ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
МЕХАНИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТІ
МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМИ-ЗЕРТТЕУ ИНСТИТУТЫ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ИБРАШЕВ ХАСАН ИБРАШҰЛЫНЫҢ
100 ЖЫЛДЫҚ МЕРЕЙТОЙЫНА АРНАЛҒАН
**«ҚАЗАҚСТАНДАҒЫ МАТЕМАТИКА –
ӨТКЕНІ ЖӘНЕ БОЛАШАҒЫ»** атты
халықаралық ғылыми-әдістемелік конференция

МАТЕРИАЛДАРЫ

23-25 қараша 2016 ж.

МАТЕРИАЛЫ

Международной научно-методической конференции
**«МАТЕМАТИКА В КАЗАХСТАНЕ –
ПРОШЛОЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ»,**
ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ
ИБРАШЕВА ХАСАНА ИБРАШЕВИЧА

23-25 ноября 2016 г.

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті
Механика және математика ғылыми-зерттеу институты

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ
Механико-математический факультет
Научно-исследовательский институт математики и механики

ИБРАШЕВ ХАСАН ИБРАШҰЛЫНЫҢ 100 ЖЫЛДЫҚ МЕРЕЙТОЙЫНА АРНАЛҒАН «ҚАЗАҚСТАНДАҒЫ МАТЕМАТИКА – ӨТКЕНІ ЖӘНЕ БОЛАШАҒЫ» атты

халықаралық ғылыми-әдістемелік конференция
М А Т Е Р И А Л Д А Р Ы

23-25 қараша 2016 ж.

М А Т Е Р И А Л Ы

Международной научно-методической конференции

«МАТЕМАТИКА В КАЗАХСТАНЕ – ПРОШЛОЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ», ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ ИБРАШЕВА ХАСАНА ИБРАШЕВИЧА

23-25 ноября 2016 г.

Алматы
«Қазақ университеті»
2016

Материалы международной научно-методической конференции «Математика в Казахстане – прошлое и перспективы», посвященной 100-летию со дня рождения Ибрашева Хасана Ибрашевича. 23-25 ноября 2016 г. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 202 с.
ISBN 978-601-04-2520-0

В сборник включены 108 тезисов докладов Международной научной-методической конференции «Математика в Казахстане – прошлое и перспективы», посвященной 100-летию со дня рождения Ибрашева Хасана Ибрашевича.

Основное внимание уделено актуальным проблемам дифференциальных уравнений и математической физики, теории функций и функционального анализа, математического моделирования и информатики, а также методике преподавания математики и информатики.

Предназначен для студентов, магистрантов, докторантов, преподавателей высших учебных заведений, специалистов в области математики, прикладной математики и информационных технологий.

ISBN 978-601-04-2520-0

Известный ученый-математик и педагог, профессор, первый декан механико-математического факультета Ибрашев Хасан Ибрашевич

АЛҒЫ СӨЗ

Мехматтың тұңғыш деканы

Қазақтың математикалық білімі мен ғылымының қалыптасуы мен дамуына елеулі үлес қосқан, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетіндегі Механика-математика факультетінің ашылуына орасан зор еңбек сіңірген, осы факультеттің алғашқы деканы - профессор Хасен Ибрашұлы Ибрашевтің туғанына 100 жыл.

Хасен Ибрашұлы Ибрашев 1916 жылдың 15 желтоқсанында Орал облысы, Қазталовка ауданы, Ұмтыл ауылдық кеңесінде дүниеге келген. Ұмтыл ауылдық кеңесі 1933 жылы Хасен Ибрашұлын Ленинградтың ауылшаруашылық техникумына оқуға жіберді. Өз ынтасымен жақсы оқып жүргенде үлкен ағасы өмірден мезгілсіз қайтты да, анасына қолғанат болу мақсатымен отбасына оралды.

Білімге құштар, оқуға іңкәр көңілі асқақ армандарға жетелеп, қиын-қыстау кезеңге қарамастан, 1937 жылы А.С. Пушкин атындағы Орал мемлекеттік педогогикалық университетіне оқуға түскен еді. Оны математика мамандығы бойынша 1941 жылы ойдағыдай бітірген соң Алматы қаласындағы 12 қазақ мектебіне педогогтық жұмысқа жіберіледі. 1941-1943 жылдары Ұлы Отан соғысының майдандарында алғырлығымен, білімділігімен, батылдығымен және ұйымдастыру қабілетімен көзге түсіп, аға лейтенант Х.И Ибрашев атқыштар двизиясының 232-взводының командирі болады. 1943 жылы ауыр жарақаттан кейін елге оралған соң С.М. Киров атындағы Қазақ мемлекеттік университетіне жұмысқа орналасады. Хасен Ибрашұлының университеттегі қызметінің кезеңдерін қысқаша былайша атап өтуге болады.

1943-1944 жылдары математикалық талдау кафедрасының аға оқытушысы, ректордың оқу ісі жөніндегі көмекшісі, 1944-1948 жылдары университеттің осы сала бойынша проректоры болып қызмет жасайды.

1948 жылы Х.И. Ибрашевқа Қазақстанда математикадан алғашқы ғылыми мектеп құрған, аты әлемге әйгілі академик-математик К.П. Персидскийдің жетекшілігімен «О втором методе Ляпунова» атты кандидаттық диссертация қорғады. 1948-1957 жж. жоғары алгебра кафедрасының меңгерушісі, 1957-1959 ж. физика-математика факультетінің деканы болды. Студенттер мен ғылыми қызметкерлерге арналған «Математикалық талдау» атты 2 томдық оқулықты, «Орнықтылық теориясынан дәрістер» атты монографияны жазып шығарды. Дифференциалдық теңдеулердің ақырлы және ақырсыз жүйелерінің теориясы мен олардың шешімдерінің орнықтылығын зерттеу бойынша ондаған ғылыми мақалалар жариялады. Ғылыми нәтижелерін Бүкілодақтық математикалық төртінші съезде баяндады. 1967 жылы КСРО-ның ЖАК-і оған профессор атағын берді.

Хасен Ибрашұлы – орнықтылық теориясынан елеулі нәтижелер алған ғалым. Ол кісінің Ляпуновтың екінші әдісі бойынша дәлелдеген теоремаларына осы кезге дейін сілтемелер жасалып тұрады. Мысалы, белгиялық математиктер Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуаның «Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости» деген монографиясында Х.И. Ибрашев дәлелдеген теореманың маңыздылығы аталып, оған сүйене отырып есептер шығарылған.

1959 жылы механика-математика факультетінің ашылуына және алғашқы деканы болғып тағайындалған профессор Хасен Ибрашұлы Ибрашевтің сіңірген еңбегі айрықша. Қажетті құжаттарды дайындау, жаңа кафедралар құрып, олар үшін сәйкес кадрларды табу, жаңа мамандақтар ашу, оқу жоспарын жасау, ғылыми жұмыстардың даму бағытын айқындау, басқа да ұйымдастыру жұмыстарын жүргізуде ол орасан жұмыс атқарды. Бұл ұйымдастыру ісінде оны университет ректоры Темірбай Байбосынұлы Дарқанбаев, Министрлер кеңесі төрағасының орынбасыры Асқар Закарияұлы Закарин, Ғылым академиясының академигі профессор К.П. Персидский қолдап, қызу атсалысты.

Студенттер мен оқытушылар ұжымы аса құрметпен қадірлейтін декан Хасен Ибрашұлының математикадан ұлттық мамандарды дайындауға бағытталған қызметтері айтарлықтай. Факультетте қазақ бөлімі құрылды және Есептеу математикасы, Математикалық физика кафедралары ашылды. Қысқа мерзім ішінде механика-математика факультетінің оқу ғимараты салынып, онда уақытқа сай электрондық есептегіш машиналар жүйесі орнатылды.

Математика ғылымын дамыту мен жоғары сапалы мамандар дайындаудың деңгейін көтеру мақсатында Х.И. Ибрашев Мәскеу, Ленинград, Киев, Новосибирск, Минск сынды ірі-ірі математикалық орталықтарда қызмет ететін атақты ғалымдармен тікелей қызметтік байланыс орнатты. Х.И.Ибрашевтің академик - ғалымдармен жақсы қатынаста болуының нәтижесінде білім мен ғылым құштар жастарға Новосибирскідегі Академқалашығына кеңінен жол ашты. Осы байланыстың арқасында сол кезде университетте жұмыс істейтін ғалымдар – Ө.М. Сұлтанғазин, Қ.Е. Сарбасов, С.Е. Темірболат, С.С. Оспанов, Ф.Б. Бәйімбетов, М.Г. Перетятькин, М. Дощанова, С.А. Атанбаев, Ш.С. Смағұлов, Н.Т. Данаев т.б. оқытушылар докторлық диссертациялар қорғап, өздерінің математикалық ғылыми мектептерін ашты. Ол мектептер қазір шетел мойындаған нәтижелерге жетіп, әлем математиктері санатын орталықтарға айналды.

Х.И. Ибрашев 1972 жылдан өмірден озғанға (1978 жыл) дейін Жоғарғы алгебра және математикалық логика кафедрасының меңгерушісі қызметін абыроймен атқарды. Жалпықазақстандық математикалық олимпиадаларды ұйымдастыру комитеті мен бағалау алқасының төрағасы болды. Математика, механика, астрономия бойынша КСРО және РКФР-ның Жоғары және арнаулы орта білім беру министрліктерінің Ғылыми-техникалық кеңесінің біріккен секциясының мүшесі болды. Әсіресе қазақ жастарының математикалық білімді игеруіне айрықша көңіл бөлді. Олар үшін қазақ тілінде математикалық терминдерді қалыптастыру, дамыту, математикадан қазақ тілінде студенттерге арналған оқулықтар жазу ісіне, дарынды оқушылар үшін Республикалық физика-математикалық мектеп-интернат ашу ісіне де қызу атсалысты.

Х.И. Ибрашев декан болып тұрған жылдары Механика–математика факультеті республика бойынша математика ғылымының орталығына айналды. Хасен Ибрашұлы математика және механика мамандығы бойынша жоғары оқу орындары белсене қатысқан республикалық конференция ұйымдастырып (1963 ж.) оның жұмысын екі жыл сайын өткізіп отырды. Оған Қазақстан ғалымдарынан басқа аты әлемге белгілі академиктер мен профессорлар жиі қатысатын.

Х.И. Ибрашев ұстаздықпен де, ғылыммен де айналыса жүріп, қоғамдық жұмыстарға да белсене араласты. Алматының Фрунзе аудандық партия пленумының және бюросының мүшесі болды, еңбекшілердің Алматы қалалық кеңесінің депутаты болып сайланды.

Қашанда жастарға ерекше көңіл бөліп, қабілетті жандарға азаматтық қамқорлығын аямайтын Хасен Ибрашұлының ерекше атап өтерлік елеулі әрі нәтижелі жұмысының жемісі - механика-математика факультетіне жұмысқа білімі мен мәдениеті жоғары мамандарды тартуы еді. Әртүрлі ұлт өкілдері- профессорлар- К.П. Персидский, И.Д. Молюков, В.А. Сапа, М.Г. Перетьяткин, Вулис, Ф.Д. Крамар, Г.Н.Багаутдинов, Ш.М. Еникеев, Е.И.Ким, В.Х.Ни, В.Х.Харасахал, Умбетжанов Д.У., Султангазин У.М., Қ.Ә.Қасымов, Б.Б.Баймұқанов, М.О.Орынбасаров, С.Е.Темірболат, Ф.Б.Бәйімбетов, Оспанов С.С., Атанбаев С.А., А.И.Омаров, Н.Г.Хисамиев, Ж.С.Сулейменов т.б. көптеген докторлар мен кандидаттар, профессорлар мен доценттер Х.И.Ибрашевпен бір отбасы адамдары сияқты тату-тәтті жұмыс істеп, жастарды баули жүріп, математика ғылымын дамытты. Сол еңбектердің нәтижесінде Қазақстан математикасының, механика-математика факультетінің бүгінгі жетістіктері халықаралық деңгейге көтерілді.

Х.И.Ибрашевтің Ұлы Отан соғысының майдандарында көрсеткен ерліктері мен бейбітшілік кезінде математиканы дамыту, жас кадрларды дайындауда сіңірген ерен еңбектері мемлекет тарапынан елеусіз қалған жоқ. Ол «Великая Отечественная Война II степени», «Құрмет белгісі», «Еңбек Қызыл Ту» ордендерімен, «1941-1945 ж. Ұлы Отан соғысында Германияны жеңгені үшін», «1941-1945 ж. Ұлы Отан соғысы уақытындағы ерен еңбегі үшін», «Жеңістің 20 жылдығы», «КСРО қарулы күштерінің 50 жылдығы», «Лениннің туғанына 100 жыл» медальдармен және Қазақ КСР Жоғарғы Кеңесінің Құрмет грамоталарымен марапатталды.

Хасен Ибрашұлы Ибрашевтің азаматтық болмысы, ұстаздық тұлғасы, ғалымдық бейнесі замандастарының жадынан кеткен емес. Ол жүріп өткен мағыналы да мазмұнды ғұмыр әрқашан сәулесін шашып тұрады.

Механика-математика
факультетінің деканы,
ф.-м.ғ.д., профессор
М.А. Бектемесов

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС С ЛИНЕЙНЫМ СНОСОМ И ВЕРОЯТНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Абир М.С, Куспакова А.Р.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: marzhan.abirova@gmail.com, kuspakova.a@gmail.com

Хорошо известна связь теории диффузионных случайных процессов с теорией уравнений в частных производных, причем эта связь – двусторонняя. В данной работе, с помощью применения некоторых результатов теории винеровского процесса и винеровского процесса с линейным сносом, получено вероятностное решение задачи Коши для одного параболического уравнения специального вида.

Пусть $W_t\ , t \geq 0, -$ одномерный винеровский процесс, $M -$ *оператор* математического ожидания, а знак M_x означает взятие условного математического ожидания по всем, выходящим в начальный момент $t = 0$ из точки x, траекториям винеровского процесса: $M_x(\dots) = M((\dots)/W_0 = x)$. Определим винеровский процесс с линейным сносом $W_c(t) = W_t + ct$, где c – некоторая отличная от нуля $(c \neq 0)$ постоянная. Обозначим через $M_x^{(c)}$ соответствующее к $W_c(t)$ условное математическое ожидание.

Утверждение. Инфинитезимальным оператором A_c процесса $W_c(t)$ является оператор $A_c = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + c\frac{d}{dx}$.

Действительно, по определению инфинитезимального оператора ([1]), для любой ограниченной и равномерно непрерывной вместе с производными первых двух порядков функции $f(x)$

$$A_c f(x) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{M_x^{(c)} f\big(W_c(t)\big) - f(x)}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{M_x f(W_t + ct) - f(x)}{t} =$$
$$= \lim_{t\downarrow 0}\frac{Mf(x + W_t + ct) - f(x)}{t}$$
$$= \lim_{t\downarrow 0}\frac{M\left[f(x) + f'(x)\cdot(W_t + ct) + \frac{1}{2}f''(x)W_t^2 + o(t)\right] - f(x)}{t}$$
$$= \frac{1}{2}f''(x) + cf'(x).$$

Выше мы учли, что $MW_t = 0,\ M{W_t}^2 = t,$ и при $t \to 0\ \ W_t$ *имеет порядок* $\sqrt{t}$.

Откуда и из известных результатов (([1], гл. VII) получаем, что функция $U_c(t,x) = M_x^{(c)} f\big(W_c(t)\big)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial U_c(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_c(t,x)}{\partial x^2} + c\frac{\partial U_c(t,x)}{\partial x}, \qquad U_c(0,x) = f(x). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$V_c(t,x) = M_x^{(c)}\left[\varPhi\big(W_c(t)\big)exp\left\{\int_0^t h\big(t-s, W_c(s)\big)ds\right\}\right]. \tag{2}$$

В (2) в степени экспоненты стоит стохастический интеграл (определенный в среднеквадратичном смысле интеграл от случайной функции), а $\varPhi(x)$ *и* □(t,x) – непрерывные по своим аргументам и ограниченные вместе со своими производными по *x* до второго порядка включительно функции.

Запишем $V_c(t,x)$ в момент времени $t + \Delta t$ и введем сигма-алгебру $□_{[0,\Delta t]}^{(c)}$ – *наименьшую,* содержащую все события вида $\{W_c(s) \in B, s \leq t\},\ B \in \beta(R)$- борелевская сигма-алгебра на прямой, сигма-алгебру. Тогда

$$V_c(t+\Delta t, x) = M_x^{(c)}\left[\Phi\big(W_c(t+\Delta t)\big)exp\left\{\int\limits_0^{t+\Delta t} h\big(t+\Delta t - s, W_c(s)\big)ds\right\}\right] =$$

$$= M\left[\Phi\big(x + W_c(t+\Delta t)\big)exp\left\{\int\limits_0^{t+\Delta t} h\big(t+\Delta t - s, x + W_c(s)\big)ds\right\}\right]. \qquad (3)$$

Далее заметим, что $W_c(t+\Delta t) = W_{t+\Delta t} + c(t+\Delta t) = \widetilde{W_t} + ct + W_{\Delta t} + c\Delta t = W_c(t) + W_{\Delta t} + c\Delta t$, где $\widetilde{W_t} = W_{t+\Delta t} - W_{\Delta t}$ – независящий от $W_{\Delta t}$ (по марковскому свойству винеровского процесса) винеровский процесс. Кроме того $\int_0^{\Delta t} h\big(t+\Delta t - s, x + W_c(s)\big)ds$ является $\mathcal{F}_{[0,\Delta t]}^{(c)}$ - измеримой, а

$$\int\limits_{\Delta t}^{t+\Delta t} h\big(t+\Delta t - s, x + W_c(s)\big)ds = \int\limits_0^{t} h(t - s, W_c(s) + W_{\Delta t} + c\Delta t)ds.$$

Учитывая вышесказанное и используя свойства условного математического ожидания относительно сигма алгебры формулу (3) можем переписать следующим образом:

$$V_c(t+\Delta t, x) = M_x^{(c)}[\dots] = M([\dots]/\mathcal{F}_{[0,\Delta t]}^{(c)}) = MM([\dots]/\mathcal{F}_{[0,\Delta t]}^{(c)}) =$$

$$= M\left[exp\left\{\int\limits_0^{\Delta t} h\big(t+\Delta t - s, x + W_c(s)\big)ds\right\}\cdot V_c\big(t, x + W_c(\Delta t)\big)\right] =$$

$$= M(1 + \square\big(t, x + W_c(\Delta t)) \cdot \Delta t + o(\Delta t)\big)\cdot V_c\big(t, x + W_c(\Delta t)\big) =$$

$$= MV_c\big(t, x + W_c(\Delta t)\big) + Mh\big(t, x + W_c(\Delta t)\big)V_c\big(t, x + W_c(\Delta t)\big) + o(\Delta t)$$

Откуда

$$\frac{V_c(t+\Delta t, x) - V_c(t, x)}{\Delta t} =$$

$$= M\frac{V_c\big(t + W_c(\Delta t)\big) - V_c(t, x)}{\Delta t} + Mh\big(t, x + W_c(\Delta t)\big)\cdot V_c\big(t, x + W_c(\Delta t)\big).$$

Переходя к пределу в последнем соотношении при $\Delta t \to 0$ и вспомнив определение оператора A_c , получаем, что $V_c(t, x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial V_c(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_c(t,x)}{\partial x^2} + c\frac{\partial V_c(t,x)}{\partial x} + h(t,x)V_c(t,x), \quad V_c(0,x) = \Phi(x). \qquad (4)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. Пусть $\Phi(x)$ *и* $\square(t,x)$ – непрерывные по своим аргументам и ограниченные вместе со своими производными по x до второго порядка включительно функции. Тогда определенная формулой (2) (как условное математическое ожидание по всем, выходящим в начальный момент времени $t = 0$ из точки x, траекториям винеровского процесса с линейным сносом) функция $V_c(t,x)$ является решением задачи Коши для уравнения (4).

В заключение отметим, что формулу (2) можно использовать для нахождения распределении различных функционалов от винеровского процесса с линейным сносом $W_c(t)$. Отметим также, что можно получить аналогичную (2), но содержащую дополнительный член уже со стохастическим интегралом Ито, формулу для более общего, чем (4) уравнения.

Список литературы

[1] А.Д.Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 2005

КОМПЛЕКС КЕҢІСТІКТЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІ ШЕШУ

Абиров А.Қ., Каракенова С.Г., Тайшиева А.Ғ.
Х.Досмұхамедов атындағы Атырау мемлекеттік университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: s_karekenova@mail.ru

Жұмыста комплекс сандар өрісін жорамал бірліктің көмегімен екі еселеуден алынатын төрт өлшемді кеңістікте екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуді шешу мәселесі крастырылады.

Нақты сандардың $\langle \mathbb{R}; +, \times \rangle$ өрісін квадраты минус бірге тең болатын i жорамал бірлігімен Грассман – Клиффордтың немесе Кэли – Диксоксонның екі еселеу үрдісі арқылы кеңейтуден екінші ретті комплекс сандардың $\mathbb{C} = \square[i]$ кеңістігі шығады. Бұл кеңістікті тағыда j жорамал бірлігімен екі еселеу үрдісінің көмегімен кеңейтуден төртінші ретті $\mathbb{C}[j] = \square[i, j]$ кеңістігі шығады. $\langle \mathbb{C}[j]; +, \times \rangle$ алгебрасын комплекс кеңістік деп атайды [1, 18 бет]. Бұл кеңістіктің элементтері $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3, x_0,\ x_1,\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1 = j^2,\ \ k = ij$ түрінде болады. Мұнда ескеретін жағдай көбейту амалы коммутативті болмауы мүмкін. Мысалға, кватерниондар алгебрасы комутативті емес, ал онымен изоморфты бикомплекс сандар алгебрасы комутативті болады.

Екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{1}$$

Мұндағы $x(t)$ – $\mathbb{C}[j] = \square[i, j]$ комплекс кеңістігінің нақты t айнымалылы белгісіз функция, p мен q белгілі комплекс кеңістік сандары.

(1) теңдеудің шешімін табу үшін Эйлердің дәстүрлі әдісін қолданамыз. $x(t) = e^{\lambda t}$ функциясын (1) теңдеуге қойып, комплекс кеңістіктегі сипаттамалық теңдеуді аламыз:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{2}$$

(2) теңдеудің әрдайым шешімі бар және әртүрлі шешімі екеуден аспайды. Бұл (2) теңдеуді шешу мәндес төрт сызықты емес скалярлық теңдеудің шешімін зерттеумен шектеледі. Іс жүзінде, жалпы жағдайда (2) теңдеудің шешімі скалярлық квадраттық теңдеуінің бір оң түбір табу болып табылады.

Егер (2) теңдеудің әртүлі екі λ_1 және λ_2 түбірі болса, онда (1) теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{3}$$

мұндағы C_1 мен C_2 – тұрақты комплекс кеңістік сандары.

Егер λ (2) теңдеудің жалғыз түбірі болса, онда жалпы шешім мына формуламен табылады:

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(C_1 + C_2 \int_0^t e^{-\lambda\tau} e^{-(\lambda+p)\tau} d\tau\right). \tag{4}$$

(4) интеграл ашық түрде есептеледі және $e^{\alpha t} sin\beta t,\ e^{\alpha t} cos\beta t,\ e^{\alpha t} tsin\beta t, e^{\alpha t} tcos\beta t$ түріндегі функциялардың сызықты комбинациясы болып табылады. Мұндағы α және β скалярлары p мен q кеңістік сандары арқылы сипатталатын нақты сандар.

Комплекстік кеңістік саны жалпы жағдайда коммутативті болмағандықтан, (4) формулада интеграл астында дәрежелерін қосуға болмайды.

Әдебиеттер тізімі

[1] Елисеев В.И. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. М.:Издательство НИАТ, 1990г.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИСТОЧНИКА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Абылкаиров У.У., Мырзахмедова Б.А., Шамшиденов К.К.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: shamshidenov.kk@gmail.com

Исследуется обратная задача восстановления правой части для нелинейного параболического уравнения с интегральным переопределением. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Методом последовательных приближений доказана теорема существования и единственность решения обратной задачи. Доказательство единственности обобщенного решения основана на полученной априорной оценке.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T),\ \Omega \subset R^2$ обратную задачу для нелинейного параболического уравнения, требуется определить функций $u(x,t)$ и $f(t)$ которые удовлетворяют

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta u - a(x,t,u)\,|\,u\,|^{\sigma(x,t)-2}\,u + f(t)\lambda(x,t), \tag{1}$$

граничному условию

$$u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_T = \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \text{ в } \ \Omega \tag{3}$$

и условию интегрального переопределения

$$\int_\Omega u(x,t)\cdot K(x,t)dx = e(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $a = a(x,t,u) -$ функция Каратеодори, определенные для $(x,t,r) \in \overline{Q_T} \times R$ (измеримые по (x,t) при любом $r \in R$ и непрерывные по r для почти всех $(x,t) \in Q_T$),

$$\begin{cases} \forall (x,t,r) \in \overline{Q_T} \times R, \\ 0 < a_0 \le a(x,t,r) \le a_1 < \infty, \\ \left|\dfrac{\partial a(x,t,u)}{\partial u}\right| \le a_2 < \infty, \end{cases} \tag{5}$$

$\sigma = \sigma(x,t)$ предполагается измеримой функцией, определенной в Q_T и удовлетворяющей неравенству

$$\forall P = (x,t) \in \overline{Q}_T, \quad 2 \le \sigma^- \le \sigma(P) \le \sigma^+ < \infty \tag{6}$$

с заданными постоянными σ^- и σ^+. Функции $\lambda(x,t), \varphi(x), K(x,t)$ и $e(t)$ заданы.

Обратную задачу (1)-(4) можно трактовать как задачу нахождения точных управлений $f(t)$, необходимых для достижения заданной или ожидаемой энергии $e(t)$.

Обобщенное решение обратной задачи (1)-(4) понимается следующим образом.

Определение 1. Функции $u(x,t)$ и $f(t)$ называются обобщенным решением обратной задачи (1)-(3), если функции $u(x,t) \in L_\infty(Q_T) \cap L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$, $u_t \in L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^{-1}(\Omega)\right)$ и $f(t) \in L_\infty(0,T)$ удовлетворяют следующим интегральным тождествам

$$\int_{Q_T}\left[-u\cdot\xi_t + \mu\nabla u\cdot\nabla\xi + a(x,t,u)\,|\,u\,|^{\sigma(x,t)-2}\,u\cdot\xi\right]dxdt = \int_{Q_T} f(t)\lambda\cdot\xi\,dxdt + \int_\Omega \varphi(x)\xi(x,0)dx,$$

для любых $\xi(x,t) \in L_\infty(Q_T),\ \xi(x,t) \in L_{\sigma(x,t)}(Q_T),\ \xi(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(Q_T),\ \xi(x,T) = 0,$

$$e'(t) = \int_{\Omega} K_t u dx + \mu \int_{\Omega} u \cdot \Delta K dx - \int_{\Omega} a(x,t,u) \, | u |^{\sigma(x,t)-2} u \cdot K dx + f(t) \int_{0}^{l} \lambda \cdot K dx,$$

где

$$\begin{aligned} & K(x,t) \in C^1(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap C(0,T; W_2^2(\Omega)),\ e(t) \in W_2^1(0,T),\ \lambda(x,t) \in C(\overline{Q_T}), \\ & \varphi(x) \in L_2(\Omega),\ \int_{\Omega} K \cdot \lambda dx \neq 0, \text{ при } t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим через $V(Q_T) := L_\infty(Q_T) \cap L_2\left(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (6), тогда существует единственное обобщенное решение $u(x,t) \in V(Q_T)$, $f(t) \in L_\infty(0,T)$ обратной задачи (1)-(3).

Список литературы

[1] Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи математических наук. –1987. –Т.42, № 2. –С. 135-176.

[2] Калашников А. С. О некоторых задачах нелинейной теории теплопроводности с данными, содержащими малый параметр в экспонентах // ЖВМ и МФ. –1995. –Т. 35, № 7. –С. 1077-1094.

[3] Antontsev S. N., D´ıaz J. I., Shmarev S. Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Non-Linear PDEs and Fluid Mechanics. -Boston: Bikh¨auser, 2002. -(Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications; Vol. 48).

[4] Aronson D. G. The porous medium equation // Nonlinear Diffusion Problems, Lect. 2nd 1985 Sess. C.I.M.E., Montecatini Terme / Italy 1985. -Berlin: Springer, 1986. -(Lect. Notes Math.; Vol. 1224). –P. 1-46.

[5] Антонцев С.Н., Шмарев С.И. Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности // Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 4, с. 3-19.

[6] Antontsev S. N., Shmarev S. A model porous medium equation with variable exponents of nonlinearity: Existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2005. – Vol. 60, no. 3 (A). – P. 515-545.

[7] Abylkairov U. U., Aitzhanov S. E. Inverse problem for non-stationary system of magnetohydrodynamics // Boundary Value Problems. -2015:173 doi:10.1186/s13661-015-0438-x.

[8] Abylkairov U. U., Aitzhanov S. E. Reconstruction of source function for parabolic equations with variable exponents // AIP Conference Proceedings 1676, 020040 (2015); doi: 10.1063/1.4930466.

ЖЫЛУ КОНВЕКЦИЯ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНЕ ИНТЕГРАЛДЫҚ ҚОСЫМША ШАРТПЕН ҚОЙЫЛҒАН КЕРІ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Абылкаиров У.У., Айтжанов С.Е.

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН

E-mail: saitzhanov@mail.ru

Бұл жұмыста сызықты емес жылу конвекция теңдеулер жүйесіне интегралдық қосымша шартпен қойылған кері есебі зерттелген. Тізбектей жуықтау әдісімен кері есептің жалпылама шешімділігі дәлелденді. Кері есептің шешімі бар және жалғыздығы туралы теорема алынды.

$Q_T = \Omega \times [0,T], \Omega \subset R^2$ цилиндрде сызықты емес жылу конвекция теңдеулер жүйесіне қойылған кері есебін қарастырайық, төмендегі (1) – (7) жүйелерін

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_k \vec{v}_{x_k} + \nabla p = \nu \Delta \vec{v} + \beta \vec{g} \theta + f(t)\vec{\lambda}(x,t), \tag{1}$$

$$c\left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\theta\right] = \chi \Delta \theta + \varphi(t)\mu(x,t), \tag{2}$$

$$div \vec{v} = 0, \tag{3}$$

бастапқы шарттарын

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x),\ \theta\big|_{t=0} = \theta_0(x), \tag{4}$$

шекаралық шарттарын

$$\vec{v}\big|_S = 0,\ \frac{\partial \theta}{\partial n}\bigg|_S = 0, \tag{5}$$

және келесі локалдік емес шарттарын

$$\int_\Omega \vec{u}(x,t) \cdot \vec{v}(x,t) dx = e(t), \tag{6}$$

$$\int_\Omega k(x,t)\theta(x,t) dx = b(t) \tag{7}$$

қанағаттандыратын $\vec{v}(x,t), \nabla p(x,t), \theta(x,t), f(t)$ және $\varphi(t)$ функцияларын анықтау керек. Мұндағы $\vec{v} = (v_1, v_2) -$ сұйықтың жылдамдығы, $p -$ қысым, $\theta -$ сұйықтың температурасы, ν, χ және $c -$ сәйкесінше тұтқырлық, жылу өткізгіштік және жылу сыйымдылық коэффициенттері (ν, χ және $c -$ теріс емес тұрақтылар), $\beta -$ кубтық кеңею коэффициенті, $\vec{g} -$ ауырлық күш үдеуінің векторы, $\vec{F}(x,t) = f(t)\vec{\lambda}(x,t) -$ сыртқы күштері және $\varphi(t)\mu(x,t) -$ жылу көзі. $\vec{\lambda}(x,t),\ \mu(x,t),\ \vec{u}(x,t),\ k(x,t),\ \vec{v}_0(x),\ \theta_0(x), b(t), e(t) -$ берілген функциялар.

Әртүрлі әдістермен Навье-Стокс және магниттік гидродинамика теңдеулер жүйесіне кейбір қосымша шарттармен қойылған кері есептер [6], [7] жұмыстарда қарастырылған.

(1)-(7) кері есебін берілген немесе қажетті энергия $e(t)$ және $b(t)$ жету үшін, $f(t)$ мен $\varphi(t)$ функцияларын дәл басқару есебі ретінде, қарастыруға болады.

(1) – (7) кері есебінің жалпылама шешімінің анықтамасын берейік.

Анықтама. Егер $\vec{v}(x,t) \in L_\infty\left(0,T; \overset{0}{J}(\Omega)\right) \cap L_2\left(0,T; \overset{0}{J_1}(\Omega)\right)$, $f(t) \in L_2(0,T)$, $\theta(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)) \cap L_2\left(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$ және $\varphi(t) \in L_2(0,T)$ функциялары мына интегралдық теңдіктерді қанағаттандырса

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \left[-\vec{v} \cdot \vec{\xi}_t + \nu \nabla \vec{v} \cdot \nabla \vec{\xi} - v_k \vec{v} \cdot \vec{\xi}_{x_k}\right] dxdt = \\ &\qquad = \int_{Q_T} \left[\beta \vec{g} \theta \cdot \vec{\xi} + f(t)\vec{\lambda} \cdot \vec{\xi}\right] dxdt + \int_\Omega \vec{v}_0(x)\vec{\xi}(x,0) dx, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \left[-c\theta \cdot \gamma_t + \chi \nabla \theta \cdot \nabla \gamma\right] dxdt = c\int_\Omega \theta_0(x)\gamma(x,0) dx - \\ &\qquad - c\int_{Q_T} v_k \theta \cdot \gamma_{x_k} dxdt + \int_{Q_T} \varphi(t)\mu(x,t)\gamma dxdt, \end{aligned} \tag{9}$$

кез – келген $\xi(x,t)\in W_2^{1,1}(Q_T)\bigcap \overset{0}{J}(Q_T),\ \xi(x,T)=0,\ \gamma(x,t)\in W_2^{1,1}(Q_T),\ \gamma(x,T)=0,$

$$e'(t)=\int_\Omega \vec{u}_t\cdot\vec{v}dx-\nu\int_\Omega \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{v}dx+\int_\Omega v_k\vec{v}\cdot\vec{u}_{x_k}dx+\int_\Omega \vec{u}\beta\vec{g}\theta dx+f(t)\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{\lambda}dx, \tag{10}$$

$$b'(t)=\int_\Omega \theta\cdot k_t dx-\frac{\chi}{c}\int_\Omega \nabla k\cdot\nabla\theta dx+\int_\Omega k_{x_k}v_k\theta dx+\frac{1}{c}\varphi(t)\int_\Omega k(x,t)\mu(x,t)dx, \tag{11}$$

мұндағы

$$\begin{cases} \vec{u}(x,t)\in C^1\left(0,T;\overset{0}{J}_1(\Omega)\right),\ \vec{\lambda}(x,t)\in C(\overline{Q}_T),\ t\in[0,T]\ \ үшін\ \int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{\lambda}dx\neq 0,\\ \beta(x,t)\in C^{1,1}(\overline{Q}_T),\vec{v}_0(x)\in \overset{0}{J}(\Omega),\ \theta_0(x)\in L_2(\Omega),\ e(t),b(t)\in W_2^1(0,T),\\ k(x,t)\in C^{1,1}(\overline{Q}_T),\ \mu(x,t)\in C(\overline{Q}_T),\ t\in[0,T]\ \ үшін\ \int_\Omega k\cdot\mu dx\neq 0, \end{cases} \tag{12}$$

Теорема. (12) шарты орындалсын, онда (1) – (7) кері есебінің $\vec{v}(x,t)\in V_2(Q_T)$, $\theta(x,t)\in\widetilde{V}_2(Q_T)$, $f(t)\in L_2(0,T),\varphi(t)\in L_2(0,T)$ жалпылама шешімі бар және жалғыз.

Әдебиеттер тізімі

[1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

[2] Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Наука, 1972.

[3] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

[4] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

[5] Солонников В.А. Оценки решений нестационарной системы Навье – Стокса // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 153–231.

[6] Абылкаиров У.У. Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения // Математический журнал ИМ РК. 2003. Т.3, №4(10). С.5–12.

[7] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. – Marcel Dekker: Monograths and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2000.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Айсагалиев С.А., Жунусова Ж.Х., Мырзабаева А.А.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: aiyaulym92@bk.ru

Рассмотрены краевые задачи с краевыми условиями из заданных ограниченных выпуклых замкнутых множеств. Получены необходимые и достаточные условия существования решения указанных задач и построения их решения.

Рассмотрим следующую задачу

$$\dot{x} = A(t)x + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$\left(x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1\right) \in S \subset R^{2n}, \tag{2}$$

Построить решение линейной системы (1) с краевыми условиями (2).

Представим матрицу $A(t)$ порядка $n \times n$ с кусочно-непрерывными элементами в виде суммы $A(t) = A_1(t) + B(t)$, $t \in I$ так, чтобы матрица

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt$$

порядка $n \times n$ была положительно – определенной. Существуют множество вариантов представления матрицы $A(t)$ в виде суммы $A(t) = A_1(t) + B(t)$, $t \in I$ [1]:

1. Можно выбрать матрицу $A_1(t)$ в виде постоянной матрицы A_1. В этом случае $\theta(t) = e^{A_1 t}$, $t \in I$;

2. Матрицу $B(t)$ выбрать в виде $B(t) = B_1(t)P$, где $B_1(t)$ матрица порядка $n \times m$, P – постоянная матрица порядка $m \times n$, причем $P = \left(I_m, 0_{m,n-m}\right)$, где I_m – единична матрица порядка $m \times m$, $0_{m,n-m}$ – прямоугольная матрица порядка $m \times (n-m)$ с нулевыми элементами.

Поскольку матрица $A(t) = A_1(t) + B(t)$, $t \in I$, то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = A_1(t)x + B(t)x + \mu(t), \ t \in I = [t_0, t_1]. \tag{3}$$

В случае выбора $B(t) = B_1(t)P$ уравнение (3) имеет вид

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)Px + \mu(t), \ t \in I, \tag{4}$$

Наряду (4) рассмотрим линейную управляемую систему следующего вида

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)u(t) + \mu(t), \ t \in I, \tag{5}$$

$$\left(y(t_0) = x_0, y(t_1) = x_1\right) \in S \subset R^{2n}, \tag{6}$$

$$u(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{7}$$

Заметим, что если $u(t) = Px(t)$, $t \in I$, то система (5)-(7) совпадает с исходной (1), (2).

Теорема. Пусть матрица $W_1(t_0, t_1)$ порядка $n \times n$ положительно определенная. Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию системы (5) из любой начальной точки $y(t_0) = x_0 \in R^n$ в любое конечное состояние $y(t_1) = x_1 \in R^n$ тогда и только тогда, когда

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) / u(t) = v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) +$$
$$+ N_1(t) z(t_1, v), t \in I, \forall v, v(\cdot) \in L_2(I, R^m)\},$$

где

$$\lambda_1(t, x_0, x_1) = B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W_1^{-1}(t_0, t_1) a, \ a = \Phi(t_0, t_1) x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \mu(t) dt,$$

$$N_1(t) = -B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W_1^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1).$$

функция $z(t, v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1(t) z + B_1(t) v(t), \ z(t_0) = 0, \ v(\cdot) \in L_2(I, R^m).$$

Решение дифференциального уравнения (5), соответствующее управлению $u(t) \in U$ определяется по формуле [2]

$$y(t) = z(t, v) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t) z(t_1, v), \ t \in I,$$

где

$$\lambda_2(t, x_0, x_1) = \Phi(t, t_0) W_1(t, t_1) W_1^{-1}(t_0, t_1) x_0 + \Phi(t, t_0) W_1(t_0, t) W_1^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1) x_1 +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W_1(t_0,t)W_1^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t,t_0)W_1(t_0,t)W_1^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau,\ W(t,t_1) = W(t_0,t_1) - W(t_0,t).$$

Список литературы

[1] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем // Изд-во АН СССР, 1963. С. 240.

