3. $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\left(x^2+px+q\right)^r \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, мұнда $a \neq 0, \quad r \geq 1, \quad D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$

түріндегі интегралды қарастырамыз.

Интеграл астындағы квадрат үшмүшеліктің коэффициенттерінің таңбасына қарай төмендегідей үш жағдайды қарастырады:

I,3,a. $p = b = 0$, яғни, интеграл астындағы үшмүшелікте айнымалы x-тің бір дәрежесі жоқ:

$$\int \frac{mx+n}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} dx =$$

Бұл интегралды екі интегралдың қосындысы түрінде жазамыз:

$$= \frac{m}{2} \int \frac{2xdx}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} + n \int \frac{dx}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} =$$

Бірінші қосылғышта $2x$-ті дифференциал астына енгіземіз, екінші қосылғышта бөліміндегі әр көбейткіштен x^2-ты жақшаның сыртына шығарамыз:

$$= \frac{m}{2} \int \frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} + \frac{n}{\operatorname{sgn} x} \int \frac{dx}{x^{2r+1}\left(1+\dfrac{q}{x^2}\right)^r \sqrt{a+\dfrac{c}{x^2}}} =$$

Енді бірінші қосылғыш $x^2 = z$ байланысты бөлшек-сызықты иррационалдық болғандықтан, $\sqrt{ax^2+c} = t$ алмастыруын жасап, рационал бөлшектің интегралына келтіреміз;

Екінші интегралда $\dfrac{1}{x^3}$ көбейткішін дифференциал астына енгізу $\dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{1}{2} d\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ арқылы бөлшек-сызықты интегралға келтіреміз;

ол интегралды рационал функцияның интегралына келтіру үшін $\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}=z$ алмастыруын жасау керек.

Мысал 9. **1957.** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}dx=$

$x\in(-1;1)$; бұл біз қарастырған **І,3,а.** жағдай, $m=0,\quad n=1$; бөліміндегі әр көбейткіштен $0\neq x^2$-ты жақшаның сыртына шығарамыз:

$$=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^r\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=$$

$\frac{1}{x^3}$ көбейткішін дифференциал астына енгізсек, айнымалыға байланысты бөлшек-сызықты иррационалдық аламыз да, сәйкес алмастыру жасаймыз:

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}=t\quad\Rightarrow\frac{1}{x^2}=t^2+1\\ d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^3}dx=2tdt,\quad\frac{dx}{x^3}=-tdt\end{array}\right|=-\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\int\frac{tdt}{\left(t^2+2\right)t}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}arcctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}arctg\frac{\sqrt{2}}{t}+C=$$

енді t -ң орнына оның x арқылы өрнектелуін $t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$ қойсақ:

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}arctg\frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{1-x^2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C,$$

$x=0$ алғашқы бейненің анықталу облысына енетінін ескердік.

І,3,б. $\frac{1}{p}=\frac{a}{b}$,яғни, интеграл астындағы үшмүшелікте x пен x^2-ң коэффициенттері пропорционал; олардан толық квадратты бөліп аламыз да, $x+\frac{p}{2}=y$ деп белгілесек, алдыңғы **І,3,а.** жағдайға келеді.

Мысал 10. 1962. $\int\frac{x^2dx}{\left(4-2x+x^2\right)\sqrt{2+2x-x^2}}=$

Мұнда $x^2+px+q=4-2x+x^2, \quad p=-2;$

$$ax^2+bx+c=-x^2+2x+2, \quad a=-1; \quad b=2;$$

$$\frac{1}{p}=\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}, \qquad x+\frac{p}{2}=x-1,$$

$x-1=y$ деп белгілейміз:

$$=\int\frac{(y+1)^2dy}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}=\int\frac{(y^2+3)+2y-2}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}dy=$$

$$=\int\frac{dy}{\sqrt{3-y^2}}+\int\frac{2y}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}dy-2\int\frac{dy}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}=I_1+I_2-2I_3$$

алынған интегралдарды осылай таңбалап, әрқайсысын жеке табамыз:

$$I_1=\int\frac{dy}{\sqrt{3-y^2}}=\arcsin\frac{y}{\sqrt{3}}+C_1=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{2y}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}dy=\int\frac{d(y^2)}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{3-y^2}=t\\ 3-t^2=y^2\\ d(y^2)=-2tdt\end{array}\right|=\int\frac{-2tdt}{(6-t^2)t}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right|+C_2=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right|+C_2;$$

$$I_3=\int\frac{dy}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}=\frac{1}{\operatorname{sgn} y}\int\frac{dy}{y^3\left(\frac{3}{y^2}+1\right)\sqrt{\frac{3}{y^2}-1}}=$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{y^2} - 1} = t \\ \frac{3}{y^2} = t^2 + 1 \\ -\frac{6}{y^3} dy = 2tdt \\ \frac{dy}{y^3} = -\frac{t}{3} dt \end{array} \right| = \frac{-1}{3 \operatorname{sgn} y} \int \frac{tdt}{(t^2 + 2)t} =$$

$$= \frac{-1}{3 \operatorname{sgn} y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C_3 = \frac{-1}{3\sqrt{2} \operatorname{sgn} y} \cdot arctg \frac{\sqrt{3 - y^2}}{|y|\sqrt{2}} + C_3 =$$

$$= \frac{-1}{3\sqrt{2}} \cdot arctg \frac{\sqrt{2 + 2x - x^2}}{(x-1)\sqrt{2}} + C_3.$$

I,3,в. Интеграл астындағы үшмүшеліктің коэффициенттері алдыңғы **I,3,а.**, **I,3,б.** жағдайлардың шарттарын қанағаттандырмайды. Бұл түрдегі квадрат иррационалдықтың интегралдары бөлшек-сызықты $x = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t}$ алмастыруын жасау арқылы **I,3,а.** жағдайдағы интегралға келтіріледі. Мұнда α, β коэффициенттерін алынған екінші дәрежелі көпмүшелікте t-ң (бірінші дәреженің) коэффициентін нөлге теңестіру арқылы табады.