[2] *Айсагалиев С.А.* Конструктивная теория краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Қазақ Университеті, 2015.

ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Акыш А. Ш.

Институт математики и математического моделирования, КАЗАХСТАН

E-mail: akysh41@mail.ru

Аннотация: В работе найдены функции Ляпунова для некоторых пространственно-однородных моделей уравнения Больцмана. Получены неравенства для асимптотического поведения решений, равновесное распределение и оценки для существования и единственности решений в пространстве $C^1(0,\infty)$.

Современное состояние теории полного нелинейного уравнения Больцмана и к нему соответствующих дискретных моделей и библиография содержатся в работах [1]-[7] и др. Со времен появления работы [1] изучается качественная теория разнообразных дискретных моделей нелинейного уравнения Больцмана. Среди которых наиболее распространенными являются дискретные модели Карлемана, Бродуэлла и Годунова−Султангазина. Некоторые из этих моделей обладают основными содержательными свойствами, такими как законы сохранения массы, импульса, энергии и H-теорема, присущими для нелинейного уравнения Больцмана.

В работе автора [6], [7] на основе схемы метода расщепления для полного нелинейного уравнения Больцмана получена ограниченность положительных решений в пространстве $\boldsymbol{C}$. С помощью последнего и установленных априорных оценок доказано сходимость схемы метода расщепления и единственность предельного элемента. Найденный элемент удовлетворяет эквивалентному интегральному уравнению Больцмана. И тем самым показана разрешимость полного нелинейного уравнения Больцмана в целом по времени $\boldsymbol{t}$. Причем максвелловское распределение достигается в точках локального максимума решении.

В работе методом функции Ляпунова изучены вопросы асимптотической устойчивости решений в классе положительных функций трех и четырех скоростные модели Годунова−Султангазина и Бродуэлла [1]. Для которых найдены функции Ляпунова. Тем самым установлено оценка асимптотического поведения решений, и равновесное распределение по времени $t \to \infty$.

1. Задача Коши для пространственно-однородной модели Годунова – Султангазина [1], [3]:

$$\begin{cases} \frac{df_1(t)}{dt} = f_2^2(t) - f_1(t)f_3(t) \equiv F(f), \\ \frac{df_2(t)}{dt} = -2F(f)\,, \\ \frac{df_3(t)}{dt} = \ F(f), \quad f_k(0) = \varphi_k, \ k = 1{,}2{,}3. \end{cases} \tag{1}$$

Для (1) имеет место сохранение массы

$$\sum_{k=1}^{3} f_k(t) = \sum_{k=1}^{3} \varphi_k = \rho\,. \tag{2}$$

Функция Ляпунова для (1) представим в виде:

$$V(f) = F^2(f)$$

Откуда, производя вычисление производной функции $V(f)$ по времени t с использованием уравнений системы (1), находим

$$\frac{dV(f)}{dt} = \frac{dF^2(f)}{dt} = 2F\frac{dF}{dt} = -2V(4f_2 + f_1 + f_3).$$

Отсюда, переходя к неравенству и используя (2), имеем

$$\frac{dV(f)}{dt} \le -2\rho V.$$

Откуда получим

$$V \le V(0)\exp(-2\rho t), \ \textit{где} \ V(0) = (\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3)^2. \tag{3}$$

Заметим, что из (3) следует предельное равенство вектора-функции $f_2^2 - f_1 f_3 = 0$ *при* $t \to \infty$, что соответствует равновесному распределению, т. е.

$$f_2^2 = f_1 f_3, \ \textit{при} \ t \to \infty.$$

Используя (3) для решений задачи (1) и их производных получим следующие асимптотические оценки:

$f_k(t) \le \varphi_k$+c$\big(1 - exp(-\rho t)\big) = c_k(t)$, где $k = 1{,}3$; $c = \sqrt{V(0)}/\rho$;

$f_2(t) \le \varphi_2$-2c$\big(1 - exp(-\rho t)\big) = c_2(t)$;

$\left|\frac{\partial f_k(t)}{\partial t}\right| \le const \cdot \sqrt{V(\varphi)} exp(-\rho t), \ k = \overline{1{,}3}.$

2. Задача Коши для пространственно-однородной модели Бродуэлла относительно вектора-функции $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ [1], [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{2k-1}}{\partial t} = \sigma \sum_{m=1}^{2} (1 - 2\delta_k^m)\, f_{2m-1} f_{2m} \equiv F(f), \\ \frac{\partial f_{2k}}{\partial t} = F(f)\,, \ k = 1{,}2; \end{cases} \tag{4}$$

$$f_k(0) = \varphi_k, \ k = \overline{1{,}4}\,. \tag{5}$$

Функция Ляпунова для задачи (4), (5): $V(f) = F^2(f)$; Откуда с помощью уравнений системы (4) найдем, что $V = V(0)exp(-2\rho t), \ V(0) \equiv V(\varphi);.\rho = \sum_{k=1}^{4} \varphi_k$.

Равновесное распределение:

$$f_3(t) f_4(t) = f_1(t)\, f_2(t), \ \textit{при} \ t \to \infty.$$

Функции $V(f) = F^2(f)$ в задачах (1) и (4),(5) удовлетворяют свойств функции Ляпунова и решения этих задач в пространстве $C^1(0,\infty)$ асимптотически устойчивы.

В итоге установлены оценки для решений задачи (4), (5):

$$f_k = \varphi_k + \sigma|V(0)|/\rho(1 - exp(-\rho t)), \ k = 1{,}2;$$

$$f_k = \varphi_k - \sigma|V(0)|/\rho(1 - exp(-\rho t)), \ k = 3{,}4.$$

В результате развития методологии построения и методов функции Ляпунова для дискретных моделей уравнения Больцмана получены положительные ответы на некоторые актуальные математические вопросы. (теоремы существования и единственности, асимптотические поведения решений по времени и разработка вычислительных методов).

Список литературы

[1] *Годунов С.К., Султангазин У.М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана. Успехи матем. наук. -1971, -Т.36, №3. -С. 3-51.

[2] *Ланфорд О.Э., Гринберг У., Полевчак Я., и др.* Неравновесные явления: Уравнения Больцмана/пер. с англ.; под ред. А. В. Бобылева и Д. Н. Зубарева. –М.: Мир, 1986. -272 с.

[3] *Sultangazin U.M.* Discrete Nonlinear Models of the Boltzmann Equation, M.:, Nauka, 1987. -191 p.

[4] *Akishev A.Sh. A* Global Existence and Uniqueness Theorem for the Three-Dimensional Broadwell Model//Computational Mathematics and Mathematics Physics. -Vol. 37. № 3, 1997, -P. 359-369.

[5] *Акыш (Акишев) А.Ш.* Об устойчивости в $\ell_p, \forall p \geq 2$ некоторых разностных схем для уравнения переноса// Сиб. журн. вычисл. математики. -2002. -Т.5, №3. -С.199-214.

[6] *Акыш (Акишев) А.Ш.* Сходимость метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана// Сиб. журн. вычисл. математики. -2013. -Т.16, №2. -С.123-131.

[7] *Akysh (Akishev) A.Sh.* Convergence of Splitting Method for the Nonlinear Boltzmann Equation// Numerical Analysis and Application. -2013, -Vol.6, № 2. -P.111-118.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Алдашев С.А.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, КАЗАХСТАН

E-mail: Aldash51@mail.ru

Аннотация. На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как показано далее, задачи Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений.

В работах автора изучена задача Дирихле для линейных многомерных гиперболических уравнений, где показаны корректность этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой цилиндрической области.

В данной статье для одного класса сингулярных гиперболических уравнений доказано разрешимость и получен явный вид многомерной задачи Дирихле.

1. Постановка задачи и результат. Пусть D_ε - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$ в полупространстве $t>0$, ограниченная конической поверхностью $T_\varepsilon : t=\varphi(r)$, $\varphi(\varepsilon)=\varphi(1)=0$, $\varphi(r)\in C^3((\varepsilon,1))\cap C^1([\varepsilon,1])$, $|\varphi'(r)|<1$ и гиперплоскостью $t=0$, где $r=|x|$ - длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, $m\geq 2$, $0<\varepsilon<1$.

В области D_ε рассмотрим многомерное сингулярное гиперболическое уравнение

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t - \frac{\alpha}{t}u_t + c(x,t)u = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, а α - действительное число.

Через u_α обозначим решение уравнения (1) при данном α.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1).

Задача D. Найти в области D_ε решение уравнения (1) , удовлетворяющее краевым условиям

$$u_a\Big|_{S_\varepsilon} = \tau(x),\ u_\alpha\big|_{T_\varepsilon} = \psi(x) \text{ при } \alpha < 1,$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}\Big|_{S_\varepsilon} = \tau(x),\ u_\alpha\big|_{T_\varepsilon} = \psi(x) \text{ при } \alpha = 1,$$

$$t^{\alpha-1}u_\alpha\Big|_{S_\varepsilon} = \tau(x),\ u_\alpha\big|_{T_\varepsilon} = \psi(x) \text{ при } \alpha > 1.$$

Отметим, что эта задача при $\alpha = 0$ изучена в [1-3], а при $\alpha \neq 0$ исследовано в [4].

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат $x_1,...,x_m$ со сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},\ t,\ 0 \le \theta_1 < 2\pi, 0 \le \theta_i \le \pi, i = 2,...,m-1$.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1,2,...,m$, $l \ge m-1$, где $W_2^l(D_\varepsilon), l = 0,1,...$ - пространства Соболева.

При определенных условиях на граничные данные показано, что задача D имеет решение.

Список литературы

[1] Aldashev S.A. On the correctness of Dirichlet problem for multimeasural wave equation and equation of Lavrentiv- Bitsadze // Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan 1995. No1.p. 35-37

[2] Алдашев С.А. О корректности задач Дирихле для многомерных волнового уравнения и уравнения Лаврентьева- Бицадзе //Укр. Мат. журн. 1996. т.48. N 5 с. 701-705

[3] Алдашев С.А. Кооректность задач Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для волнового уравнения // Укр. Мат. Журн., 2014, т,6, №10 - с. 1414-1419

[4] Алдашев С.А. Многомерная задача Дирихле для одного класса сингулярных гиперболических уравнений // Научные ведомости БелГУ, сер. Математика. Физика. 2016. №6 (227). Вып. 42 -С. 18-23.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Алдибеков Т.М.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: tamash59@mail.ru

В работе установлены равномерные оценки сверху и снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений.

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), t\epsilon I \equiv [t_0, +\infty), x\epsilon R^n, \tag{1}$$

где матрица $A(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию $\|A(t)\| \le C_A\varphi(t), t \ge t_0,\ C_A > 0$, $\varphi(t) > 0$ - непрерывная функция при $t\epsilon I$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$, интеграл $I(\varphi) = \int_{t_0}^{+\infty}\varphi(s)\,ds$ расходится. Векторная функция $f(t,x)\epsilon \mathrm{C}(I \times R^n)$, $f(t,0) = 0$. $L(\varphi(t))$ - класс векторных функций $f(t,x)$ удовлетворяющих неравенству

$$|f(t,x)| \le \delta(t)|x|,\quad \delta(t) \in \mathrm{C}(I),\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\delta(t)}{\varphi(t)} = 0.\quad q(t) = \int_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds.$$

Пусть

$$\Omega_0(A,q) = \overline{\lim_{t-s\to\infty}} \frac{ln|X(t,s)|}{q(t)-q(s)} \qquad \text{и} \qquad \omega_0(A,q) = \underline{\lim_{t-s\to\infty}} \frac{ln|X(t,s)|}{q(t)-q(s)}$$

соответственно обобщенное верхнее и обобщенное нижнее особые показатели относительно $q,$ линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x,\, x\epsilon R^n, t \geq t_0$$

Теорема 1. Если в нелинейной системе (1) векторная функция $f(t,x)\epsilon L(\varphi(t))$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_\varepsilon > 0$, существует $D_\varepsilon > 0$ такое, что равномерно для всех ненулевых решений системы (1) выполняется неравенство

$$d_\varepsilon|x(t_0)|e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon][q(t)-q(t_0]} \leq |x(t)| \leq D_\varepsilon|x(t_0)|e^{[\Omega_0(A,q)+\varepsilon][q(t)-q(t_0]}$$

при всех $t \geq t_0$.

ОДНОРОДНАЯ ВТОРАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, КАЗАХСТАН,
E-mail: muvasharkhan@gmail.com

В настоящей работе наряду с тривиальным решением мы устанавливаем в классе существенно ограниченных функций с заданным весом существование нетривиального решения с точностью до постоянного множителя.

Рассматривается однородная граничная задача

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \{x,t\} \in G = \{x,t : 0 < x < t, t > 0\}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=t} + \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = 0; \qquad (2)$$

где $\tilde{u}(t) = u(t,t)$.

Отметим, что задача (1)–(2) является однородным случаем задачи, изученной в работе [1], причем, для простоты коэффициенты из указанной работы приняты равными: $k = b = 1$. Эти изменения не противоречат постановке задачи из [1]. Как отмечено в работе [1], случай неоднородной граничной задачи "... оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами". Например, для однофазной задачи "... Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурной температурой $u(x,t)$ занимает отрезок $0 < x < s(t)$, при $x = 0$ задается положительный поток тепла, а свободная граница $x = s(t)$ начинается у твердой стенки $x = 0$, т.е. выполняется условие $s(0) = 0$". В работе [1] установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой там граничной задачи в весовых гельдеровских пространствах.

Исследование граничных задач вида (1)–(2) проводится в Казахстане впервые. Если в работе [1] было показано, что в некотором гельдеровском классе функций однородная задача (1)–(2) имеет только тривиальное решение, то нас интересует вопрос: существует ли у этой задачи нетривиальное решение и какому классу оно принадлежит? Этот вопрос ранее никем не был изучен.

В настоящей работе наряду с тривиальным решением мы устанавливаем в классе существенно ограниченных функций с заданным весом существование нетривиального решения с точностью до постоянного множителя. Введем этот класс следующим образом:

$$(x+t^{1/2})^{-1}u(x,t)\in L_\infty(G), \text{ т.е. } u(x,t)\in L_\infty(G;\,(x+t^{1/2})^{-1}). \tag{3}$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Граничная задача (1)–(2) имеет наряду с тривиальным решением и нетривиальное решение* $u(x,t)=C\tilde{u}(x,t)$, *где* $\tilde{u}(x,t)\in L_\infty(G;\,(x+t^{1/2})^{-1})$, *и* $C=const$.

Теорема 2. *В классе функций* $L_\infty\left(G;\,(x^{1+\alpha}+t^{(1+\alpha)/2})^{-1}\right)$ *граничная задача (1)–(2) имеет только тривиальное решение* $u(x,t)\equiv 0$.

Преобразование задачи (1)–(2). Для этого введем функцию $v(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Далее, формально дифференцируя по переменной x уравнение (1), получаем:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}=0, 0<x<t, t>0; \tag{4}$$

$$v(x,t)|_{x=0}=0, \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+\frac{2}{a^2}v(x,t\right)|_{x=t}=0. \tag{5}$$

Решение задачи (4)–(5) ищем в виде суммы потенциалов двойного и простого слоя [2, с.476–479]:

$$v(x,t)=\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где функции $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ являются неизвестными и подлежать определению.

Удовлетворяя решение (6) условиям (5), получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau-$$
$$-\frac{5}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{3}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau=0, t>0. \tag{12}$$

Решение интегрального уравнения (12) мы будем искать в классе

$$\sqrt{t}\exp\{t/(4a^2)\}\varphi(t)\in L_\infty(G), \textit{ т.е. } \varphi(t)\in L_\infty\left(G;\sqrt{t}\exp\{t/(4a^2)\}\right). \tag{13}$$

Отметим, что подобные интегральные уравнения Вольтерра второго рода нами были исследованы в работах [3–5].

Список литературы

[1] Солонников В.А., Фазано А. Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами// Записки научных семинаров ПОМИ, 2000.- Т.269.- С.322–338.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972.–735 с.

[3] Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations, 2015 (March). -V. 2015: 71. – 14p.

[4] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary Value Problems, 2014, **2014**: 213. 21 p.

[5] Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. матем. журн., 2015. - Т. 56, № 6.- С.1234–1248.

ALGORITHMS OF FINDING APPROXIMATE AND NUMERICAL SOLUTIONS TO MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M.

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, KAZAKHSTAN

E-mail: anarasanova@list.ru

A linear multi-point boundary value problem for a system of loaded differential equations is investigated. For solve of investigated problem used parametrization method. The considered problem is reduced to an equivalent multi-point boundary value problem for the system of ordinary differential equations with parameters. Algorithms of finding of an approximate solution to the equivalent problem are constructed. It is also proposed algorithms for finding of numerical solutions to the multi-point boundary value problem for the system of ordinary differential equations with parameters. A numerical implementation of parametrization method is offered using the Runge-Kutta method of 4th order accuracy for solving the Cauchy problems for ordinary differential equations.

We consider of the linear multi-point boundary value problem for the system of loaded differential equations

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + \sum_{i=1}^{k} P_i(t)u(\theta_i) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_j u(t_j) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

where the $u(t) = col(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t))$ is unknown function, the $(n \times n)$ matrices $A(t)$, $P_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, and n vector-function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, the $(n \times n)$ matrices K_j, $j = \overline{1,m}$, and n vector d are constant, $0 \le \theta_1 < ... < \theta_k \le T$, $0 \le t_1 < ... < t_m \le T$.

A solution to problem (1), (2) is a continuously differentiable vector function $u(t)$ on $[0,T]$ which satisfies the system of loaded differential equations (1) on $[0,T]$, the multi-point boundary condition (2).

Development of computational technologies and the expansion of their scope in the application problems require the elaboration of numerical methods for solving the boundary value problems for the loaded differential equations [1]. In the work [2] by the parametrization method [3] the well-posedness criteria for the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations are established and the algorithms for finding of approximate solutions are offered. By introducing the additional parameters the considered problem is reduced to an equivalent to problem consisting of the Cauchy problem for system of ordinary differential equations and the system of algebraic equations with respect to parameters. Based on the algorithms of parametrization method with regular partition of interval the numerical method for solving the considered problem is constructed. For the numerical solving of Cauchy problems the Runge-Kutta method of 4th order accuracy is used.

Present communication is devoted to investigating of the conditions of existence unique solution to multi-point boundary value problem for the system of loaded ordinary differential equations (1), (2). The loaded points and points to multi-point boundary condition may be different points of interval $[0,T]$.

Numbering in order again by location of the interval $[0,T]$ loaded points and points of the boundary condition, we obtain

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + \sum_{i=0}^{N} \widetilde{P}_i(t)u(\tau_i) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad u \in R^n, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \widetilde{K}_j u(\tau_j) = d, \qquad d \in R^n, \tag{4}$$

where $\widetilde{P}_i(t) = P_s(t)$, if $\tau_i = \theta_s$, $\widetilde{P}_i(t) = 0$, if $\tau_i \neq \theta_s$, $i = \overline{1, N-1}$, $s = \overline{1,k}$, $\widetilde{K}_j = K_l$, if $\tau_i = t_l$, $\widetilde{K}_j = 0$, if $\tau_i \neq t_l$, $i = \overline{1, N-1}$, $l = \overline{1,m}$, $1 \leq N \leq k+m+2$, $\tau_0 = 0$, $\tau_N = T$.

For solve to problem (3), (4) we used of the parametrization method. According to parametrization method the interval is partitioned into parts $[0,T] = \bigcup_{r=1}^{N-1} [\tau_{r-1}, \tau_r) \times [\tau_{N-1}, \tau_N]$.

Denote by $u_r(t)$ the restriction of function $u(t)$ to the r-th interval $[\tau_{r-1}, \tau_r)$, i.e. $u_r(t) = u(t)$ for $t \in [\tau_{r-1}, \tau_r)$, $r = \overline{1,N}$. Then the values of solution $u_r(t)$ at the initial points $t = \tau_{r-1}$ of subintervals are introduced as additional parameters λ_r, $r = \overline{1,N}$, and performing a replacement of the function $v_r(t) = u_r(t) - \lambda_r$ on the each interval $[\tau_{r-1}, \tau_r)$, $r = \overline{1,N}$, we obtain the boundary value problem with parameters λ_r, $r = \overline{1,N}$:

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)v_r + A(t)\lambda_r + \sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{P}_i(t)\lambda_{i+1} + \widetilde{P}_N(t)v_N(T) + f(t), \tag{5}$$

$$t \in [\tau_{r-1}, \tau_r), \qquad r = \overline{1, N-1}, \qquad t \in [\tau_{N-1}, T],$$

$$v_r(\tau_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{K}_j \lambda_{j+1} + \widetilde{K}_N v_N(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{7}$$

$$\lim_{t \to \tau_p} v_p(t) + \lambda_p = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, N-1}, \tag{8}$$

Problem (3), (4) is reduced to an equivalent problem, consisting of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations (5), (6) and a system of algebraic equations with respect to the introduced parameters.

The system of the linear algebraic equations with respect to parameters is compiled by the matrices of the loaded summands, boundary condition (7) and continuity conditions (8).

Coefficients and right-hand side of this system are determined by the solutions of Cauchy problems for linear ordinary differential equations. Solutions of system are found via the values of desired functions at the initial points of subintervals.

We constructed of the algorithms of finding of an approximate solutions to the equivalent problem. The numerical solution of Cauchy problem for ordinary differential equations on subintervals is determined by the Runge-Kutta method of 4th order accuracy.

References

[1] *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On numerical solution to loaded systems of ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral conditions // Numerical Analysis and Applications. № 1. Vol. 17. 2014. P.1-16.

[2] *Dzhumabaev D.S.* On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. Vol. 294. P.342-357.

[3] *Dzhumabaev D.S.* Conditions the unique solvability of a linear boundary value problem for a ordinary differential equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. № 1. 1989. Vol. 29. P. 34-46.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НАГРУЖЕННОГО ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аязбаева А.М., Дженалиев М.Т., Иманбердиев К.Б.
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,
КАЗАХСТАН, E-mail: muvasharkhan@gmail.com

В этом разделе изучается задача стабилизации по границе (образующей цилиндра) решения граничной задачи для уравнения теплопроводности с нагруженным двумерным оператором Лапласа.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{x, y : -\pi/2 < x, y < \pi/2\}$ – область с границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times \{t > 0\}$ с боковой поверхностью $\Sigma = \partial\Omega \times \{t > 0\}$ рассматривается граничная задача для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u + \alpha u(0, y, t) + \beta u(x, 0, t) = 0, \{x, y, t\} \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \{x, y\} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, y, t) = p(x, y, t), \{x, y, t\} \in \Sigma. \quad (3)$$

Требуется: найти такую функцию $p(x, y, t)$, чтобы решение граничной задачи удовлетворяло неравенству

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(\Omega)} \le C_0 e^{-\sigma t}, \sigma > 0, t > 0. \quad (4)$$

2. Вспомогательная граничная задача

Пусть $\Omega_1 = \{x, y : -\pi < x, y < \pi\}$ и $Q_1 = \Omega_1 \times \{t > 0\}$.

$$z_t - \Delta z + \alpha z(0, y, t) + \beta z(x, 0, t) = 0, \{x, y, t\} \in Q_1, \quad (5)$$

$$z(x, y, 0) = z_0(x, y), \{x, y\} \in \Omega_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^{(j)} z(-\pi, y, t)}{\partial x^{(j)}} = \frac{\partial^{(j)} z(\pi, y, t)}{\partial x^{(j)}}, \{y, t\} \in (-\pi, \pi) \times \{t > 0\}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^{(j)} z(x,-\pi,t)}{\partial y^{(j)}} = \frac{\partial^{(j)} z(x,\pi,t)}{\partial y^{(j)}}, \{x,t\} \in (-\pi,\pi)\times\{t>0\},\ j=0,1.$$

Требуется: найти такую начальную функцию $z_0(x,y)$, чтобы решение ВГЗ удовлетворяло неравенству

$$\|z(x,y,t)\|_{L_2(\Omega_1)} \le C_0 e^{-\sigma t}, \sigma>0, t>0. \tag{8}$$

3. Спектральные задачи для нагруженного двумерного оператора Лапласа

Решение задачи (1) — (3) будем искать в виде

$$z(x,y,t) = \sum_{k,l\in Z} Z_{kl}(t)\psi_{kl}(x,y), \tag{9}$$

где $\{\psi_{kl}(x,y), k,l\in Z\}$ – биортогональный базис пространства $L_2((-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi))$ и $Z=\{0,\pm1,\pm2,...\}$. Для построения биортогонального базиса $\{\psi_{kl}(x,y), k,l\in Z\}$ в области $Q=\{x,y:-\pi<x<\pi,-\pi<y<\pi\}$ рассматриваются следующие две спектральные задачи:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x,y)+\alpha\varphi(0,y)=\lambda\varphi(x,y), \{x,y\}\in Q, \\ \dfrac{\partial^j\varphi(-\pi,y)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^j\varphi(\pi,y)}{\partial x^j}, \dfrac{\partial^j\varphi(x,-\pi)}{\partial y^j} = \dfrac{\partial^j\varphi(x,\pi)}{\partial y^j},\ j=0,1; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x,y)+\alpha\varphi(0,y)+\beta\varphi(x,0)=\lambda\varphi(x,y), \{x,y\}\in Q, \\ \dfrac{\partial^j\varphi(-\pi,y)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^j\varphi(\pi,y)}{\partial x^j}, \dfrac{\partial^j\varphi(x,-\pi)}{\partial y^j} = \dfrac{\partial^j\varphi(x,\pi)}{\partial y^j},\ j=0,1; \end{cases} \tag{11}$$

где Δ – оператор Лапласа, α, $\beta\in C$ – заданные комплексные числа, $\lambda\in C$ – спектральный параметр.

Пусть $Z=\{0,\pm1,\pm2,...\}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. (a). Пусть для $\forall l\in Z:\alpha\ne l^2$. Тогда для задачи (10) система собственных функций и значений определяется в виде:

$$\left\{\varphi_{kl}(x,y)=\left(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\right)e^{iky}, \lambda_{kl}=l^2+k^2, l\in Z'\equiv Z\setminus\{0\};\right.$$

$$\left.\varphi_{k0}(x,y)=e^{iky}, \lambda_{k0}=\alpha+k^2\ (l=0), k\in Z\right\}. \tag{12}$$

(b). Пусть $\exists l_0\in Z:\alpha=l_0^2$. Тогда для задачи (10) система собственных и присоединенных (отмеченных значком ~) функций и значений определяется в виде:

$$\left\{\varphi_{kl}(x,y)=\left(e^{ilx}+\frac{\alpha}{l^2-\alpha}\right)e^{iky}, \lambda_{kl}=l^2+k^2, l\in Z'\setminus\{\pm l_0\};\right.$$

$$\left.\varphi_{kl_0}(x,y)=e^{iky}, \tilde{\varphi}^{\pm}_{kl_0}(x,y)=e^{\pm il_0 x+iky}, \lambda_{kl_0}=\alpha+k^2, k\in Z\right\}. \tag{13}$$

К доказательству леммы 1 (см. [2]).

$$\varphi_{kl}(x,y)=X_{kl}(x)e^{iky}, k,l\in Z \tag{14}$$

$$\begin{cases} -X''_{kl}(x)+k^2X_{kl}(x)+\alpha X_{kl}(0)=\lambda_{kl}X_{kl}(x), \\ X^{(j)}_{kl}(-\pi)=X^{(j)}_{kl}(\pi), j=0,1; \\ k,l\in Z, \lambda_{kl}=l^2+k^2 \end{cases} \tag{15}$$

(a) $\exists \quad l \in Z : \alpha = l^2$; (b) $\exists l_0 \in Z : \alpha = l_0^2$.

Одномерный аналог задач (10) и (11) был изучен в работе [1]. Для спектральной задачи (11) также установлен аналог леммы 1.

Список литературы

[1] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Стабилизация решения уравнения теплопроводности, нагруженного по нуль-мерным многообразиям, с помощью граничных условий // Математический журнал, 2015. – Т. 15, 4(58). – С. 33–53.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОРОУПРУГОСТИ

Бердышев А.С., Имомназаров Х.Х.
Казахский национальный педагогический университет им. Абая, КАЗАХСТАН
Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН (ИВМиМГ СО РАН)
E-mail: banu_28_07@mail.ru

Процессы разработки нефтегазовых месторождений связаны с движением многофазных многокомпонентных сред, которые характеризуются неравновесными и нелинейными реологическими свойствами. Реальное поведение пластовых систем определяется сложностью реологии движущихся жидкостей и морфологического строения пористой среды, а также многообразием процессов взаимодействия между жидкостью и пористой средой. Учет этих факторов необходим для содержательного описания процессов фильтрации за счет нелинейности, неравновесности и неоднородности, присущих реальным системам. При этом выявляются новые синергетические эффекты (потеря устойчивости с возникновением колебаний, образование упорядоченных структур). Это позволяет предложить новые методы контроля и управления сложными природными системами, которые настроены на учет этих явлений. Таким образом, пластовая система, из которой необходимо извлечь нефть, представляет собой сложную динамическую иерархическую систему. Изучение течений вязких сжимаемых насыщенных жидкостью упругодеформируемых пористых сред на основе решения полной системы уравнений двухфазных сред представляется актуальным.

В докладе обсуждаются решения прямых и обратных динамических задач пороупругости.

Работа проводилась при частичной поддержке грантов КН МОН РК (номер гранта 3328/ГФ 4) и РФФИ 16-01-00729.

Список литературы

[1] Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012., 212 с.

[2] Berdyshev A, ImomnazarovKh, Jian-Gang Tang, Tuychieva S. The symmetric form of poroelasticity dynamic equationsin terms of velocities, stresses andpressure//Open Engineering. 2016, v. 6, Iss. 1, pp. 322-325

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Билал Ш.
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
КАЗАХСТАН, E-mail: bilal44@mail.ru

Однородное дифференциальное уравнения имеет два линейно-независимых решения, обладающие свойствами монотонности возрастания и убывания, концевых точках интервала решения превращаются в ноль. Весовые производные решений превращаются в ноль в концевых точках интервала.

Пусть $J \equiv (a,b),\ -\infty \le a < b \le \infty$. Рассмотрим однородное уравнение Штурма-Лиувилля

$$-\left(\rho(x)y'(x)\right)' + v(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

где $\rho(x)$- положительная непрерывно-дифференцируемая в J функция, $v(x) \ge 1$ - непрерывная в J функция. Предположим, что выполнено условие

А: Для некоторого $c \in (a,b)$ функция

$$T_a(t) = \int_t^c \rho^{-1}(s)\int_s^c v(\tau)d\tau ds \quad \left(T_b(t) = \int_c^t \rho^{-1}(s)\int_c^s v(\tau)d\tau\, ds\right)$$

1) не интегрируема в окрестности точки $a\,(b)$,

2) $\lim\limits_{t\to a} T_a(t) = \infty \quad \left(\lim\limits_{t\to b} T_b(t) = \infty\right)$.

Заметим, что если $a\,(b)$ бесконечность, то условие А.1 всегда выполнено в силу монотонности функции $T_a(t)\ \left(T_b(t)\right)$. Если $a\,(b)$ конечна, то условие А.2 является следствием условия А.1. Отметим еще следующее условие, вытекающее из условия А.

$$\int_c^b \rho^{-1}(s)ds\int_c^b v(s)ds = \infty \quad \left(\int_a^c \rho^{-1}(s)ds\int_a^c v(s)ds = \infty\right) \tag{2}$$

Введем следующие функции

$$d_+(x) = \sup\left\{d > 0 : \int_x^{x+d} \rho^{-1}(s)ds \int_x^{x+d} v(s)ds \le 1,\ [x, x+d) \subset J\right\},$$

$$d_-(x) = \sup\left\{d > 0 : \int_{x-d}^{x} \rho^{-1}(s)ds \int_{x-d}^{x} v(s)ds \le 1,\ (x-d, x] \subset J\right\} \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекают следующие равенства

$$\int_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s)ds \int_x^{x+d_+(x)} v(s)ds = 1, \quad \int_{x-d_-(x)}^{x} \rho^{-1}(s)ds \int_{x-d_-(x)}^{x} v(s)ds = 1, \quad x \in J \tag{4}$$

Положим

$$\varphi_+(x) = \int_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s)ds,\ \ \varphi_-(x) = \int_{x-d_-(x)}^{x} \rho^{-1}(s)ds \tag{5}$$

Основным результатом является

Теорема 1. Пусть выполнено условие А. Тогда уравнение (1) имеет два линейно независимых решения $y_+(x)$ и $y_-(x)$, обладающие следующими свойствами:

1) $y_\pm(x) > 0,\ \ y'_\pm(x) \ne 0,\ \ x \in J$;

2.1) $y_+(x)$ монотонно убывает, $y_-(x)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{x\to b} y_+(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} y_-(x)=0$ при $b=\infty$, $a=-\infty$ соответственно;

2.2) $\lim\limits_{x\to b} y_+(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} y_-(x)=0$ при $\int\limits_c^b v(s)ds=\infty$ и $b<\infty$, $\int\limits_a^c v(s)ds=\infty$ и $a<\infty$ соответственно; $c\in(a,b)$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\rho(x)y'_-(x)=\lim\limits_{x\to b}\rho(x)y'_+(x)=0$;

4) $\frac{1}{2}\varphi_\pm^{-1}(x)y_\pm(x)\le\mp\rho(x)y'_\pm(x)\le 2\varphi_\pm^{-1}(x)y_\pm(x),\quad x\in J$.

Из утверждения 4) теоремы вытекают следствия.

Следствие 1. Для $z\ge t$

$$e^{-2\int\limits_t^z\varphi_+^{-1}(\tau)\rho^{-1}(\tau)d\tau}\le\frac{y_+(z)}{y_+(t)}\le e^{-\frac{1}{2}\int\limits_t^z\varphi_+^{-1}(\tau)\rho^{-1}(\tau)d\tau}$$

Действительно, из утверждения теоремы $\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}y_+\le-\rho\, y'_+\le 2\varphi_+^{-1}y_+$. Или $-\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}y_+\ge\rho\, y'_+\ge-2\varphi_+^{-1}y_+$. Отсюда

$$-\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}\rho^{-1}\ge\frac{y'_+}{y_+}\ge-2\varphi_+^{-1}\rho^{-1}.$$

Теперь интегрируя от t до z получим

$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^z\varphi_+^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds\ge\ln\frac{y_+(z)}{y_+(t)}\ge-2\int\limits_t^z\varphi_+^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds$$

Следствие 2. Для $z\ge t$

$$e^{\frac{1}{2}\int\limits_t^z\varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds}\le\frac{y_-(z)}{y_-(t)}\le e^{2\int\limits_t^z\varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds}$$

По утверждению теоремы $\frac{1}{2}\varphi_-^{-1}y_-\le\rho\, y'_-\le 2\varphi_-^{-1}y_-$. Отсюда $\frac{1}{2}\varphi_-^{-1}\rho^{-1}\le\frac{y'_-}{y_-}\le 2\varphi_-^{-1}\rho^{-1}$. Интегрируя на интервале $(t,z)\subset(a,z)$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^z\varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds\le\ln\frac{y_-(z)}{y_-(t)}\le 2\int\limits_t^z\varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds.$$

Следствие 3. Для $z\ge t$

$$e^{-\frac{1}{2}\int\limits_t^z v(s)\varphi_+(s)ds}\ge\frac{\rho(z)y'_+(z)}{\rho(t)y'_+(t)}\ge e^{-2\int\limits_t^z v(s)\varphi_+(s)ds}.$$

По теореме $-\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}y_+\ge\rho\, y'_+\ge-2\varphi_+^{-1}y_+$. Отсюда

$$-\frac{1}{2}\varphi_+(\rho\, y'_+)\le y_+\le-2\varphi_+(\rho\, y'_+).$$

Из уравнения (1), $(\rho\, y'_+)'=vy_+$. Пользуясь этим получим

$$-2v\varphi_+ \le \frac{(\rho\, y_+')'}{\rho\, y_+'} \le -\frac{1}{2} v\varphi_+$$

Интегрируя на интервале $(t,z) \subset (t,b)$, получим

$$-2\int_t^z v(s)\varphi_+(s)ds \le \ln\frac{\rho(z)y_+'(z)}{\rho(t)y_+'(t)} \le -\frac{1}{2}\int_t^z v(s)\varphi_+(s)ds.$$

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF THE EXISTENCE AN ISOLATED SOLUTION TO A NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.
Institute of Mathematics and mathematical modeling, KAZAKHSTAN
E-mail: bakirova1974@mail.ru

The nonlinear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations is considered. An algorithm to solve the considered problem is proposed. The convergence conditions of algorithm is obtained. The necessary and sufficient conditions for the existence of an isolated solution to the nonlinear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations problem are established.

Considered the nonlinear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x) + \int_0^T f_1(t,s,x(s))ds, \quad x \in R^n, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$g(x(0), x(T)) = 0, \tag{2}$$

where $f_0 : [0,T] \times R^n \to R^n$, $f_1 : [0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$ are continuous functions.

The problem (1), (2) is investigated by parametrization‘s method [1, 2]. Dividing the interval $[0,T]$ into N parts and introducing additional parameters as values of a solution in partition points, the problem (1), (2) is reduced to the equivalent multipoint boundary problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = f_0(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{i=1}^{N} \int_{(i-1)h}^{ih} f_1(t,s,u_i(s)+\lambda_i)ds, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \tag{3}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$g[\lambda_1, \lim_{t\to T-0} u_N(t) + \lambda_N] = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to ph-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \qquad p = \overline{1, N-1}. \tag{6}$$

At the fixed values of parameters λ_r, the special Cauchy problem for the nonlinear integro-differential equations (3), (4) is equivalent to the system of nonlinear integral equations

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, u_r(\tau)+\lambda_r)d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,u_j(s)+\lambda_j)dsd\tau, \tag{7}$$

$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}.$

In the fist integral replacing $u_r(\tau)$ by the right-hand side of (7), we get

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} f_0\left(\tau, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^{\tau} f_0(\tau_1, u_r(\tau_1) + \lambda_r)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{\tau} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau_1, s, u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau_1\right)d\tau +$$

$$\int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \qquad (8)$$

Substituting corresponding expression into the boundary condition (5) and continuity conditions (6), we have

$$h \cdot g[\lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} f_0\left(\tau, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{\tau} f_0(\tau_1, u_N(\tau_1) + \lambda_N)d\tau_1 +\right.$$

$$\left.+ \int_{(N-1)h}^{\tau} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau_1, s, u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau_1\right)d\tau + \int_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau] = 0, \quad (9)$$

$$\lambda_p + \int_{(p-1)h}^{ph} f_0\left(\tau, \lambda_p + \int_{(p-1)h}^{\tau} f_0(\tau_1, u_p(\tau_1) + \lambda_p)d\tau_1 +\right.$$

$$\left.+ \int_{(p-1)h}^{\tau} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau_1, s, u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau_1\right)d\tau +$$

$$+ \int_{(p-1)h}^{ph} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1}. \qquad (10)$$

An algorithm to solve the problem with parameters is offered. Each step of the algorithm consists of two points. In the first one the system of nonlinear algebraic equations (9) ,(10) is solved. In the second point at the found values of parametres solves the special Cauchy problem for the nonlinear integro-differential equations (3), (4) .