Мысал 11. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}} dx =$

$$x = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t} \quad \Rightarrow x^2 + 2 = \left(\frac{\alpha + \beta t}{1 + t} \right)^2 + 2 = \frac{\alpha^2 + 2 + (2\alpha\beta + 4)t + (\beta^2 + 2)t^2}{(1 + t)^2}, \qquad (1)$$

$$2x^2 - 2x + 5 = \frac{2(\alpha + \beta t)^2}{(t + 1)^2} - 2\frac{(\alpha + \beta t)}{t + 1} + 5 =$$

$$= \frac{2\alpha^2 - 2\beta + 5 + (4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 10)t + (2\beta^2 - 2\beta + 5)t^2}{(1 + t)^2} \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдіктердің алымындағы екінші дәрежелі көпмүшеліктерде t-ң (бірінші дәреженің) коэффициентін нөлге теңестіру арқылы α, β коэффициенттерін табамыз:

$$\begin{cases} 2\alpha\beta + 4 = 0 \\ 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = -2 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2, \end{cases}$$

ендеше, $x = \dfrac{2t-1}{t+1}$ алмастыруын жасаймыз:

$$= \left| \begin{array}{ll} x = \dfrac{2t-1}{t+1} \quad \Rightarrow (1),(2)\text{ - ден :} & x^2 + 2 = \dfrac{6t^2+3}{(t+1)^2}, \\ & 2x^2 - 2x + 5 = \dfrac{9(t^2+1)}{(t+1)^2} \\ dx = \dfrac{2(t+1)-(2t-1)}{(t+1)^2}dt = \dfrac{3dt}{(t+1)^2} & \end{array} \right| =$$

$$= 3\int \frac{(t+1)^2|t+1|}{(t+1)^2 3(2t^2+1)3\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)\int \frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt =$$

I,3,а. пунктте қарастырылған квадрат иррационалдыққа келтірдік; оны екі интегралдың қосындысы түрінде жазамыз да, әрқайсысын жеке табамыз:

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)\int \frac{t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt + \frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)\int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)(I_1 + I_2);$$

$$I_1 = \int \frac{t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt = \left| \begin{array}{l} \sqrt{t^2+1} = u \\ t = \sqrt{u^2-1} \\ du = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} \end{array} \right| = \int \frac{du}{2(u^2-1)+1} = \int \frac{du}{2u^2-1} =$$

$$= \int \frac{du}{2u^2-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(u\sqrt{2})}{1-2u^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+u\sqrt{2}}{1-u\sqrt{2}}\right| + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-u\sqrt{2}}{1+u\sqrt{2}}\right| + C_1 =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2(t^2+1)}}{1+\sqrt{2(t^2+1)}}\right|+C_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(t^2+1)}-1}{\sqrt{2(t^2+1)}+1}+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\operatorname{sgn} t}\int\frac{dt}{t^3\left(2+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=z\\ \frac{1}{t^2}=z^2-1\\ -\frac{2dt}{t^3}=2zdz\\ \frac{dt}{t^3}=-zdz\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{sgn} t}\int\frac{z}{(z^2+1)z}dz=-\frac{1}{\operatorname{sgn} t}arctgz+C_2=-\frac{1}{\operatorname{sgn} t}arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}+C_2=-arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}+C_2.$$

Енді жауапты берілген айнымалы арқылы жазу үшін келесі өрнектерді x арқылы өрнектейік:

$$x=\frac{2t-1}{t+1}=2-\frac{3}{t+1}\quad\Rightarrow\quad t+1=\frac{3}{2-x},\quad t=\frac{3}{2-x}-1=\frac{x+1}{2-x},$$

$$t^2+1=\left(\frac{x+1}{2-x}\right)^2+1=\frac{2x^2-2x+5}{(2-x)^2}.$$

Сондықтан жауап былай болады:

$$\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)I_1=\frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{sgn}(2-x)\ln\left|\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-|2-x|}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+|2-x|}\right|+C_1=$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)}+C_1,$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)I_2=-\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(2-x)arctg\left|\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}(2-x)}{|2-x|(x+1)}\right|+C_2=$$

$$=-\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{(x+1)}+C_2,$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)(I_1+I_2)=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)}-\frac{1}{3}arctg\,\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{(x+1)}+C;$$

Біз мұнда

$$\operatorname{sgn} v\cdot\ln\frac{w+|v|}{w-|v|}=\begin{cases}\ln\dfrac{w+v}{w-v} & егер \quad v\geq 0\\ -\ln\dfrac{w-v}{w+v}=\ln\dfrac{w+v}{w-v} & егер \quad v<0\end{cases}=\ln\frac{w+v}{w-v}\qquad \forall v\in(-\infty;+\infty)$$

ескердік.

§ 7. Абель алмастыруы

Квадрат иррационалдықтың тағы бір ерекше түрін қарастырамыз, дәлірек:

$$\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^{k+\frac{1}{2}}},\quad k\in \mathrm{N},\quad m,n,a,b,c\in\Re,\quad a\neq 0,\quad D=b^2-4ac\neq 0.$$

Бұл түрдегі функцияларды интегралдау үшін *Абель алмастыруын* қолданады.

Егер $m\neq 0$ болса, алымында $2ax+b=(ax^2+bx+c)'$ өрнегін бөліп аламыз да, интегралды төмендегі түрде жазамыз:

$$\int\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^{k+\frac{1}{2}}}dx=\frac{m}{2a}\int\frac{(ax+b)-b+\dfrac{2na}{m}}{(ax^2+bx+c)^{k+\frac{1}{2}}}dx=$$

$$=\frac{m}{2a}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{1}{2}-k\right)\left((ax^2+bx+c)^{k-\frac{1}{2}}\right)}+\left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{k+\frac{1}{2}}}.$$

$\displaystyle\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{k+\frac{1}{2}}}$ интегралын табу үшін мынадай алмастыру жасаймыз:

(1) $\quad t=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'=\dfrac{ax+\dfrac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ - осы *Абель алмастыруы.*

Бұл теңдіктен

$$t\sqrt{ax^2+bx+c}=ax+\frac{b}{2}.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$dt\sqrt{ax^2+bx+c}+t\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'dx=adx \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ax^2+bx+c}dt+t^2dx=adx,$$

ендеше $\left(a-t^2\right)dx=\sqrt{ax^2+bx+c}dt,$

бұдан $$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{dt}{\left(a-t^2\right)}. \qquad (2)$$

Екінші жағынан, (1) теңдіктің екі жағын да квадраттасақ:

$$t^2=\frac{a^2x^2+abx+\frac{b^2}{4}}{ax^2+bx+c}=a+\frac{\frac{b^2}{4}-ac}{ax^2+bx+c},$$

Сондықтан,

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{t^2-a}{\frac{b^2}{4}-ac} \qquad (3)$$

(2) және (3) өрнектерді ізделінді интегралға қойсақ:

$$\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(\frac{b^2}{4}-ac\right)^k}\int\frac{\left(t^2-a\right)^k dt}{a-t^2}=-\frac{1}{\left(\frac{b^2}{4}-ac\right)^k}\int\left(t^2-a\right)^{k-1}dt$$

t-ға байланысты дәрежелік функцияның интегралын алдық. Ал, ол-кестелік.

Мысал 1. $\int\frac{(x+2)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}=$

мұнда $k=3, \quad D=-12\neq 0,$

$$=\int\frac{(x+1)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}+\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{-5\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{5}{2}}}+\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}.$$

Алынған интегралды Абель алмастыруымен табамыз:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}} = \left| \begin{array}{l} t = \left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)' = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \dfrac{dt}{1-t^2} \\ \dfrac{1}{x^2+2x+4} = \dfrac{t^2-1}{1-4} = \dfrac{1-t^2}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3^3}\int \frac{\left(1-t^2\right)^3}{1-t^2}dt = \frac{1}{27}\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt = \frac{1}{27}\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}\right)+C = \frac{1}{27}\left(1-\frac{2}{3}t^2+\frac{t^4}{5}\right)+C,$$

мұнда $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. Қорытындысында

$$\int \frac{(x+2)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{-5\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x+1}{27\sqrt{x^2+2x+4}}\left(1-\frac{2}{3}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+4}+\frac{(x+1)^4}{5\left(x^2+2x+4\right)^2}\right)+C.$$

Мысал 2. $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx.$

Түбір астындағы өрнектен толық квадратты бөліп аламыз

$$2x-x^2 = -\left(x^2-2x\right) = -\left(x^2-2x+1-1\right) = -\left((x-1)^2-1\right) = 1-(x-1)^2$$

және $x-1=t,\ dx=dt$, деп алсақ:

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x-1=t, \\ dx=dt \end{array}\right| = \int\sqrt{1-t^2}\,dt = \left|\begin{array}{l} t=\sin z, \\ dt=\cos z\,dz \end{array}\right| =$$

$$= \int\cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2z)dz = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+C = \left|z=\arcsin t\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right)+C = \left|t=x-1\right| = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x-1)+(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\right)+C.$$

§ 8. Дифференциалдық биномды интегралдау

Дифференциалдық бином деп келесі түрдегі өрнекті айтамыз:

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p$$

мұндағы $a,b\in R,\ \ m,n,p\in Q,$

П.Л.Чебышев теоремасы. Дифференциалдық биномның интегралы

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,\quad \text{мұндағы } a,b\in R,\ \ m,n,p\in Q,$$

келесі үш жағдайда ғана сәйкес алмастырулар жасау арқылы рационал функциялармен өрнектеледі:

1). $p\in Z\Rightarrow x=t^N$, мұндағы N - m,n бөлшектерінің ортақ бөлімі;

2). $\frac{m+1}{n}\in Z\Rightarrow a+bx^n=t^N$, мұндағы N - p бөлшегінің бөлімі;

3). $\frac{m+1}{n}+p\in Z\Rightarrow \frac{a+bx^n}{x^n}=t^N$, мұндағы N - p бөлшегінің бөлімі;

Көрсетілген алмастыруларды қолданғанда дифференциалдық биномды $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ интегралдау t-ға байланысты рационал функцияны интегралдауға келеді.

Мысал 1. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx=$

мұндағы $m=1,\ n=\frac{2}{3},\ p=-\frac{1}{2}\notin Z,\ \frac{m+1}{n}=\frac{2\cdot 3}{2}=3\in Z\Rightarrow$

бұл екінші жағдайға келеді, сондықтан алмастыруды келесі түрде жасаймыз:

$$=\left|\begin{array}{l} 1+x^{\frac{2}{3}}=t^2 \\ x=\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}} \\ dx=\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}2tdt \end{array}\right|=3\int\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}t}{t}dt=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=$$

рационал функцияны интегралдауға келді, яғни

$$= 3\int \left(t^4 - 2t^2 + 1\right)dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C,$$

мұндағы $t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}$.

Мысал 2. $\int \sqrt{x^3 + x^4}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}(1 + x)^{\frac{1}{2}}dx =$

анықталу облысы $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;

$x > 0$ жағдайы үшін интегралды табайық, мұнда

$$m = \frac{3}{2},\ n = 1,\ p = \frac{1}{2} \notin Z,\ \frac{m+1}{n} = \frac{5}{2} \notin Z,\ \frac{m+1}{n} + p \in Z \Rightarrow$$

бұл үшінші жағдайға келеді, сәйкесінше айнымалыны алмастырамыз:

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{1+x}{x} = t^3 \\ \dfrac{1}{x} = t^2 - 1 \\ x = \dfrac{1}{t^2 - 1} \\ dx = -\dfrac{2t}{\left(t^2 - 1\right)^2 dt} \end{array} \right| = -2\int \frac{t^2}{\left(t^2 - 1\right)^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2}}dt = -2\int \frac{t^2}{\left(t^2 - 1\right)^4}\,dt =$$

интеграл астындағы функция - дұрыс рационал бөлшек, бөлімінде 4 еселі ± 1 түбірлі сегізінші дәрежелі көпмүшелік, сондықтан бұл интегралды табу үшін М.В.Остроградский әдісін қолданамыз:

$$= -2\left(\frac{at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + k}{\left(t^2 - 1\right)^3} + \int \frac{mt + n}{t^2 - 1}\,dt \right) =$$

соңғы теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{\left(5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e\right)\left(t^2 - 1\right) - \left(at^5 + ... + k\right)3 \cdot 2t}{\left(t^2 - 1\right)^4} +$$

$+ \dfrac{mt + n}{t^2 - 1} = \dfrac{t^2}{\left(t^2 - 1\right)^4}$ теңдігін аламыз. Теңдіктің екі жағын да ортақ бөлімге келтіреміз де бөлшектің алымдарын теңестіреміз:

$$\left(5at^4+4bt^3+3ct^2+2dt+e\right)\left(t^2-1\right)-$$

$$-6t\left(at^5+bt^4+ct^3+dt^2+et+k\right)+\left(mt+n\right)\left(t^6-3t^4+3t^2-1\right)=t^2$$

$$\left.\begin{array}{l|l} t^7 & m=0 \\ t^6 & 5a-6a+m=0 \\ t^5 & 4b-6b=0 \\ t^4 & -5a+3c-6c-3n=0 \\ t^3 & 2d-6d=0 \\ t^2 & -3c+e-6e+3n=1 \\ t & -6k=0 \\ t^0 & -e-n=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{16} \\ b=0 \\ c=-\dfrac{1}{6} \\ d=0 \\ e=-\dfrac{1}{16} \\ k=0 \\ m=0 \\ n=\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

табылған мәндерді орнына қойсақ,

$$=-2\left(\frac{\frac{1}{16}t^5-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{16}t}{\left(t^2-1\right)^3}-\frac{1}{16}\int\frac{dt}{1-t^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot\frac{3t+8t^3-3t^5}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{t-t^5}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

аламыз, t - ның орнына x- арқылы өрнектелуін қоямыз

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}:$$

$$=\frac{x^3}{8}\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{5}{2}}\right]+\frac{x^3}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+$$

$$+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{1-\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\right|+C=\frac{x^3}{8}\cdot\frac{\sqrt{x+x^2}}{x}\left(1-\left(\frac{1+x}{x}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+C=C+\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}+$$

$$+\frac{x^2\sqrt{x+x^2}}{8}\cdot\frac{x^2-(x+1)^2}{x^2}+\frac{1}{16}\ln\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}-\frac{2x+1}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+C$$

$x>0$ болған жағдайда.