In communication the sufficient conditions of algorithms convergence, ensuring existence of an isolated solution to nonlinear boundary value problem for systems of the integral-differential equations (1), (2) are given. It is given a definition of isolated solution to the the nonlinear boundary value problem for integro-differential equation (1), (2) .
The necessary and sufficient conditions for the existence of an isolated solution to problem (1), (2) are established. Algorithms to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations are proposed in [3-5].

References

[1] *Dzhumabaev D.S.* A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50. № 7. P. 1150-1161.

[2] *Dzhumabaev D. S., Temesheva S. M.* A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems //Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. № 1. P.37-61.

[3] *Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.* Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential equations, 2013. Vol 49. № 9. P. 1-16.

[4] *Dzhumabaev D.S.* An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation //Computational mathematics and mathematical physics, - 2013. Vol 53. № 6. P. 736-758.

[5] *Dzhumabaev D.S.* On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations //Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016. Vol. 294. No 2. pp. 342-357.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

[1, 2]Джумабаев Д.С., [1,3]Темешева С.М.

[1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, [2]МУИТ,
[3]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: dzhumabaev@list.ru

Введено определение «предельного при $t \to \infty$» решения системы нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными, заданной на полосе, и установлены его притягивающие свойства.

На $\Omega = [0,\omega] \times R_+$ рассматривается система нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

где $f : \Omega \times R^{2n} \to R^n$ ограниченная, равномерно непрерывная по $x \in [0,\omega]$ относительно $t \in R_+$ и непрерывная по $t \in R_+$ при фиксированном $x \in [0,\omega]$ функция, $\|u\| = \max_{i=1:n} |u_i|$.

Выберем положительные числа $\rho_u > 0$, $\rho_v > 0$ и определим множество:

$$G^0(\rho_u, \rho_v) = \{(x,t,u,v) \in \Omega \times R^{2n} : (x,t) \in \Omega, \|u\| < \rho_u, \|v\| < \rho_v\}.$$

Предположение *A*. Пусть правая часть системы уравнений (1) функция $f(x,t,u,v)$ непрерывна в $G^0(\rho_u, \rho_v)$ и в этом множестве имеет ограниченные, равномерно непрерывные частные производные $f'_u(x,t,u,v)$ и $f'_v(x,t,u,v)$.

Определение. Непрерывная на Ω функция $u_0(x,t)$, имеющая в нем непрерывные частные производные $\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x \partial t}$ и удовлетворяющая неравенствам $\|u_0(x,t)\| < \rho_u$, $\left\|\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right\| < \rho_v$, называется предельным при $t \to \infty$ решением системы (1), если

$$\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,\omega]} \left\| \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x \partial t} - f\left(x, t, u_0(x,t), \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right) \right\| = 0.$$

Это определение является обобщением определения [1, с. 15], данного для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Введем следующие обозначения:

$C^*(\Omega, R^n)$ – пространство ограниченных, равномерно непрерывных по $x \in [0,\omega]$ относительно $t \in R_+$ и непрерывных по $t \in R_+$ при фиксированном $x \in [0,\omega]$ функций $u : \Omega \to R^n$ с нормой $\| u \|_* = \sup\limits_{(x,t)\in[0,\omega]\times R_+} \| u(x,t) \|$;

$S(w_0(x),[0,\omega]\times[T,\infty), r) = \{w(x,t) : (x,t) \in [0,\omega]\times[T,\infty), \sup\limits_{(x,t)\in[0,\omega]\times[T,\infty)} \| w(x,t) - w_0(x) \| < r\}$, где $w_0(x)$ является непрерывной на $[0,\omega]$ функцией.

Исследуем решение системы (1) с дополнительным условием

$$u(0,t) = 0, \qquad t \in R_+, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \in C^*(\Omega, R^n). \tag{3}$$

Предположение *B*. Пусть в $G^0(\rho_u, \rho_v)$ выполняются следующие предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} \max\limits_{x\in[0,\omega]} \| f(x,t,u,v) - f_+(x,u,v) \| = 0$, где $f_+(x,u,v)$ имеет равномерно непрерывные частные производные $\frac{\partial}{\partial u} f_+(x,u,v)$, $\frac{\partial}{\partial v} f_+(x,u,v)$ и

$$\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,\omega]} \left\| \frac{\partial}{\partial u} f(x,t,u,v) - \frac{\partial}{\partial u} f_+(x,u,v) \right\| = 0, \ \lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,\omega]} \left\| \frac{\partial}{\partial v} f(x,t,u,v) - \frac{\partial}{\partial v} f_+(x,u,v) \right\| = 0.$$

Рассмотрим задачу Коши для системы неявных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_+\left(x, u(x), \frac{du(x)}{dx} \right) = 0, \quad u \in R^n, \tag{4}$$

$$u(0) = 0. \tag{5}$$

При сделанных предположениях $u_+(x)$ – решение задача Коши (4), (5) является предельным при $t \to \infty$ решением системы (1) и удовлетворяет условиям (2), (3).

Следующее утверждение устанавливает достаточные условия существования решения задачи (1)-(3) при достаточно больших T и притягивающее свойство функции $u_+(x)$.

Теорема. Пусть на $[0,\omega]$ задача Коши (4), (5) имеет решение $u_+(x)$ такое, что $\max\limits_{x\in[0,\omega]} \| u_+(x) \| < \frac{\rho_u}{2}$, $\max\limits_{x\in[0,\omega]} \left\| \frac{d}{dx} u_+(x) \right\| < \frac{\rho_v}{2}$, собственные значения матрицы

$$A_+(x) = \frac{\partial}{\partial v} f_+\left(x, u_+(x), \frac{du_+(x)}{dx} \right)$$

непрерывны на $[0,\omega]$ и их действительные части отличны от нуля. Тогда существуют числа $T_0 > 0$, $\rho_u^0 \in (0, \rho_u/2]$, $\rho_v^0 \in (0, \rho_v/2]$, при которых в $S(u_+(x),[0,\omega]\times[T_0,\infty), \rho_u^0)$ уравнение (1) имеет хотя бы одно изолированное решение $u^*(x,t)$ такое, что $\frac{\partial}{\partial x} u^*(x,t) \in S\left(\frac{d}{dx} u_+(x),[0,\omega]\times[T_0,\infty), \rho_v^0 \right)$, и для любого решения уравнения (1)

$u(x,t)\in S(u_+(x),[0,\omega]\times[T,\infty),\rho_u^0)$, $\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\in S(u_+(x),[0,\omega]\times[T,\infty),\rho_v^0)$ где $T\geq T_0$, имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\max_{x\in[0,\omega]}\|u(x,t)-u_+(x)\|=0,\quad \lim_{t\to\infty}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)-\frac{d}{dx}u_+(x)\right\|=0.$$

Список литературы

[1] Д.С. Джумабаев. Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.–1992. – Т. 32, №1. – С. 13–29.

АРТЫҚ АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТТЫ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕРІ ЕСЕП

Еркін Қ., Махамбет С., Мұхан Ф., Хомпыш Х.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: konat_k@mail.ru

Бүгінгі күнгі әлемдегі жарияланып жатқан ғылыми мақалалардың (белгілі басылымдардағы) санына қарап математикалық физика теңдеулері үшін кері есептерді зерттеу өте қарқын алғанын аңғаруға болады. Оның бірден бір себебі – табиғаттағы көптеген физикалық құбылыстарды математикалық тұрғыда жан жақты зерттеуге байланысты. Кері есептер - теңдеудің оң жағын, шекаралық немесе бастапқы шартты анықтау және теңдеудегі коэффициентті анықтау болып ерекшеленеді. Алайда, параболалық, гиперболалық типті теңдеулер үшін кері есептерге арналған еңбектер көп болғанымен [1]-[4] (олардағы сілтемелер), псевдопараболалық теңдеулер үшін айтарлықтай көп емес кездеседі.

Бұл жұмыста псевдопарарболалық типті теңдеуге қойылған артық анықталған интегралдық шартты кері есептің бірмәнді шешімділігі көрсетіліп, сандық жуық шешімдері алынады.

Псевдопараболалық типті теңдеулер (соболев типті теңдеулер деп те аталады) ньютондық емес сұйықтар теориясында жиі қолданылатын, өзіндік физикалық мағынасы бар моделді теңдеулерге жатады. Мұндай теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік тура есептерге қатысты зерттеулерді [5-7] жұмыстардан танысуға болады. Ал псевдопараболалық теңдеулер үшін кері есептер туралы зерттеулерді [8-11] жұмыстардан және олардағы сілтемелерден табуға болады.

Есептің қойылымы. Шенелген $Q_T=(0,l)\times(0,T)$ облысында

$$\upsilon_t-\nu\upsilon_{xxx}-\chi\Delta\upsilon_{xxt}=f(x)g(x,t),\qquad (x,t)\in Q_T \tag{1}$$

теңдеуді,

$$\upsilon(x,0)=\upsilon_0(x),\quad x\in(0,l) \tag{2}$$

бастапқы шартты,

$$\upsilon(0,t)=\upsilon(l,t)=0,\ t\in[0,T] \tag{3}$$

шекаралық шарттарды және

$$\int_0^T \upsilon(x,t)\omega(t)dt = e(x) \qquad (4)$$

артық анықталған интегралдық шартын қанағаттандыратын $(\upsilon(x,t), f(x))$ функциялар жұбын анықтау кері есебін қарастырайық. Мұндағы $\upsilon_0(x)$, $\omega(t)$, $e(x)$, $g(x,t)$ функциялары және ν, χ тұрақтылары берілген белгілілер.

Оң жағы $F(x,t) = f(x)g(x,t)$ белгілі болып келген (1)-(3) тура есебінің бірмәнді шешімділігін және қатар шешімнің дифференциалдық қасиеттері [5-6] жұмыстарда зерттелінген. Біз осы тура есептің белгілі нәтижелерін қолданып, (1)-(4) кері есебінің әлді жалпылама шешімінің бар және жалғыздығы дәлелдейміз.

(1)-(4) кері есебінің жалпылама шешімін келесі мағынада түсінеміз.

Анықтама. (1)-(4) кері есебінің әлді шешімі деп $(\upsilon(x,t), f(x)) \in L_\infty\left(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)\right) \cap W_2^1\left(0,T;W_2^2(0,l)\right) \times L_2(0,l)$ функционалдық кластарда жататын және (1)-(4) теңдіктерді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын $(\upsilon(x,t), f(x))$ функциялар жұбын айтамыз.

Бұл жұмыстың басты нәтижесі келесі тұжырым.

Теорема. Айталық есептің берілгендері

$$\omega(t) \in W_2^1(0,T), \quad \omega(T) = 0; \quad \upsilon_0 \in W_2^2(0,l),\ e(x) \in W_2^2(0,l),$$

$$|g(x,t)| \le K_g < \infty, \quad \left|\int_0^T \omega(t)\vec{g}(x,t)dt\right| \ge g_0 > 0,\ \ h(x,t) \in L_2(0,l).$$

шарттарды қанағаттандырсын. Онда, (1)-(4) кері есебінің $(\upsilon(x,t), f(x))$ әлді шешімі бар және ол жалғыз.

Әдебиеттер тізімі

[1] Cannon J.R. Determination of control parameter in a parabolic partial differential equation// J. Austral. Math. Soc. Ser. B. -1991. –V. 33., -P. 149-163.

[2] Абылкаиров У.У. Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения. Математический журнал. –Алматы, -2003. –т. 3. -№4(10). –С. 5-12.

[3] Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи// Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457с.

[4] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky and I.A. Vasin, Methods for solving inverse problems in mathematical physics, Marcel Dekker, New York, Basel, 2000.

[5] Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. - Зап.научн.семинаров ЛОМИ АН СССР, 1973, 38, с.98-136.

[6] Каразеева Н.А., Котсиолис А.А., Осколков А.П. О динамических системах, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей// Тр. Мат. ин-та СССР. — 1988. — 179. — С. 126–164.

[7] Звягин В. Г., Турбин М. В. О существовании и единственности слабого решения начально-краевой задачи для модели движения жидкости Фойгта в области с изменяющейся со временем границей// Вестн. ВГУ. Сер. физ. матем. — 2007. — № 2. — С. 180–197.

[8] Abylkairov U.U., Khompysh~Kh. An inverse problem of identifying the coefficient in Kelvin-Voight equations//Applied Mathematical Sciences, Journal for Theory and applications, 9 no. 101-104.(2015) 5079-5089.

[9] Asanov, A., Atamanov E.R. Nonclassical and inverse problems for pseudo-parabolic equations / Tokyo, 1997. –152p.

[10] Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.

[11] Lyubanova A.Sh., Tani A. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity, Appl. Anal. 90 (2011), pp. 1557-1568.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОЛЕБЛЮЩИМСЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Ескермесулы А.
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, КАЗАХСТАН
E-mail: aleke1410@gmail.com

В работе получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений сингулярного дифференциального уравнения четвертого порядка быстроосциллирующим коэффициентом.

Асимптотические (как по x, так и по λ) формулы для фундаментальной системы решений (далее ФСР) уравнения вида

$$-y''+(q(x)+h(x))=\lambda y,$$

где потенциал $q(x)$ – функция, удовлетворяющая условиям типа Титчмарша-Левитана ([1], с.330), а $h(x)$ – быстро осциллирующее возмущение, изучались в работах [2], [3]. В работе [4] был предложен новый метод построения таких асимптотических при $x \to +\infty$ формул, для уравнения четвертого порядка. Оказалось, что данный метод позволяет также получить асимптотические формулы для ФСР уравнения

$$y^{(4)}-(q(x)+h(x))y=\lambda y \tag{1}$$

при $\Gamma \ni \lambda \to \infty$, где $\Gamma=\{\lambda:\sigma+i\tau;\sigma>0,\kappa\le\tau\le\sigma^{\gamma},\kappa>0,0<\gamma<1\}$, равномерные по $x\in(0,\infty)$ Справедлива следующая

Теорема 1 *Пусть функция* $q(x)$ *удовлетворяет следующим условиям*

a) $q(x)\to+\infty$ при $|x|\to+\infty$;

b) $q'(x)$, $q''(x)$ – не меняет знак для достаточно больших $|x|\ge R$, $R>0$;

c) $q'(x)=o\left(q^{\zeta}(x)\right)$ при $|x|\to+\infty$, где $0<\zeta<\dfrac{5}{4}$.

Пусть функция $h(x)$ такая, что[1]

d) $\int_x^{\infty}\varphi(t,\lambda)dt=o(1)$

[1] Интегралы рассматриваются как для положительных x, так и для отрицательных x.

при $\Gamma \ni \lambda \to \infty$, $\Gamma = \{\lambda : \sigma + i\tau; \sigma > 0, \kappa \le \tau \le \sigma^{\gamma}, \kappa > 0, 0 < \gamma < 1\}$, равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$, где

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{h(x)}{4(q(x)+\lambda)^{\frac{3}{4}}}.$$

Пусть, кроме того, функции

$$\omega(x,\lambda) = \frac{q'(x)}{8(q(x)+\lambda)}, \quad \varphi_1(x,\lambda) = \int_x^{\infty} \varphi(t,\lambda)dt, \quad \varphi_2(x,\lambda) = \int_x^{\infty} \varphi_1(t,\lambda)dt$$

удовлетворяют условиям

e) $\int_x^{\infty} \varphi_1(t,\lambda)\omega(t,\lambda)dt = o(1),$

f) $\varphi_2(x,\lambda) = \int_x^{\infty} \varphi_1(t,\lambda)dt = o(1),$

g) $\int_x^{\infty} \sqrt[4]{q(t)+\lambda} \cdot \varphi_2(t,\lambda)dt = o(1)$

при $\Gamma \ni \lambda \to \infty$ равномерно по $x \in (0,\infty)$. Тогда уравнение (1) имеет четыре линейно независимых решения, для которых при $\Gamma \ni \lambda \to \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$Y_j(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \\ y_j'' \\ y_j''' \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(q(x)+\lambda\right)^{\frac{3}{8}}} e^{\varepsilon_j \int_0^x \sqrt[4]{q(x)+\lambda}dt} \begin{pmatrix} 1+o(1) \\ \varepsilon_j \sqrt[4]{q(x)+\lambda} \cdot (1+o(1)) \\ \varepsilon_j \sqrt{q(x)+\lambda} \cdot (1+o(1)) \\ \varepsilon_j (q(x)+\lambda)^{\frac{3}{4}} \cdot (1+o(1)) \end{pmatrix},$$

равномерные по $x \in (-\infty, +\infty)$, где $j = 1,2,3,4,$ а ε_j – все различные корни четвертой степени из единицы.

Список литературы

[1] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. *– М.: Наука, 1969. – 526 с.*

[2] *Султанаев Я.Т.* Об индексах дефекта и спектре одномерных сингулярных дифференциальных операторов в вырожденном случае // ДАН СССР. – 1985. – Т.284. – № 3. с. 551–555.

[3] *Муртазин Х.Х, Султанаев Я.Т.* К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля// Математические заметки.– 1980. – т.28:4, с.545-553

[4] *Валеев Н.Ф., Ескермесулы А., Назирова Э.А.* Об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами. // Математический журнал ИМММ КН РК. — 2016. — Т. 16. — № 1. — С. 58-76.

SOLVING OPTIMIZATION PROBLEM WITH LINEAR CONSTRAINTS

Kabidoldanova A.A., Kalibekova A.K.
Al-Farabi Kazakh national university, KAZAKHSTAN
E-mail: kabasem@mail.ru

In this paper, an algorithm for solving convex programming problem is proposed. The specific feature of the considered problem is that its constraints contain only linear equations. This feature is a basis for the replacement the nonlinear objective function in the neighbourhood of the tested point by linear one, due to what solving an original problem is reduced to sequential solving linear programming problems.

The proposed algorithm combines ideas of the conditional gradient method [1] and a method for solving linear programming problem [2].

Consider the problem of the following form

$$J(u) \to \inf \tag{1}$$
$$u \in U = \{u \in E^n / u \in U_0, g(u) = Au - b = 0\} \tag{2}$$

where $J(u) \in C^1(U_0)$ is a convex function defined on a convex set U_0, $b \in R^m$ is a given vector, A is a given matrix of order $m \times n$, $U_0 = \{u \in R^n / u_j \geq 0, j \in I\}$, $I \subset \{1,2,\dots,n\}$.

Let $u_0 \in U$ be an arbitrary point. Define an auxiliary approximation $\bar{u}_k \in U$, $k = 0,1,2,\dots$ from the condition

$$J(\bar{u}_k) = \min\{J(u_{dk}^m), m = 0,1,2,\dots\}, \tag{3}$$

where u_{dk}^m, $m = 0,1,2,\dots$, are admissible solutions to the problem

$$J_k(u) =< J'(u_k, u - u_k) >\to \inf, \quad u \in U. \tag{4}$$

The next approximation is constructed by the formula

$$u_{n+1} = u_n + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k), \tag{5}$$

here α_k is determined from conditions

$$f_k(\alpha_k) = \min f_k(\alpha_k),\ \alpha \in [0,1], \quad f_k(\alpha) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)) \tag{6}$$

As it follows from (3) for determining an auxiliary approach $\bar{u}_k \in U, k = 0,1,2,\dots$ it is necessary to find admissible solutions u_{dk}^m, , $m = 0,1,2,\dots$ for problem (4).

The problem (4) is solved by reducing the problem to the following form

$$J_{1k}(u,\gamma) = [J(u_k) - \gamma]^2 + [Au - b]^*[Au - b] \to inf, \tag{7}$$
$$u \in U_0, \gamma \in \Gamma_k,\ \Gamma_k = \{\gamma \in R^1 / \gamma \leq \gamma_{dk}\}, \tag{8}$$

here $\gamma_{dk} = J_k(u_d)$, $u_d \in U$ is arbitrary point.

Consider the problems (7), (8) for fixed values of k and $\gamma = \bar{\gamma}_k \in \Gamma_k$. Now the problem (7), (8) has the form

$$F(u) = J_{1k}(u, \bar{\gamma}_k) = [J(u_k) - \bar{\gamma}_k]^2 + [Au - b]^*[Au - b] \to inf, \quad u \in U_0 \tag{9}$$

Lemma. Let $\inf\limits_{u\in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = 0$. Then $u_{dk} \in U_0$ is an admissible solution for (4).

For solving the problem (9) construct the sequence $\{u_n\}$:

$$u_{n+1} = P_{U_0}[u_n - F'(u_n)],\ 0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l+2\varepsilon_1},\ \varepsilon_1 > 0, \tag{10}$$

here L is the Lipschitz constant for $F'(u)$, the derivative $F'(u)$ is defined by

$$F'(u) = 2J'_k(u)[J_k(u) - \bar{\gamma}_k] + 2A^*[Au - b].$$

Theorem 1. Let the sequence $\{u_n\} \subset U_0$ be defined by formula (10), the set $M(u_0) = \{u \in U_0 / F(u) \le F(u_0)\}$ be bounded. Then the following statements hold true:

1) The sequence $\{u_n\} \subset M(u_0)$ is minimizing;
2) The sequence $\{u_n\} \subset U_0$ converges to the set U_{0*}, $U_{0*} \neq \emptyset$, where. $U_{0^*} = \left\{ u_* \in E^n \big/ J(u_*) = \min\limits_{u\in U} J(u) \right\}$;
3) The following convergence rate estimate holds

$$0 < F(u_n) - F_* \le \frac{c^2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{n}, \qquad c = \sup_{u\in M(u_0)} |F'(u_n)| + \frac{\bar{d}}{\varepsilon_0},\ \bar{d} > 0.$$

Algorithm for construction of an auxiliary approach

1. Given tolerances $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$;
2. Input a point $u_k \in U$;
3. Select an arbitrary element of the set U, let's denote it by u_{dk}^m. Calculate the value $\gamma_{dk} := J_k(u_{dk}^0) = < J'(u_k), u_{dk}^0 - u_k >$;
4. Define a step $\Delta\gamma$;
5. Set $b := \gamma_{dk}$, $i = 0$, $m = 1$;
6. Solve the problem (1), (2) for the value $\bar{\gamma}_{dk} := b - \Delta\gamma$. As a result we have $\inf\limits_{u\in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = F_*$;
7. If $F_* > \varepsilon$, then $i := i + 1$, $a = \bar{\gamma}_k$;
   If $F_* \le \varepsilon$, then $b := \bar{\gamma}_k$, $m = m + 1$, $u_{dk}^m := u_{dk}$;
   If $i > 0$, then $\Delta\gamma := \frac{b-a}{2}$;
8. If $\Delta\gamma > \delta$, then go to step 5;
9. Evaluate $J(u_{dk}^m)$, $m = 0,1,2,...$ and determine $J(u_{dk}^*) = \min\limits_{m=1.2....} J(u_{dk}^m)$; $\bar{u}_k := u_{dk}^*$ is an auxiliary approximation.

Convergence of a sequence

An auxiliary approach $\bar{u}_k \in U$, $k = 0, 1, 2, ...$ is constructed by the algorithm above, a step of the method α_k $k = 0, 1, 2, ...$ can be determined by using one of methods for minimization one variable function. Then every element of the sequence $\{u_k\}$ is calculated by the rule (5). Next theorem answers the question of convergence of the sequence to a solution of the original problem.

Theorem 2. If a function $J(u) \in C^{1,1}(U_0)$ is convex on U_0, the sequence $\{u_k\}$ is defined by (5), (6), (3), then the sequence $\{u_k\}$ is minimizing and its all the limit points belong to the set U_*, $U_* = \left\{ u_* \in E^n / J(u_*) = \min\limits_{u\in U} J(u) \right\}$. The following estimate holds:

$$J(u_k) - J_* \le \frac{c}{n},\ n = 0, 1, 2, ...,$$

Algorithm for solving the problem
1. Given tolerances $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$;
2. Set $k \coloneqq 0$;
3. Select an arbitrary element u_k from the set U;
4. If $\|J'(u_k)\| < \varepsilon$, then go to the step 9;
5. Construct auxiliary approach $\bar{u}_k \in U$ by the described above algorithm;
6. Define $\alpha_k \in [0,1]$ by solving $f_k(\alpha_k) = \min f_k(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, $f_k(\alpha_k) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k))$;
7. Construct the next approach $u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k)$;
8. If $\|u_{k+1} - u_k\| > \varepsilon$, then $k \coloneqq k + 1$ and go to the step 5.
9. Iterative process is terminated: u_k is a minimum point. $J(u_k)$ is a minimal value of the given function.

References

[1] Vasilyev F.P. Numerical methods for solving extremal problems. – M.: Nauka, 1988. – 552 p. (in Russian)

[2] Aisagaliev S.A., Aisagaliev Zh.K. Research on mathematical programming // The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. --2013. -- № 2(77). --P. 4-20. (in Russian)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Қайыржан М., Сахаев Ш.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: kayirzhan.m90@gmail.com

В задачах гидродинамики и магнитной гидродинамики приходится иметь дело с задачей коши следующего типа [1], [3]

$$\frac{du}{dt} + A(t)u + Ku = f(t), u(t)\big|_{t=0} = u_0 \qquad (1)$$

для уравнений с неограниченными операторами $A(t)$ и K, действующими в гильбертовом пространстве H.

Под корректностью задачи (1) понимается то,что ее решение принадлежит тому же пространству H_1 (H_1 есть гильбертово пространство, плотно вложенное в H), которому оно принадлежит в начальный момент времени и непрерывно меняется в норме H_1 при непрерывном изменении начального условия в этой же норме.

Помимо этих фактов, касающихся нелинейной задачи (1) линеаризованных задач иметь теорему об их однозначной разрешимости в том же пространстве H_1 на всей полупрямой $t \geq 0$ и теорему о том,что разрешающие операторы этих задач имеют свойства аналитической полугруппы [1].

В данной работе устанавливается все эти свойства для уравнения вида (1), где $A(t) = A_0 + A_1(t)$, A_0 - линейный самосопряженный положительно определенный оператор с плотной в H областью определения H_2, а $A_1(t)$ и K - подчиненные A_0, в определенном смысле, линейный и нелинейный операторы, определенные на H_2.

Рассмотрывается следующая задача магнитной гидродинамики [2] система

$$\left.\begin{array}{c}\vec{\vartheta}_t - \nu\Delta\vec{\vartheta} + \sum_{k=1}^{3}(\vartheta_k \cdot \vec{\vartheta}_{x_k} - \mu H_k \vec{H}_{x_k}) + grad(p + \frac{\mu\vec{H}^2}{2}) = \vec{f}(x,t),\\ div\vec{\vartheta}(x,t) = 0, div\vec{H} = 0,\\ rot\vec{H} - \sigma(\vec{E} + \mu[\vec{\vartheta}\times\vec{H}]) = \vec{j}(x,t), rot\vec{E} + \mu\frac{\partial H}{\partial t}\vec{H}_t = 0\end{array}\right\} \qquad (2)$$

следующими начальми

$$\vec{\vartheta}(x,0) = \vec{\vartheta}_0(x), \vec{H}(x,0) = \vec{H}_0(x) \qquad (3)$$

и граничными условиями

$$\vec{\vartheta}(x,t)\Big|_S = \vec{a}(x,t)\Big|_S, H_n\Big|_S = 0, \vec{E}_\tau\Big|_S = 0. \qquad (4)$$

Сведем задачу (2)-(4) к задаче Коши (1), (3) в некотором гильбертовом пространстве, как это сделано в [2]. После этого задачу (2)-(4) можно записать как задачу Коши (1), (3) для вектора $\vec{u} = \{\omega, \vec{h}\}$ с шестью компонентами.

Для задачи (2)-(4) получены все результать,поставленные в постановке задачи. Приведенное результаты легко прохадитв и к задаче тепловой конвекции [2].

Список литературы

[1] Сахаев Ш., Солонников В.А. Труды миан ссср, т.127(1975), стр.76-92.

[2] Сахаев Ш. Изв. Ан КазССр, серия физ. мат. N3(1978),стр. 60-67.

[3] Sh. Sahaev, V.A. Solonnikov On the proof of the solvability of a linear problem arising in magnetohydromynamics with the method of integral equations \\ ISSN 0234-0852, Россия Академия наук Алгебра и Аналаиз, том 26, №6, 2014.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ НАГРУЖЕННЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Касымбекова А.С.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: kasar08@mail.ru

Важной сферой применения нагруженных уравнений параболического типа являются задачи управления по фиксированным многообразиям [1]. В работе получен аналог принципа максимума Понтрягина для случая, когда управление распределено на некотором количестве многообразий из $\overline{\Omega}$, размерность которых строго меньше размерности области Ω [2].

Пусть Ω – ограниченная область в R^n с границей Γ, являющейся бесконечно дифференцируемым (n-1)- мерным многообразием, $t \in (0,T)$- временная переменная, $T < \infty$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, $u = u(x,t)$- решение следующей задачи:

$$D_t^1 u = \sum_{i,j=1}^{n} D_{x_i}^1 (a_{ij} D_{x_j}^1 u) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i(t) \int_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) u(\xi,t) d\xi + f \quad на\ Q, \qquad (1)$$

$$u(x,t) = 0 \quad на\ \Sigma, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0 \ на\ \Omega, \qquad (3)$$

где $e_i \in L^\infty(0,T;L^4(\Omega\times\Gamma_i))$; $v_i(t)\in V(0,T), i=1,\dots,p, V(0,T)$ - выпуклое, замкнутое подмножество $L^2(0,T)$; $\Gamma_i-(n-1)-$мерные многообразия из $\overline{\Omega}, n\le 3$ (при $n=1, \Gamma_i$ - фиксированные точки из $\overline{\Omega}$); $\Gamma_i, i=1,..,n$ вместе с Γ из $C^2; a_{ij}\in L^\infty(0,T;C^1(\Omega)), a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,\dots,p$ для почти всех $\{x,t\}\in Q$:

$$\beta_2\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \ge \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\zeta_i\zeta_j \ge \beta_1\sum_{i=1}^n\zeta_i^2, \tag{4}$$

$\beta_1,\beta_2=const>0, \forall\zeta\in R^n,\ \ f\in L^2(Q), u_0\in H_0^1(\Omega).$

Задача оптимального управления состоит в следующем: найти пару $\{u(x,t),v(t)\}$, удовлетворяющую условиям (1)-(4) и минимизирующую функционал:

$$J(v)=\int_\Omega |u(x,T)-z_з|^2dx+\beta\int_0^T|v(t)|^2dt, \tag{5}$$

где $z_з\in L^2(\Omega),\ \beta=const>0,\ |v(t)|^2=\sum_{i=1}^p|v_i(t)|^2, v=\{v_1,\dots,v_p\}$.

Доказана теорема о существовании решения задачи оптимального управления, описываемой нагруженным уравнением параболического типа с управлением в коэффициентах.

Теорема 1. *Задача оптимального управления (5)-(9) имеет решение.*

В работе при некоторых дополнительных условиях получены необходимые условия оптимальности первого порядка, представляющие собой аналог принципа максимума Понтрягина. Доказаны теоремы об ограниченности решения исходной краевой задачи и соответствующей ей сопряженной задачи.

Определим сопряженное состояние как решение задачи:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^p v_i(t)\delta(x-\Gamma_i)\int_\Omega e_i(\xi,x,t)p(\xi,t)d\xi=0 \text{ на } Q,$$

$$p(x,t)=0 \quad \text{на } \Sigma,$$

$$p(x,T)=2(z_з-u(x,T)).$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть для задачи (1)-(5) выполнены условия* $f(x,t,v):Q\times R^p\to R^1$ *и существует оптимальное управление* $\overline{v}$. *Тогда почти всюду в цилиндре* Q

$$\int_\Omega p(x,t_0;\overline{v}(t_0))\left[f(x,t_0;\overline{v}(t_0))+B(x,t_0;\overline{v}(t_0))u(x,t_0;\overline{v}(t_0))\right]dx+\beta\overline{v}^2(t_0)=$$

$$=\inf_{k\in K}\left[\int_\Omega p(x,t_0,\overline{v}(t_0))\left[f(x,t_0,k)+B(x,t_0;k)u(x,t_0;\overline{v}(t_0))\right]dx+\beta k^2\right],$$

где $p(x,t,\overline{v}(t))$ - решение сопряженной задачи и через $B(v)u$ обозначено

$$B(v)u=\sum_{i=1}^p v_i(t)\int_{\Gamma_i}e_i(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi\ .$$

Варианты теоремы 2, для задач описываемых уравнениями второго порядка, в отсутствии нагруженности рассматривались работе [3].

Список литературы

[1] *Дженалиев М.Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.-270 с.

[2] *Дженалиев М.Т., Касымбекова А.С., Сматов К.С.* Задача управления коэффициентами при нагруженных слагаемых для параболического уравнения // Изв. НАН РК. Сер. физ. –матем. –1997. № 3 (196). – С.26-32.

[3] *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными - М.: Мир, 1972.-414 с.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Хайруллин Е.М., Тулешева Г.А.

Казахский национальный исследовательский университет им. К.И.Сатпаева, КАЗАХСТАН, E-mail: khairullin_42_42@mail.ru

Аннотация. Рассматривается особая граничная задача для бипараболического интегро-дифференциального уравнения (БПИДУ) в полупространстве. Решение граничной задачи ищется в виде суммы функции Коши для БПИДУ и специальных потенциалов. Приводятся леммы о скачке специальных потенциалов в окрестности гиперплоскости. На основании леммы граничная задача для БПИДУ сведена к системе сингулярных интегро-дифференциальных (СИДУ) уравнений. Использованием параболических операторов дробного порядка, решение полученной системы СИДУ найдено в явном виде через заданные функции.

В области $Q_T \equiv \{(x,t): (x', x_n, t): x' \in R^{n-1}, x_n \in R_+, t \in (0,T)\}$ найти решение $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(Q_T)$ бипараболического интегро-дифференциального уравнения (БПИДУ)

$$L^2[u(x,t)] = \lambda \int_0^t \Delta^2 u(x,t)dt + f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0,, \quad D_t u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered} D^2_{x_n} u(x,t)\big|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t), \\ D^3_{x_n} u(x,t)\big|_{x_n=0} = \varphi_2(x',t), \quad (x't) \in Q^{(1)}_T = Q_T \setminus x_n \ , \end{gathered} \tag{3}$$

где $L \equiv D_t - a^2\Delta,\ L^2 \equiv (D_t - a^2\Delta)^2,\ D_{x_n} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_n},\ D_{x_n} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t},\ \Delta -$ оператор Лапласа по переменным $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$.

Решение граничной задачи (1) – (3) будем искать в виде

$$u(x,t)=2a^4\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \varphi_1(\xi',\tau)G_{n-1}(x'-\xi',t-\tau)D_{\xi_n}Q_1(x_n-\xi_n,t-\tau)\Big|_{\xi_n=0}d\xi'+$$

$$+2a^4\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \varphi_2(\xi',\tau)(t-\tau)G_n(x'-\xi',x_n,t-\tau)d\xi'+ \tag{4}$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} f(\xi,\tau)H_n(x-\xi,t-\tau)d\xi,$$

где $H_n(x,t)$ – фунция Коши для БПИДУ [1,с.546], $Q_1(x_n,t)=\int_0^t G_1(x_n,t-z)dz,$

$\varphi_i(x',t)-$ неизвестные функции и $\varphi_i(x',0)=0.$

Нетрудно убедиться, что функция *u(x,t),* определяемая равенством (4) удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2). Неизвестные функции $\varphi_i(x',t)$ выберем так, чтобы выполнялись краевые условия (3). Подставляя функцию *u(x,t),* определяемую формулой (4), в граничные условия (3), получим относительно неизвестной функции $\varphi_i(x',t)$ систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\varphi_1(x',t)-a^2\int_0^t \frac{\varphi_2(\xi',\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}G_{n-1}(x'-\xi',t-\tau)d\xi'=\Phi_1(x',t), \tag{5}$$

$$\varphi_2(x',t)-\int_0^t \frac{L[\varphi_1(\xi',\tau)]}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}G_{n-1}(x'-\xi',t-\tau)d\xi'=\Phi_2(x',t),$$

где

$$\Phi_1(x',t)=\varphi_1(x',t)-D^2_{x_n}[I(f)]\Big|_{x_n=0},$$

$$\Phi_2(x',t)=\varphi_2(x',t)-D^3_{x_n}[I(f)]\Big|_{x_n=0},$$

$$I(f)=\int_0^t d\tau \int_{R^n} f(y,\tau)H_n(x-y,t-\tau)dy.$$

Используя параболический оператор дробного интегрирования и дифференцирования из системы (5) можно найти

$$\varphi_1(x',t)=2\Phi_1(x',t)+aJ^{\frac{1}{2}}[\Phi_2], \tag{5}$$

$$\varphi_2(x',t)=2\Phi_1(x',t)+\frac{2}{a}D^{\frac{1}{2}}[\Phi_1], \tag{6}$$

где $D^{\frac{1}{2}}\equiv LJ^{\frac{1}{2}}$ – параболический оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha=\frac{1}{2}$.

Полученные результаты можно резюмировать в виде

Теорема. Если фунции $f(x,t)$ и $\varphi_i(x',t)$ соответственно из классов $C^{\alpha,0}_{x,t}(Q_T)$ и $C^{0,1}_{x,t}(Q^{(1)}_T)$, то граничная задача (1) – (3) имеет решение $u(x,t)\in C^{4,2}_{x,t}(Q_T)$, определяемое равенством (4), где неизвестные функции $\varphi_i(x',t)$ определяются формулами (5) – (6).

Список литературы

[1] *Хайруллин Е.М.,Тулешева Г.А.* Труды Международных Сатпаевских чтений «Роль и место молодых ученых в реализации стратегии Казахстан -2050», посвященных 80-летию КазНИТУ имени К.И.Сатпаева, 2014.-С544-548

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛА – ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

Китайбеков Е.Т.
Казахский национальный педагогический университет им. Абая, КАЗАХСТАН
E-mail: Er-kaz_89@mail.ru

Аннотация. Теория краевых задач для вырождающихся гипербола – параболических уравнений на плоскости хорошо изучены.

Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах ранее исследованы В.Н. Враговым. Корректности задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений установлены С. А. Алдашевым.

Разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка показано автором, а в данной работе доказывается ее единственность решения.

п.1. Введение. В работе показана единственность классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гипербола – параболических уравнений с вырождением типа и порядка.