Бұл мысалда дұрыс рационал бөлшекті интегралдауды басқаша да табуға болады, ол үшін үш рет бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз:

$$-2\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^4}dt=\left|\begin{array}{ll} u=t & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2-1\right)^4} \\ du=dt & v=\dfrac{-1}{3\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{\left(t^2-1\right)^3}=-\dfrac{1}{6\left(t^2-1\right)^3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{t^2-1-t^2}{\left(t^2-1\right)^3}dt=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)^3}=\left|\begin{array}{ll} u=t & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2-1\right)^3} \\ du=dt & v=-\dfrac{1}{4\left(t^2-1\right)^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+\frac{t}{12\left(t^2-1\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{1-t^2+t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+$$

$$\frac{1}{12\left(t^2-1\right)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-1}+\frac{1}{4}\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=t & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \\ du=dt & v=-\dfrac{1}{2\left(t^2-1\right)}\end{array}\right|=\frac{t\left(t^2+3\right)}{12\left(t^2-1\right)^3}-\frac{t}{8\left(t^2-1\right)}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{t}{24}\frac{2t^2+6-3\left(t^2-1\right)^2}{\left(t^2-1\right)^3}+C=\frac{t}{24}\cdot\frac{3+8t^2-3t^4}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

дәл М.В.Остроградский әдісін қолданған жағдайдағыдай жауап алдық,

x- арқылы өрнектелуі белгілі:

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}-\frac{2x+1}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+C.$$

Мысал 3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx=$

$x\geq 0;\quad m=\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{3},\ p=-2\in Z\Rightarrow$

$x=t^6$

$6=EKOE(2;3)$:

$$=\left|\begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5dt\end{array}\right|=6\int\frac{t^{3+5}}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

интеграл астында - бұрыс рационал бөлшек, алдымен бүтін бөлігін бөліп аламыз, одан соң интегралдаймыз:

$$\begin{array}{r|l} -t^8 & t^4+2t^2+1 \\ \underline{t^8+2t^6+t^4} & \overline{t^4-2t^2+3} \\ -\,-2t^6-t^4 & \\ \underline{-2t^6-4t^4-2t^2} & \\ -\,3t^4+2t^2 & \\ \underline{3t^4+6t^2+3} & \\ -4t^2-3 & \end{array}$$

$$= 6\int\left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}\right)dt = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int\frac{dt}{t^2+1} - 6\int\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt =$$

соңғы интегралда бөліктеп интегралдаймыз, сосын 1) формуланы қолданамыз, сонда 10) формула бойынша:

$$= \begin{vmatrix} u = t & dv = \dfrac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2} \\ du = dt & v = -\dfrac{1}{2\left(t^2+1\right)} \end{vmatrix} = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{t^2+1} -$$

$$-21arctgt + C = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21arctgx^{\frac{1}{6}} + C.$$

§ 9. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

$J_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$ түрінде берілген тригонометриялық функцияларды интегралдайық, мұндағы $m,\ n$ - бүтін сандар.

1). Егер $m = 2k+1$ - тақ оң сан болса, онда

$$J_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = -\int\left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x d(\cos x)$$

егер $n = 2k+1$ - тақ оң сан болса, онда

$$J_{m,n} = \int \sin^m x \cos^{2k} x d(\sin x) = \int\left(1-\sin^2 x\right)^k \sin^m x dx$$

2). Егер $m,\ n$ -жұп оң сандар болса, онда интеграл астындағы өрнектер келесі формулалар арқылы өрнектеледі:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

3). Егер $m = -\mu, \quad n = -\nu$ - бірдей ретті бүтін теріс сандар болса, онда

$$J_{m,n} = \int\frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \cos ec^\mu x \sec^{\nu-2} x d(tgx) =$$

$$=\int\left(1+\frac{1}{tg^2x}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(1+tg^2x\right)^{\frac{\nu-2}{2}}d(tgx)=\int\frac{\left(1+tg^2x\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{tg^{\mu}x}d(tgx)$$

4). $\int tg^m xdx \quad \left(\int ctg^m xdx\right)$ түрінде берілген интеграл

$$tg^2x=\sec^2 x-1 \qquad \left(ctg^2x=\cos ec^2x-1\right)$$

формуласының көмегімен табылады, мұндағы m - бүтін оң сан.

5). Жалпы жағдайда рекурренттік формулалардың көмегімен табылады.

Мысал 1. $\int\sin^4 xdx=$

интеграл астында $\sin x$ тің жұп дәрежесі болғандықтан, алдындағы мысалдағы әдіс жарамайды, себебі интеграл астында квадраттық иррационалды интегралдауға әкеп соқтырады:

$$\int\left(\cos^2 x-1\right)\sqrt{1-\cos^2 x}d(\cos x)=\ldots,-$$

бұл жағдайда интегралдаудың мынадай қарапайым тәсілін қолданамыз, яғни интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетеміз және

$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha,\ \ 2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ формулаларды қолданып

$$=\frac{1}{4}\int\left(2\sin^2 x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\int\cos 2xd(2x)+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=$$

соңғы интегралда тағы да интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетіп, аргументті екі еселей отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C\,.$$

Кестедегі 1 және 5 формулаларды қолдандық.

Мысал 2.

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=$$

Бұл мысал 3)жағдайға келеді, яғни $\sin x$, $\cos x$ тің дәрежелері бірдей ретті бүтін теріс сандар болғандықтан:

$$\int \frac{d(tgx)}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \left(1 + \frac{1}{tg^2 x}\right)\left(1 + tg^2 x\right)^2 d(tgx) =$$

$$= \int \frac{\left(1 + tg^2 x\right)^3}{tg^2 x} d(tgx) = \int \frac{d(tgx)}{tg^2 x} + 3\int \frac{tg^2 x}{tg^2 x} d(tgx) + 3\int \frac{tg^4 x}{tg^2 x} d(tgx) +$$

$$+ \int \frac{tg^6 x}{tg^2 x} d(tgx) = -\frac{1}{tgx} + 3tgx + tg^3 x + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

Мысал 3.