п.2. Постановка задачи и результат. Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t),ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t): |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$– длина вектора $x = (x_1, x_2)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$ –а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S – общая границ областей Ω_α и Ω_β представляющее множество в $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_2.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся трехмерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2} p_i(t) u_{x_i x_i} - p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \ t > 0, \\ \sum_{i=1}^{2} g_i(t) u_{x_i x_i} - u_t + \sum_{i=1}^{2} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u, t < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $p_i(t) > 0$ при $t > 0, p_i(0) = 0, g_j(t) > 0$ при $t > 0,$и могут обращаются в нуль при $t = 0,\ p_i(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2((0,\alpha)),\quad g_j(t) \in C([\beta, 0]), i = 1,2,3., j = 1,2.$

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t: x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta, r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$, из класса $C^1(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\alpha} = 0, \quad u|_{\Gamma_\alpha} = 0, \qquad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = 0, \ u|_{\sigma_\beta} = 0. \qquad (3)$$

Пусть

$$\frac{a_i(r,\theta,t)}{p_3(t)}, \frac{b(r,\theta,t)}{p_3(t)}, \frac{c(r,\theta,t)}{p_3(t)} \in C^1(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha), d_j(r,\theta,t), e(r,\theta,t) \in C^1(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta),$$

$$i = 1,2,3,\ j = 1,2,\ e(r,\theta,t) \le 0, \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Тогда справедлива

Теорема. Если выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n} \alpha' \neq 0,\ \ s = 1,2,...\ , \qquad (4)$$

то решение задача 1 тривиальное, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_n(z)$, $\alpha' = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{k_1(\xi) + k_2(\xi)}{2k_3(\xi)}} d\xi,\ n = 0,1,...$.

Список литературы

[1] Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина // Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика, Белгород: 012,№5(124), вып. 26 -с.12-25

[2] Алдашев С. А. Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений// Материалы IV межд. конференции "Математическая физика и ее приложения," СамГУ, Самара:2014 -с.46

[3] Китайбеков Е. Т. Задача Дирихле для трехмерных гиперболо - параболических уравнений с вырождением типа и порядка // Вестник КазНУ им. Ал-Фараби. серия математика, механика, информатика. -2016. №1(88)-с. 28-34.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

Майкотов М.Н.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, КАЗАХСТАН

E-mail: mukhit777@mail.ru

Аннотация. Известно, что для уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректны поставленных задач.

Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений ранее доказаны С.А. Алдашевым.

В работе показана, что разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для многмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка.

п.1. Введение. В теории уравнений частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректно поставленных задач .

Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений доказаны в [1,с.8] и [2, с.17].

В работе показана разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка .

п.2. Постановка задачи и результат. Пусть D_β – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, x_2, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$. — Части этих поверхностей, образующих границу, ∂D_β области D_β, обозначим через $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$ ответственно.

В области D_β рассмотрим многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv g_1(t)\Delta_x U - g_2(t)U_{tt} + \sum a_i(x,t)U_{x_i} + b(x,t)U_t + c(x,t)U = 0, \qquad (1)$$

где $g_i(t) > 0$ при $t > 0$ и обращаются в нуль при $t = 0, g_i(t) \in C([0,\beta]) \cap C^2((0,\beta)),\ i = 1,2, \Delta_x$ – *оператор Лапласа по переменным* $x_1, x_2, ..., x_m, m \geq 2.$

Уравнение (1) гиперболично при t>0, а вдоль плоскости t=0 имеет место вырождение его типа и порядка.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, x_2, ..., x_m, t$ *к сферическим* $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t, r \geq 0,\ 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2,3,...m-1.$

В качестве многомерной задачи Дирихле рассмотрим задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения(1) в области D_β из класса $C(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u|_{S_0} = \tau(r,\theta), \qquad (2)$$

при этом $\varphi(1,\theta) = \psi(\beta,\theta), \psi(0,\theta) = \tau(1,\theta).$

Пусть $\dfrac{a_i(r,\theta,t)}{g_2}, \dfrac{b(r,\theta,t)}{g_2}, \dfrac{c(r,\theta,t)}{g_2} \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta), l \geq m+1, i = 1,...,m,$

где $W_2^l(D_\beta)$ - пространство Соболева

Тогда справедлива.

Теорема. Если $\varphi(r,\theta) \in W_2^P(S_\beta), \varphi(t,0) \in W_2^P(\Gamma_\beta), \tau(r,\theta), \nu(r,\theta) \in W_2^P(S_0), p > \dfrac{3m}{2}$ и выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n}\beta \neq 0, s = 1,2,..., \qquad (3)$$

то задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-3)}{2}}(z).$, $\beta' = \int_0^\beta \sqrt{\dfrac{g_1(\xi)}{g_2(\xi)}}\, d\xi$.

Список литературы

[1] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина // Владикавказский матем. журнал, 2013, т.15,вып.2. – С. 3-10

[2] Алдашев С.А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнения с оператором Чаплыгина//Научные ведомости БелГУ, серия: Математика, физика, 2012, №5(124), вып. 26-с. 12-25.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, КАЗАХСТАН
E-mail: minglibayev@gmail.com

В работе получены новые дифференциальные уравнения движения классической ограниченной задачи трех тел [1-6] в безразмерных пульсирующих переменных во вращающейся специальной неинерциальной системе координат

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(1-\left(\frac{m_3}{\tilde{\Delta}_{23}^3}+\frac{m_1}{\tilde{\Delta}_{21}^3}\right)\frac{1}{m_1+m_3}\right)\xi + \\ + \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(\frac{km_3}{(1+k)\tilde{\Delta}_{23}^3}+\frac{m_1}{(1+k)\tilde{\Delta}_{21}^3}\right)\frac{1}{m_1+m_3} = \frac{1}{1+e\cos\theta}B \tag{1}$$

$$\eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(1-\left(\frac{m_3}{\tilde{\Delta}_{23}^3}+\frac{m_1}{\tilde{\Delta}_{21}^3}\right)\frac{1}{m_1+m_3}\right)\eta = 0, \tag{2}$$

$$\zeta'' + \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(e\cos\theta+\left(\frac{m_3}{\tilde{\Delta}_{23}^3}+\frac{m_1}{\tilde{\Delta}_{21}^3}\right)\frac{1}{m_1+m_3}\right)\zeta = 0, \tag{3}$$

$$\tilde{\Delta}_{21}^3 = \left[\left(\xi-\frac{1}{1+k}\right)^2+\eta^2+\zeta^2\right]^{3/2}, \quad \tilde{\Delta}_{23}^3 = \left[\left(\xi+\frac{1}{1+k}\right)^2+\eta^2+\zeta^2\right]^{3/2}, \tag{4}$$

где обозначены безразмерные постоянные величины

$$B = \frac{k-\nu}{(k+1)(1+\nu)} = const \neq 0, \qquad \nu = \frac{m_1}{m_3} = const > 0, \qquad m_3 \geq m_1. \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения движения (1) - (3) классической ограниченной задачи трех тел, соответствующие параметру $k = const$ удобны для установления точных частных решений. Они допускают три типа прямолинейных точных частных решений вида

$$\xi = \xi^* = const, \qquad \eta = \eta^* = 0, \qquad \zeta = \zeta^* = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим один тип решений в случае, когда безмассовое тело находится между двумя основными телами. Из уравнений (1)-(3) с учетом (6) получим

$$\xi - \frac{1}{m_1+m_3}\left[\frac{m_3}{(\xi+k/(k+1))^3}+\frac{m_1}{(1/(k+1)-\xi)^3}\right]\xi - \\ - \frac{1}{(m_1+m_3)(k+1)}\left[\frac{km_3}{(\xi+k/(k+1))^3}-\frac{m_1}{(k/(k+1)-\xi)^3}\right]+\frac{km_3-m_1}{(k+1)(m_1+m_3)} = 0 \cdot \tag{7}$$

Обозначим

$$\xi = z - \frac{k}{k+1}. \tag{8}$$

В результате из уравнений (7) получим

$$\varphi(z) = b_0 z^5 + b_1 z^4 + b_2 z^3 + b_3 z^2 + b_4 z + b_5 = 0, \\ b_0 = D, \quad b_1 = Q - 2D - P, \quad b_2 = D + 2P - 2Q, \quad b_3 = -1, \\ b_4 = \nu + 2 + 2DQ - P - Q\nu, \quad b_5 = \nu - P - DQ - Q\nu - 1, \\ D = 1+\nu, \quad P = \nu/(1+k), \quad Q = k/(k+1), \quad \nu = m_1/m_3. \tag{9}$$

Алгебраическое уравнение пятой степени (9) имеет, по крайней мере, один положительный корень между нулем и единицей, так как

$$\varphi(0) = -\left\{1 + \frac{k(1+\nu)}{k+1}\right\} < 0, \quad \varphi(1) = \nu > 0 .$$

Этот корень обозначим

$$z^* = z^*(k,\nu), \quad 0 < z^* < 1. \tag{10}$$

тогда согласно (8) искомая корень имеет вид

$$\xi^* = \xi^*(k,\nu) = z^* - \frac{k}{k+1} = z^*(k,\nu) - \frac{k}{k+1} . \tag{11}$$

Анализ уравнений (7) показывает, что может быть корень $\xi = \xi^* = 0$. В этом случае безмассовое тело лежит в начале системы координат. В этом случае можно найти k в зависимости от масс основных тел. Обозначим

$$\frac{1}{1+k} = u . \tag{12}$$

Учитывая, что $\xi = \xi^* = 0$ из уравнении (7) получим

$$f_0(u) = a_0u^5 + a_1u^4 + a_2u^3 + a_3u^2 + a_2u + a_5 = 0 , \tag{13}$$

$$a_0 = \nu + 1, \quad a_1 = -(2\nu + 3), \quad a_2 = \nu + 3 , \quad a_3 = -\nu , \quad a_4 = 2\nu , \quad a_5 = -\nu .$$

Это уравнение также имеет, по крайней мере, один положительный корень между нулем и единицей, так как $f_2(0) = -\nu < 0$, $f_2(1) = +1 > 0$. Этот корень обозначим

$$u^* = \frac{1}{1+k}, \quad 0 < u^* < 1. \tag{14}$$

Тогда

$$k = \frac{1-u^*}{u^*} = \frac{1}{u^*} - 1 = const > 0 . \tag{15}$$

Полученные прямолинейные точные частные решения классической ограниченной задачи трех тел (1) – (3) являются расширением известных частных решений Эйлера на целый класс решений зависящей от одного параметра k. В частности, если $k = m_1 / m_3$, то имеем три классические прямолинейные решения Эйлера[1-2].

Список литературы

[1] *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978 г. – 312 с.

[2] *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982 г. – 656 с.

[3] *Dvorak R., Lhotka Ch.* Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems. WILEY-VCH Verlag GmbH&Co.KGaA, 2013. –309 p.

[4] *Морбиделли А.* Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. – М. – Ижевск: Инст. компьют. иссл., 2014 г. – 432с.

[5] *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука, 1967. - 524 с.

[6] *Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.* Новые уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной системе координат. // Вестник КазНПУ, серия «физ.мат. науки» №1 (49), 2015 г., стр. 62-68.

О ПРИМЕНЕНИИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Мирманова Ж.К., Кусаинова А.А.
Атырауский государственный университет, КАЗАХСТАН

В работе обоснован вариационный метод для математической модели изотермической фильтрации с учетом капиллярных сил и получены результаты для адаптаций математических моделей при разработке конкретных нефтяных месторождений. Построены вычислительные алгоритмы для численной реализаций на ЭВМ рассматриваемую математическую модель. Из результатов работ [1-3] известно, что в основу теории фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде положены следующие аналоги законов Дарси и уравнений неразрывности для каждой из фаз:

$$\vec{v}_i = -K_i(\nabla P_i + \rho_i \cdot \vec{g}), \quad \frac{\partial}{\partial t}(m \cdot \rho_i \cdot s_i) + div(\rho_i \cdot \vec{v}_i) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

где $\vec{v}_i$, P_i, ρ_i и s_i – соответственно фазовые объемные расходы (скорости фильтрации), давления, $m(x)$ – пористость среды. В случае несжимаемости жидкости считается, что давления отличаются на величину капиллярного давления:

$$P_2 - P_1 = P_k(x, s_1). \tag{2}$$

Можно рассматривать систему уравнений относительно $s(x,t), P(x,t)$:

$$\frac{\partial(ms)}{\partial t} = div(k_0 \cdot a(s) \cdot \nabla s + k_1 \cdot \nabla P + \vec{f}_0), \tag{3}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{K} \cdot \nabla \mathrm{P} + \vec{\mathrm{f}}) = 0 \tag{4}$$

или эквивалентную систему для $s(x,t), P(x,t), \vec{v}(x,t)$:

$$\frac{\partial(ms)}{\partial t} = div(k_0 \cdot a(s) \cdot \nabla s - b \cdot \vec{v} + \vec{F}), \tag{5}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{K} \cdot \nabla \mathrm{P} + \vec{\mathrm{f}}) = 0, \quad \vec{\mathrm{v}} = -(\mathrm{K} \cdot \nabla \mathrm{P} + \vec{\mathrm{f}}). \tag{6}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_{2T}} = -(k_0 \cdot a \cdot \nabla s + k_1 \cdot \nabla P + \vec{f}_0) \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_{2T}} = 0, \tag{7}$$

и суммарный расход

$$\vec{v} \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_{2T}} = -(K \cdot \nabla P + \vec{f}\,) \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_{2T}} = V(x,t) \tag{8}$$

или давление вытесняемой фазы:

$$P_2\Big|_{\Gamma_{2T}} = P_{2_0}(x,t). \tag{9}$$

Исходя из результатов работы [1] на Γ_1 до момента прорыва можно аналогично (7), (8) задавать отсутствие потока вытесняющей жидкости и суммарный расход смеси:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_{1T}} = -(K \cdot \nabla P + \vec{f}\,) \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_{1T}} = V(x,t), \ \vec{v}_2 \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_{1T}} = 0 \tag{10}$$

$$s(x,t)\Big|_{t=0} = s_0(x). \tag{11}$$

На основе вариационного принципа строятся алгоритмы поиска приближенных решений задачи (5) – (8), (11). Для приближенного решения вариационной задачи построим систему функций:

$$\begin{gathered} s_n(x,t) = \omega(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \cdot \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \cdot \psi_k(x), \\ \psi_k(x) = \omega(x) \cdot \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = x_1^i \cdot x_2^j \quad (\mathrm{i} + \mathrm{j} \le \mathrm{n}), \quad \mathrm{c_k}(t) \in R^1 \times (0, T), \end{gathered} \tag{12}$$

полную в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, где функция $\omega(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям: $\omega(x) > 0, x \in \Omega; \omega(x) < 0, x \notin \Omega;$ $\lfloor \nabla\omega \rfloor \neq 0, x \in \partial\Omega.$ Исходя из метода регуляризации получим конечномерные задачи оптимизации. Строятся минимизирующие последовательности вида:

$$\bar{s}_n^N(t_j^p, x) = \frac{1}{2}(s_n^N(t_j^p, x) + h_*^j - \left|s_n^N(t_j^p, x) - h_*^j\right|), \quad h_*^j \in \Delta_m^j,$$

$$\Delta_m^j : 0 < h_1^j \le h_2^j \le h_3^j \le \ldots \le h_k^j \le \ldots \le h_m^j = \max_{\Omega} s_n^N(t_j^p, x),$$

$$\Phi_j^p(h_*^j) = \min[\Phi_j^p(\bar{s}_n^N(t_j^p, x), \bar{s}_n^N(t_{j-1}^p, x)) : h^j \in \Delta_m^j].$$

Функции $\bar{s}_n^N(t_j^p, x)$ получаются из функций $s_n^N(t_j^p, x)$ срезыванием из локальных максимумов горизонтальными плоскостями по h.

В силу предполагаемой гладкости для данных задачи (5) – (8), (11) справедливы

Теорема 1. Если существует предел последовательности $\bar{s}(\{\Delta t_j^p\}, t, x)$ при $p \to \infty$, не зависящей от способа разбиения отрезка [0, T], то этот предел является решением нестационарной задачи и справедлива оценка:

$$\left|\bar{s}(\{\Delta t_j^p\}, t, x) - s(t, x)\right| < M \cdot \max\sqrt{\Delta t_j^p}.$$

Окончательно по схеме получения двойственных функционалов для стационарных задач и введением условия размораживания дифференциальных связей функционалы можно представить как верхнюю грань по произвольным гладким функциям μ и θ:

$$\Phi_j^p(s, s^{j-1}) = \sup_{\mu,\theta}\left\{\Phi_j^p(s, s^{j-1}) + G_1(\mu,\theta) - G_2(\mu,\theta)\right\},$$

$$\inf_{s} \Phi_j^p(s, s^{j-1}) = \inf_{s} \sup_{\mu,\theta} L_j^p(s, s^{j-1}, \mu, \theta), \tag{13}$$

$$L_j^p(s, s^{j-1}, \mu, \theta) = \Phi_j^p(s, s^{j-1}) + G_1(\mu,\theta) - G_2(\mu,\theta).$$

Приведенные соотношения в (13) позволяют исследовать двойственную задачу и получить окончательное утверждение относительно исходной задачи (5) – (8), (11).

Теорема 2. Если справедливо утверждение теоремы 1 и градиенты функционала $L_j^p(s, s^{j-1}, \mu, \theta)$ по μ и θ отличны от нуля, то имеет место следующее равенство:

$$\inf_{s} \Phi_j^p(s, s^{j-1}) = \sup_{\mu,\theta} L_j^p(s, s^{j-1}, \mu, \theta). \tag{14}$$

Доказательство основано на построении приближенных решений в конечномерных пространствах функций, порождаемых системами линейных независимых элементов, затем строятся минимизирующие последовательности с помощью процесса Ньютона.

Список литературы

[1] Жумагулов Б.Т., Зубов Н.В., Монахов В.Н., Смагулов Ш.С. Новые компьютерные технологи в нефтедобыче. - Алматы: Гылым, 1996. - 167 с.

[2] Жумагулов Б.Т., Мухамбетжанов С.Т., Шыганаков Н.А. Моделирование вытеснения нефти с учетом массообменных процессов: Монография. – Алматы: КазгосИНТИ, 2004. - 252 с.

[3] Смагулов Ш.С., Мухамбетжанов С.Т., Баймиров К.М. Разностные схемы для моделирования двухмерных уравнений Маскета-Леверетта на нерегулярной сетке // Доклады 3-й Казахстанско-Российской научно-практической конференции, 19-20 октября 2000г. – Алматы, -С.43-48.

ОБ ИНТЕГРАЛАХ СТОЛКНОВЕНИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИИ

Сариев А.Д., Жубанова Н.Ж., Байдешова Г.М., Амангалиева А.К.
Атырауский университет имени Х. Досмухамедова, КАЗАХСТАН
E-mail: arailym84@mail.ru

Аннотация. В статье изложены основные вопросы исследования локальных свойств интеграла столкновений и классического решения нестационарного уравнения переноса излучения, рассматриваемого в многозонной области из R_3.

Доказана теорема существования и единственности классического решения прямой задачи.

Основные исследования локальных свойств классических решений стационарной задачи переноса внесла Т.А.Гермогенова (2).

В статье изучены дифференциальные свойства интеграла столкновений и теорема существования и единственности классического решения прямой задачи.

Уравнение переноса рассмотрено при следующих предложениях (1-4):

1) все частицы имеют одинаковые по модулю скорости,
2) поток частицы из вакуума на внешнюю границу отсутствует,
3) индикатриса рассеяния $\theta\left(\vec{r},\vec{\omega},\vec{\omega}'\right)$ представлена в виде $\theta\left(\vec{r},\vec{\omega},\vec{\omega}'\right)=(4\pi)^{-1}\delta_S(\vec{r})g(\mu_0)$, где μ_0-косинус угла между направлениями $\vec{\omega}$ *и* $\vec{\omega}'$, т.е. $\mu_0=\left(\vec{\omega},\vec{\omega}'\right)$.

При этих предложениях уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu=Su+f \tag{1}$$

Здесь $u=u(t,\vec{r},\vec{\omega})$ - функция распределения частиц, $f=f(t,\vec{r},\vec{\omega})$ - функция источника, $\delta=\delta(\vec{r})$, $\delta_S=\delta_S(\vec{r})-(4\pi)^{-1}g(\mu_0)$ - индикатриса рассеяния, $\vec{r}=(x,y,z)$ - пространственные координаты, $\vec{\omega}=(\xi,\eta,\zeta)$ - точки единичной сферы Ω со сферическими координатами $\xi=\sin\theta\cos\varphi,\ \eta=\sin\theta\sin\varphi,\ \zeta=\cos\theta,$

$$Lu=(\vec{\omega},grad\,u)+\delta(\vec{r})u,$$

$$Su=\frac{\delta_S(\vec{r})}{4\pi}\int\limits_{\Omega}g(\mu_0)u(t,\vec{r},\vec{\omega}')d\vec{\omega}'$$

Для однозначной разрешимости к уравнению (1) необходимо присоединить начальное распределение частиц

$$u(0,\vec{r},\vec{\omega})=\Phi(\vec{r},\vec{\omega}), \tag{2}$$

и режимы на внешней границе и на границе раздела зон

$$u(t,\vec{r},\vec{\omega})=0,\ \ \vec{r}'\in\partial\overline{G},\ \ (\vec{n}_{\vec{r}'},\vec{\omega})<0 \tag{3}$$

$$\lim_{\tau\to t_m^*+0}u(\tau,\vec{r},\vec{\omega}(t-\tau),\vec{\omega})=\lim_{\tau\to t_m^*-0}u(\tau,\vec{r},\vec{\omega}(t-\tau),\vec{\omega}),\quad m=\overline{2,M}. \tag{4}$$

Пусть $\overline{\Pi}_j=[0,T]\times\overline{G}_j,\quad \tilde{\Pi}_j=\overline{\Pi}_j\setminus\left\{\{0\}\times\partial G_j\right\},\quad j=\overline{1,J}.$

$C(\tilde{\Pi}\times\Omega)$ – класс функции $f(t,\vec{r},\vec{\omega})$, непрерывных в каждом множестве $\tilde{\Pi}_j\times\Omega,\ j=\overline{1,J}$ и таких, что

$$\max_j\sup_{\tilde{\Pi}_j\times\Omega}\left|f(t,\vec{r},\vec{\omega})\right|=\overline{f}<\infty.$$

Всюду в статье будем полагать, что данные задачи $\delta, \delta_S, \Phi, f$ обладают определенной гладкостью в каждом из зон G_j, а также считать, что выполнены естественные ограничения:

1) $0 \le \delta_S(\vec{r}) \le \delta(\vec{r}) \le \overline{\delta} < \infty$,
2) $g(\mu_0) \ge 0, \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} g(\mu_0) d\vec{\omega}' = 1.$

Теорема 1.1. Пусть

$$g(\mu_0) \in C([-1,1]),\ \delta(\overline{r}),\ \delta_S(\overline{r}) \in C(\overline{G_j}), \quad \Phi(\overline{2,10}) \in C(\overline{G_j} \times \Omega),$$
$$f(t, \overline{r}, \overline{\omega}) \in C(0,T] \times \overline{G_j} \times \Omega),\ j = \overline{1, Y}$$

и

$$0 \le \delta_S(\overline{r}) \le \delta(\overline{r}), \tag{5}$$

тогда существует единственное решение задачи (1)-(4).

Список литературы

[1] Владимиров В. С. Особенности решения уравнения переноса.// ЖВМ и МФ, 1968, т. 8, №4, с. 842-851.

[2] Гермогенова Т. А. Локальные свойства решения уравнения переноса. М.: Наука, 1986. –272 с.

[3] Султангазин У. М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. –Алма-Ата: Наука, 1979. –269 с.

[4] Сариев А. Д. Глобальная теорема об устойчивости решения обратных задач нестационарного уравнения переноса. Доклады АН РК, №1, 2001г.

О ПОСТРОЕНИИ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

Тлеубергенов М.И., Ажымбаев Д.Т.
Институт математики и математического моделирования, КАЗАХСТАН
E-mail: marat207@mail.ru

Строится множество силовых функций так, чтобы аналитически заданное множество, не зависящее от скоростей и при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями, было интегральным многообразием стохастического уравнения лагранжевой структуры.

По заданному множеству

$$\Lambda(t): \lambda(x,t) = 0, \quad \lambda \in R^m \quad x \in R^n, \quad \lambda \in C_{xt}^{22} \tag{1}$$

требуется построить обобщенную силовую функцию $U = U(x, \dot{x}, t)$ так, чтобы заданное множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием стохастического уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \sigma'_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}_j, \quad \left(\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}\right), \tag{2}$$

Здесь $\{\xi_1(t,\omega), \ldots, \xi_r(t,\omega)\}$ - системы случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [1], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(y) P^0(t, dy)$, где

$\xi = (\xi_1(t,\omega),\dots,\xi_r(t,\omega))^T$, ξ_0 – векторный винеровский процесс; P^0 – пуассоновский процесс; $P^0(t,dy)$ – число скачков процесса P^0 в интервале [0, *t*], попадающих на множество dy; $c(y)$ - векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^r процесса $\xi(t)$ при любом *t*.

Ранее в [2] рассматривались задачи построения уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1) в классе обыкновенных дифференциальных уравнений

Предварительно для решения поставленной задачи на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3, 4] в сочетании с методом Еругина [5] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [1] строится уравнение Ито

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \qquad (3)$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (1) являлось интегральным многообразием построенного уравнения (3).

Предполагаем, что n-мерная вектор-функция $f(x,\dot{x},t)$ и $(n\times r)$ матрица $\sigma(x,\dot{x},t)$, непрерывны по t и липшицевы по x, $\dot{x}$ во всем пространстве $R^{2n} \ni z = \left(x^T,\dot{x}^T\right)^T$, что обеспечивает в R^{2n} существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(t_0) = z_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [1].

На втором этапе затем по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой структуры.

И на третьем этапе в предположении, что обобщенный лагранжиан имеет вид

$$L = T(x,\dot{x},t) + U(x,\dot{x},t),\ \text{где}\ T = a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j,\quad \left(i,j=\overline{1,n}\right), \qquad (4)$$

искомую силовую функцию определим в виде

$$U(x,\dot{x},t) = L(x,\dot{x},t) - a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j. \qquad (5)$$

По правилу стохастического дифференцирования Ито составляются уравнения возмущенного движения $\ddot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(f+\sigma\dot{\xi}\right) + \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} + 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}$ и, следуя методу Еругина [3], вводятся произвольная вектор-функция A и матрица B, обладающие свойствами $A(0,0,x,\dot{x},t)\equiv 0$, $B(0,0,x,\dot{x},t)\equiv 0$, и такие, что $\ddot{\lambda} = A(\lambda,\dot{\lambda},x,\dot{x},t) + {} + B(\lambda,\dot{\lambda},x,\dot{x},t)\dot{\xi}$. Сравнивая эти уравнения приходим к соотношениям $\frac{\partial\lambda}{\partial x}f = A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma = B$, из которых методом квазиобра-

щения [3,4] определим вектор-функцию f и столбцы σ_i матрицы σ

$$f = k\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^+\left(A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right), \sigma_i = s_i\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^+ B_i, \qquad (6)$$

где $\sigma_i = (\sigma_{1i},\sigma_{2i},\dots,\sigma_{ni})^T$ – i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j}),\ \left(\nu=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,r}\right)$; $B_i = (B_{1i},B_{2i},\dots,B_{mi})^T$ – i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu j})$, $\left(\mu=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,r}\right)$, s_i, k – произвольные скалярные величины.

Доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Для непрямого построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры (2) по заданному множеству (1) с обобщенным лагранжианом вида (4) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно, чтобы обобщенная силовая функция $U = U(x, \dot{x}, t)$ удовлетворяла условиям (7)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} = h_\nu^k - a_{\nu k}; \quad \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} \dot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} + h_\nu^k f_k,$$

$$\sigma'_{\nu j}(x, \dot{x}, t) = h_\nu^k \sigma_{kj}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{S}_{1\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj}, \quad \tilde{S}_{2\nu} = \int \{ \frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu} \} dy,$$

$$S_{3\nu} = \int [\frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu}] \dot{P}^0(t, dy),$$

а вектор-функция f и столбцы σ_i матрицы σ - условию (6).

Список литературы

[1] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

[2] *Туладхар Б.М.* Построение уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения: автореф. … к. ф.-м. н.: 01.01.02. – М.: УДН, 1983. –11 с.

[3] *Мухарлямов Р.Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. – М., 2003. – Т. 39, № 3. – С. 343-353.

[4] *Тлеубергенов М.И.* Обратные задачи стохастических дифференциальных систем: автореф. … д. ф.-м. н.: 01.01.02. – Алматы, 1999. – 33 с.

[5] *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. – М., 1952. – Т.10, вып. 6. – С. 659-670.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА

Тунгатаров А.Б., Рзаева Г.К.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

Аннотация. Предлагается новый метод решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В работе рассматривается способы преподавания указанного метода для магистрантов и бакалавров. Приведены примеры решений различных дифференциальных уравнений.

Авторы предлагают новый метод построения дифференциальных уравнений n-го порядка $(n \geq 1)$ с переменными коэффициентами. К таким уравнениям относятся, например, уравнения вида

$$y^{(n)} + p(x)y = f(x),$$
$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x),$$
$$y'' - \frac{\beta}{x^\alpha} y = 0, \qquad y'' + a(x)y = f(x, y)$$

и системы уравнений

$$u' = f(t)u - g(t)v, \qquad v' = g(t)u + f(t)v;$$

$$u' = f(t)u + g(t)v + h(t), \qquad v' = g(t)u - f(t)v + q(t);$$

$$u^{(n)} = f(t)u - g(t)v + h(t), \qquad v^{(n)} = g(t)u + f(t)v + q(t);$$

$$u' = f(t)u + g(t)v + h(t,u,v), \qquad v' = g(t)u - f(t)v + q(t,u,v).$$

В этих уравнениях коэффициенты уравнений не обязательно являются непрерывными функциями, нелинейные функции непрерывны по совокупности переменных. В ходе построения решений получены интегральные представления с n кратными интегралами. После этого число n устремим к бесконечности. Тогда все интегральные члены с неизвестной функцией исчезают и представление превращается в формулу, которая дает общее решение. С помощью нового метода решаются задачи Коши, многоточечные краевые задачи, доказываются разрешимость некоторых нелинейных задач уравнений математической физики, геометрии и механики. $[1-3]$. По полученным результатам изданы две книги $[4,5]$, которые полезны для студентов, магистрантов, докторантов PhD и специалистов, использующих теорию дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K., Danaev N.T. Elliptic systems in the plane with singular coefficients along lines//TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 2012,v.3, №1.p.3-9.

[2] Tungatarov A., Seilgarin D.K. Adout a class of n-order elliptic systems in the plane with a singular line and Fuch operator in the differential part//Adv. Pure Appl.Math.2(2011), 289-296.DOI 10.1515/APAM.2011, 004(Germany).

[3] Abdymanapov S.A., Tungatarov A. An initial problem for a class of second order elliptic sistems in the plane with a singular point//Complex variables an elliptic equation.An International Journal.-v.52.-№8, Agust, 2007, p.656-661.

[4] *Тунгатаров А.Б.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие. Алматы."Қазақ университеті", 2015. 129с.

[5] *Тунгатаров А.Б.* Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Учебное пособие. Алматы."Қазақ университеті",2013.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ДВУМЯ ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уаисов А.Б., Дауылбаев М.К.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: uaisov.alpamys@mail.ru, dmk57@mail.ru

Исследуется асимптотическое поведение решений двухточечной интегральной краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с малыми параметрами при двух старших производных, когда корни дополнительного характеристического уравнения имеют противоположные знаки. Установлены, что производные решения на концах рассматриваемого отрезка являются бесконечно большими разных порядков при достаточно малых значениях параметра. Мы говорим, что в данном случае имеет место явление граничного скачка.

Рассмотрим на отрезке [0,1] следующее линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром при двух старших производных:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) \tag{1}$$

с интегральными краевыми условиями

$$y(0,\varepsilon) = \alpha\,, \quad y'(0,\varepsilon) = \beta\,, \qquad y(1,\varepsilon) = \gamma + \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} a_i(x) y^{(i)}(x)dx\,, \tag{2}$$

где ε > 0 – малый параметр, а α, β , γ – известные постоянные, не зависящие от ε .

Пусть справедливы следующие условия:

I. Функции $A(t),\ \ B(t),\ \ C(t),\ F(t), a_i(t), i = 1,2$ являются достаточно гладкими на отрезке $0 \le t \le 1$.

II. Корни дополнительного характеристического уравнения $\mu^2 + A(t)\mu + B(t) = 0$ удовлетворяют неравенствам $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0,\ \ \mu_2(t) > \gamma_2 > 0$.

III. $a_1(1) \ne 0.$

Двухточечные краевые задачи для линейных обыкновенных и интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с малыми параметрами при двух старших производных, когда корни дополнительного характеристического уравнения отрицательны, рассмотрены в работах [1], [2], [3], [4]. Аналогичные краевые задачи для обыкновенных и интегро-дифференциальных уравнений, в случае выполнения условия II, исследованы в работах [5], [6], [7].

В настоящей работе для линейного дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производных (1) рассматривается интегральная краевая задача вида (2). Получены асимптотические по малому параметру оценки решения в виде следующей теоремы.

Теорема. Если выполнены условия I-III, то для решения y(t,ε) и их производных интегральной краевой задачи (1), (2) имеют место следующие асимптотические оценки при $\varepsilon \to 0$:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|) + \frac{C}{\varepsilon^{i-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}}(|\alpha| + |\beta| +$$

$$+ \max_{0\le t\le 1}|F(t)|) + \frac{C}{\varepsilon^{i}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| + \varepsilon \max_{0\le t\le 1}|F(t)|), \quad i = \overline{0,2},$$

где C > 0 – некоторые константы, не зависящие от параметра ε .

Из данной теоремы следует, что для решения интегральной краевой задачи (1), (2) в левой точке t = 0 имеет место явление начального скачка первого порядка, а в правой точке t = 1 имеет место явление начального скачка нулевого порядка, т.е. $y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), y'(1,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), y''(1,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \varepsilon \to 0$. В данном случае говорим, что для решения интегральной краевой задачи (1), (2) имеет место явление граничного скачка.

Список литературы

[1]. Касымов К.А., Шарипова Ж.У. Асимптотические оценки решения краевой задачи для сингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник КазГУ им. С.М. Кирова. Сер. мат. – Алма-Ата, 1993. – Вып.1. – С. 146-150.

[2]. Касымов К.А., Жакипбекова Д.А., Нургабыл Д.Н., Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия мат., мех. и инф. - 2001. - №3 – С. 73-78.

[3]. Дауылбаев М.., Әділбекова М. Ж. Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулер үшін интегралды шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы. / Қазақстан Республикасы ұлттық ғылым академиясының хабарлары. Физика-математика сериясы. №4 (296). 2014. Б. 172-175.

[4]. Абдикеримова Ж.К. , Валиолда А.С. Сингулярлы ауытқыған теңдеулер үшін бастапқы секірісті шеттік есептер // Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики и информатики» посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН РК Касымова К. А., Алматы 21-23 декабря 2015 г. С. 5.

[5]. Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б. О граничных скачках линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Вестник ЖГУ им. И. Жансугурова. – 2012. - №4. – С. 17-21.

[6]. Мирзакулова А.Е., Дауылбаев М.К. Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін қос шекаралық қабатты шеттік есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы // Вестник КазНУ им. аль–Фараби, серия мат., мех., инф., - 2013. - Т. 76, – № 1. – С. 35 – 42.

[7]. М. К. Дауылбаев, А. Е. Мирзакулова Краевые задачи с начальными скачками для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. // Журнал «Нелинейные колебания». Украина. 2016 г. Том 19. №1. С. 11-21.

STABILITY OF PROGRAM MANIFOLD, WITH A COMPACT NEIGHBORHOOD OF CONTROL SYSTEMS

Zhumatov S.S.

Institute of mathematics and mathematical modellibg, KAZAKSTAN

E-mail: sailau.math@mail.ru

The problem of determining the stability of the program manifo0ld of automatic control systems, with a compact neighborhood is considered. The sufficient conditions of absolute stability of the program manifold, which has a compact neighborhood, are obtained by means of construction of the infinitely small upper limit Lyapunov function.

We consider the problem of construction of the stable automatic control systems by given program manifold $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$ [1]:

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi, \quad \sigma = P^T\omega, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence and uniqueness of a solution $x = x(t)$, $B \in R^{n\times r}$, $P \in R^{s\times r}$ are matrices, $\omega \in R^S$ $(s \le n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a vector-function of control on deviation from the given program manifold

$$\varphi^T\theta\left(\sigma - K^{-1}\varphi\right) > 0, \theta = diag\|\theta_1, \dots, \theta_r\|, K = K^T > 0. \tag{2}$$

Because Ω is the integral manifold of the system (1), then at $F(t,x,\omega) = -A\omega$ we have

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \xi = \varphi(\sigma), \sigma = P^T\omega, H = \frac{\partial\omega}{\partial x}. \quad (3)$$

where $F(t,0,u) \equiv 0$ is some s -vector-function; when the system (3) is closed; $\xi = \xi(\omega,t)$ is a set of feedback laws [5].

We introduce the following definitions [2-3]:

Definition 1. We call the distance from the point x to the manifold $\Omega(t)$ an expression $\rho(x, \Omega(t)) = \inf\limits_{y(t)\in\Omega(t)} \rho(x, y(t))$.

Definition 2. We call ε - neighborhood of the manifold $\Omega(t)$ the set of points x satisfying a condition $\rho(x, \Omega(t)) \le \varepsilon$ for all $t \ge t_0$.

Definition 3. The manifold $\Omega(t)$ has a compact neighborhood $\Omega_\varepsilon(t)$, if there is such $h > 0$ that the set of points $\Omega_h(t)$ is compact at all $t \ge t_0$.

Definition 4. Limited vector-function ω admit an infinitely small upper limit, if for any arbitrarily small $\delta > 0$, there exits $\gamma > 0$ such that for all $\rho(x, \Omega(t)) \le \gamma$ and $t \ge t_0$ the inequality $\|\omega\| \le \delta$ is valid.

Definition 5. If a bounded function $V(t, x, \omega)$ such that for any arbitrarily small $l > 0$, there exists a non-zero value $\delta < \delta_1$ that for t, x, ω satisfying to inequalities

$$\|\omega\| \le \delta, \ \ \rho(x, \Omega(t)) \le L, \ t \ge t_0,$$

will be hold restriction $|V| < l$, then the function V has an infinitely small upper limit.

Problem Statement: To obtain the condition for absolute stability of program manifold with a compact neighborhood $\Omega_\varepsilon(t)$ of automatic control systems.

We will investigate a case, when $\|\omega\| = \rho(x, \Omega(t))$.

Replacing $\varphi(\sigma) = h\sigma; h \le K$ in the system (3) we receive

$$\dot{\omega} = -(A + HBhP^T)\omega \quad \forall\, h \in (0, K]. \quad (4)$$

We form the characteristic equation for the system (4)

$$\delta(p, \lambda) = |A + HBhP^T + \lambda E| = 0. \quad (5)$$

Let $\delta(p, \lambda) = \sum\limits_{i=0}^{s} a_i(h)\lambda^{s-i}$. We form Hurwitz matrix from coefficients of the characteristic polynomic.