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx =$$

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-\frac{4}{3}} xdx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\cos^{-\frac{4}{3}} x \cdot \sin xdx$$

$\cos x = t$ алмастыруын жасаймыз, сонда $-\sin xdx = dt$

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx = -\int \left(1 - t^2\right) \cdot t^{-\frac{4}{3}} dt =$$

$$= -\int t^{-\frac{4}{3}} dt + \int t^{\frac{2}{3}} dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Мысал 4. $\int ctg^6 xdx$

Бұл мысалда 4)жағдайға келеді:

$$\int ctg^6 xdx = \int ctg^4 x\left(\cos ec^2 x - 1\right)dx = -\int ctg^4 xd(ctgx) -$$

$$-\int ctg^4 xdx = -\frac{ctg^5 x}{5} - \int ctg^2 x\left(\cos ec^2 x - 1\right)dx =$$

$$= -\frac{ctg^5 x}{5} + \frac{ctg^3 x}{3} + \int \left(\cos ec^2 x - 1\right)dx =$$

$$-\frac{ctg^5 x}{5} + \frac{ctg^3 x}{3} - ctgx - x + C.$$

Мысал 5. $\int tg^3 x dx =$

интеграл астындағы $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ арқылы өрнектеп, интегралды екі интегралдың айырымына жіктейміз:

$$\int tg^3 x dx = \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int tgx d(tgx) - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} tg^2 x + \ln|\cos x| + C, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Жалпы жағдайда $\int R(\cos x, \sin x)dx,$ түрде берілген интегралды

мұндағы $R(u,v)$- екі айнымалыға байланысты рационал функция, $t = tg\frac{x}{2}$ алмастыруы арқылы t -ға байланысты рационал бөлшекті интегралдауға әкелеміз.

Мысал 6. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} =$

келесі формулаларды:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

қолдана отырып интеграл астындағы функцияның бөлімін түрлендіреміз:

$$= \int \frac{dx}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 5\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)} =$$

ұқсас мүшелерін біріктіріп, жақша сыртына $\cos^2\frac{x}{2}$ шығарамыз:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(6tg^2\frac{x}{2} + 4tg\frac{x}{2} + 4\right)} =$$

$d\left(tg\frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ болғандықтан, $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ дифференциал астына кіргізіп:

$$=2\int\frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{6tg^2\frac{x}{2}+4tg\frac{x}{2}+4}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg^2\frac{x}{2}+\frac{2}{3}tg\frac{x}{2}+\frac{2}{3}}=$$

бөлімін толық квадратқа келтіріп, таблицалық интегралдағы 10) формулаға келеміз:

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\left(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{1\cdot 3}{3\sqrt{5}}arctg\frac{3\left(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Кейбір дербес жағдайларда тригонометриялық функцияларды интегралдағанда басқа әртүрлі әдістерді қолдануға болады.

Дербес жағдайлар:

А) $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ немесе $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ теңдіктерінің бірі орындалсын.

Мысал 7. $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=$

интеграл астындағы функцияның бөлімінде $\sin x$ көбейткіші бар, сондықтан алымын да бөлімін де $\sin x$ -ке көбейтіп, алымындағы $\sin x$ - ті дифференциал астына кіргізіп және интеграл астындағы функцияны $\cos x$ арқылы өрнектейміз:

$$=\int\frac{\sin xdx}{(2+\cos x)\sin^2 x}=-\int\frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}=$$

$\cos x$-ке байланысты дұрыс рационал бөлшек алдық,

$\cos x=t$ белгілеуін жасап

$$=+\int\frac{dt}{(t+2)(t-1)(t+1)}=$$

интеграл астындағы функцияны қарапайым бөлшектерге жіктейміз де, үш рет 2) формуланы қолдана отырып:

$$=\int\left(\frac{a}{t+2}+\frac{b}{t-1}+\frac{c}{t+1}\right)dt=$$

$$a\left(t^2-1\right)+b(t+2)(t+1)+c(t+2)(t-1)=1$$

$$t=-2\Rightarrow\ 3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$t=1 \;\; \Rightarrow \;\; 6b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{6}$

$t=-1 \Rightarrow -2c=1 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+2}+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{3}\ln|t+2|+\frac{1}{6}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C=\frac{1}{6}\ln\frac{|t-1|(t+2)^2}{|t+3|^3}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C.$$

Ә). $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ теңдігі орындалсын. Бұл теңдік интеграл астындағы функцияның алымы мен бөліміндегі қосылғыштар $\sin x,\cos x$ функцияларының тек қана жұп немесе тек қана тақ дәрежелерімен берілсе ғана орындалады. Бұл жағдайда интеграл астындағы функцияны $t=tgx$ немесе $t=ctgx$ алмастыруларын жасау арқылы t -ға байланысты рационал функцияға келтіреміз.

Мысал 8. $\int\frac{\sin xdx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=$

интеграл астындағы функцияның алымы мен бөліміндегі қосылғыштар $\sin x,\cos x$ функцияларының тек қана тақ дәрежелерімен берілген; бөлімінен $\sin^3 x$ - ті жақшаның сыртына шығарып, интеграл астындағы функцияны $ctgx$ арқылы өрнектейміз, яғни, $t=ctgx$ алмастыруларын жасаймыз:

$$=\int\frac{\sin xdx}{\sin^3 x(ctg^3 x+1)}=-\int\frac{d(ctgx)}{ctg^3 x+1}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t^3+1}=-\int\frac{dt}{(t+1)(t^2-t+1)}=-\int\left(\frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2-t+1}\right)dt=$$

Алынған бөлшекті интегралдаймыз:

$a(t^2-t+1)+(bt+c)(t+1)=1$

$$\begin{array}{l\|l} t^2 & a+b=0 \\ t & -a+b+c=0 \\ t^0 & a+c=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \\ c=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\int \frac{t-2}{t^2-t+1}dt = -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)-3}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{1\cdot 2}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C =$$

кестедегі 2) формуланы екі рет және 10) формуланы қолданамыз; берілген x айнымалысына ораламыз, яғни $t = ctgx$ орнына қоямыз:

$$= -\ln\frac{(ctgx+1)^2}{ctg^2x - ctgx + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2ctgx-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\cos x - \sin x}{\sqrt{3}\sin x} + C$$

Б). Интеграл астындағы функция- синустар мен косинустардың әр түрлі аргументтерінің көбейтіндісі. Бұл жағдайда интегралдар келесі формулалар арқылы есептеледі:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Мысал 9. **2014**. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x =$

Жоғарыда көрсетілген 3-ші формуланы екі рет қолданып, келесіні аламыз:

$$= \frac{1}{2}\int(\cos x + \cos 3x)\cos 3xdx = \frac{1}{2}\int\cos x\cos 3xdx + \frac{1}{2}\int\cos^2 3xdx = \frac{1}{4}\int(cos2x + \cos 4x)dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int(1+\cos 6x)dx =$$

$=$ екінші интегралда интеграл астындағы функцияның жұп дәрежесін төмендеттік және 1, 5 формулалары бойынша:

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + C.$$

В). Әр түрлі аргументті синустар мен косинустардың көбейтіндісі интеграл астындағы функцияның бөлімінде болады. Сондай-ақ сол аргументтердің айырымы тұрақты:

$$(x+a) - (x+b) = a - b = const \neq 0.$$

Бұл жағдайда интеграл астындағы функцияны 1 - ге көбейтейік:

$1=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$ немесе $1=\frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$