Theorem 1. The program manifold of automatic control systems (1), with a compact neighborhood $\Omega_\varepsilon(t)$, asymptotically stable on the whole, if and only if the following conditions are satisfied

$$\Delta_j(h) > 0 \quad \forall\ j_1^s. \quad (6)$$

Now, for the system (3) we construct a Lyapunov function

$$V = \omega^T L\omega + \int\limits_0^\sigma \varphi^T \beta d\sigma; L = L^T > 0; \beta = diag\|\beta_1, \ldots, \beta_r\|. \quad (7)$$

Making replacement $\varphi(\sigma) = h\sigma; h \le K$ in the second term, we receive $J = \dfrac{\sigma^T h\beta\sigma}{2}$. The derivative of the function (7) after the application of the s - procedure takes the form

$$-\dot{V} = \omega^T G\omega + 2\omega^T C\varphi + \varphi^T C_1\varphi + S > 0, \quad (8)$$

Then, in view of (7), (8) we have

$$l_1(h)R^2 \le V \le l_s(h)R^2, R^2 = \|\omega\|^2, \quad (9)$$

$$\gamma_1\left(\|\omega\|^2+\|\varphi\|^2\right)\le z^TQz\le\gamma_{s+r}\left(\|\omega\|^2+\|\varphi\|^2\right)z=\left\|\begin{matrix}\omega\\ \varphi\end{matrix}\right\|. \qquad (10)$$

Since the inequality (10) holds for the system (3) we obtain from (9) the following estimation on the sphere R

$$\|\omega\|^2\le R^2\exp\alpha_2(t-t_0). \qquad (11)$$

Theorem 2. The program manifold with a compact neighborhood of automatic control system (1) is asymptotical stable under performing of conditions (9), (10) and (11).

CONSTRUCTION OF THE SURFACE BY GRAPHICAL METHODS

Zhunussova Zh.Kh., Dosmagulova K.A.
Al-Farabi Kazakh National University, KAZAKHSTAN
E-mail: zhzhkh@mail.ru

Abstract. In order to solve some problems is not enough to work only with the theorems and their consequences of the geometry. In this case, construction problems have an important role. In this work, we consider some problems of the task for construction circles [1]-[6].

To solve this problem we use packages of the Maple program. First of all, we have to know about evaluation of real expressions. The Maple provides the following commands evaluation real expression: frac (expr) - calculation of the fractional part of expr; trunc (expr) - calculation of the integer part of expr; round (expr) - round of expr.

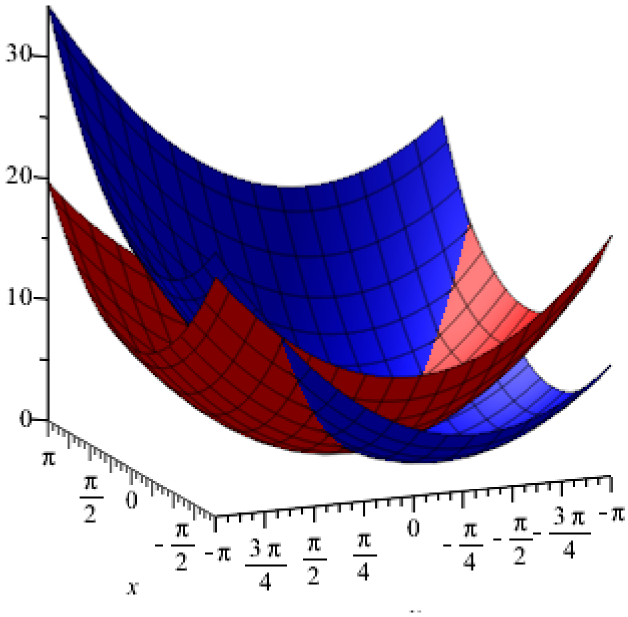
Evaluation of complex expressions: the real and imaginary parts of the complex expression z = x + iy can be found by choosing Re (z) and Im (z).

To solve equations in Maple there is a universal command solve (eq, x), where eq - equation, x - variable with respect to which it is necessary to solve the equation. As a result of this command in the output string expression will be shown, which is the solution of this equation. If the equation has several solutions that you need for the further calculations, the solve command to assign any name. Title to any k-th solution of this equation is produced indicating its name with solutions k number in brackets: name [k]. Systems of equations are solved using the same solve the team ({eq1, eq2, ...}, {x1, x2, ...}), only now to be put in the first braces, separated by commas equation in command parameters, and secondly, the braces are listed separated by commas variables for which you want to solve the system. If you will be required for further calculations to use the solutions of equations, then solve the team to assign any name. Then the assign command assignment (name). Thereafter, over the decisions can perform mathematical operations.

For the numerical solution of equations, in cases where the transcendental equations have no analytical solutions, a special team fsolve (eq, x), the parameters of which are the same as command solve. Command solve applied to solve a trigonometric equation gives only the main solutions, i.e. solutions in the interval [0,2π]. In order to get all the solutions, you should first enter an additional command _EnvAllSolutions: = true. Command solve is also used to address the inequalities. Inequality decision is issued in the form of interval change in the target variable. In that case, if the decision inequality axis, the output field type appears design RealRange (-∞, Open (a)), which means that x∈ (-∞, a), and - a number. Open Word means that range with an open border. If the word is not present, then the corresponding limit of the interval is included in the solution set.

If we have to get a solution of the inequality is not a type of interval sets x∈ (a, b), as well as restrictions for the unknown variable of a <x, x <b, the variable with respect to which the inequality should be allowed, should be indicated in the curly brackets. It is often necessary to combine in one figure more graphic objects obtained with different commands, for example, add graphics, drawn by

the plot command, text labels, obtained textplot command. For this command action the result is assigned to a variable: > P: = plot (...): t: = textplot (...): When this is not output to the screen. To display the graphic images must run from the plots package: > with (plots): display ([p, t], options).



References

[1] Leibnitz G.V., 1948 Selections from the mathematical works. Successes of Mathematical Sciences, v. 3(1). pp. 165-205.

[2] Spivak M., 1971, Mathematical analysis on manifolds. - M.: Mir.

[3] V.A. Zorich, 2002, Mathematical analysis. - M.: MCNMO, p. 244.

[4] Kanguzhin B.E., Imanbaev N.S., 1995. On zeros of entire functions that have an integral representation, Izv. Nats. Akad. Nauk Respub. Kazakhstan. Ser. Fiz.-Math., 3: 47-51.

[5] Zhunussova Zh.Kh., Dosmagulova K.A., 2015, Geometric characteristics of the solitonic solution in the case of finite density // AIP Conference Proceedings. – V. 1676, 020103, 2015. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4930529 (Scopus),

[6] Govoruhin V.N., Zibulin V.G., 1997, Introduction to Maple V. Mathematical package for all. – M.: Mir.

GALERKIN WAVELET ALGORITHM FOR SOLUTION ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abdiakhmetova Z.M.
Al-Farabi Kazakh National University, KAZAKHSTAN
E-mail: zukhra.abdiakhmetova@gmail.com

Wavelet signal transformation, the theory which is founded in the early 90s, is no less common on areas of their applications than the classical Fourier transform. Wavelets are a special function in the form of short waves (wavelets) with zero integral value and the localization of the independent variable axis (t or x), able to shift along this axis and scaling (expansion / compression). Galerkin wavelet technique is the most frequently used scheme these days. Daubechies wavelets as bases in a Galerkin method to solve differential equations require a computational domain of simple shape.

Formulation of the problem. Consider one-dimensional differential equation [1, c. 256]

$$Lu(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{1}$$

with Dirichlet boundary conditions

$$u(0) = a,\ u(1) = b.$$

f is real valued and continuous functions of x on [0,1]. L is a uniformly elliptic differential operator. $L^2([0, 1])$ is a Hilbert space with inner product

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dt$$

Suppose that $\{v_j\}$ is a complete orthonormal system for $L^2([0, 1])$ and that every v_j is C^2 on [0, 1] such that

$$v_j(0) = a,\ v_j(1) = b.$$

Select a finite set Λ of indices j and consider the subspace

$$S = span\ \{v_j : j \in \Lambda\}$$

Let the approximate solution u_s of the given equation be

$$u_s = \sum_{k\in\Lambda} x_k v_k \in S \tag{2}$$

We would like to determine x_k in a way that u_s behaves as if is a true solution on S, i.e.

$$\langle Lus,\ v_j\rangle = \langle f, v_j\rangle\ \forall j \in \Lambda \tag{3}$$

such that the boundary conditions $u_s(0) = u_s(1) = 0$ are satisfied [2,3, c. 410]. Substituting u_s in (2.3),

$$\sum_{k\in\Lambda} \langle Lu_s, v_j\rangle x_k = \langle f, v_j\rangle\ \forall j \in \Lambda \tag{4}$$

Let X and Y denote the vectors $(x_k)_{k\in\Lambda}$ and $(y_k)_{k\in\Lambda} = \langle f, v_j\rangle$, and A the matrix

$$A=[a_{j,k}]_{j\,k\in\Lambda},\quad \text{where}\quad a_{j,k} = \langle Lv_s, v_j\rangle$$

(4) reduces to the system of linear equations [4, c. 16].

References

[1] A. Latto, H.L. Resnikoff and E. Tenenbaum, The Evaluation of Connection Coefficients of Compactly Supported Wavelets, in: Proceedings of the French-USA Workshop on Wavelets and Turbulence, Princeton, New York, 1991, Springer. Verlag, 1992.

[2] Bjorn Jawerth and Wim Sweldens, Wavelets Multiresolution Analysis Adapted for Fast Solution of Boundary Value Ordinary Differential Equations, Proc. 6th Cop. Mount Multi. Conf., April 1993, NASA Conference Pub., 259-273.

[3] Vinod Mishra1, Sabina Wavelet Galerkin Solutions of Ordinary Differential Equations, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 9, 407 – 424

[4] Yu.K.Demyanovich, V.A.Hodakovsky Introduction to the theory of wavelets, St. Petersburg, 2007, 50 p.

ANALYTICAL SOLUTION OF CONTACT PROBLEM ON INTERACTION OF TWO ELASTIC BODIES WITH FUNCTIONALLY GRADED COATINGS

Aizikovich S.M.[1], Leontieva A.V.[1], Vasiliev A.S.[2], Volkov S.S.[2]
[1] Don State Technical University
[2] Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, RUSSIA
E-mail: saizikovich@gmail.com

Axisymmetric contact problem on normal interaction of two smooth elastic spheres with functionally graded coating is considered. Coatings of both bodies have elastic moduli varying with depth by arbitrary functions, independent of each other. Sharp drop or increase of elastic moduli can be specified at interfaces between coating and substrate, which can be used to specify soft or hard coatings. Mathematical formulation of the contact problem is given in the framework of linear theory of elasticity. By using integral transformation technique, the problem is reduced to the solution of a dual integral equation. To solve this equation, we used bilateral asymptotic method [1, 2]. We obtained the solution of the problem in analytical form, which is effective in a wide range of values of geometric and physical parameters of the problem. Influence of different parameters of the problem, such as coatings thickness ratio, coating thickness to contact area radius ratio, ratio of effective elastic moduli of coatings, etc., on elastic compliance and distribution of stresses are analyzed.

This work was supported by grant no. 15-19-10056 of the Russian Science Foundation and grant no. 14.Y30.16.5342-MK of the President of Russian Federation.

References

[1] Aizikovich S. M., Alexandrov V. M., Kalker J. J., Krenev L. I., Trubchik I. S. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties // Int. J. Solids Struct. 2002. Vol. 39, № 10. P. 2745–2772.

[2] Aizikovich S., Alexandrov V., Trubchik I. Bilateral asymptotic solution of one class of dual integral equations of the static contact problems for the foundations inhomogeneous in depth // Modern Analysis and Applications. Birkhäuser Basel, 2009. P. 3-17.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ

Арынова Г.Н., Майханова А.Қ., Талипова М.З.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: s_kabdrachova@mail.ru

В данном сообщении построен параллельный алгоритм численного решения уравнения несжимаемой жидкости в сложных областях. Построенный алгоритм реализован с помощью технологий MPI.

Рассматривается задача движения несжимаемой жидкости вокруг твердого тела на плоском канале. Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости описывается следующим уравнением Навье-стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-ku,$$

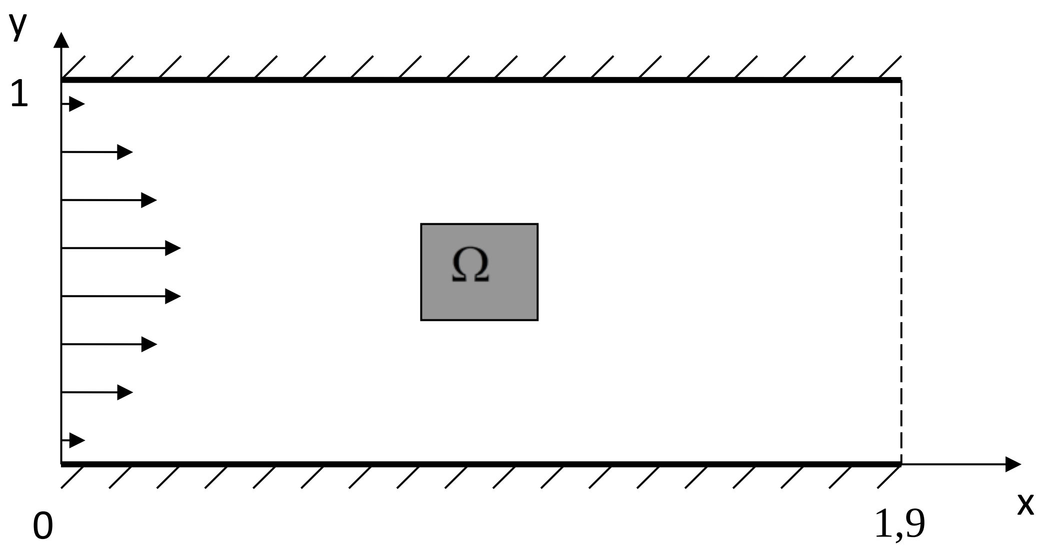
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-kv, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

где

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon},(x,y)\in\Omega\\ 0,(x,y)\notin\Omega\end{cases}$$

ε – малая величина, u, v – вектора скорости, p – плотность, t – время, Re- число Рейнольдса.



Сопаставим граничные условия для уравнений (1):

$$\begin{aligned} &x=0,\quad 0<y\le 1 \ \text{ при } u=6(1-y)y,\ v=0,\\ &0\le x\le 1{,}9,\ y=0 \ \text{ при } u=0, v=0,\\ &0\le x\le 1{,}9,\ y=0{,}5 \ \text{ при } u=0,\ v=0\\ &x=1{,}9,\ 0<y\le 1 \ \text{ при } \frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad v=0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Численные методы решения уравнений Навье-Стокса в процессе своего развития взаимно обогащаются. Поэтому объеденение разных подходов способствует созданию новых или модифициорованных алгоритмов их расчета. Были построены разные алгоримты [1-2]. В данном сообщении развит эффективный параллельный алгоритм численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление в случае несжимаемой жидкости. Путем конечно-разностной аппроксимации получен универсальный дискретный аналог исходных уравнений движения жидкости учитывая твердое тело. Рассчети показали, что процесс установления решена задача о течении жидкости на начальном участке носит асимптотически характер. После того как жидкость переходит твердое тело на его следах появляются вихри. Этот вихр зависит от значения числа Рейнольдса. Чем больше число Рейнольдса вихр увеличивается. А число Рейнольдса прямо пропорциональна скорости и обратно пропорциональна коэффициенту несжимаемости. Поэтому тем больше скорость течения и чем меньше коэффициент несжимаемости вихр увеличивается. Для нахождения численного решения последовательному алгоритму используется методы перменного направления и прогонки. Для нахождения функции тока применяется метод релаксации. Анализ эффективности, ускорения последовательных и параллельных алгоритмов показывают что параллельный алгоритм дает лучший результат при большем размере рассматриваемой системы.

Список литературы

[1] Е.В. Буряцкий, А.Г. Костин, Е.Ю.и др. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление // Прикладная гидромеханика. 2008. Том 10. № 2. С. 13-23.

[2] Д.В. Деги, А.В. Старченко Численное решение уравнений Навье-Стокса на компьютерах с параллельной архитектурой. Вестник ТГУ, серия матем.мех. 2012. №2(18). С. 88-98.

ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В МАШИННОМ ПЕРЕВОДЕ И ЕЕ КОМБИНАЦИЯ С ДРУГИМИ ТИПАМИ НЕЙРОНННЫХ СЕТЕЙ

Астанакулов Е.И.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: ernur.astanakulov@mail.ru

Многие десятилетия ученые, специалисти в области информатики, вычеслительной техники и др. имеют цель достичь чистого перевода естественного языка. Благодаря упорному труду, вышли свет многие системы переводы. В настоящее время можно выделить 3 основных типа машинного перевода. Первый тип: полностью автоматическое, второй тип: автоматизированный машинного перевода при участии человека и третий тип: перевод, осуществляемый человеком, с использованием компьютера. Если углубиться в первый тип то, ее можно поделить на следующие большие группы:

1. Основанные на правилах
2. Основанные на примерах
3. Статистические
4. Гибридные

Данные группы имеют свои преимущества так и недостатки, поэтому все еще чистого стопроцентного перевода еще не имеем. А стопроцентный перевод естественного языка всегда будет интересовать любознательных людей и ученых. Таким образом, в последнее время многие ученые с большим интересом иследуют нейронные сети.

Нейронные сети по своей природе несколько иная, но есть и схожесества с другими методами. Нейронные сети можно построить конкретно под любые задачи и обучить его. На сегодняшный день мир имеет более сотни уникальных схем нейронных сетей машинного перевода. А именно рекурентные нейронные сети популярны тем, что они имеют высокую входную параметр и высокую выходную переменную длину. Это дает большое количество обработки и запоминания нужных параметров.

Разработаны множества проектов, библиотек для рекурентных и для других нейронных сетей во многих языках программирования. Таких как: C#, Pyton, JavaScript и т.д.

Основными особенностями нейронных сетей является их еще и соовместимость с другими методами машинного перевода. Она дополняет качество перевода и использовать меньше ресурсов.

Список литератур

[1] Саймон Хайкин. Нейронные сети. Полный курс – Вильямс, 2006. – 1104 с. – ISBN 5-8459-0890-6.

[2] Владимир Круглов, Вадим Борисов. Искусственные нейронные сети. Теория и практика // Горячая Линия - Телеком, 2001 – 382 с. – ISBN 5-93517-031-0.

[3] В.А.Головко. Нейронные сети: обучение, организация и применение – ИПРЖР, 2002. – 256 с. - ISBN 5-93108-05-8

ТАУАРЛАРДЫ МЕКЕН-ЖАЙҒА ЖЕТКІЗУДІҢ БИЗНЕС ПРОЦЕССТЕРІН АВТОМАТТАНДЫРУ

Байкувекова Аида
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: baykuvekova@bk.ru

Соңғы кезде адам өмірінің барлық салаларында ақпараттың көлемі мен айналымы айтарлықтай өсті: экономикалық, қаржылық, саяси, рухани. Және білімді жинау, өңдеу және қолдану тұрақты артуда. Зерттеушілер, әр он жылда ақпарат көлемі екі есеге жеделдетіледі деп сендіріп отыр. Осыған байланысты жиналған деректерді тиімді сақтауға, өңдеуге және таратуға мүмкіндік беретін автоматтық құралдарды қолдану қажеттілігі туындайды. Автоматтандырылған жүйелерге өңделетін ақпараттар түседі, және алынған нәтижелер сондай-ақ ақпарат түрінде ұсынылады. «Қойма есебі» және «Транспорттық есептер» автоматтандыру жүйесінің жобасын жүзеге асыру қоймадағы қызметкерлердің жұмысын айтарлықтай жеңілдетеді және қағаз құжаттарын өңдеудің алуан түрлерімен айналысатын адам ресурстарынан босату есебінде басқаруға кеткен шығынды азайтуға, деректерді кез-келген уақытта сақтауға және талдауға, таңдаудың түрлі критерийлері бойынша қажет ақпаратты іздеуді жүзеге асыруға, сонымен қатар транспорттық есептердің қойылымы арқылы қойманың орнын анықтаумен, тауарларды тапсырыс берушілерге жеткізудің қысқа жолдарын есептеуге мүмкіндік береді. Қойма деп ғимараттарды, құрылыстарды және қабылданған тауарларды қабылдау, сақтау, орналастыру және тарату бойынша операциялардың барлық кешенін жүзеге асыру үшін арнайы технологиялық жабдықтармен жабдықталған алуан түрлі қондырғыларды айтады.Қойманың негізгі міндеті – қорлардың шоғырлануы, оларды сақтау және тұтынушылардың үздіксіз және ырғақты жабдықталуын қамтамасыз ету.[1]

Логистика саласы қазіргі таңда қарқынды даму аясында, логистикалық үрдістердің кеңдігі ең алдымен тауарларды жеткізу, олардың қорларын басқарумен және сатылыммен қамтамасыз етілуімен түсіндірілетін есептер жиынтығы.Бұл мақалада қойма логистикасын толық ашу үшін математикалық үлгісінде имитациялық және аналитикалық моделдеулермен қоса бағалау жоспарлары арқылы қарастырдым.Осы есептерді қолдана отырып біз шыгындарды азайтып, табыс жолдарына жетеміз.Сонымен қатар логистикалық қағидаларды (жоспарлау, жүйелік тәсіл, техникалық жабдықтаудың оңтайлы деңгейі, қойма қуатын қолдану тиімділігі, жабдықтың әмбебаптығы,) қарастырамыз.[2]

Қорыта айтсам, ақпараттарды жинай отырып негізгі модель құру, әдістемелер мен бағдарламалар кешенінің талдау, бағалау және болжау болды. Әзірленген жаңа интеграцияланған модель көрсеткіштерінің жұмыс істеу тиімділігін логистикалық қоймаға және транспорттық есептерге байланыстыру.

Әдебиеттер тізімі

[1] Автоматизация управления предприятием / В. В. Баронов, Г. Н. Калянов, Ю. И. Попов, А. И. Рыбников, И. Н. Титовский. − М : «ИНФРА-М», 2000. − 239 с.

[2] Алесинская Т. В. Основы логистики. Общие вопросы логистического управления / Т.В. Алесинская. − Таганрог : ТРТУ, 2005. 121 с.

РАЗРАБОТКА СПОСОБА УЛУЧШЕНИЯ ПОМЕХОЗАЩИЩЕННОСТИ ПРИЕМНОГО ТРАКТА НАЗЕМНОГО КОМПЛЕКСА УПРАВЛЕНИЯ НАНО И МИКРО-СПУТНИКАМИ

Байсеркенов М.Н.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: m.n.baiserkenov@mail.ru

В последнее время в связи с тенденцией миниатюризации космической техники все чаще для решения научных и технологических задач используются малые космические аппараты – наноспутники. В нескольких ВУЗах Казахстана на текущий момент разрабатываются студенческие научные наноспутники, космический и наземный сегмент которых разработаны на базе коммерческих комплектующих.

Наземный сегмент состоит из наземного комплекса управления, который обеспечивает работу космического сегмента (наноспутника и его полезной нагрузки), и наземного целевого комплекса, который распространяет между пользователями космической системы целевые данные, собранные на борту космического аппарата и принятые на Земле. Одним из основных компонентов наземного комплекса управления является система связи. Кроме того, она является одним из его дорогостоящих компонентов. Приемный тракт наземного комплекса управления малых космических аппаратов относится к радиолюбительскому или среднему классу, в которые вопросы помехоустойчивости решены не полностью в отличие от дорогостоящих профессиональных станций.

В настоящее время с появлением большого количества сотовых операторов и спутникового телевидения остается все меньше свободных частот для работы систем связи наземного комплекса управления наноспутника. Что уменьшает эффективность приемного тракта, а в некоторых случаях сводит его на нет.

Исследование электромагнитной обстановки и увеличение помехозащищенности приемного тракта наземного комплекса управления наноспутника может существенно улучшить электромагнитную совместимость и снизить количество ошибок приема данных и пополнить технологическую базу разработки наземного комплекса управления наноспутников в Казахстане.

Современная компоновка приемного тракта состоит из дешифратора, шифратора, усилителя, модулятора, демодулятора. Передача высоких частот осуществляется на прямую через тракт, что влечет за собой потерю полезных данных и увеличивает шум во всем диапазоне частот. Передача же ультракоротких волн сопровождается меньшей потерей полезного сигнала и имеется возможность передачи данных на более дальнее расстояние.

Способ улучшения помехозащищенности приемного тракта наземного комплекса управления нано и микро-спутниками заключается в применении в структуре приемного тракта гетеродина на высоких частотах, то есть в S-диапазоне. Гетеродин генерирует частоту в противофазе приемной, что в итоге преобразует высокую частоту в частоту ультракороткого диапазона.

КӨП ӨЛШЕМДІ ДИСКРЕТТІ КЕРІ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ БАР БОЛУЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ ШАРТЫ

Баканов Г.Б.
Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: **galitdin.bakanov@ayu.edu.kz**

Жұмыста көп өлшемді кері есепті шешудің шектеулі-айырымдық әдісі қарастырылады. Гельфанд – Левитан әдісінің негізінде шектеулі – айырымдық кері есептің шешімінің бар болуының қажетті шарты көрсетіледі.

Егер $\tilde{V}, Q, \tilde{F}, O, E$ квадратты матрицалары $2N_1$ өлшемді болса, онда көп өлшемді шектеулі-айырымдық кері есептің келесі бір өлшемді шектеулі-айырымдық кері есептер жүйесіне келтірілетіні [1] жұмысында көрсетілген:

$$\left[\tilde{V}_i^k\right]_{t\bar{t}} = \left[\tilde{V}_i^k\right]_{x\bar{x}} - Q_i\tilde{V}_i^k - \frac{1}{2}\left(\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h\right)Q_i, \quad k \ge 1, \quad i \in Z, \tag{1}$$

$$\tilde{V}_i^0 = 0, \qquad \tilde{V}_i^1 = 0, \quad i \in Z, \tag{2}$$

$$\tilde{V}_0^0 = 0, \qquad \tilde{V}_0^1 = 0, \qquad \tilde{V}_0^k = \tilde{F}_{\underset{t}{0}}^k, \quad k > 1 \tag{3}$$

қатынастарынан Q_i-ді табу керек.

Мұндағы $\tilde{F}_{\underset{t}{0}}^k = F_{\underset{t}{0}}^k - \delta_k^h \mathrm{E}$, E - бірлік матрица, 0-нөлдік матрица, ал δ_k^h - Дирак дельта – функциясының дискретті аналогы, яғни

$$\delta_k^h = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, k = 0 \\ 0, k \ne 0. \end{cases}$$

Лемма 1. Айталық W_i^k келесі көмекші

$$W_{t\bar{t}} = W_{x\bar{x}} - Q_i W_i^k, \quad i \ge 1, \quad k \in Z, \tag{4}$$

$$W_0^k = \delta_h^k E, \quad W_1^k = \frac{1}{2}\left(\delta_{k+1}^h + \delta_{k-1}^h\right)E + \frac{h^2}{2}\delta_k^h Q_0, \quad k \in Z, \tag{5}$$

есебінің шешімі болсын, мұндағы W матрицасы да $\tilde{V}$ матрицасы сияқты $2N_1$ өлшемді квадратты матрица. Ал $\breve{V}_i^k$ функциясы

$$\breve{V}_0^k = V_0^k, \breve{V}_1^k = V_1^k,$$

$$\breve{V}_i^k = h\sum_{s=-\infty}^{\infty} W_i^{k-s} F_{\underset{t}{0}}^s, \qquad i > 1, \qquad k \in Z \tag{6}$$

формулалары бойынша анықталсын. Сонда $\breve{V}_i^k$ функциясы

$$V_{t\bar{t}} = V_{x\bar{x}} - Q_i V_i^k, \quad i \ge 1, \quad k \in Z \tag{7}$$

теңдеуін қанағаттандырады және шешімнің жалғыздығынан

$$\breve{V}_i^k = V_i^k, \qquad i \ge 0, \qquad k \in Z.$$

Лемма 2. Айталық $0 \le |k| < i$ болсын. Сонда (6) теңдігін келесі түрде жазуға болады:

$$\tilde{W}_i^k + h\sum_{j=-i+1}^{i-1} \tilde{W}_i^j \tilde{F}_{\underset{t}{0}}^{k-j} = -\frac{1}{2}\left[\tilde{F}_{\underset{t}{0}}^{k-i} + \tilde{F}_{\underset{t}{0}}^{k+i}\right], \ 0 \le |k| < i, \ i = 2,3,\ldots,N. \tag{8}$$

Бұл Гельфанд-Левитан интегралдық теңдеулерінің дискретті аналогы.

$\tilde{W}_i^j = \tilde{W}_i^{-j}$ екендігін ескеріп, (8) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады:

$$\tilde{W}_i^k + h\sum_{j=1}^{i-1}\left[\tilde{F}_{0\atop t}^{k-j} + \tilde{F}_{0\atop t}^{k+j}\right]\tilde{W}_i^j + h\tilde{F}_{0\atop t}^{k}\tilde{W}_i^0 = -\frac{1}{2}\left[\tilde{F}_{0\atop t}^{k-i} + \tilde{F}_{0\atop t}^{k+i}\right], \qquad (9)$$

мұндағы $0 \le k < i, \quad i = \overline{2, N}$.

Теорема. Шектеулі-айырымдық (1)-(3) кері есебінің шешімі бар болсын делік. Сонда әрбір $i = \overline{2, N}$ үшін (9) теңдеулер жүйесі бірмәнді шешіледі.

Әдебиеттер тізімі

[1] Bakanov G.B. Reduction the two-dimensional discrete inverse problem for the wave equation to the systems of one-dimensional inverse problems //Works of the international scientific-practical conference «Auezov reading -14: innovation potential of science and education of Kazakhstan in the new global reality».-Shymkent, 2016. –pp. 29-34.

[2] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. –264 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА

Бектемесов[1] М.А., Касенов[1] С.Е., Нурсеитов[2] Д.Б.

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН

[2]Национальная научная лаборатория коллективного пользования информационных и космических технологий Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И.Сатпаева

E-mail: syrym.kasenov@mail.ru

Аннотация. В данной работе расмотрена начально-краевая задача для уравнения Гельмгольца. Исходная начально-краевая задача для уравнения Гельмгольца сводится к системе алгебраических уравнений затем решаем методом регуляризации А.Н. Тихонова. Проведены численные расчеты данной задачи.

В работе исследована задача продолжения для уравнения Гельмгольца в области $\Omega = (0, l) \times (0, \pi)$:

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \qquad (1)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \qquad (2)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in [0, \pi], \qquad (3)$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, l], \qquad (4)$$

где k – заданная константа. Требуется найти функцию $u(x, y)$ в области Ω по данным $f(y)$.

Дискретизация исходной задачи (1) – (4). Построим в области Ω сетку ω_h с шагом $h_x = l/N_x$, $h_y = \pi/N_y$, где N_x, N_y – положительные целые числа, тогда получим $\omega_h = \{x = ih_x, y = jh_y; i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}\}$.

$$au_{i-1,j} + bu_{i,j-1} + cu_{i,j} + bu_{i,j+1} + au_{i+1,j} = 0,$$

$$u_{1,j} = f_j, \; u_{0,j} = f_j,$$

$$u_{i,1} - u_{i,0} = u_{i,N_y} - u_{i,N_y-1} = 0.$$

здесь $a=\dfrac{1}{h_x^2}$, $b=\dfrac{1}{h_y^2}$, $c=k^2-2a-2b$. Сведем систему разностных уравнений задачи к системе линейных алгебраических уравнений.

$$AX = B,$$

где A – матрица $(N_x+1)(N_y+1)$, B – вектор данных исходной задачи, граничных и дополнительного условий, X – неизвестный вектор, вида:

$$X = \left(u_{0,0}, u_{0,1}, u_{0,2}, \ldots, u_{0,N_y}, u_{1,0}, u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{1,N_y}, \ldots, u_{N_x,0}, u_{N_x,1}, u_{N_x,2}, \ldots, u_{N_x,N_y}\right)$$

Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Вместо системы

$$AX = B,$$

рассмотрим систему

$$\left(\alpha I + A^*A\right)\widetilde{X} = A^*B.$$

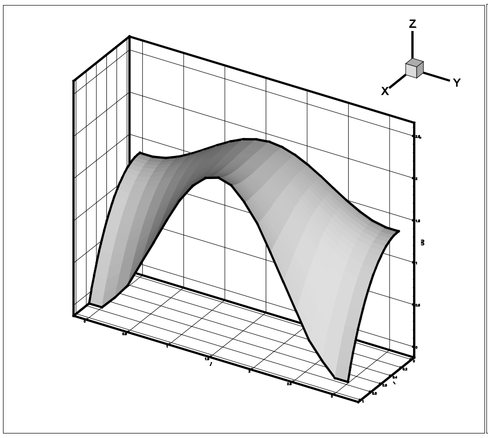
Согласовывая выбор параметра регуляризации α с ошибкой задания правой части $\|f - f_\varepsilon\| \square \varepsilon$, можно добиться сходимости решения к точному.

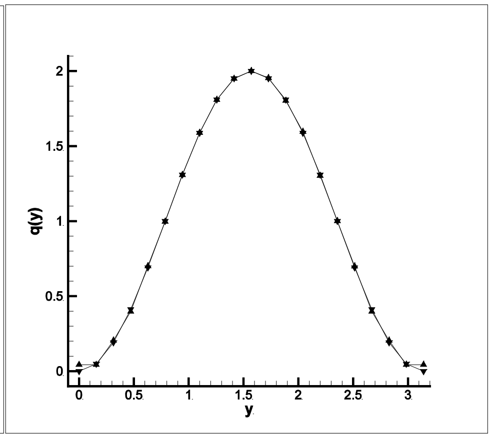
Проведены численные расчеты исходной задачи с использованием метода резуляризации А.Н. Тихонова.

Таблица 1 – Результаты применения метода регуляризации А.Н. Тихонова без шума для различных α

α	$\|q_T - \widetilde{q}\|$	$\|\widetilde{X}_{\alpha_i}\| - \|\widetilde{X}_{\alpha_{i-1}}\|$
10^{-6}	0.117	0.82322
10^{-7}	0.091	0.08995
10^{-8}	0.070	0.01036
10^{-9}	0.081	0.00250
10^{-10}	0.335	0.01691
10^{-11}	18.75	33.3651
10^{-12}	26.52	21.1054
10^{-13}	8.489	-45.317

Параметр регуляризации выбираем из условия, что $\|\widetilde{X}_{\alpha_i}\| - \|\widetilde{X}_{\alpha_{i-1}}\|$ минимально, тогда выбираем α_{i-1} [1].





Список литературы

[1] Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. – Алматы: Международный фонд обратных задач, 2006. – 425 с.

[2] Wu L. A parameter choice method for Tikhonov regularization // Electronic Transactions on Numerical Analysis. – 2003. –Vol. 16. – P.107–128.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Бектемесов М.А., Мухамбетжанов С.Т.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: mukhambetzhanov_@mail.ru

Аннотация. В работе исследована математическая модель, описывающая в теории фильтрации противоточную капиллярную пропитку. Рассматривается образец пористой среды, заполненной нефтью и изолированный со всех сторон, кроме одного из торцов. Если среда гидрофильна, то при приведении образца в соприкосновении с водой вода начнет впитываться в образец, вытесняя нефть в направлении, противоположном движению воды. Такой процесс описывается уравнением Раппопорта-Лиса.

В двумерном случае по пространственным переменным уравнение Раппопорта-Лиса принимает вид:

$$m \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = div\big(\Phi(s) \cdot \nabla s\big), \qquad (1)$$

где $s = s(x, y, t)$ - водонасыщенность, m - пористость среды, функция $\Phi(s)$ определяется через относительные фазовые проницаемости и через функцию Леверетта. При стандартных начально-краевых условиях получены следующие результаты:

1. Исходя из инвариантных свойств дифференциального уравнения (1) найдено семейство коэффициентов $\Phi(s)$, которое позволяет найти группу переноса. Тем самым изучен вопрос о единственности решения обратной задачи, состоящей в одновременном определении коэффициента $\Phi(s)$ уравнения (1). Проведенное исследование уточняет смысл неединственности решения. Исходя из характера автомодельных решений относительно переменных вида:

2. $$\xi = ax + by + ct + d\,, \qquad (2)$$

либо $$\eta = \frac{a + x + y}{\sqrt{b(c - t)}} \qquad (3)$$

найдены следующие условия:

$$s\big|_{t=0} = s_0(x, y) \neq const \text{ и } \frac{\partial s}{\partial n} \neq 0 \text{ - на границе области.} \qquad (4)$$

Установлено, что при выполнении условия (4) множество неидентифицируемости имеет меру нуль.

3. Исходя из результатов работы [1,2] применен метод слабой аппроксимации и доказано, что в случае автомодельных переменных вида (2) или (3) уравнение (1) не инвариантно относительно растяжения коэффициента $\Phi(s)$.

Список литературы

[1] Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: Изд-во Новосибирского государственного университета, 2001, 316с.

[2] Романовский М.Р. Идентифицируемость в целом нелинейного уравнения теплопроводности и автомодельные решения //ИФЖ, 1983, Т.45, №2, с. 309 – 316.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГОМОГРАФИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Диарова Д.М.[1], Земцова Н.И.[2], Ихсанов Е.В.[3]

[1]Атырауский университет нефти и газа,

[2]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,

[3] Атырауский инженерно-гуманитарный институт, [1,3]КАЗАХСТАН, [2]РОССИЯ

E-mail: ddiarova@mail.ru

Рассматривается применение системы Mathematica в качественном исследовании некоторых задач космической динамики.

В работах [1-3] авторами доказано, что в плоской системе взаимно притягивающихся $(n+1)$-тел с центральной массой m_0 и n массами $m_i(i=\overline{1,n})$, находящимися в вершинах правильных многоугольников или их определенных комбинаций, существуют стационарные решения, так называемые гомографические решения [4]. Тела $P_i(i=\overline{1,n})$ вращаются вокруг центрального тела P_0 с постоянной угловой скоростью ω, то есть их координаты не изменяются в плоскости, равномерно вращающейся относительно некоторой неподвижной системы координат P_0xyz с началом в точке P_0. Все громоздкие преобразования, позволяющие в аналитическом виде найти соотношения между геометрическими (расстояния между телами) и динамическими (значения масс) параметрами конкретных моделей, которые гарантируют существование таких конфигураций, выполнены в Системе Символьных Вычислений Mathematica. Графические возможности системы позволяют построить наглядные графики моделей.

Движение тела P с бесконечно малой массой в ньютоновом гравитационном поле данных $(n+1)$-тел, (т.е. мы имеем ограниченную ньютонову задачу $(n+2)$-тел), описывается автономной нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x + 2\omega \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{fm_0 x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(x-x_i)m_i}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y - 2\omega \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{fm_0 y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(y-y_i)m_i}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{fm_0 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{zm_i}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Чтобы найти стационарные решения (точки равновесия) этой системы дифференциальных уравнений, необходимо решить достаточно сложную систему алгебраических уравнений. Из-за ее нелинейности невозможно найти точное решение в аналитической форме. Вместе с тем, используя систему Mathematica, можно легко построить графическое решение и найти координаты точек равновесия с произвольной точностью. Число точек равновесия и область их существования зависят от динамических и геометрических параметров конкретной модели.

Являясь одновременно системой численных, символьных и графических вычислений, а также имея язык программирования высокого уровня, реализующий различные стили программирования, система Mathematica позволяет провести качественное исследование найденных решений, согласно рекомендации А.Пуанкаре, а именно, исследовать их линейную устойчивость и устойчивость по Ляпунову [4].

Исследуя устойчивость стационарных решений методами КАМ-теории [4], мы должны выполнить цепочку громоздких аналитических преобразований гамильтониана системы. Пакет программ, написанный в среде Mathematica, позволяет корректно выполнить данные преобразования в общем символьном виде для различных моделей и установить устойчивость стационарных решений [5].

Далее, используя численные и графические методы, можно исследовать окрестности устойчивых и неустойчивых в смысле Ляпунова положений равновесия [6].

Список литературы

[1] *Диарова Д. М.* Гомографические решения ньютоновой проблемы многих тел. М.: РУДН, 2013.

[2] *Ихсанов Е.В.* Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики. – М.: РУДН, 2004.

[3] *Н.И. Земцова.* Новые гомографические решения в ньютоновой проблеме многих тел //Фундаментальные проблемы системной безопасности, Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. С.44-49.

[4] *Гребеников Е.А.* Математические проблемы гомографической динамики. М.: РУДН, 2011.

[5] *Земцова Н.И.* Нормализация гамильтониана в пространственной ограниченной задаче шести тел //Сб. ВЦ РАН «Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа». М.: ВЦ РАН, 2015, С. 76-94.

[6] *Гребеников Е.А., Ихсанов Е.В., Земцова Н.И.* Численные исследования устойчивых положений равновесия ограниченной задачи десяти тел //Материалы международной научно – теоретической конференции «Роль физико – математических наук в современном образовательном пространстве» (26-27 мая 2005 г.) Атырау: АГУ им. Х. Досмухамедова, 2005. С.61-64.

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮРЛІ САЛАЛАРДА ҚОЛДАНЫС ТАБУЫ

Досмағамбет Н.Қ.
Әл-Фараби атындағы Казақ ұлттық университеті, КАЗАҚСТАН
E-mail: nurdauletdosmagambet@gmail.com

Аннотация. Біз өмір сүріп жатқан, XXI ғасыр – жаңа технологиялар ғасыры деп айтсақ қателеспейміз. Соңғы жиырма жылда Жасанды Интеллект (ЖИ) өндіріс саласы мен қызмет көрсету жүйесін күрделі өзгерістермен дамытты. ЖИ саласындағы зерттеулер, жүйе эксперті атты технологияның жылдам дамуына себепкер болды. Жасанды Интеллекттің қолданысы өміріміздегі көптеген салаларға тиімді әсерін тигізді. Мәселен, қазіргі таңда, ЖИ жүйелі эксперт ретінде ғылым саласында, инжинерия саласында, бизнесте, медицинада тіпті ауа-райын болжау саласында кешенді мәселелерді шешуде кеңінен қолданылады. Жасанды Интеллект технологияларын өндіретін саланың жұмысынан сапа мен өнімділіктің артқаны байқалады. Бұл мақала жоғарыда айтылған ЖИ технологиясына және оның қолданыс аясына жалпы мағлұмат береді.

Жұмыстың жалпы сипаттамасы: Келешекте саналы машиналар адами мүмкіндіктердің орнын басып, не оның құндылығын жоғарлатпағы анық. Жасанды Интеллект - машиналар немесе бағдарламалық қамтамасыз ету арқылы іске қосылатын интеллект. Ол компьютер ғылымының бір бөлігі. Жасанды Интеллект (ЖИ) көптеген салаларда адамзат өмірінің сапасын жоғарлатып жатқандықтан, компьютер ғылымында әйгілі салалардың бірі болып табылады. Мақалада ЖИ технологияларының қазіргі таңдағы Энергия Жүйесінің Тұрақтандырғышын өңдеудегі кедергіден пайда болған энергия жүйесіндегі ауытқуларды тежеудегі; компьютерлік желі мен желілерді «зиянкестерден» қорғау үшін желілік енуде; ауруханалардағы стационарлық емді жақсарту үшін медицина аясында; медициналық кескіндерді классификациялауда; компьютерлік ойындардағы мәселелерді азайту үшін есептік дерекқор секілді салалардағы қолданысы баяндалып, зерттелген.

Жұмыстың өзектілігі: XXI ғасырдағы өзекті болып отқан Жасанды Интеллект мәселесіне нық тоқталып, оның қолданысын түрлі салаларда сипаттау.

Мақаланың мақсаты мен міндеттері: ЖИ-тің басты салалары: Эксперт Жүйесі, Табиғи Тілді Өңдеу, Тілді Түсіну, Робототехника және Сенсорлы Жүйелер, Компьютерлік Көрініс және Жайды Ұғыну, Интеллектуалды Компьютерлік Қосымша Нұсқаулық, Нейрондық санақтың 5 түрлі салада қолданысын сипаттап, олардың өміріміздің түрлі салаларына оңды әсерін тигізетін жылдам дамып келе жатқан технологиялар екенін көрсету. Мәселен,

- Жасанды Ителлект Техникасын Энергиялық Жүйе Тұрақтандырғышын (ЭЖТ) Өңдеудегі қолданысы. Мәселелерді оңтайландыру үшін қолданатын ЖНЖ (Жасанды Нейрондық Желілер) мен БЛ (Бұлыңғыр Логика)-ның жұмысын сипаттау [1].
- Жасанды Интеллект Техникаларының Желіде Қолданысы. Енуді табу мен ЕТЖ-дегі Айқын емес Болжалдау Жүйесіндегі ЖИ-тің жұмысын талдау [2].
- Жасанды Интеллект Техникасының Медицина саласында қолданылуы. Медицинадағы Айқын емес Эксперт Жүйесі, Эволюциялық Есептеме, Ауруханалардағы стационарлық емдеуді жақсартудағы Жасанды Интеллектің қолданылуын сипаттау; Медициналық Кескіндердің Классификациясындағы ЖИ тәсілдері, Ғылым Диагностикасындағы Жасанды Нейрон Желілерінің тәсілдері, Эндоскопиялық Кескін, Ми Ісігінің МРТ(томография) Сараптамасындағы ЖИ-тің маңыздылығын дәлелдермен айқындау [3].
- Жасанды Интеллекттің Бухгалтерлік Есеп дерекқорында қолданысын зерттеу.
- ЖИ-тің Техникаларының Компьютер Ойындарында Қолданысын саралап, мысалдармен толықтыру [4].

Қорытынды. Жасанды Интеллект саласы машиналарға түрлі концепттерді қолданып, аналитикалық ойлау қабілетін береді. Соңғы 20 жылда көптеген салалардың дамуында Жасанды Интеллект Тәсілдерінің үлесі өте зор. Қазір де Жасанды Интеллект түрлі салаларда маңызды роль атқаруын жалғастыруда. Бұл мақала Жасанды Интеллект Концепциясына; ЖИ салаларына сүйеніп, жүйе тұрақтылығын сақтау және ауытқуларды бітеудегі Энергия Жүйе Тұрақтандырғыш саласындағы, «зиянкестерден» желіні қорғау үшін Желідегі Енуді Табуда жоғарғы деңгейлі қызметті қамтамасыз етіде, медицина саласында – медикалық кескіндердің классификациясында, бухгалтерлік салада, компьютерлік ойындарда көптеген мәселелерді шешуде ЖИ техникаларының қолданысының ролін айқындайды. Көріп отырғанымыздай, Жасанды Интеллекттің Энергия Жүйе Тұрақтандырғыш саласы мен Желіге Енуді Табу Сараптамасында үлкен жетістіктер күтіп тұр. Бұл енді дамып жатқан сала болғандықтан, әле осы секілді түрлі салада орнын табатын көптеген Әдістер ойластырылып шығарылады. Әзір де ғалымдар, Жасанды Интеллект саласының толық мүмкіндігін зерттеудегі шегіне жеткен жоқ. Бұл технология мен оның қолданысы уақыт өте келе одан әрі дамып, адам өміріне үлкен өзгерістер әкелетіні сөзсіз.

Әдебиеттер тізімі:

[1] Mahdiyeh EslamiI, Hussain Shaareef, Azah Mohamed, “Application of artificial intelligent techniques in PSS design: a survey of the state-of-the-art methods”.

[2] Fatai Adesina Anifowose, Safiriyu Ibiyemi Eludiora, “Application of Artificial Intelligence in Network Intrusion Detection”, World Applied Programming, Vol (2), No (3), March 2012.

[3] Daniel B. Neill, “Using Artificial Intelligence to Improve Hospital Inpatient Care”.

[4] Charles Weddle, Graduate Student, Florida State University “Artificial Intelligence and Computer Games”, unpublished.

ҚОСПАЛАРДЫҢ ДИФФУЗИЯСЫНЫҢ ЖӘНЕ ТАСЫМАЛЫНЫҢ ҮШ ӨЛШЕМДІ МОДЕЛІ

Дуйсебекова К.С, Дуйсембаева Л.С.

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН

E-mail: duisembaevalaura@gmail.com

Қоспалар ауаға түскеннен кейін, олардың орын ауыстыруы және дисперсиясы олардың өзіндік физикалық қасиеттерімен және ол сол жақтағы атмосфераның қасиетімен анықталады. Тасталынатын заттар атмосфераға белгілі бір жылдамдықпен және температурамен енеді. Тасталынатын заттардың қозғалысы вертикальды құрамдас бөлігінен тұрады, ол ағынның бастапқы вертикалды жылдамдығы және температура айырымы болып, осы факторлардың әсері кетпейінше, шартты түрде алынған. Тасталынатын заттың бұл вертикалды көтерілуі шлейф деп аталады. Ол тасталыну нүктесінің эффективті биіктігіне H әсер етеді№

Шлейфтің ағыны кезінде және одан кейінге көтерілу қозғалысын тасымалдау деп аталады. Атмосфераның турбулентті қозғалысы тасталынатын заттың еркін қозғалысына, ал ол ауаның қозғалысы арқылы горизонталды және вертикалды таралуына алып келеді. Бұл процесс атмосфералық диффузия деп аталады.

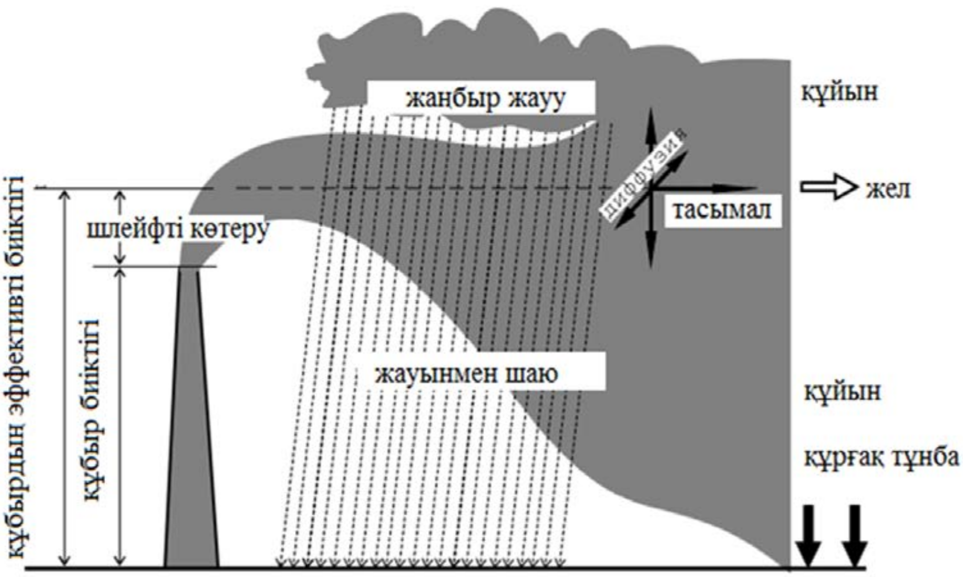
Тасымал мен диффузияның құрамы атмосфералық дисперсия деп аталады. Бұл процессті сипаттайтын модельдерді атмосфералық тасымал-диффузиясы немесе атмосфералық дисперсия моделі деп атайды.

Атом энергетикасының обьекттерінде болған апат салдарынан кейінгі атмосферада әр түрлі қоспалардың таралу моделін анализдеу кезінде, ХАТЭАГ шолуында үш типті модель қарастылырған: гаусті модельдер, лагранж бұлтының моделі және үш өлшемді модельдер [1].

Гауссті модель алгоритімі. Ауа диспрсиясының анализін модельдеу арасында Гаусс алгоритімі моделі ең көп қолданылады. Ол ластаушы статистика бойынша қалыпты түрден таралуын болжап негізделген. Ортақ Гаусс теңдеуі:

$$\frac{dc}{dt}+\mathrm{U}\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dy}\,(K_y\,\frac{dc}{dy})+(K_z\,\frac{dc}{dz})+\mathrm{S}$$

мұндағы:
x-шығу жерінен бастап жел бағыты арасындағы анықталған координата;
y-желдің перпендикулярлы бағытынан алынып өлшенген координата;
z-шығу жерінен ескертілетін вертикалды координата;
C(x,y,z)-дисперсті заттың (x,y,z) нүктелеріндегі орташа концентрациясы;
K_y,K_z-y және z осі бойынша турбуленттіліктің таралуы;
U- x осі бойынша орташа жылдамдық.



1-сурет. Атмосфераға тасталынған ластайтын заттардың сипаты.

Лагранж моделі бойынша алгоритм. Лагранж моделі бойынша тұрғызылған алгоритм базалық тордың өзгерісін білмей ластаушы зиянды заттардың дисперсиясын болжайды. Тұтастай алғанда тор базасында бұл өзгере жел немесе желдің векторлық өрісі бағытын ластаушы бұлт бағытына түсіреді. Лагранж моделі келесідей ұсынылады:

$$<\mathrm{c(r,t)}\geq \iint p(r,t|r^2,t^2)S\ (r^2,t^2)dr^2dt^2$$

мұндағы: <c(r,t)> – t уақыты бойынша r орнында ластаушы заттардың орташа концентрациясы; $S\ (r^2,t^2)$-ластаушы заттарды анықтайды; $p(r,t|r^2,t^2)r^2$ – орын ауыстыру мен $,t^2$ уақыт ықтималдығы;

Есептелініп шығатын мәндер: 1) Ластаушы көзден максималды жерүстілік концентрацияға дейінгі қашықтық, м;

2) Жерүстілік концентрацияның максималды мәні SO2, мг/м3;

3) Факелдің Cx осі бойынша SO2 концентрациясы, мг/м3;

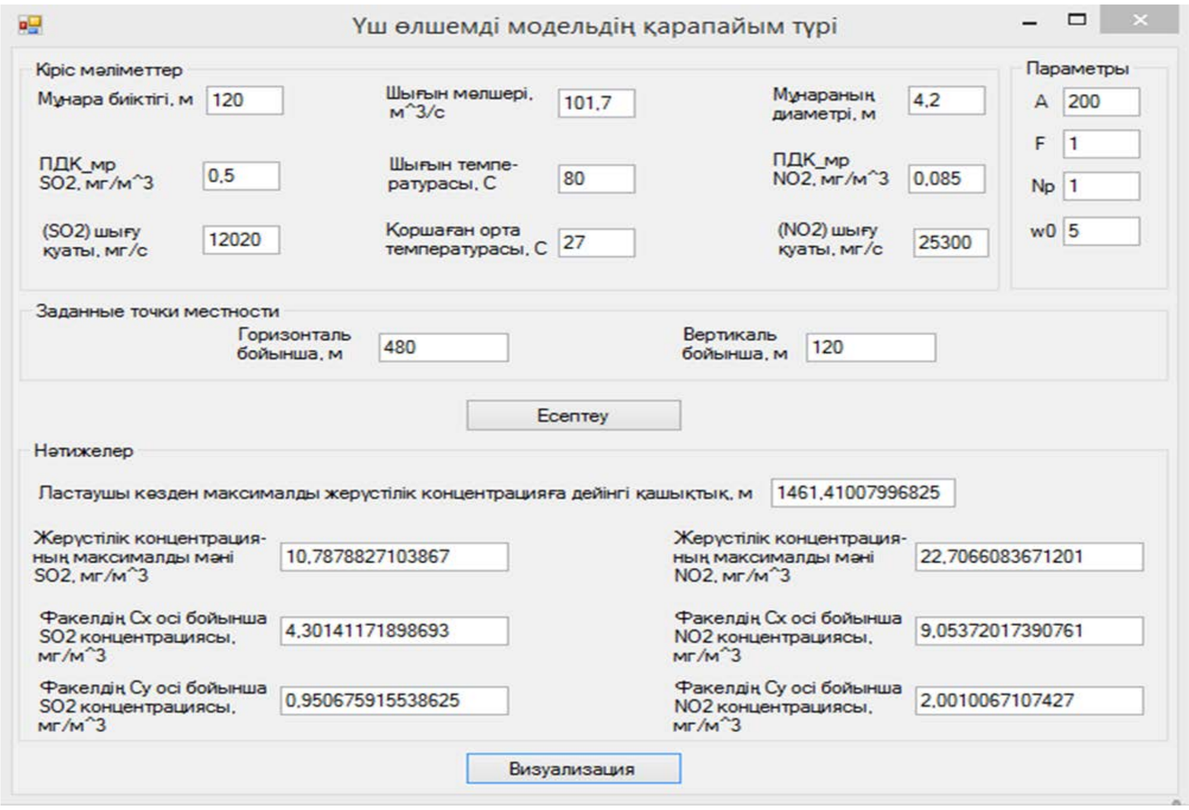
4) Факелдің Cy осі бойынша SO2 концентрациясы, мг/м3;

5) Жерүстілік концентрацияның максималды мәні NO2, мг/м3;

6) Факелдің Cx осі бойынша NO2 концентрациясы, мг/м3;

7) Факелдің Су осі бойынша NO2 концентрациясы, мг/м3.

Жалпы есептеулер осы «Атмосферада зиянды газ шығарындыларының сейілуін есептеу» тарауында сипатталып, түсіндіріліп жазылған есептей формулалары бойынша жүргізілген. Нәтижесінде үш өлшемді моделдің қарапайым нұсқасының бағдарламасы құрылды.[2] Бағдарлама құру барысында ластаушы заттардың жерүстілік концентрациясының макисмалды мәндері, зиянды заттардың алаудың кординатасы бойынша концентрациялары және де ластаушы көзден жерүстілік концентрацияға дейінгі қашықтығы анықталды.



2-сурет. «Есептеу» батырмасы арқылы есептеу жүргізу.

Әдебиеттер тізімі

[1] Руководство по организации контроля состояния природной среды в районе расположения АЭС / Под ред. К.П. Махонько. Л.: Гидрометеоиздат, 1990, 264 с. [1]

[2] Techniques and decision making in the assessment of off-site consequences of an accident in a nuclear facility / Safety series, N.86, International Atomic Energy Agency. Vienne. 1987. 185 p.[2]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОДЗЕМНОГО ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ

Дуйсенбаева А.Б. Жамалбек Ж.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: aidana.daniels@mail.ru

Аннотация. В работе исследована математическая модель подземного выщелачивания и гомогенизация полученной микроскопической модели с помощью современных методов математического анализа. Эти методы позволяют максимально приблизить основные микроскопические модели с быстро осциллирующими коэффициентами на некоторые макроскопические модели без быстро осциллирующими коэффициентами. Показано, что более точные методы гомогенизации реально опишут особенности основных микроскопических моделей в гомогенизированными макроскопические моделей.

Для описания динамики жидкости в порах на микроскопическом уровне нами использовано уравнение Стокса для несжимаемой жидкости. Известно, что есть несколько различных возможных сценариев для описания распространения примеси в поровой жидкости на микроскопическом уровне. В соответствии с общей теорией дифференциальных уравнений необходимо знать граничное условие для примеси на данной границе S , также мы принимаем во внимание распространение этой примеси. Для концентрации кислоты, такие граничные условия являются приемлемыми. Кроме того, как мы уже отметили выше, появляется обратный поток от границы $\Gamma(t)$ внутрь порового пространства. Этот поток препятствует доступу кислоты к твердому скелету и отсутствие диффузии подразумевает отсутствие химической реакции на границе $\Gamma(t)$. Таким образом, диффузионно-конвективное уравнение первое условие для кислоты. Для концентрации продуктов химических реакций любое граничное условие на данной границе S^- не имеет никакого смысла. Известно, что основной целью выщелачивания является максимальное извлечение из продуктов реакцию через эту скважину. По этой причине в качестве второго сценария для концентрации продуктов химических реакций уравнения переноса. Последний из них является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка и нуждается в граничном условии только на части границы $\partial\Omega_f(t)$, где жидкость течет в поровое пространство. концентрацию продуктов химических реакций. В жидком диффузионном процессе фильтрация также очень медленна и сравнима с конвекцией. Поэтому он может создать некоторые колебания во времени концентрации реагента на свободной границе $\Gamma(t)$. На самом деле, скорость оттока жидкости из свободной границы пропорциональна концентрации кислоты и возрастает, когда эта концентрация возрастает. Преобладание оттока жидкости из свободной границы делает меньше диффузии реагента и приводит к уменьшению его концентрации на свободной границе. В свою очередь, это означает уменьшение оттока жидкости из свободной границы и доминирование диффузии кислоты к свободной границе. Рост диффузии реагента к свободной границе приводит к росту его концентрации на свободной границе и так далее.

Целью данной работы является исследование следующей системы дифференциальных уравнений

$$\alpha_\mu \Delta v - \nabla p = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c = \alpha_c \Delta c, \tag{3}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + v \cdot \nabla c_i = 0, (i = 1,...,n) \tag{4}$$

для скорости жидкости v, давление жидкости p, концентрация c реагента, и концентрации c_i, $i = 1,...,n,$ продуктов химических реакций, завершается с граничными условиями:

$$(V_n - v_n)c + \beta\varphi(c) + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \tag{5}$$

$$c_i = \varphi_i(c), (i = 1,...,n), \tag{6}$$

$$v_n = -V_n \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_f} \tag{7}$$

на свободной границе $\Gamma(t),$ для $t > 0$, где V_n - нормальная скорость $\Gamma(t)$ в направлении направленного наружу к $\Omega_f(t)$ нормальному n и $v_n = v \cdot n$ является нормальной жидкой скоростью.

Поведением свободной границы управляет граничное условие:

$$V_n = \beta\varphi_0(c), \ x \in \Gamma(t), \ t > 0 \tag{8}$$

с некоторыми неотрицательными данными функции $\varphi_0(c)$.

Нами численно исследована задача (1) – (8) в системе скважин в одномерном случае. Были рассмотрены тестовые примеры для оптимального управления и регулирования процесса подземного выщелачивания.

ӨНДІРІС ҚАЛДЫҚТАРЫНЫҢ АУАҒА ТАРАЛУЫН ЗЕРТТЕУДІҢ АВТОМАТТАНДЫРЫЛҒАН ЖҮЙЕСІН ҚҰРУ

Дуйсембаева Л.С.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: duisembaevalaura@gmail.com

Соңғы жылдары қалалық индустриялды құрылыс арасындағы атмосфераның ластану тасымалының үш өлшемді модельдеуі актуалды мәселелердің бірі. Бұл есептеуіш техниканың заманауи даму деңгейі мұндай мәселелерді тек қана теорияда шешпей, тәжірибелік жүзінде де шеше алуымен байланысты. Мұндай модельдерді жасап шығару радиациялық қатер мен радиациялық жағдайға сәйкес бағамен болжауға, сонымен қатар, мегаполис жағдайындағы радиациялық және улы заттардың атмосферадағы тасымалын бағалауға мүмкіндік береді.

Дисперсияны және радионуклейдтердің құлауын бағалауға атмосфералық тасымал моделін (гауссты, лагранжты, эйлерлі) ғимараттар нығыздалып салынған аймақта қолдануға келмейді, себебі бөгетті (ғимараттар, құрылыстар) орағып өту кезіндегі аэродинамикалық эффекттерді сипаттамайды. Радиациялық жағдайды бағалаудың дұрыс тәсілдерінің бірі күрделі геометриялық өндіріс аймақтарында қатты беттерде турбуленттік (CFD-кодтары) моделін қолданумен, үш өлшемді Навье-Стокса теңдеулер негізінде ауа ағымын модельдеу болып табылады. Есептелген жел аймағында қоспалар тасымалының есебі үш өлшемді турбуленттік алмасу коэффицентімен, диффузия-адвекция теңдеуі арқылы шығарылады [1].

Жалпы экологиялық жағдайдың нашарлауы мен оны дұрыс болжау, соған қоса жедел түрде ластану зардаптарынан арылу үшін дұрыс шешім қабылдау арнайы болып жатқан құбылыстарды көрсететін математикалық модельдерді жасап шығаруды талап етеді. Бұндай модель арқылы алынған мәліметтер ластаушы заттардың тасталуының шекті мәндерін және ластаушы заттардың судағы және жердегі концентрациясын анықтауға мүмкіндік береді. Соңғы кездері антропогенді көздер арқылы қоршаған ортаның ластану процесстерін математикалық модельдеуге ғылыми-практикалық қызығушылық арта түсуде. Ластану деңгейін болжауды сәтті түрде шығару қоспалар тасымалының физикалық ерекшеліктерін, қоспалар арасындағы концентрациясын және орта параметрін, яғни судың жылдамдығы мен ағу бағытын (егер қоспалар су ортасында тасымалданатын болса), жердің ерекшеліктерін (егер қоспалар су ортасында тасымалданатын болса) ескеретін математикалық модельдерді қолдануда негізделген. Ластаушы заттар тасымалының көптеген мәселелері қоспалар тасымалы (диффузия және конвекция) теңдеуіне түйістірілуі мүмкін.

Қазіргі заманда атмосфераның өнеркәсіптік шығарындыларымен ластануын бағалау және зиянды заттардың атмосферада таралуын анықтау барысында, негізінен түрлі ақпараттық-аналитикалық бағдарламалық кешендерде жүзеге асырылған арнайы компьютерлік бағдарламалар қолданылады.

Әдебиеттер тізімі

[1] Руководство по организации контроля состояния природной среды в районе расположения АЭС / Под ред. К.П. Махонько. Л.: Гидрометеоиздат, 1990, 264 с.

[2] Techniques and decision making in the assessment of off-site consequences of an accident in a nuclear facility / Safety series, N.86, International Atomic Energy Agency. Vienne. 1987. 185 p.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ТИПА СТЕФАНА

Джанабекова С.К., Шаждекеева Н.К.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая

Атырауский государственный университет им.Х.Досмухамедова, КАЗАХСТАН

Аннотация. В работе изучается свойства автомодельных решений и предельные переходы по параметрам одной задачи типа Стефана, описывающей кинетику замерзания грунта. Наряду с прямой задачи изучены методы определения коэффициентов теплопроводности, влагопереноса и малость времени релаксации.

Пусть Ω – ограниченная область в R^m с достаточно гладкой границей S, $Q_T = \Omega\times(0,T), S_T = S\times(0,T)$. Требуется найти функции $\theta(x,t), w(x,t)$ (температуру и влажность грунта), определенные в области Q_T, удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \theta_t &= k\Delta\theta + \chi\cdot\alpha\cdot(w - H(\theta)), \\ w_t &= \lambda\Delta w - \alpha\cdot(w - H(\theta)) \end{aligned} \tag{1}$$

начальным и граничным условиям:

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \qquad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$\theta(x,t) = \theta_s(x,t), \qquad (x,t)\in S_T, \tag{4}$$

$$w(x,t) = w_s(x,t), \qquad (x,t)\in S_T, \tag{5}$$

где функция $H[\theta(x,t)] = 1$ при $\theta(x,t) > 0$, $H[\theta(x,t)] = 0$ при $\theta(x,t) < 0$, а на множестве $E_\theta = \{(x,t)\in Q_T \mid \theta(x,t) = 0\}$ функция $H[\theta(x,t)] = [0,1]$ почти всюду. Всюду ниже коэффициенты k,λ,χ,α считаются положительными константами и в случае обратной задачи указанные коэффициенты считались функциями от искомых функций.

Переход от неравновесного состояния в равновесное состояние. Интересным является тот факт, что если перейти к пределу по $\alpha \to \infty$ в задачи (1) - (5), то предельная задача является задачи Стефана в автомодельной постановке:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \cdot a(v) \cdot \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad a = \phi'(v), \ \xi \in (0, \mathrm{D}_*), \tag{6}$$

$$v(0,\beta) = \beta, \qquad v(D_*,\beta) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{dv}{d\xi}(D_*,\beta) = -\frac{1}{2} \cdot D_*, \tag{8}$$

где функция $v(\xi,\beta)$ и параметр $D_* = D_*(\beta)$ подлежат определению из (6) – (8).

В (6) уравнение получено домножением второе уравнение в (6) относительно влажности на χ и сложив с первым уравнением относительно температуры в (6), а после предельного перехода по $\alpha \to \infty$ функция $w = H(\theta)$, т. е. предельная задача является равновесной.

Существование и единственность задачи (6) – (8) следует из результатов работы [1]. При дополнительных условиях типа (7) соответствующая задача имеет единственное решение. Построение решения проводится с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке. Однако в отличие от автомодельного решения, изложенного в пункте 1, автомодельное решение типа бегущей волны обладает, согласно физическому смыслу, следующими свойствами:

1) $\dfrac{\partial w}{\partial x} \le 0$ при фиксированном t, т. е. влажность грунта уменьшается при удалении от источника;

2) $\dfrac{\partial w}{\partial t} \ge 0,$ при фиксированном x, т. е. влажность на данном участке возрастает со временем.

Таким образом, при переходе к автомодельной типа бегущей волны $\eta = x - a \cdot t$ должно быть $\dfrac{\partial w}{\partial \eta} \le 0$ и указанное свойство выполняется относительно температуры $\dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} \le 0$, что соответствует предположению $a = const > 0, a -$ скорость распространения бегущей волны в положительном направлений.

Отметим, что формально при $a = 0$ приходим к стационарной задаче, в которой $w = w(x), \ \theta = \theta(x)$.

Построены вычислительные алгоритмы для численной реализаций на ЭВМ.

Изучены возможные варианты неидентифицируемых параметров.

Список литературы

[1] Мейрманов А.М. Задача Стефана. - Новосибирск: Наука, 1986.- 239.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ МИКРОШАГА ДЛЯ ДВИГАТЕЛЯ 28BYJ-48

Елеуп Е., Азанов Н.П.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: azanov.nikolai.p@gmail.com

В статье рассматривается и решается проблема улучшения качественных характеристик системы управления униполярного шагового двигателя 28BYJ-48

Шаговый двигатель – это электромеханическое устройство, которое преобразует электрические импульсы в дискретные механические перемещения. Основы современного шагового двигателя были заложены в конце XIX века для его использования в системах синхронной связи на постоянном токе. В настоящее время их можно встретить в дисководах, принтерах, плоттерах, сканерах, факсах, а также в разнообразном промышленном и специальном оборудовании.

Основное отличие шагового двигателя, состоит в том, что при подаче на обмотки двигателя импульса напряжения поворот его ротора осуществляется на некоторый угол, или, как принято говорить, шаг. Этот шаг определяется конструктивными особенностями двигателя и схемой его управления. В настоящее время используются двигатели с шагом в 15°, 7,5°, 1,8° и 0,9°. Наиболее широкое применение нашли двигатели с шагом 1,8° (200 шагов на круг).

Если мощность поданного импульса достаточна для сдвига ротора с подсоединенной к нему нагрузкой, то, в общем случае, шаг сдвига ротора не зависит от величины тока обмоток. Следовательно, шаг сдвига не зависит ни от амплитуды, ни от длительности импульса напряжения, поданного на обмотки такого двигателя. Но естественно, что момент силы, развиваемый двигателем, зависит не только от величины тока в обмотках, но и от длительности поданного на них импульса. Момент вращения ротора шагового двигателя, в отличие от остальных типов двигателей постоянного тока, максимален на минимальной скорости вращения. Эта особенность шагового двигателя во многих случаях избавляет конструктора от использования сложных и дорогостоящих редукторов.

Шаговые двигатели не только точны в позиционировании, но и практически вечны. Эти свойства шаговых двигателей определили их сферу применения – устройства точного позиционирования (гравировальные и фрезерные станки, управление манипуляторами в робототехнике, различные автоматы). Особенность шагового двигателя позволяет использовать его и как датчик угла поворота, и как генератор мощности в ветроэнергетических установках небольшой мощности. В последнем случае они работают эффективнее коллекторных генераторов**.**

Существуют три основных типа шаговых двигателей:

- двигатели с переменным магнитным сопротивлением;
- двигатели с постоянными магнитами (28BYJ-48);
- гибридные двигатели.

В зависимости от конфигурации обмоток шаговые двигатели делятся на биполярные и униполярные. Биполярный двигатель имеет одну обмотку в каждой фазе, которая для изменения направления магнитного поля должна переполюсовываться драйвером. Для такого типа двигателя требуется мостовой драйвер, или полумостовой с двухполярным питанием. Всего биполярный двигатель имеет две обмотки и, соответственно, четыре вывода [5].

Униполярный двигатель (28BYJ-48) также имеет одну обмотку в каждой фазе, но от середины обмотки сделан отвод. Это позволяет изменять направление магнитного поля, создаваемого обмоткой, простым переключением половинок обмотки. При этом существенно упрощается схема драйвера. Драйвер должен иметь только 4 простых ключа [4].

Основным аргументом для применения микрошагового режима является борьба с резонансом в ЧПУ системе, снижение вибрации шагового двигателя и повышения плавности хода передачи.

Для реализации микрошага есть специализированные контроллеры (драйверы) шаговых двигателей, в которых можно реализовывать дробление шага до 1/32 и более. Фактически в этих контроллерах ток в обмотках регулируется с помощью аппаратуры, а значение этого тока задается при помощи опорного напряжения.

Другой способ получения микрошага реализуется программно, без дополнительных дорогих микросхем и усложнения управляющей системы. Современные драйверы (ULN2003) имеют встроенные АЦП (аналогово-цифровые преобразователи) и ШИМ (широтно-импульсная модуляция) генераторы, которые можно использовать для реализации микрошагового режима взамен дорогих специализированных контроллеров [1, 2]. Это позволяет сделать практически одинаковой стоимость оборудования для полношагового и микрошагового режимов.

Оптимальный режим деления шага необходимо выбирать в зависимости от конкретного механизма и стоящих задач. В большинстве случаев имеет смысл использовать наибольшее деление шага, при котором двигатель сможет развивать расчетную максимальную скорость. Ограничением в данном случае будет максимальная частота входных импульсов у драйвера или максимальная частота генерации управляющих импульсов.

Момент, создаваемый шаговым двигателем, пропорционален величине магнитного поля, создаваемого обмотками статора. Путь для повышения магнитного поля – это увеличение тока или числа витков обмоток. Естественным ограничением при повышении тока обмоток является опасность насыщения железного сердечника. Однако на практике это ограничение действует редко. Гораздо более существенным является ограничение по нагреву двигателя вследствие омических потерь в обмотках.

В работе используется типичный представитель класса униполярных двигателей – Unipolar Stepper Motor 28-DYJ48. Стандартное количество шагов – 64 (5,625 градуса на один шаг). Разработана программа реализации микрошагового режима с 4096 шагами на полный оборот (0,087890625 градуса на один микрошаг).

Входными параметрами программы является направление движения (вперед, назад), угол поворота (в градусах) и скорость (быстро, средне, медленно).

По команде программа мобильного устройства рассчитывает количество микрошагов, необходимых для выполнения задания и передает эти данные по беспроводной персональной сети Bluetooth в исполняющую функцию микроконтроллера [3].

Работа выполнена при содействии гранта 544490-TEMPUS-1-2013-1-ES-TEMPUS-JPCR.

Список литературы

[1] Антонов А. Шаговый двигатель 28BYJ-48 с драйвером ULN2003 и Arduino UNO. http://robotosha.ru/electronics/how-stepper-motors-work.html (15 октября 2016 года)

[2] Евсегнеев О. Шаговый двигатель 28BYJ-48 и драйвер ULN2003. http://robotclass.ru/tutorials/arduino-stepper-28byj-48-uln2003/ (15 октября 2016 года)

[3] Елеуп Е., Азанов Н.П. Исследование системы управления шаговым двигателем на основе микроконтроллера. // Материалы международный научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби Әлемі» Қазахстан, Алматы, 11-13 апреля 2016 г. – С. 171.

[4] Рентюк В. Управление шаговым двигателем // Радиоаматор (Radioamator). 2010. № 10. – С. 29 – 32.

[5] Рентюк В. Шаговые двигатели и особенности их применения // Электрик. 2012. № 11. – С. 45 – 49.

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ НАВИГАЦИИ И ПЛАНИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ РОБОТА ГУМАНОИДА

Гриценко П. С., Гриценко И. С., Сейдахмет А. Ж.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: lickro@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена проектированию архитектуры системы навигации и планирования движения робота гуманоидного типа, способной функционировать как на малых, так и на обширных пространствах, распознавать людей в поле своего зрения и исключать возможность физического контакта робота с человеком, учитывать препятствия как больших, так и малых размеров, рассчитывать оптимальную траекторию на основе характеристик робота. Выбрана аппаратная компонента зрения и разработан вариант архитектуры системы удовлетворяющей поставленным задачам.

На сегодняшний день степень рентабельности использования роботов и автоматических систем в промышленном производстве высока и продолжает расти. Робот гуманоидного типа представляет собой особую категорию ввиду его легкой интеграции в производство. Однако эффективная и устойчивая система управления таким роботом остается открытым вопросом.

Поставлены и выполнены следующие задачи:

Анализ среды [1, с. 41]. Существует множество вариантов компьютерного зрения: бинокулярное зрение, 2D лазерное зрение, 3D лазерное зрение. У каждого варианта есть свои особенности, преимущества и недостатки. Поэтому для обеспечения выбора аппаратной компоненты и написания программной необходимо произвести анализ среды, ее характеристики и степень сложности. Такой анализ был произведен по следующим критериям: полностью обозреваемая/частично обозреваемая, детерминированная/случайная, конечная/бесконечная, без-конкурентная/конкурентная. Результат анализа говорит о том, что среда частично обозреваемая, случайная, бесконечная, без-конкурентная.

Обеспечение аппаратной компонентой компьютерного зрения [2, с. 1]. На основе анализа среды были выдвинуты следующие основные требования к аппаратной компоненте: 3D облако точек, скорость для обеспечения режима мягкого реального времени (30 fps), способность распознавания людей. Было найдено устройство, удовлетворяющее данным требованиям (Рис. 1).

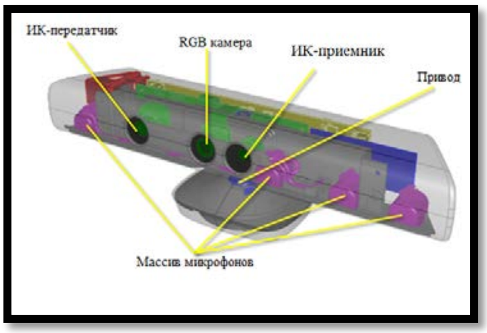


Рисунок 1 – Microsoft Kinect

1

Обеспечение безопасности системы для людей. Система должна иметь возможность идентифицировать человека и исключить возможность физического контакта во избежание травм. Kinect способен распознавать до 4 людей в поле своего зрения. Задача решена применением дерева решений для распознавания человека, а также положения в котором он находится (Рис. 2).