Мысал 10 .**2020.** $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos(a-b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx=$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx=\frac{1}{\cos(a-b)}\left[\int\frac{\cos(x+a)\cos(x+b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx+\right.$$

$$\left.+\int\frac{\sin(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx\right]=\frac{1}{\cos(a-b)}\left[\int\frac{d\sin(x+a)}{\sin(x+a)}-\int\frac{d\cos(x+b)}{\cos(x+b)}\right]=$$

2) формуласы бойынша , егер $\cos(a-b)\neq 0$ болса,

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C\,.$$

Г). Интеграл астындағы функция – алымы және бөлімі бос мүшесіз сызықтық тригонометриялық көпмүшелік болатын бөлшек:

$$\int\frac{A\sin x+B\cos x}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx=$$

интеграл астындағы функцияның алымы келесі түрде болатындай a мен b алайық:

$$A\sin x+B\cos x\equiv a(\alpha\sin x+\beta\cos x)+b(\alpha\cos x-\beta\sin x),$$

мұндағы $\alpha\cos x-\beta\sin x=(\alpha\sin x+\beta\cos x)';$

онда бастапқы интеграл келесі өрнекке тең (1,2 формулаларды қараңыз)

$$=\int\frac{a(\alpha\sin x+\beta\cos x)}{\alpha\sin x+\beta\cos x}dx+\int\frac{bd(\alpha\sin x+\beta\cos x)}{\alpha\sin x+\beta\cos x}=ax+b\ln|\alpha\sin x+\beta\cos x|+C$$

Мысал 11. **2043.1.** $\int\frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}dx=$

алымын келесі түрде аламыз:

$$\sin x=a(\sin x-3\cos x)+b(\cos x+3\sin x)$$

$\sin x$ пен $\cos x$ тің коэффициенттерін теңестіріп және алынған екі сызықтық теңдеулер жүйесінен a мен b -ны табамыз:

$$\begin{array}{l|} \sin x \\ \cos x \end{array} \left.\begin{array}{l} a+3b=1 \\ -3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=0.1 \\ b=0.3, \end{cases}$$

Сондықтан,

$$=0.1x+0.3\ln\left|\sin x-3\cos x\right|+C.$$

F). Интеграл астындағы функция - алымы мен бөлімі сызықтық тригонометриялық көпмүшелік болатын бөлшек:

$$\int \frac{A\sin x+B\cos x+C}{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}dx=$$

a,b,c коэфициенттерін интеграл астындағы функцияның алымы

$$A\sin x+B\cos x+C\equiv a(\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma)+b(\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma)'+C$$

түрде болатындай етіп таңдаймыз:

$$ax+b\ln\left|\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma\right|+c\int\frac{dx}{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}.$$

Соңғы интеграл $t=tg\dfrac{x}{2}$ универсал алмастырудың көмегімен табылады.

Мысал 12. **2047**. $\displaystyle\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx=$

алымын келесі түрде алайық:

$$\sin x+2\cos x-3=a(\sin x-2\cos x+3)+b(\cos x+2\sin x)+c,$$

$$\begin{array}{l|} \sin x \\ \cos x \\ x^0 \end{array} \left.\begin{array}{l} a+2b=1 \\ -2a+b=2 \\ 3a+c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{5} \\ b=\dfrac{4}{5} \\ c=-\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Сондықтан,

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln\left|\sin x-2\cos x+3\right|-\frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+3}.$$

Алынған интегралды универсал алмастыру арқылы табамыз. Ол үшін интеграл астындағы функцияны жарты аргумент арқылы өрнектейік:

$$\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3} = 2\int \frac{d\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 3\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

Бөлімінде ұқсас мүшелерін топтастырып және $\cos^2\frac{x}{2}$ көбейткішін жақшаның сыртына шығарып, содан кейін дифференциал астына кіргіземіз:

$$= 2\int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(5tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} + 1\right)} =$$

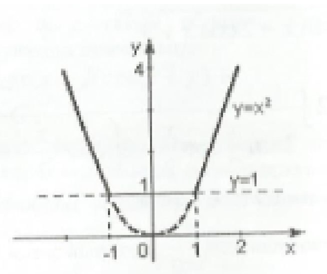
Тұрақтыны интеграл алдына шығарып, бөлімін толық квадратқа келтірсек, кестедегі 10-формуланы аламыз:

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dtg\frac{x}{2}}{\left(tg\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}arctg\frac{5\left(tg\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)}{2} + C = arctg\frac{1 + 5tg\frac{x}{2}}{2} + C.$$

Мысал 13.**2171**. $\int \max(1, x^2)dx$.

Интеграл астындағы функция $f(x) = \max(1, x^2)$ барлық $R = (-\infty; +\infty)$ сан өсінде анықталған және үзіліссіз (5-сурет):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ x^2, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

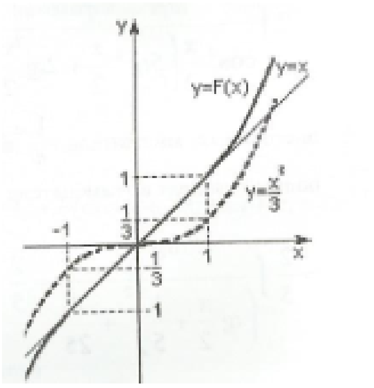


5-сурет

$y = 1$ және $y = x^2$ функцияларының алғашқы бейнесі келесі түрде болады: $F(x) = x + C$ және $F(x) = \frac{x^3}{3} + C.$

Берілген $f(x) = \max(1, x^2)$ функциясының кез келген $F(x)$ алғашқы функциясы дифференциалдануы керек болғандықтан, ол үзіліссіз болуы керек. Онда C_1, C_2, C_3 тұрақтыларын $F(x)$ функциясы барлық R-де үзіліссіз болатындай таңдау керек:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+C_1, & x\le -1\\ x+C_2, & |x|\le 1\\ \dfrac{x^3}{3}+C_3, & x\ge 1\end{cases}$$



6-сурет

6-суретте $y=x,\ y=\dfrac{x^3}{3}$ функцияларының графиктері келтірілген. $F(x)$ функциясы барлық R-де үзіліссіз және дифференциалданатын болу үшін $C_2=0,\quad C_1=\dfrac{2}{3},\quad C_3=\dfrac{2}{3}$ деп алсақ жеткілікті. Сонымен,

$$F(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}\operatorname{sgn}(x), & |x|\ge 1.\end{cases}$$

Бұл функцияның туындысы $F'(x)=f(x)=\max(1,x^2)\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$; дербес жағдайда $F'_+(-1)=F'_-(-1)=1=f(-1),\quad F'_+(1)=F'_-(1)=1=f(1)$. Сонымен, $\int \max(1,x^2)dx=F(x)+C.$

§ 10. «Алынбайтын» интегралдар туралы ескертулер

Анықталмаған интегралдың бар болуы туралы теорема бойынша (a,b) интервалында дифференциалданатын кез келген $f(x)$ функциясы осы интервалда интегралданады, яғни, осы интервалдың әр нүктесінде алғашқы бейнесі бар.