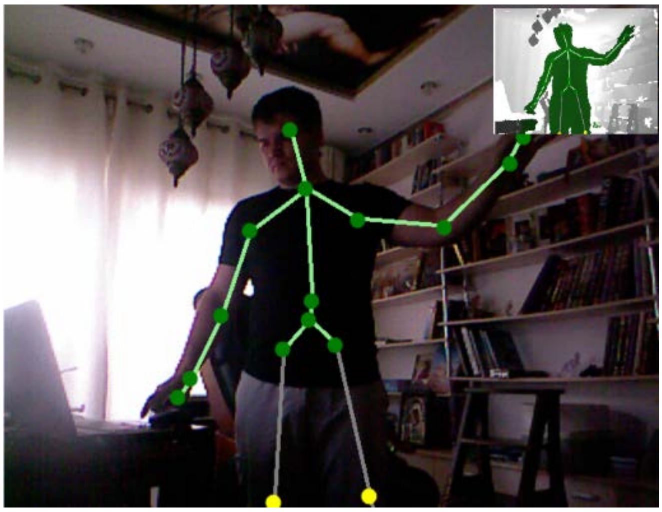


Рисунок 2 – Идентификация человека и его положения в поле зрения Kinect

Обеспечить функционирование системы на разных уровнях детализации. Робот должен уметь ориентироваться на больших пространствах (этаж, здание, местность). В то же время он должен иметь информацию о препятствиях в поле его зрения (парта, стул, камень, лужа, дерево и т. д.). Главная проблема состоит в том, что робот не может хранить информацию о расположении всех объектов для обширных пространств, иначе объем данных вырастет так быстро, что система перестанет адекватно функционировать. Но в то же время нам необходима эта информация. Решение достигнуто посредством построения иерархической конфликтной системы, состоящей из 2 уровней – глобального планера и локального планера [3 с. 1] (Рис. 3).

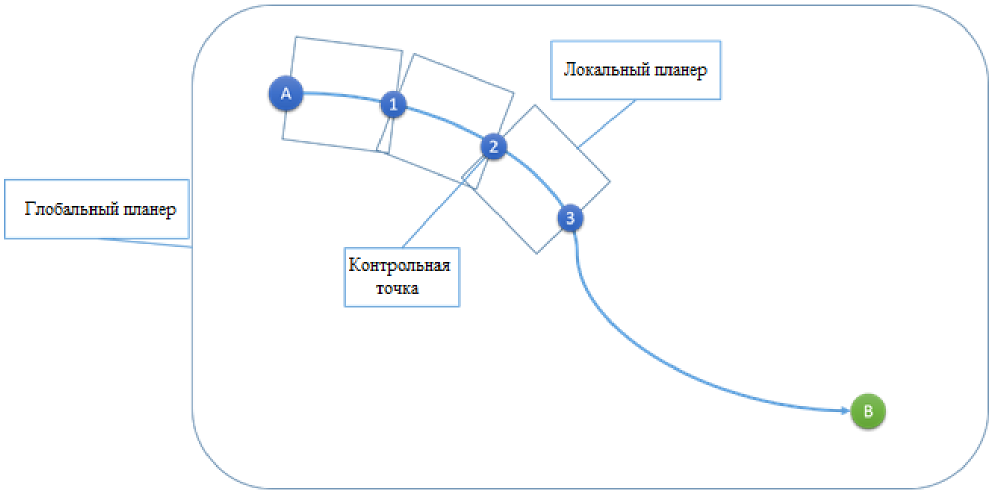


Рисунок 3 – Взаимодействие глобального и локального планера

Список литературы

[1] *R. R. Murphy*. Introduction to AI Robotics. MIT Press, 2000

[2] *Richard A. Newcombe, Shahram Izadi, Otmar Hilliges, David Molyneaux, David Kim, Andrew J. Davison, Pushmeet Kohli, Jamie Shotton, Steve Hodges, and Andrew Fitzgibbon.* KinectFusion: Real-Time Dense Surface Mapping and Tracking. ISMAR 2011 (Winner, Best Science and Technology Paper)

[3] *Tsai-Yen Li, Pei-Feng Chen, Pei-Zhi Huang*. Motion Planning for Humanoid Walking in a Layered Environment. International Conference on Robotics & Automation Taipei, Taiwan, September 14-19, 2003

К ВОПРОСУ О ПРОЕКТИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Копнова О.Л.
Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: ok_10_ok@mail.ru

Аннотация. В данной статье представлена модель аналитической системы поддержки принятия решений для стратегического планирования на примере вуза.

В послании Президента РК Н. Назарбаев подчеркнул: "Глобальный кризис – это не только опасность, но и новые возможности" [1]. С этим невозможно не согласиться, поскольку очень многие компании мирового масштаба заняли лидирующие позиции на рынке в кризисные периоды. Зачастую не имея большого стартового капитала благодаря грамотно проведенному анализу запускаемых инновационно-инвестиционных проектов.

В последние годы существенные изменения претерпела система финансирования вузов. Основными источниками доходов вузов является:

– государственное финансирование, которое все активнее становится целевым;

– обучение студентов на хоздоговорной основе, а также организация платных образовательных услуг;

– гранты на исследования.

Сформулируем основные проблемы, с которыми сталкивается система высшего образования в сфере управления[2]:

– отсутствие системы принятия управленческих решений на опережение, замедленная реакция на изменения во внешней среде;

– практическое отсутствие ряда управленческих функций, таких как контроль, долгосрочное планирование;

– структуры управления вузом слабо адаптированы к изменившимся условиям;

– нечеткость управленческих процедур;

– доминирование задач оперативного управления;

– ориентация на достижение целей и задач краткосрочного периода;

– сосредоточенность на решении преимущественно внутренних задач, слабое взаимодействие с потребителями образовательных услуг по изучению их потребностей.

Ключевым моментом возникновения этих проблем является тот факт, что вузы все в большей степени становятся субъектами рынка, а системы управления вузами отстают от этого процесса.

Радикально изменилась внешняя среда вузов. Наиболее существенные перемены произошли в следующих сферах[2].

– управление системой высшего образования. Произошла определенная децентрализация, повысилась самостоятельность вузов в принятии решений.

– финансирование высшего образования. Государство, по известным причинам, отказалось от роли главного и единственного финансиста. Возникли разные группы заказчиков и потребителей образовательных услуг со своими финансовыми возможностями, запросами и интересами.

– сформировалась конкурсная система получения финансирования на выполнение заказов и развитие учреждения.

– формирование негосударственного сектора высшего образования. Появление негосударственных вузов привело к конкуренции по ряду конъюнктурных специальностей.

Игнорировать эти изменения невозможно, и все вузы, так или иначе, более или менее успешно, вынуждены пересматривать свои управленческие системы. Противоречие сложившихся управленческих технологий и условий внешнего окружения требует изменений в организации управления вузом.

Рассмотрим информационную систему, позволяющую лицу принимающему решения (ЛПР) на основе сведений данных экспертных оценок, количественных показателей состояния рынка услуг, данных корпоративной системы вуза принимать стратегические решения. На рисунке 1 представлена диаграмма IDEF0 проектируемой системы.

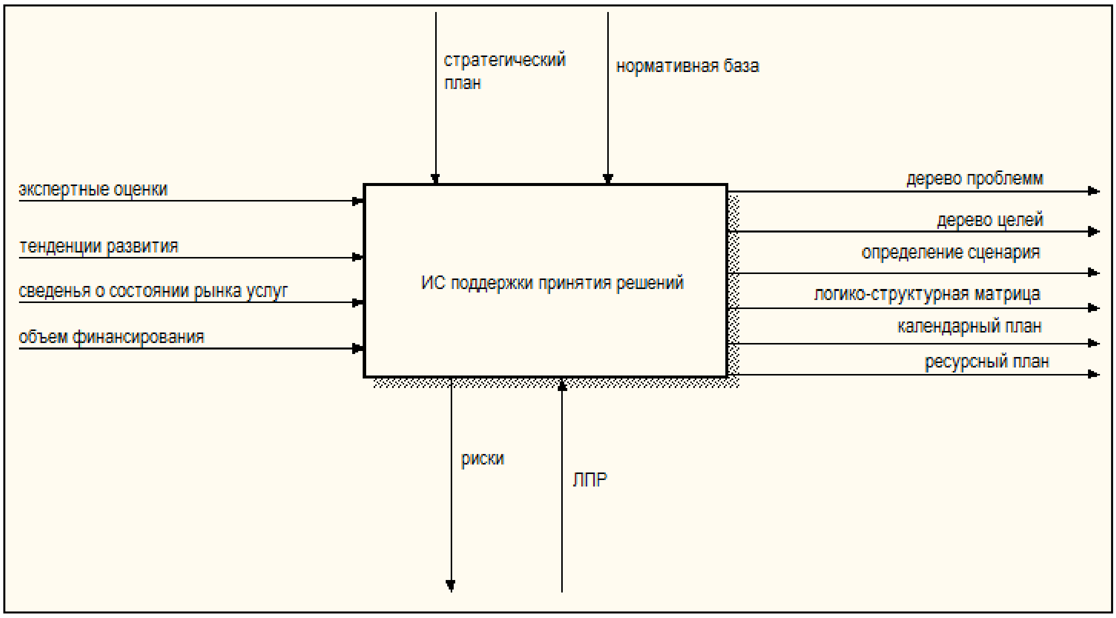


Рисунок 1 - Контекстная диаграмма учета принятых решений

Специфика разрабатываемой информационной системы заключается в том, что строится она на идее логико-структурного подхода, который позволяет структурировать идею проекта от момента генерации цели проекта до формирование календарного и ресурсного планов проекта [3].

В качестве аналитического аппарата ранжирования проблем по приоритетности можно использовать метод анализа иерархий, предложенный Т. Саати [4]. Математическим аппаратом проектируемой системы предлагаем использовать метод анализа иерархий. Для анализа рисков эффективно использовать математические модели теории игр - «игры с природой», которые основаны на принятии решений в условиях неопределенности.

Таким образом в статье представлена общая схема информационной системы поддержки принятия решений на основе логико-структурного подхода. Проектируемая система позволит повысить эффективность стратегического управления вуза.

Список литературы

[1] Послание Президента Республики Казахстан Н.Назарбаева народу Казахстана. 30 ноября 2015 г. / Официальный сайт президента РК -http://www.akorda.kz/ru/addresses/poslanie-prezidenta-respubliki-kazahstan-nnazarbaeva-narodu-kazahstana-30-noyabrya-2015-g (20.10.2016)

[2] Кузьмина Н., Шакиров Ж. Эффективный университет. Перезагрузка// МГИМО-Университет, 2014

[3] Позняков В.В. Логико-структурный подход в Управлении проектами - http://iteam.ru/publications/project/section_35/article_2384 (13.10.2016)

[4] Саати Томас Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях// Аналитические сети. Пер. с англ. / Науч. ред. А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. — М.: Издательство ЛКИ, 2008.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕФТЕДОБЫВАЮЩЕМ ПРЕДПРИЯТИЙ

Кожанова А.М.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: aida_8304@bk.ru

На сегодняшний день нефтегазовая отрасль играет важную роль в экономике. Нефтедобыча является основной и наиболее динамично развивающейся отраслью экономики Республики Казахстан. Следовательно, существует необходимость поддержания и развития данной отрасли для сохранения экономического уровня страны.

Настоящая работа посвящена научно-практическим аспектам применения системно-динамического подхода в управлении инвестиционной деятельностью нефтяной компании (НК). Системная динамика – новое направление, предназначенное для решения широкого круга задач, относящихся в основном к моделированию деятельности экономических систем (производственных холдингов, отраслей, регионов, и др.), характеризуемых наличием сложных внутрисистемных связей (в том числе, обратных, перекрестных и иерархических). В условиях высокой стоимости управленческих решений характерной для нефтяной компании таким инструментарием было выбрано имитационное моделирование, одним из направлений которого является системная динамика.

Основными видами нефтегазовой компании деятельности являются: 1)поиск и разведка месторождений углеводородов; 2) добыча нефти, газа, газового конденсата; 4) ремонт и отделочные работы; 3) транспортировка нефти, газа и продуктов на территории Казахстана и за ее пределами. Для проведения экспресс-анализа целесообразно применять построение регрессионных зависимостей капитальных и текущих затрат от основных факторов на основе проектных и фактических данных по вводимым в эксплуатацию и эксплуатируемым месторождениям для конкретного региона. Подобные зависимости были построены для нефтяных и газовых месторождений отдельных нефтегазоносных областей Казахстана (таблица-1),[3, с.54].

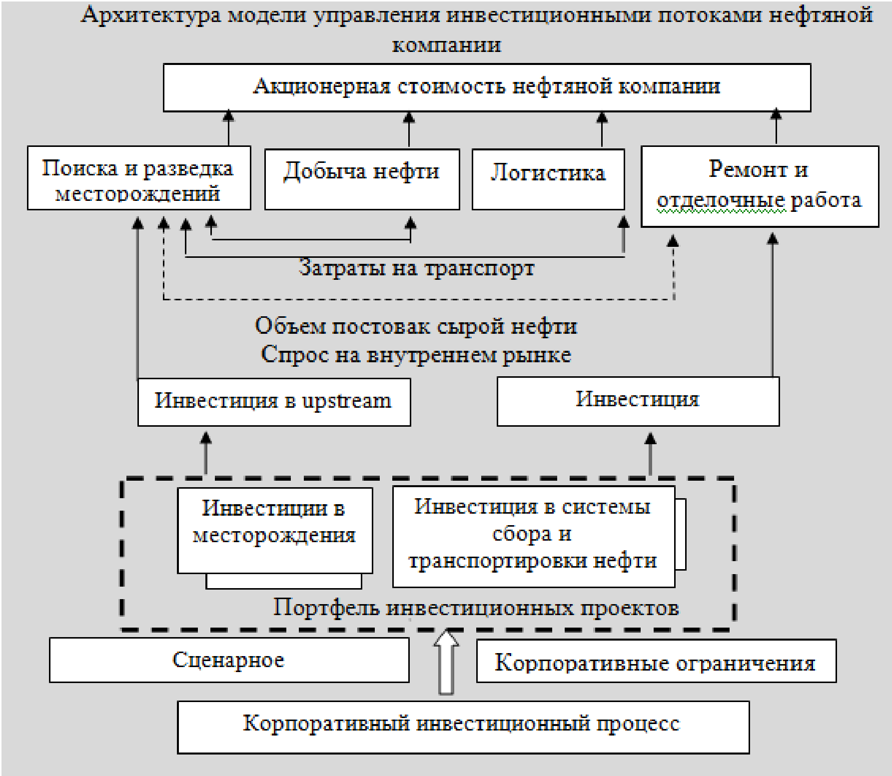


Рисунок 1 – Схема управления инвестиционными потоками
в разработанной модели [2, с. 4]

Таблица-1. Регрессионные уравнения для определения текущих затрат и капитальных вложений в поиски, разведку, разработку и транспорт газа и нефти на территории Казахстана

Параметр	Уравнение реграссии
1. Стоимость строительства поисковой скважины (S_n). 2. Себестоимость транспорта 1000 куб.м газа ($C_г$), долл./1000 м^3	$S_n=a_0+a_1H+a_2r+a_3Hr$, где H-глубина скважины, км; r – расстояние от базы нефтегазоразведочной экспедиции до объекта, сотни км.a_0, a_1,, a_2, a_3 – параметры уравнения регрессии. $C_г=a_0+a_1/Q_г$
3. Стоимость строительства разведочной скважины (S_p).	$S_p=a_0S_n$, где a_0 – коэффициент изменения стоимости разведочной скважины, доли единиц
4. Число разведочных скважин на месторождении (N_p), скв.	$N_p=a_0n^{a1}$ lnQ, где n-число возможных залежей; Q-запасы газа, млрд. м^3
5. Капитальные вложения в разработку месторождения (K_d),тыс.тг./1000м^3	$K_d=a_0+a_1/L^{Q\phi}$, где ϕ – среднегодовой темп отбора запасов, доли единицы
6. Капитальные вложения в транспорт газа и нефти (K_t), тыс.тг./1000м^3 7. Себестоимость добычи 1000м^3 (Сд)	Определяются исходя из средней сметной стоимости строительства одного км газопровода, расстояния от перспективной структуры до центра и объема товарного газа. $C_д=a_0+a_1/(Q\phi)$

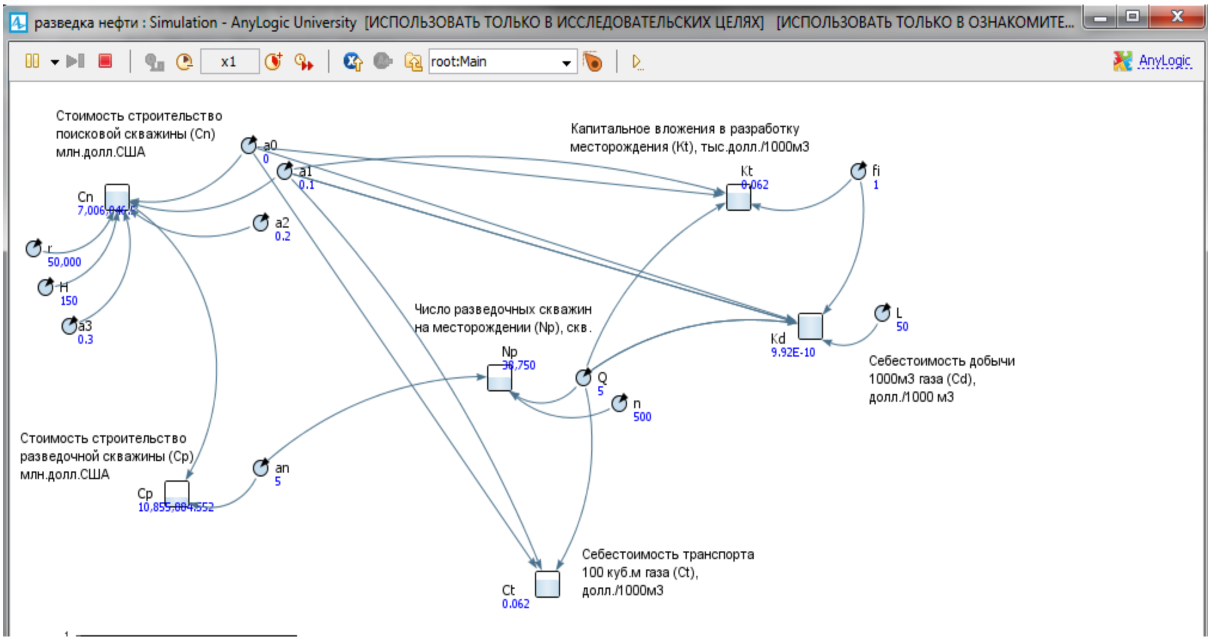


Рисунок - 2. Системно-динамический подход моделирование затрат и капитальных вложений в поиски, разведку, разработку и транспорт газа и нефти в программе AnyLogic 7.

Продемонстрирована возможность применения системной динамики для моделирования инвестиционной деятельности нефтяной компании. Разработан подход к моделированию инвестиционной деятельности нефтяной компаний, в основе которого лежит интеграция моделей ключевых бизнес-сегментов НК в единую динамическую модель, реализованную в виде законченной системы поддержки принятия управленческих решений. Использование этого подхода позволит решить задачу оптимизации портфеля инвестиционных проектов в разрезе всей нефтяной компании и отдельных ее сегментов.

Список литературы

[1] M.Milosz, A.Kozhanova. Building dynamic models of technical-economic systems using causal diagrams. Valencia : 10-th INTED, 2016. 7-9 March..

[2] Акопов А.С. Проблемы управления субъектом ТЭК в современных условиях. / Монография, - М.: ЦЭМИ РАН, 2004.- 246 с. (IBSN: 5-8211-0309-6

[3] А.Ф. Андреев, А.Б.Чикиров, Ж.Г.Тимралиев. Экономические проблемы освоения нефтегазовых ресурсов. Москва : "Нефть газ", 2005.

[4] Н.Н. Лычкина. Имитационные модели в процедурах и системах поддержки принятия стратегических. Бизнес-информатика, 2007 г., Т. №1, 1.

[5] Я.В. Крюков. Информационная поддержка процесса управления активами нефтяной компании, представленными запасами углеводородного сырья. Новосибирск : Институт Экономики и ОПП СО РАН, 2004.

[6] А.Е. Тасмуханова. Афтореферат. Оценка рисков при планировании деятельности нефтегазодобывающих предприятий. Уфа : Уфимский научный центр РАН, 2006 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В НИЖНЕМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ НА БАЗЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ANSYS

Маусумбекова С.Д., Полякова И., Тенизбай Р.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: Saule.Mausumbekova@kaznu.kz

Мониторинг и прогнозирование загрязнения атмосферы в связи с возрастающими антропогенными нагрузками окружающей среды всегда были и остаются актуальными проблемами.

Целью научного исследования является моделирование динамики распределения скорости ветра, примесей в нижнем слое атмосферы при помощи программного комплекса ANSYS, что является основой для успешного проведения исследований задач экологии, в частности, для прогнозирования распространения загрязняющих веществ, вредных газов и примесей в воздухе, возникающих в случае аварий на производственных объектах.

Исследование физических процессов и явлений в нижнем слое атмосферы толщиной 2000 метров, имеет существенную научную и практическую значимость, так как структура данного слоя сильно влияет на растительный, животный мир планеты, а также, на состояние жизни населения [1,2].

Одним из наиболее известных современных программных продуктов является программный комплекс (ПК) ANSYS, который представляет многоцелевой пакет программ для численного моделирования физических процессов и явлений [3].

Оболочка ANSYS Workbench является средой и программной платформой, обладающей широкими возможностями для интеграции различных приложений в единое рабочее пространство и обмена данными между ними. Проект в среде Workbench представляет собой виртуальное пространство, в котором с помощью комбинаций различных модулей формируется шаблон расчета.

Для создания модели динамики нижнего слоя атмосферы были решены следующие задачи в ANSYS Workbench: создание/импорт геометрической модели; пространственная дискретизация расчетной области; выбор физико-математической модели, задание граничных и начальных условий, описание расчетной схемы; процесс решения задачи, контроль за сходимостью решения; обработка и анализ полученных результатов.

Создание геометрической модели производится в модуле Design Modeler. Для задания геометрии рассматриваемой области атмосферы была выбрана область 8000 м $\times$ 2000 м. Построение сетки осуществляется с помощью модуля Meshing. Для поставленной задачи была построена расчетная сетка размерностью 240 $\times$ 100. Для получения решения нестационарной задачи для описания динамики сжимаемого газа был использован модуль ANSYS FLUENT.

В программном комплексе ANSYS уделяется особое внимание разработке современных моделей турбулентности для эффективного и точного расчета турбулентных процессов. В работе расчет поставленной задачи происходил на основе двухпараметрической k-ε модели турбулентности.

Важным этапом подготовки расчетной модели является задание материалов и их физических свойств в разделе Materials в дереве проекта. Для нашей задачи было выбрано 4 материала: air (воздух), nitrogen (азот), oxygen (кислород), water-vapor (водяной пар). Исходя из метеорологических данных в граничных условиях задачи было установлено процентное содержание каждого компонента в воздухе.

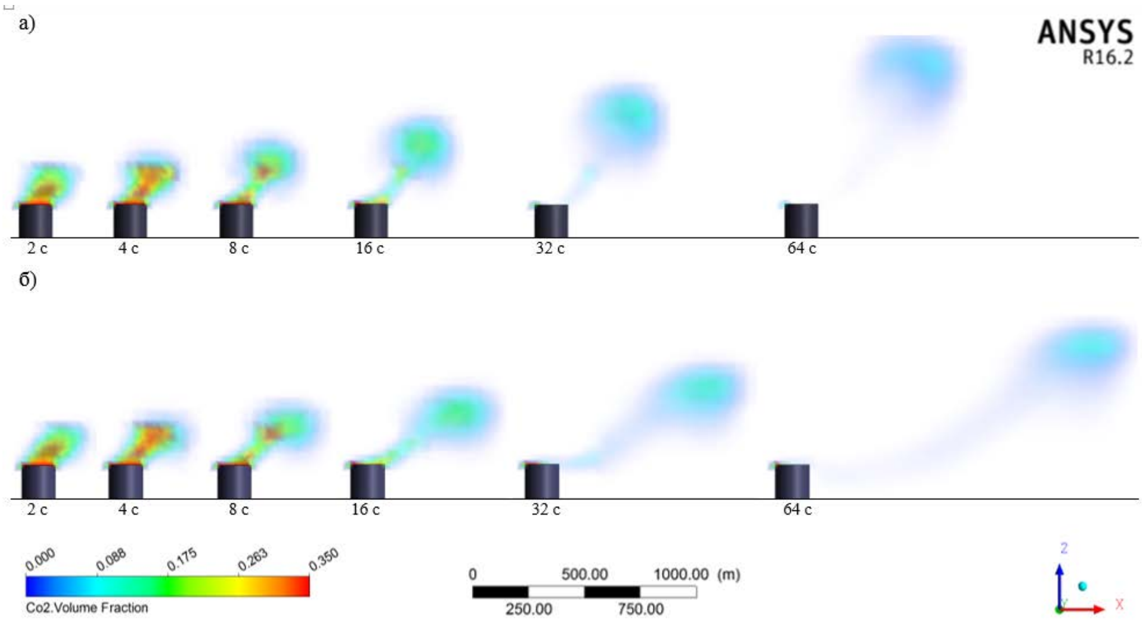
В поставленной задаче на входе в расчетную область были заданы следующие граничные условия:

– Использовалось условие Velocity Inlet, которое применимо для задания скоростей и скаляров (температуры, турбулентных параметров и т.д.).

Граничные условия на стене: включено условие прилипания на стенке.

На следующем этапе были выбраны установки решателя Pressure-Based, который подключает алгоритм расчета уравнений Навье-Стокса, основанный на методе коррекции давления. Инициализация решения проводится с помощью окна задачи Solution Initialization.

На рисунке 1 представлено распределение в воздухе CO_2 от источника выбросов в различные моменты времени при скоростях ветра 3 м/с и 12 м/с.



Рисунке 1– Распространение в воздухе CO_2 от источника выбросов при различных скоростях ветра а) скорость ветра 3 м/с; б) скорость ветра 12 м/с

Начальными условиями являлось задание объемной доли CO_2 – 0,350. В соответствии с рисунком 1 в течении четырех секунд от начала выбросов при скоростях ветра 3 м/с и 12 м/с распространение CO_2 отличается незначительно – перенос распростаряется на 230-250 м. При этом максимальная концентрация CO_2 наблюдается вблизи источника выбросов. На 8 секунде происходит पояление двух очагов с наибольшей концентрацией: вблизи источника выбросов и менее выраженный на расстоянии 200 м при скорости ветра 3 м/с и 250 м при 12 м/с по горизонтали. В вертикальном направлении выбросы распространяются до высоты около 300 м. С увеличением продолжительности переноса примесей возрастает горизонтальная составляющия, так на 64 секунде наибольшая концентрация отмечается на расстоянии 600 м от источника при скорости ветра 3 м/с и на 1200 м при 12 м/с. В то время как облако наибольшей концентрации находится на высоте 1000 м. Чем дальше переносятся примеси от источника, тем меньше их концентрация.

Применение наукоемких моделей, используемых для анализа и прогноза состояния окружающей среды, позволит минимизировать степень экологичейской опастности, улучшить уровень комфорта проживания населения и оптимизировать финансовые затраты на экологические мероприятия.

Список литературы:

[1] Матвеев Л.Т. Физика атмосферы: учебник. – СПб.: Гидрометеоиздат, 2000. – 777 с.

[2] Вагер Б.Г., Надежина Е.Д. Пограничный слой атмосферы в условиях горизонтальной неоднородности. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 136 с.

[3] Вальгер С.А., Данилов М.Н., Захарова Ю.В., Федорова Н.Н. Основы работы в ПК ANSYS 16.0: учебное пособие. – Новосибирск: НГАСУ, 2015. – 240 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОДЗЕМНОГО ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ

Мухамбетжанов С.Т., Байшемиров Ж.Д.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
Казахский национальный педагогический университет им. Абая
E-mail: mukhambetzhanov_@mail.ru , zharasbek85@mail.ru

Аннотация. В работе исследовано процесс о растворении твердого пористого скелета путем активной добавки (кислоты) в вязкой несжимаемой поровой жидкости. Как правило, такие математические задачи называются свободными границами. В нашем описании на микроскопическом уровне мы используем общепринятое уравнения механики сплошной среды и хорошо известных химических законов. Полученная таким образом модель нелинейная, очень сложно для математического анализа и совершенно бесполезно с практической точки зрения, так как соответствующие дифференциальные уравнения содержат быстро осциллирующие коэффициенты по шкале микрона.

В результате растворения твердого скелета появляются продукты химической реакции. Этот физический процесс рассматривается в ограниченной области Ω в R^3. Часть S^+ граничной S^+ области Ω. модели нагнетательных скважин, часть S^- из S модели эксплуатационных скважин, а также часть S^0 из S модели непроницаемой границей Ω. Кроме того, область Ω состоит из области $\Omega_f(t)$, что соответствует порового пространства, область $\Omega_f(t)$, соответствующего твердого скелета, а граница $\Gamma(t)$ между порового пространства и твердого скелета. $\Gamma(t)$ является свободной (неизвестной) границей, так как во время выщелачивания скелет растворенный и меняет свою форму. Новая точка здесь является производной граничных условий, описывающие растворение твердого скелета на свободной границе и динамику этой границы. Но что очень важно для нас здесь является точность описания основных механизмов физических процессов. Соответствующая система состоят из динамических уравнений

$$v = -\frac{1}{\mu_1}\mathrm{A}\cdot\nabla p, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot v = \frac{(\rho_8 - \rho_f)}{\rho_f}\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathrm{t}} \tag{2}$$

Уравнение для скорости v и давления p поровой жидкости, диффузии – конвекции

$$m\frac{\partial\Phi(c)}{\partial t} + v\cdot\nabla c - D_0\nabla\cdot(C\cdot\nabla c) = -\left(\frac{\rho_8}{\rho_f}c + \frac{\varphi(c)}{\varphi_0(c)}\right)\frac{\partial m}{\partial t} \tag{3}$$

или реагента концентрации c. Где $\Phi(c) = c + \dfrac{\varphi(c)}{\varphi_0(c)}$, неизвестная функция m (пористости, порового пространства) выражается

$$m(x,t) = \int_Y \chi(x,t,y)dy.$$

Матрицы A и C определены через микроструктуру. Например,

$$C(x,t) = \left(m(x,t)\mathrm{I} + \int_Y \chi(x,t,y)(\sum_{i=1}^{3}\nabla_y Q^{(i)}(x,t,y)\otimes e_i)dy\right),$$

где I-матрица блока, (e_1, e_2, e_3) стандартная декартовый базис и матрица $\mathrm{B} = a \otimes b$ определяется как $\mathrm{B} \cdot c = a(b \cdot c)$. 1 – период в функциях y $Q^i(x,t,y), i = 1,2,3$ в каждом точке $x \in \Omega$ для $t > 0$ являются решениями периодической краевой задачи.

$$\Delta_y Q^{(i)} = 0, \quad y \in Y_f(x,t), \tag{4}$$

$$(e_i + \nabla_y Q^{(i)}) \cdot \nu = 0, \;\; y \in \gamma(x,t) = \partial Y_f(x,t) \tag{5}$$

в подобласти неизвестной $Y_f(x,t) \subset Y$ единичного куба Y. В (5) ν единичный вектор нормали к границе $\gamma(x,t)$.

По аналогии с микроскопической моделью, поведение свободной границы $\gamma(x,t)$ определяется дифференциальным уравнением.

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi(x,y,t) = \lambda \varphi_0(c(x,t)) \left| \nabla_y \chi(x,y,t) \right| \tag{6}$$

для характеристической функции $\chi(x,t,y)$ неизвестного домена $Y_f(x,t)$. Наконец, концентрация $c_i, i = 1,...,n,$ из продуктов химических реакций определяются с помощью неоднородных уравнений переноса

$$m\frac{\partial c_i}{\partial t} + v \cdot \nabla c_i = \frac{\rho_8}{\rho_f}(\varphi_i(c) - c_i)\frac{\partial m}{\partial t}. \tag{7}$$

Проблема закончена следующими граничными и начальными условиями

$$p = p^{\pm}(x,t), \;\; x \in S^{\pm}, \;\; t > 0, \tag{8}$$

$$c_i = 0, \;\; i = 1,...,n, \;\; c = c^{+}(x,t), \;\; x \in S^{\pm}, \tag{9}$$

$$\nabla c \cdot n = 0, \quad x \in S^{-}, \;\; t > 0, \tag{10}$$

$$\nabla c \cdot n = 0, \quad \upsilon \cdot n = 0, x \in S^{0}, \;\; t > 0, \tag{11}$$

$$c(x,0) = c_0(x), \;\; \mathrm{c_i}(x,0) = 0, \;\; i = 1,...,n, \;\; \gamma(x,0) = \gamma_0(x) \;\; x \in \Omega.. \tag{12}$$

Можно видеть, что структура гомогенизированными системами и все ее коэффициенты определяются только от физических постулатов и микроструктуры порового пространства. В работе исследованы качественные свойства решения задачи (1) – (12): асимптотическое поведение при неограниченном возрастании времени. Доказано, что решение нестационарной задачи сходится к решению соответствующей стационарной задачи. Также рассмотрено численное моделирование процесса подземного выщелачивания. Проведен сравнительный анализ.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИ МАСКЕТА-ЛЕВЕРЕТТА

Мухамбетжанов С.Т., Жанузакова Д.Т.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: mukhambetzhanov_@mail.ru

Аннотация. В работе обоснован метод фиктивных областей для математической модели Маскета-Леверетта. Рассматриваемая модель исследована в областях со сложной геометрией. Корректность модели и качественные свойства решений были изучены в работах академика РАН В.Н.Монахова и его учеников.

В работе исследована начально-краевая задача для насыщенности и приведенного давления (s, p) в конечной области $\Omega \in R^n (n = 2)$ с границей $\partial\Omega, Q = \Omega \times [0,T], G = \partial\Omega \times [0,T]$:

$$m\frac{\partial s}{\partial t} = div(K_0 a\nabla s + K_1\nabla p + \vec{f}_0),(x,t) \in Q, \qquad (1)$$

$$div(K\nabla p + \vec{f}) = 0,(x,t) \in Q, \qquad (2)$$

$$s(x,t) = s_0(x,t),(x,t) \in G, \qquad (3)$$

$$p(x,t) = p_0(x,t),(x,t) \in G, \qquad (4)$$

$$s(x,0) = s^0(x,0), x \in \Omega, \qquad (5)$$

m – пористость, $K = K_0(x)$ – тензор фильтрации для однородной жидкости, $K_i = K_0(x)\cdot k_{0i}(s)$ – симметричные тензоры фазовой проницаемости, $k_{0i}(s) = \frac{1}{\mu_i}\bar{k}_{0i}(s)$ – фазовые проницаемости для однородного изотопного грунта, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, $\bar{k}_{0i}(s)$ – фазовые проницаемости, s_i – насыщенности, $p_2 - p_1 = p_c(x,s)$ – капиллярное давление, $p = p_1 - \int\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{k_{02}}{k}d\xi + \rho_1 gh$ – приведенное давление, где

$k = k_{01}(s) + k_{02}(s), a = -\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{k_{01}k_{02}}{k}, \vec{f}_0 = K_1\int\nabla\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{k_{02}}{k}d\xi,$

$K = K_1 + K_2 = kK_0 = (k_{01} + k_{02})K_0, \vec{f} = K\int\nabla\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{k_{02}}{k}d\xi + K_2\nabla p_c + K_2(\rho_2 - \rho_1)\vec{g}.$

Рассматриваются условия независимости суммарной скорости фильтрации от насыщенности. Если коэффициенты $K(x,s) = K_0(x)k(s)$ и $\vec{f}(x,s)$ не зависят от s, то система уравнений распадается и допускает последовательное определение поля скорости $\vec{v}$ и фазовых насыщенностей $s_i(x,t)$. В этом случае параметры модели Маскета-Леверетта определяются следующим образом

1) $k = k_{01}(s) + k_{02}(s) = const$ – с достаточной степенью точности реализуется для смешивающихся жидкостей, для которых $k_{01}(s) = \lambda\cdot s, k_{02}(s) = \lambda\cdot(1-s), \lambda = const$. В случае несмешивающихся жидкостей отклонение от постоянной наблюдается лишь вблизи предельных значений $s = 0{,}1$ приведенной насыщенности.

2) $\frac{1}{m(x)}\det K_0(x) = const$, при этом имеем $p_c = p_c(s)$, то есть $\frac{\partial p_c}{\partial x_i} = 0.$

3) Жидкости имеют одинаковые плотности $\rho_1 = \rho_2$.

Исходя из последних предположений относительно коэффициентов задачи (1)-(5) в работе исследованы:

1) численно исследована задача (1) – (5);
2) обоснован метод фиктивных областей.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ УДЛИНЕНИЯ СТЕРЖНЯ ИЗ СПЛАВА АНВ-300, ПРИ НАЛИЧИИ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Мырзашева А.Н., Шаждекеева Н.К.
Атырауский государственный университет им.Х.Досмухамедова, КАЗАХСТАН
E-mail: aigul_mn@mail.ru, n.shazhdekeeva@mail.ru

Based on the minimization procedure of the total thermal energy on nodal values temperature in work has been developed a mathematical model of the steady temperature field distribution along the length of the rod, the limited length in the presence of the local temperature, heat flux , heat transfer and thermal insulation. Herewith the material of the rod is heat resistant alloy AHB- 300, value of thermal expansion is a function of temperature. On the basis of the developed model is also

attached computational algorithm and method to investigate numerically the steady temperature field distribution, as well as extension of the heat resistant alloy based on the availability of all types of heat sources and axial tensile force.

Рассмотрим вертикальный стержень ограниченной длины $L[см]$. Верхний конец которого жестко защемлен. На свободном нижнем конце приложена осевая расстягивающая сила $P[кГ]$. Ось Ox направлена сверху вниз по оси стержня. Боковая поверхность участка $0 \le x \le x_1$ стержня теплоизолирована. На участка $x_1 \le x \le x_2$ стержня подведен тепловой поток с постоянной интенсивностью $q\left[\frac{Вт}{см^2}\right]$. Через боковую поверхность участка $x_2 \le x \le x_3 = L$ стержня происходит теплообмен с окружающей средой. При этом температура окружающей среды $T_{oc}[°C]$, а коэффициент теплообмена между стержнем и этой средой $h\left[\frac{Вт}{см^2 \cdot °C}\right]$. Коэффициент теплопроводности материала стержня $K_{xx}\left[\frac{Вт}{см \cdot °C}\right]$.

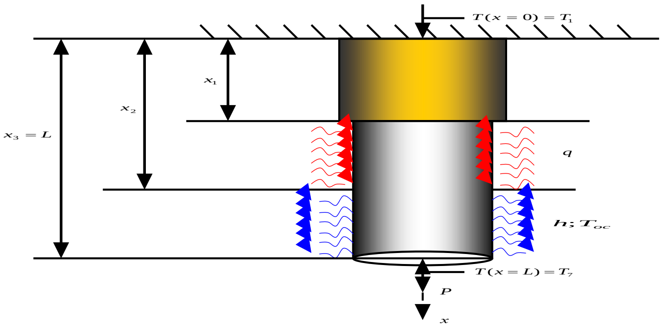


Рис.-1. Расчетная схема рассматриваемой задачи.