Алайда, интеграл астындағы функцияның барлығының дерлік алғашқы бейнесін элементар функциялар арқылы беруге болмайды екен. Осындай функциялардың интегралын «алынбайтын» деп, ал, тұрақтының арнайы таңдалған кейбір мәндерінде анықталған алғашқы бейнелерді *арнайы функциялар* деп атайды. Практикада көп қолданылатын осындай функцияларға атау беріліп, қасиеттері зерттеледі. Мұндай интегралдардың мысалдары:

$Si(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегралдық синус,

$Ci(x)=\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегралдық косинус,

$li(x)=\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегралдық логарифм,

$\Phi(x)=\int e^{-x^2}dx$ – Эйлер-Пуассон интегралы немесе Гаусс функциясы,

$Ei(x)=\int \frac{e^x}{x}dx$ – интегралдық экспонента, т.с.с.

Кей жағдайларда «алынбайтын» интегралдан құтылуға болады.

Мысал 1. 2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\int\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx=$

$=\int e^x dx-\int \frac{e^x}{x}dx+4\int \frac{e^x}{x^2}dx=$

Шыққан интегралдардың екеуі - «алынбайтын»; оның біреуін бөліктеп интегралдаймыз:

$$=\left|\begin{matrix} u=e^x & dv=\dfrac{dx}{x^2} \\ du=e^x dx & v=-\dfrac{1}{x}\end{matrix}\right| = e^x - 4\int\frac{e^x}{x}dx - 4\frac{e^x}{x} + 4\int\frac{e^x}{x}dx =$$

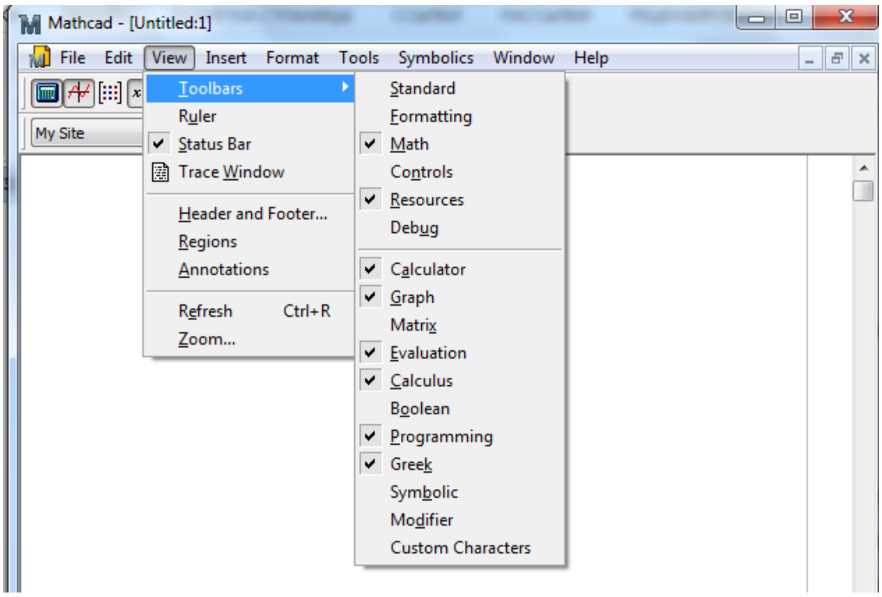
«алынбайтын» интегралдар өзара жойылады, қорытындысында:

$$=e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)+C.$$

§ 11. Анықталмаған интегралды Mathcad программасы көмегімен табу

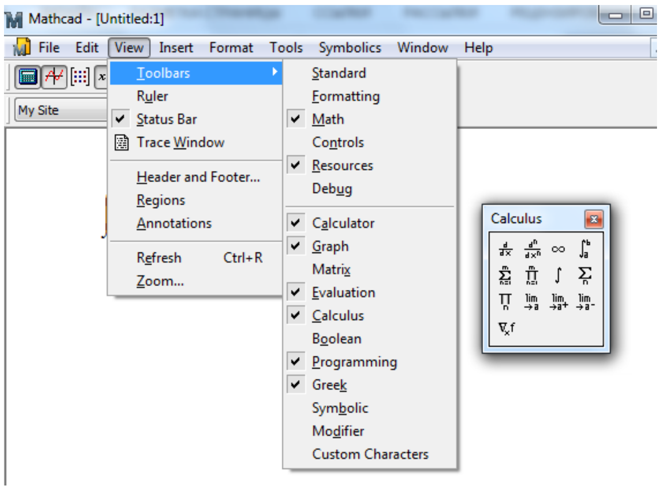
Енді интеграл астындағы функцияның алғашқы бейнесін **Mathcad** компьютерлік үлгілеу программасының көмегімен табу жолын көрсетейік.

Mathcad программасы қойылған соң, жұмыс тақтасын (терезесін) шақыру қол кілтінің курсорын Mathcad программасының пиктограммасын басу арқылы орындалады.

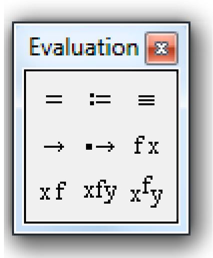


Тапсырма. $\int e^x \sin(2x)dx$ табу керек.

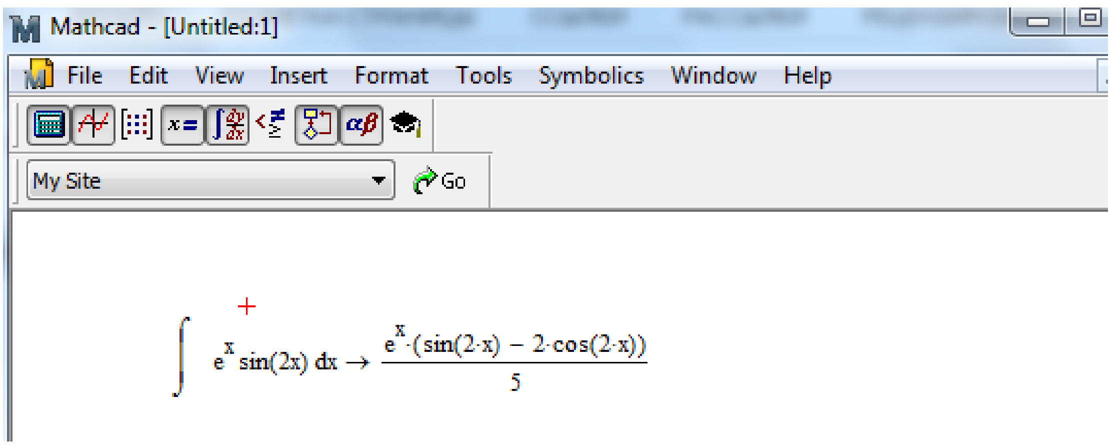
Орындалуы: Жұмыс тақтасының жоғарғы жағынан негізгі менюдің **Вид** командасын басып, ішкі менюдің құралдар панелінің математика жолынан Calculus панелін басамыз.



Математикалық өрнектерді дәптерге жазғандай етіп теріп, көк сызықпен әрлеп, теңдік белгісінің «→» символын



панелінен тауып басамыз. Нәтиже:



$$\int e^{x} \sin(2x)\, dx \rightarrow \frac{e^{x}\cdot(\sin(2\cdot x) - 2\cdot\cos(2\cdot x))}{5}$$

Өздік жұмыстар

1. Жіктеу әдісін қолданып интегралды табу керек.

1.1. $\int x^2(2-3x^2)^2\,dx$

1.2. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx$

1.3. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$

1.4. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$

1.5. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

1.6. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$

1.7. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

1.8. $\int \cos^2 x\,dx$

1.9. $\int \sin^3 x\,dx$

1.10. $\int \cos^3 x\,dx$

1.11. $\int ctg^2 x\,dx$

1.12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

1.13. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$

1.14. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\,dx$

1.15. $\int \frac{1+x}{1-x}\,dx$

1.16. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$

1.17. $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx$

1.18. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$

1.19. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$

1.20. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$

1.21. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$

1.22. $\int \sin x \sin(x+\alpha)\,dx$

1.23. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

1.24 . $\int \sin^4 x\,dx$

1.25. $\int tg^3 x\,dx$

2. Дифференциал астына енгізу әдісін қолданып интегралды табу керек.

2.1. $\int \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$

2.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

2.3. $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$

2.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

2.5. $\int xe^{-x^2}dx$

2.6. $\int \frac{e^x dx}{3+e^x}$

2.7. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

2.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

2.9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$

2.10. $\int ctgxdx$

2.11. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$

2.12. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}dx$

2.13. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$

2.14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

2.15. $\int \frac{dx}{\sin x}$

2.16. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

2.17. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

2.18. $\int \frac{x^{n/2}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$

2.19. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x}dx$

2.20. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 1}}$

2.21. $\int \sin^3 6x \cos 6x dx$

2.22. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

2.23. $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx$

2.24. $\int \frac{e^x \sqrt{arctge^x}}{1+e^{2x}}dx$

2.25. $\int \frac{dx}{tgx \ln^2 \sin x}$

3. Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралды табу керек.

3.1. $\int \frac{xdx}{(3x+2)^7}$

3.2. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}dx$

3.3. $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$

3.4. $\int x^5(2-5x^3)^{2/3}dx$

3.5. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}dx$

3.6. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

3.7. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

3.8. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$

3.9. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$

3.10. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$

3.11. $\int \sqrt{1+x^2}dx$

3.12. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

3.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

3.14. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$

3.15. $\int x \cdot \sqrt[5]{3x+4}\,dx$

3.16. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx$

3.17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

3.18. $\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x+1}$

4. Бөліктеп интегралдау арқылы интегралды табу керек.

4.1. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$

4.2. $\int x^2 \arccos x dx$

4.3. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

4.4. $\int \sin x \cdot \ln(tgx)dx$

4.5. $\int x^5 e^{x^3} dx$

4.6. $\int (\arcsin x)^2 dx$

4.7. $\int x(arctgx)^2 dx$

4.8. $\int x^2 \ln\frac{1+x}{1-x}dx$

4.9. $\int x \cdot shxdx$

4.10. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

4.11. $\int arctg\sqrt{x}dx$

4.12. $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$

4.13. $\int e^{ax}\cos bxdx$

4.14. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

4.15. $\int e^{2x}\sin^2 xdx$

4.16. $\int x^3 e^{-x^2}dx$

4.17. $\int x^2 \sin bxdx$

4.18. $\int xe^{ax}dx$

4.19. $\int (x^2+px+q)\cos bxdx$

4.20. $\int x^2 \log_a x\,dx$

4.21. $\int \sqrt{x^2+A}\,dx$

4.22. $\int \arcsin\frac{x}{a}dx$

4.23. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

4.24. $\int e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)dx$

4.25. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

5. Остроградский және белгісіз коэффициенттерді анықтау әдісін қолданып интегралды табу керек.

5.1. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$

5.2. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$

5.3. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$

5.4. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$

5.5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

5.6. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

5.7. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$

5.8. $\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx$

5.9. $\int \frac{x-2}{x^2-1}dx$

5.10. $\int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$

5.11. $\int \frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx$

5.12. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$

5.13. $\int \frac{(x^2+2x+6)dx}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

5.14. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

5.15. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$

5.16. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

5.17. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

5.18. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$

5.19. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$

5.20. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

5.21. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

5.22. $\int \frac{(x^2+2x+6)dx}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

5.23. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

5.24. $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^2}$

5.25. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$

6. Иррационал функцияларды интегралдау және Эйлер әдісін қолданып интегралды табу керек.

6.1. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

6.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

6.3. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

6.4. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

6.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

6.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

6.7. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

6.8. $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$

6.9. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$

6.10. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$

6.11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}$

6.12. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}$

6.13. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+x+1}}$

6.15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$

6.16. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$

6.17. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$

6.18. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4x-4}}$

6.19. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

6.20. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

6.21. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$

6.22. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$

6.23. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

6.24. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

6.25. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

6.14. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $a \succ 0$

7. Тригонометриялық функцияларды интегралдау.

7.1. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

7.2. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

7.3. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$

7.4. $\int \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx+$

7.5. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

7.6. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

7.7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}$

7.8. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$

7.9. $\int tg^2 5x dx$

7.10. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-3\cos^2 x+4}$

7.11. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x\cdot\cos x}$

7.12. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x-\sin^2 x}$

7.13. $\int \cos^5 x\, dx$

7.14. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

7.15. $\int \sin 5x\cdot\cos x\, dx$

7.16. $\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 3x\, dx$

7.17. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

7.18. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

7.19. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$

7.20. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

7.21. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$

7.22. $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$

7.23. $\int \frac{dx}{3+5tgx}$

7.24. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$

7.25. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$

Әдебиеттер тізімі

1.Фихтенгольц, Г.М.. Основы математического анализа.- М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002

2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005

3. Темірғалиев, Н.. Математикалық анализ.- Алматы, 1991

4. Кудрявцев Л.Д., Сборник задач по математическому анализу.- М., 1984, 1981, 1988, 2003

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1, М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука, 1985 г.

7. Г.А.Малькеева, Неопределенный интеграл.- Алматы, 2006.

Мазмұны