На верхном защемленном конце стержня задана температура $T(x=0)=T_1$, на нижнем свободном конце стержня задана температура $T(x=L)=T_7$. Материал стержня жаропрочный тугоплавки сплав АНВ-300 [1]. Для удобства первым элементом (участком) стержня берем участок $0 \le x \le x_1$, $T(x=0)=T_1$; $T\left(x=\frac{x_1}{2}\right)=T_2$; $T(x=x_1)=T_3$. Поле распределения температуры $T=T(x)$ в пределах первого элемента апроксимируем полиномом второго порядка, т.е.

$$T(x)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2, \quad 0 \le x \le x_1. \tag{1}$$

Далее, как в случае первого элемента, по длине второго элемента поле распределения температуры имеет следующий вид

$$T(x)=\varphi_i(x)\cdot T_3+\varphi_j(x)\cdot T_4+\varphi_k(x)\cdot T_5, \quad x_1 \le x \le x_2. \tag{2}$$

здесь $\ell=\ell_2=x_2-x_1$ - длина второго элемента.

Аналогично, для последнего третьего элемента (участки) стержня имеет следующий вид

$$T(x)=\varphi_i(x)\cdot T_5+\varphi_j(x)\cdot T_6+\varphi_k(x)\cdot T_7, \quad x_2 \le x \le x_3=L. \tag{3}$$

здесь $\ell=\ell_3=x_3-x_2$ -длина третьего элемента.

Функционал, характеризующее полную тепловую энергию для стержня с учетом наличия заданных температур, частичной теплоизоляции, локального теплового потока и теплообмена будет иметь вид [2]

$$J = \int_V \frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{S_{ПБП}^{(2)}} qT(x)dS + \int_{S_{ПБП}^{(3)}} \frac{h}{2}\left[T(x) - T_{oc}\right]^2 dS\,. \quad (4)$$

Результаты экспериментов позволяют установить зависимость между коэффициентом теплового расширения и температуры (таблица 1).

Таблица 1-Для жаропрочного тугоплавого сплава АНВ – 300

T (°C)	20	100	200	300	400	500	600	700	800
$\alpha = \times 10^{-6}(1/{}^\circ C)$	10,1	11,9	13,2	14,7	17	18,3	20,3	22	23,2

Тогда в пределах длины каждого элемента имеем, что значения коэффициента теплового расширения α_i

$$\alpha(T(x)) = \varphi_i(x)\cdot\alpha_n + \varphi_j(x)\cdot\alpha_{n+1} + \varphi_k(x)\cdot\alpha_{n+2}\,, \quad (5)$$

где для первого элемента *n=1*, второго *n=3*, а для третьего *n=5*.

Величина удлинения каждого элемента вычисляется следующим образом [3]

$$\Delta\ell_{Tm} = \int_0^{\ell_m}\left[\varphi_i(x)\cdot\alpha_n + \varphi_j(x)\cdot\alpha_{n+1} + \varphi_k(x)\cdot\alpha_{n+2}\right]\cdot\left[\varphi_i(x)\cdot T_n + \varphi_j(x)\cdot T_{n+1} + \varphi_k(x)T_{n+2}\right]dx$$

где $m = 1,2,3$ номер элемента; ℓ_m-длина элемента.

В рассматриваемой задаче величина удлинения стержня от теплового расширения на 61,544 раза больше чем величины удлинения от растягивающей силы Р. Таким образом, проведенные расчеты показывают, что для элементов конструкций, которые работают в сложном тепловом и силовом поле необходимо обязательно учитывать влияние тепловых источников. Ибо их влияние будет почти, на два порядка больше, чем действующие силы.

Список литературы

[1] Химущин Ф.Ф. Жаропрочные стали и сплавы. 2-ое переработанное и дополненное издания. М.: Металлургия, 1969.-749с.

[2] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир,1979-с.568.

[3] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир,1975.-с.541.

[4] Писаренко Г.С. и др., Сопротивление материалов, “Вища Школа”, Киев, 1973, 672 с.

[5] Кудайкулов А.К., Мырзашева А.Н., Кенжегулов Б.З. «Математическая модель установившегося поля распределения температуры по длине стержня». Наука и новые технологии, №4, г. Бишкек, 2009 г. С.3-7.

ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ НЕЙРОНОВ

Нуртазина К.Б.
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, КАЗАХСТАН
E-mail: knurtazina@mail.ru

Хотя поиск потенциала осуществляется продолжительное время, восстановление потенциала и источника является новой задачей. Полученные в данной статье результаты по существу являются первыми результатами по восстановлению как коэффициентов уравнений, так и источников (вместе с топологией ребер). Впервые предложены новые результаты, по идентифицируемости распределенных параметров для задачи параболического типа на графах. Особенность предлагаемых подходов: проблема основана на практической задаче нейробиологии; новая методология для восстановления произвольного числа распределенных параметров; решение опирается на новые методы – метод граничного управления (Boundary Control Method, BCM), авторы метода – С.Авдонин, М.Белишев, А.Благовещенский, С.Иванов, А.Качалов, Я.Курылев; а также рекурсивный метод (Leaf Peeling Method, LPM), автор метода – С.Авдонин.

Управляемость и обратные задачи для параболических уравнений на графе-дереве связаны с моделью нейронной сети – кабеля. С практической точки зрения подобные модели находят применение в изучении влияния электротонических свойств дендритов (ветвящихся отростков нервной клетки – нейрона). Созданные в 1960-70 годы американским математиком В. Роллом [1] модели теоретического описания нейронной активности рассматриваются нами с точки зрения восстановления пространственно распределенных параметров в кабельном уравнении.

Мы опираемся на результаты статьи [2], связанной с восстановлением одного распределенного параметра проводимости $q(x)$ на конечном интервале и на графе.

В данной статье решается проблема восстановления, как коэффициентов, так и k неизвестных источников при $k > 1$.

На графе-дереве рассматриваем задачу (1)-(3):

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = p(t)h(x), \qquad t \in (0,T). \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_{e_j \sim v} \partial u_j(v,t) = 0 & \text{в каждой вершине } v \in V \setminus \partial\Omega, \text{ и } t \in [0,T] \\ u(\cdot\,,t) & \text{непрерывны в каждой вершине для всех } t \in [0,T] \end{cases} \tag{2}$$

$$\partial u = f \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0,T], \qquad u|_{t=0} = 0 \quad \text{на } \Omega \tag{3}$$

В формуле (2) $\partial u_j(v,\ \cdot)$ означает производную функции u по направлению к вершине v, взятую вдоль ребра e в направлении от вершины. Кроме того, $e_j \sim v$ означает ребро e_j, входящее в вершину v, а сумма берется по всем ребрам, входящим в v. Выражение (2), представляет собой условие согласования *Кирхгофа-Неймана*.

Пусть $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ и $\mathcal{F}^T = L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$. Известно [3], что существует единственное решение начально-краевой задачи (1)-(3).

В предположении p известным решена задача: при заданных $\left\{\partial u|_{\partial\Omega\times[0,T]}\right\}$ и наблюдениях $\left\{u|_{\partial\Omega\times[0,T]}\right\}$, однозначно определить $\{u,q,h\}$.

Пусть $\Omega = \{E, V\}$ конечный связный компактный метрический граф-дерево, где $E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ множество ребер и $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{N+1}\}$ набор вершин.

Граф называется *метрическим графом*, если каждое ребро $e_j \epsilon E$ отождествляется с интервалом (a_{2j-1}, a_{2j}) вещественной прямой положительной длины $l_j = \lfloor a_{2j-1} - a_{2j} \rfloor$.

Такой граф называется *деревом*, если он не имеет циклов. Ребра графа сходятся в вершинах v_j, которые можно рассматривать в качестве классов эквивалентности конечных точек $\{a_j\}$.

Подграф графа Ω называется *звездным графом*, если он состоит из всех ребер, входящих в одну внутреннюю вершину v.

Такой граф называется *пучком*, если все ребра, кроме одного, являются граничными ребрами графа Ω. В данной статье под графом понимается связный конечный компактный метрический граф-дерево.

Пусть $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\} = \partial\Omega \subset V$ граничные вершины, то есть если $id(v)$ – показатель вершины обозначает число ребер, входящих в эту вершину, то $\partial\Omega = \{v \in V | id(v) = 1\}$. Мы допускаем, что никакая вершина не имеет показатель 2, или же мы можем рассматривать эквивалентный граф с двумя совпавшими ребрами. Следовательно, $V \backslash \partial\Omega = \{v \in V | id(v) > 2\}$.

В процессе решения обратной задачи мы предполагаем, что $p \in H^1(0, T)$. Задаем *оператор отклика* $\tilde{R}^T: \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ как $(\tilde{R}^T f)(t) = u^f(\cdot, t),\ t \in [0, T]$.

Решена обратная задача, которая состоит в восстановлении топологии графа, длин ребер, и векторов $q(\cdot)$ и $h(\cdot)$, известных по $\tilde{R}^T f$ для всех $f \in \mathcal{F}^T$. Это также означает, что нам известны $\tilde{R}^T f$ при $f \equiv 0$.

Теорема 1. *Для любого* $T > 0$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$, *существует управление* $f_n \in \mathcal{F}_0^T := H_0^1(0, T;\ \mathbb{R}^m)$ *такое, что* $v^{f_n}(\cdot, T) = \phi_n$ *в* Ω. *Управляемость может быть достигнута без использования управления на какой-либо одной граничной вершине, то есть мы можем положить, скажем,* $f^m(t) = 0, t \in [0, T]$.

Поскольку из [2] *проводимость* $q \in L^1(0, l)$ *известна*, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если проводимость* $q \in L^1(0, l)$ *известна, и* $T \in (0, l]$, *то для любой функции* $z \in \mathcal{H}^T$ *существует единственное управление* $f \in \mathcal{F}^T$ такое, *что*
$w_t^f(x, T) = z(x)$ на $\mathcal{H}^T$.

Используется вспомогательная задача

$$w_{tt} + q(x)w = w_{xx}, \qquad \text{на} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \tag{4}$$

$$w_x(0, t) = f(t), \quad w_x(l, t) = 0, \qquad 0 < t < T \tag{5}$$

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{6}$$

Решение задачи (4)-(6) обозначается через $w^f(x, t)$. Оператор связи для (4)-(6) имеет вид $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, заданный формулой $(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = \left(w_t^f(\cdot, T), w_t^g(\cdot, T)\right)_{\mathcal{H}}$.

Теорема 3. *Если* $f \in \mathcal{F}^T$, *то справедливо следующее представление*:

$$(C^T f)(t) = f(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \{r(|t - s| + r(2T - t - s))\} f(s) ds.$$

Список литературы

[1] Rall W. Core conductor theory and cable properties of neurons // Handbook of Physiology, The Nevrous System. American Physiological Society. 1977. P. 39-97.

[2] Avdonin S, Bell J. Determining a distributed conductance parameter for a neuronal cable model defined on a tree graph // J. Inv. Probs and Imaging. No 9. 2015. P. 645-659.

[3] Avdonin S. Control problems on quantum graphs // Analysis on Graphs and Its Applications. Proceeding on Symposia in Pure Mathematics, 77, AMS, Providence, RI, 2008: P.507-521.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ ЛЕКСИЧЕСКОЙ МНОГОЗНАЧНОСТИ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА В СИСТЕМЕ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА

Рахимова Д.Р.
Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: isnauka2016@gmail.com

Аннотация. На сегодняшний день существуют разные виды моделей и методов задачи решения лексической многозначности естественного языка, которые применяются для ее решения. В данной работе представлен метод семантического куба построенный на основе модели максимальной энтропии, что позволяет улучшит качество машинного перевода. Практический эксперимент был проведен на системе машинного перевода для казахско-русской языковой паре.

Модель максимальной энтропии лексического выбора включает множества двоичных функции и соответствующих весов для каждой функции. Метод семантического куба состоит из двух частей: обучение и тестирования. Во время процесса обучения каждой функции присваивается вес λ^s, и объединение этих весов дает вероятность перевода t для слова s в контексте.

Метод максимальной энтропии обычно использует большое количество признаков, и поэтому имеет высокую вычислительную сложность.

В семантическом кубе испльзуются следущие обозначения: $t_1, t_2, \dots, t_n$ – возможные переводы или обозначения; $f_1, f_2, \dots, f_n$ – факторы; C – контекст

$$amb_{word} \text{ және } f_n \in C$$
$$amb_{word} = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$$

Зависимость двух переменных можно представит линейней функцией:

$$amb_{word}: t_i \to f_i \in C$$

Нахождение перевода или смысла зависит от двух переменных, именно от перевода и контекста(или же фактор-слов). Вероятность многозначного слова и его перевода определяется следующей формулой:

$$P_{amb\_word}(t|c) = \frac{v_{f_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} f_n} \quad (1)$$

Эта вероятность показывает вес возможного перевода. Вероятность перевода в семантическом кубе считается следущей формулой:

$$\tilde{t} = \underset{t \in C}{argmax} \sum_{i=1}^{n} P_{amb_{word}}(t_i|f_n) \quad (2)$$

Список многозначных слов имеет следующую структуру:

Многозначное_слово: перевод1, перевод2, перевод3, …, перевод N.

Перевод слов в списке неограниченно количеством возможных переводов, но важно учесть, что все слова должны быть в корпусах и двуязычном словаре.

Созданный список используется на втором шаге. По этому списку определяется определенный перевод на основе параллельного корпуса .

Найденные многозначные слова и его рядом стоящие слова добавляются соответствующей таблице

Таблица 1 – вид таблицы частотности контекста с возможным переводом

amb_word	f_1	f_2	f_3	…	f_n
t_1	freq_of_ f_{11}	freq_of_ f_{12}	freq_of_ f_{13}	…	freq_of_ f_{1n}
t_2	freq_of_ f_{21}	freq_of_ f_{22}	freq_of_ f_{23}	…	freq_of_ f_{2n}
….					
t_n	freq_of_ f_{n1}	freq_of_ f_{n2}	freq_of_ f_{n3}	…	freq_of_ f_{nm}

здесь, *amb_word* – многозначное слово в исходном языке, *t* – переводы, *f* – контекст в целевом языке, *freq_of_f* – частота появления многозначного слова в данном контексте.

На основе таблиц частот строиться таблиц вероятностей, по которой выбирается перевод. Формула опредения перевода по его контексту:

$$P_s(t|c) = \frac{c(f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \tag{3}$$

$(c(f_i))$ – частота контеста, $(\sum_{i=1}^{n} f_i)$ – сумма необходимых все возможных фактор-контекстов. Нахождение перевода определяется за счет созданных таблиц вероятностей. Для выбор перевода используются формулы (4) и (5).

$$\hat{t} = \begin{cases} t_1 = prob\_f_{11} + prob\_f_{12} + prob\_f_{13} + \cdots + prob\_f_{1n} \\ t_2 = prob\_f_{21} + prob\_f_{22} + prob\_f_{23} + \cdots + prob\_f_{2n} \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ t_n = prob\_f_{n1} + prob\_f_{n2} + prob\_f_{n3} + \cdots + prob\_f_{nn} \end{cases} \tag{4}$$

Перевод многозначного слова определяется функцией argmax, в которой берется максимальный аргумент вероятности:

$$\hat{t} = argmax\, P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{5}$$

Вид семантического куба представлен на Рисунке1.

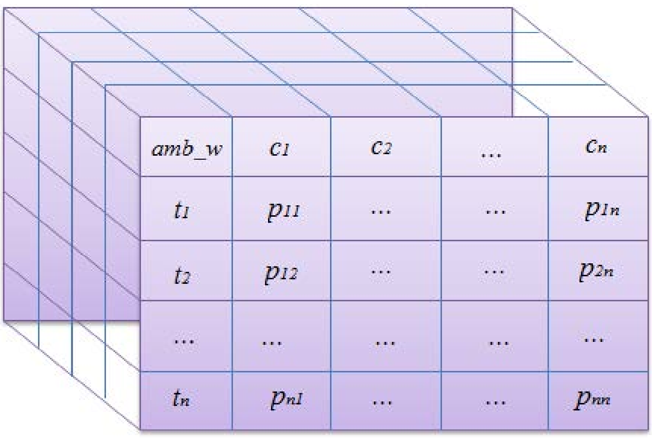


Рисунок 1 – Вид многомерного семантического куба

По количеству предложении в корпусе мера семантический куба будет менятся, но каждый раз при измении количества строк необходимо будет строить куб заново.

После подготовки данных и была сделана оценка результатов, используя алгоритм и методы BLEU и NIST. Полученные результаты оценки можно увидеть в Таблице 2.

Таблица 2 – Оценки качества машинного перевода

Языковая пара	Метод оценки	
	BLUE	NIST
Казахско-русский	0.0512	2.7236
Русско-казахский	0.0633	3.0017

Оценка проводилась на небольшом тексте (450-500 строк предложении) для казахско-русской и русско-казахской пары языков. Из полученных результатов видно, что при использование данного метода и увеличение объема корпуса положительно вляет на качества перевода.

Список литературы

[1] Brown P.F., Delia Pietra V.J., Delia Pietra S.A., Mercer R.L. The mathematics of statistical machine translation: Parameter estimation // Computational Linguistics. – 1993 . - Vol. 19. No. 2. - P.263-311.

[2] Amirova D. Choosing the model for solving the problem of lexical selection for english-kazakh language pair in the free/open-source platform Apertium. //Proceedings of the International Conference “Turkic Languages Processing: TurkLang-2015”. - Kazan: Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan Press, 2015. - P.10-14

ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ КОРРЕЛЯТОРА ПРИЕМНИКА GPS НА БАЗЕ ТЕХНОЛОГИИ SDR

Раскалиев А.С., Ахмедов Д.Ш.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Институт космической техники и технологий, г. Алматы, КАЗАХСТАН

E-mail: raskaliyev@mail.ru

Аннотация. В данном докладе приводятся методика и результаты испытаний программного обеспечения двенадцатиканального коррелятора приемника GPS, проектируемого на основе технологии Software Defined Radio (SDR). Описываемое ПО было разработано в лаборатории спутниковых навигационных технологий Института космической техники и технологий в рамках научно-исследовательского проекта «Разработка экспериментального образца модуля обработки радиосигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) для использования в КА и функциональных дополнениях». Результаты испытаний подтвердили соответствие разработанного ПО коррелятора требованиям ТЗ на разработку модуля обработки радиосигналов ГНСС для использования в КА и функциональных дополнениях.

Технология SDR — это одна из современных технологий разработки радиоэлектронной аппаратуры, получающая все большее распространение в мире [1, с. 10]. Суть технологии SDR заключается в том, что основные параметры и функции радиоэлектронной аппаратуры, за исключением функций приема/передачи и усиления радиосигналов, определяются именно программным способом, а не аппаратной конфигурацией.

Одним из интересных и важных применений SDR-технологий является создание спутниковых навигационных приемников [2, с. 27]. Тема программных спутниковых навигационных приёмников в концептуальном и реализационном планах для специалистов в области спутниковых навигационных технологий не нова, однако, работ в данном направлении, докладываемых на различных конференциях, семинарах и других научных форумах очень мало [3; 4]. Это можно объяснить тем, что разработчики навигационной аппаратуры потребителей (НАП) в основном делают акцент на аппаратный или аппаратно-программный подходы при реализации навигационных приёмников в виде OEM-модулей, чипсетов или систем в корпусе [2, с. 45 - 48].

Появление высокопроизводительных процессоров, которые специалистами в области спутниковой навигации часто называются корреляторами, дает возможность использования SDR-технологий для создания собственной НАП.

В случае создания НАП, существенную трудность составляют частоты спутникового навигационного сигнала, в котором несущая частота радиосигнала транслируется в диапазоне 1,2 –1,6 ГГц, т.е. это СВЧ-сигнал. Это делает невозможным его оцифровку в современных АЦП в режиме реального времени. Решением этой проблемы становится понижение частоты несущей до промежуточной частоты (ПЧ) в радиочастотном «фронт-энде» (RFFE) и результирующий промежуточный сигнал оцифровывается в АЦП на его выходе. Таким образом, архитектура программного навигационного приёмника на основе SDR-технологии включает антенну, RFFE, коррелятор и блок вычисления выходных навигационных данных. Коррелятор реализует всю основную работу по обработке сигнала: поиск сигнала, вычисление корреляции, слежение за сигналом, вычисление псевдодальностей до спутников ГНСС в основной полосе (baseband), а также подает на выход цифровую информацию, декодированную из сигналов ГНСС.

На основе ранее разработанной имитационной модели коррелятора в среде Matlab [5, с. 101 - 102], было разработано программное обеспечение коррелятора для реализации на микропроцессоре, построенного на базе технологии ПЛИС. ПО для коррелятора было разработано на языке аппаратного программирования Verilog-HDL в среде аппаратного симулятора Active-HDL v 9.1. Оно позволяет реализовать цифровой коррелятор на виртуальной модели микросхемы GP4020, что дает возможность одновременно принимать и обрабатывать оцифрованные с помощью RFFE навигационные сигналы со спутников GPS посредством 12 различных каналов слежения. Все модули программного обеспечения коррелятора работают в составе единой программы полностью аналогично тому, как это происходит в реальном аппаратном корреляторе приемника GPS.

Тестирование цифрового коррелятора проводилось на битовых потоках (тестовых векторах), которые генерировались программно и имитировали выход радиочастотного модуля приемника GPS. При генерации тестового вектора задавались следующие параметры: уровень шума на входе коррелятора, доплеровская частота входного сигнала, а также смещение положения C/A кода во входном сигнале относительно тестовой шкалы времени.

В результате опытных испытаний программного коррелятора было показано что характерная гистограмма амплитуды сигнала на выходе коррелятора близка к распределению Рэлея, потери в корреляторе по уровню шума не превышают 3 дБ, а также что какие-либо искажения формы корреляционного пика отсутствуют.

Список литературы

[1] *Ахмедов Д.Ш., Раскалиев А.С.* Технология Software Defined Radio при проектировании спутниковых навигационных приемников // Вестник автоматизации. – Алматы, 2016. – № 2 (52). – С. 10-13.

[2] *Семенов, С. А.* Методы программной реализации приемников спутниковых радионавигационных систем: дис. … канд. техн. наук: 05.12.14 / Семенов Сергей Александрович. – М., 2005. – 152 с.

[3] *Lin D.M., Tsui James B.Y.* Acquisition Schemes for Software GPS Receiver // In proceedings of ION GPS. – Tennessee, the USA, 1998. – pp. 317 – 325.

[4] *Fantino M., Pini M., Mulassano P., Girau G., Nicola M., Nordio A.* Signal Compression for an Efficient and Simplified GNSS Signal Parallel Acquisition // In proceedings of ION GNSS. – Savannah, GA, the USA., 2008. – pp. 159-166.

[5] *Ахмедов Д. Ш., Богуспаев Н. Б., Раскалиев А. С., Аверьянов А. А.* Имитационное моделирование одноканального коррелятора приемника GPS на базе технологии SDR // Материалы международной научной конференции "Математические методы и современные космические технологии", посвященной 80-летию Султангазина У.М.. – Алматы, 2016. С. 101-102.

КОМПЬЮТЕРЛІК ЖЕЛІДЕГІ ЖЕЛІЛІК ТРАФИКТІ БАСҚАРУДЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Сапақова С.З., Адильбекова А.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: sapakovas@mail.ru

Бұл жұмыста қызмет көрсету сапасын жоғарлату мақсатында кәсіпорынның компьютерлік желісіндегі трафикті болжау үшін қолданылатын ақпараттық жүйелер құрылымына қысқаша жолу жасалды.

Телекоммуникация саласының қарқынды дамуы, ақпараттық қызметтерді пайдаланушылардың сандық үлесінің артуы оларға сәйкес қызмет көрсету сапасының деңгейін қалыптастыруды талап етеді. Жалпы телекоммуникация жүйелерін және желілерді функционалдау үдерістерін жаппай қызмет көрсету жүйелерінің (ЖҚКЖ) біріккен формасы ретінде қарауға болады. Телекоммуникацияда ЖҚКЖ-ның басты функциясы, ақпаратты тарату болып табылады, оған толық байланыс желілері, бөлек коммутациялық түйіндер немесе телекоммуникациялық қызметтердің қандайда бір хабарлама алгоритміне сай қызмет ететін пакеттік коммутаторлар жатады.Шақырулар ағыны жаппай қызмет көрсету жүйелерінің басты шарты болып табылады, сондықтанда кез келген ЖҚКЖ математикалық сипаттамасы шақырулар ағынын сипаттаудан басталады. Шақырулар ағыны дегеніміз қандайда бір уақыт мезетінде бірінен кейін бірі түсетін хабарламалар тізбегі. Көптеген жағдайда шақырулардың түсу сәті мен оларға қызмет көрету уақыты кездейсоқ болып табылады. Осылайша ЖҚКЖ функционалдау үдерістері кездейсоқ үдерістер болып табылады. [1]

Телекоммуникациялық жүйелерді талдау үшін оның барынша нақты моделін құру қажет. Желілерді оңтайландыру кезінде көптеген жағдайда математикалық модель пайдаланылады. Олар жүйе жағдайының сипаттамларының кіріс сигналдарына, бастапқы жағдайға тәуелді және уақыттың өзгеру процесіне байланысты анықтайды. Желілік жабдықтарды және транспорттық хаттамаларды конфигурациялау барысында трафик сипаттамаларына сай келетін математикалық модельдер пайдаланылады. Телекоммуникациялық математикалық модельдердің негізгі міндеттері: деректерді өлшеу параметрлерін анықтау, және оларды тәжірибеде қолдану боп табылады.

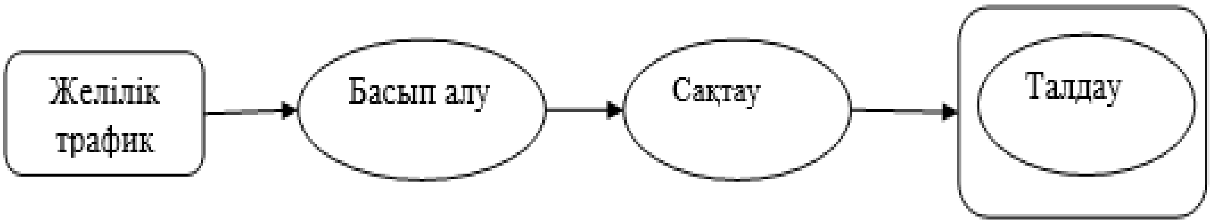
Соңғы мультисервисті желілер трафигіне жүктемелердің біркелкі емес қарқынды үлкен деңгейі тиісті. Жаңа желілік технологиялардың дамуы және оларды ендіруге (және соның салдары ретінде, желі бойынша берілетін деректер көлемінің ұлғаюы), және де қолданбалы деңгейдегі желілік протоколдар санының ұлғаюына байланысты желілік трафикті талдау міндеті қазіргі таңда өзекті мәселе болып табылады.

Жалпы, күнделікті өмірде трафикті талдау:

- желімен жұмыс жасау барысында туындайтын мәселелерді анықтау (соның ішінде рұқсат етілмеген белсенділік);

- деректер ағымын қалыпына келтіру («тыңдау»);
- әр түрлі түрдегі желілік шабуылдардың алдын алу;
- ақпарат тасымалдауға байланысты статистиканы жинау үшін керек.

Егер де желілік трафик міндеттерінің кешенді шешіміне келсек, онда оны үш жеткілікті дәрежедегі тәуелсіз міндеттерге бөлуімізге болады (1-сурет): трафикті басып алу, оны сақтау және талдау



1-сурет. Желілік трафикті талдау жүйесінің міндеттері

Талдау жүйесі трафикті толықтай 100% басып алуы қажет, және де оның нәтижелері бойынша тиімді талдау әдістерін ұсынуы қажет. Траффикті басып алу снифферлер көмегімен жүзеге асырылады. Жалпы жағдайда сниффер – бұл трафикті басып алатын не тосқауыл жасайтын бағдарлама немесе аппаратты-бағдарламалық жабдықтама. Дайын программалық қосымшаларда желілік хаттамалар талдау, белгіленген өлшемдер бойынша фильтрлеу, сессияларды қалпына келтіру функциялары да қосылады. Желілік трафикті талдау келесідей:

- желілік интерфейсті «тыңдау» арқылы;
- электромагнитті сәуле шығарудың жанама талдамасы арқылы;
- арналық немесе желілік деңгейдегі шабуыл арқылы жүзеге асырылады.

Сниффер маршрутизаторда да және аяқталған желі түйінінде орнатылуы мүмкін.

Қазіргі таңдағы көптеген құрылғылар желілік хаттамаларды талдап, базалық талдамаларды(сессияларды) қалпына келтіреді.

Желілік анализаторлар екі жұмыс режимінде істейді.

- нақты уакытта;
- алдын ала сақталған трафик бойынша.

Нақты уақыт –кіріске түсетін трафикті талдау үшін өнімділігі жеткілікті үзіліссіз режимде жасайтын құрылғыларға тәуелді. Бұл ретте шексіз кіріс деректер ағымын егжей-тегжей талдау мүмкіндігіне ие болу қажет.

Алдын ала сақталған трафик жағдайында құрылғы кіріс деректерін файлдан алады, ол өз кезегінде нақты уақыт режимінде талдаумен салыстырғанда желілік трасса талдауын анық жүргізуге мүмкіндік береді.

Трафик снифферi арқылы өткен талдама паразитті, вирусты және байланыс желілерін және желілік жабдықтамалардың жүктемесін арттыратын тұйықталған(закольцованный) трафикті табуға (бұл жағдайда сниффердің тиімділігі төмен, ереже бойынша мұндай мақсатта әртүрлі серверлар арқылы жиналған статистика және белсенді желілік жабдықтамалар мен олардың келесі талдамалары қолданылады); кез келкен шифрленбеген (кейде шифрленген) қолданушы трафигін пароль не басқа ақпарат алу үшін басып алуға; желі немесе желілік агенттер конфигурацияларының қателіктерін түзеуге (бұл мақсатта желілік администраторлар сниферрлермен қолданылады) мүмкіндік береді. «Классикалық» снифферлерде трафик талдамасы қолдан жасалатындықтан, және де автоматтандырудың қарапайым құралдарын қолданатындықтан, ол тек кішігірім көлемді талдауға жарайды.[2]

Әдебиеттер тізімі

[1] Шелухин И.О. Моделирование информационных систем. Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком, 2011. – 536с.:ил.

[2] Крылов В.В., Самохвалов С.С. Теория телетрафика и ее приложения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288с.:ил.

ҒИМАРАТТАҒЫ ТЕМПЕРАТУРА МЕН ЫЛҒАЛДЫЛЫҚТЫ БАҚЫЛАУҒА АРНАЛҒАН АВТОМАТТАНДЫРЫЛҒАН ЖҮЙЕ МОДЕЛІН ҚҰРУ

Сапақова С.З., Узгенбаева Ж.У.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: sapakovas@mail.ru

Жылыжайларда өсірілетін өнімнің өзіндік құнының елеулі бөлігін энергетикалық ресурстарды пайдалану қамтиды. Құрастырылған жылыжайдың температура-ылғалдық режимін басқарудың математикалық моделі оңтайлы параметрлерді қолданып, өнім алуға кететін шығындарды азайтуға және өндіріс көлемін көбейтуге мүмкіндік береді.

Микроклиматтың қажетті талаптарын қамтамасыз ету үшін қаржылық құралдар шығынының көптеген бөлігі жылытуға кетеді. Онымен қоса, температура қажетті мәннен жоғарылаған жағдайда,қолданыстағы температуралық режимді басқару жүйелері көктем-жазғы кезеңдегі жылыжайда жиналған жылылықты желдеткіш терезелер арқылы жойып отырады. Бұл энергияны үнемдеу тұрғысынан қарағанда ұтымды емес және салқын ауаның үлкен массасының келіп түсуі есебінен қорғалған топырақтағы өнімділікті төмендетуі мүмкін.

Сондықтан биологиялық обьектілердің жемістену аумақтарында жарық, жылу, ылғалдық, ауаның қозғалу жылдамдығын біркелкі таратуға мүмкіндік беретін микроклиматы автоматы басқару жүйелері жұмысының математикалық моделі және ұтымды алгоритмін құру өзекті болып табылады.

Жылыжайдағы ылғалдылықты сақтаудың массалық балансының теңдеуі:

$$\rho \cdot V \cdot \frac{dX(t\ )}{dt} = F(t) + C_{sat(t)} \cdot [E(t) + fog(t)] \tag{1}$$

мұнда ρ – жылыжай ауасының тығыздығы (кг/м^3);

V – жылыжай ауасының көлемі (м^3);

$X(t)$ – жылыжайдағы абсолютті ылғалдық (кг$_{су}$/кг$_{ауа}$);

t– уақыт (с);

$F(t)$ – инфильтрациялық ылғалдық (кг$_{су}$/с);

$C_{sat(t)}$ – ауа қанықтыруының коэффициенті;

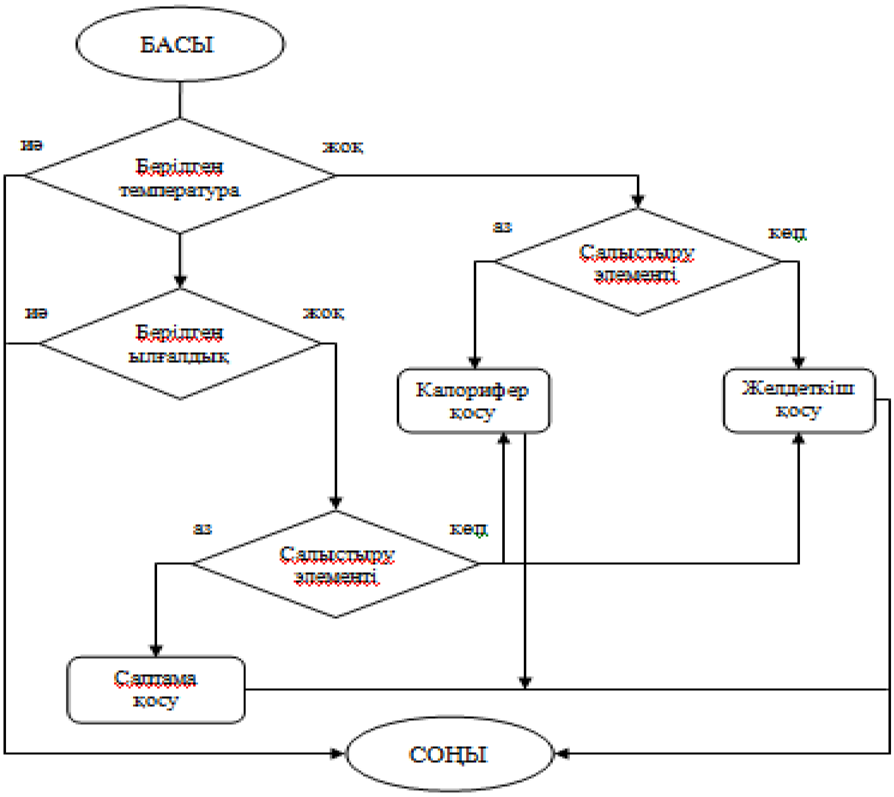
$E(t)$ – өсімдіктердің суды суммарлық буға айналдыруының жылдамдығы(кг$_{су}$/с);

$for(t)$ – саптамалар жүйесінің суды шығындауы(кг$_{су}$/с).

Моделдің құрылымы 1-суретте көрсетілген.

Сурет-1. Жылыжайдың температура-ылғалдық режимінің құрылымдық моделі

1-суретте көрсетілген модель мына алгоритм көмегімен жүзеге асырылған (2-сурет).



Құрастырылған басқару алгоритмі жылыжайдағы қажетті температура мен ылғалдылықты қамтамасыз етуге мүмкіндік береді.

Әдебиеттер тізімі

[1] Соковикова А.В. Повышение эффективности энергосбережения отопительно-вентиляционными электроустановками защищенного грунта в условиях Удмуртской Республики. 2010. – 18 бет.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сенько А.О., Серовайский С.Я.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: senko_s@mail.ru

Рассматривается процесс переноса тепла. В простейшем (одномерном) случае он описывается уравнением теплопроводности

$$y_t(x, t) - \Delta y(x, t) = f(x, t),\ x \in (0, L),\ t > 0, \tag{1}$$

где y = y(x, t) – температура тела в точке x в момент времени t, а плотность тепловых источников f считается известной. Задается начальное распределение температур по длине тела

$$y(x, 0) = z(x),\ x \in (0, L) \tag{2}$$

с известной функцией z.

Данное уравнение имеет второй порядок по пространственной переменной. Вследствие этого стандартная прямая краевая задача предполагает задание еще двух граничных условий – по одному на каждом конце тела. К примеру, можно рассмотреть первую краевую задачу, включающую наряду с соотношениями (1) и (2) граничные условия

$$y(0,t) = g(t),\ t > 0,\ y(L, t) = \nu(t),\ t > 0. \tag{3}$$

К сожалению, на практике часто возникает ситуация, когда один конец тела не поддается прямому экспериментальному исследованию. В частности, в нашем случае температура на левом конце g считается известной, в то время как температура ν на правом конце не известна.

Недостающее значение граничной температуры на правом конце тела может быть определено на основе некоторой дополнительной информации, определяемой из эксперимента. В качестве таковой может быть выбран тепловой поток на левой границе тела, что соответствует граничному условию

$$y_x(0,t) = \varphi(t),\ t \in (0,T), \tag{4}$$

где функция φ является известной. В результате обратная задача сводится к отысканию такой функции ν=ν(t), чтобы соответствующее ей решение задачи (1) – (3) удовлетворяло дополнительному граничному условию (4). Данная обратная задача относится к классу граничных обратных задач, поскольку недостающая информация задана на границе тела.

Для решения задача вводится функционала

$$I(\nu) = \int_0^T \left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} - \varphi(x)\right)^2 dt, \tag{5}$$

выражающей среднеквадратичное отклонение производной решения имеющейся краевой задачи на левой границы от заданной функции φ. Очевидно, если некоторая функция ν является точкой минимума этого функционала, а само значение минимума равно нулю, то эта функция будет решением поставленной обратной задачи.

Рассматривается оптимизационная задача решается численно с помощью градиентного метода.

Список литературы

[1] *Серовайский С. Я.* Задача управления в коэффициентах для уравнений параболического типа // Изв. вузов. Матем., 1982, № 12, с. 44-50.

[2] *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена, -изд.”Мир”,-М,1988 г.-279 с

[3] Тихонов А.Н. Обратные задачи теплопроводности // Инженерно - физический журнал. Том XXIX. №1. 1975г.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАСКЕТА-ЛЕВЕРЕТТА МЕТОДАМИ МОНТЕ-КАРЛО

Шакенов К.К., Султанова М.С.
Казахский национальный университет имени ал-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: shakenov2000@mail.ru

Обобщение законов Дарси для несжимаемых компонент смеси на случай нелинейного закона сопротивления среды могут быть произведены введением сил взаимодействия этих компонент или по аналогии с неоднородной жидкостью за счет зависимости фазовых проницаемостей от градиентов давлений компонент. Соответственно этому рассматриваются две формы нелинейных законов Дарси, которым отвечает модель Маскета-Леверетта описывающий процесс фильтрации двух жидкостей в пористой среде – система уравнений относительно насыщенности и давления. Для этой системы уравнений ставится начально-краевая задача и решается методами Монте-Карло и вероятностно-разностным методом.

Большой интерес представляют задачи фильтрации, обладающих неньютоновскими свойствами. Рассмотрим обобщение законов Дарси для несжимаемых компонент смеси на случай нелинейного закона сопротивления среды. Это приведет к рассмотрению двух форм нелинейных законов Дарси:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + (-1)^i \mathbf{F}_0, \ \mathbf{F}_0 = \Phi(s, w)\mathbf{w}; \ \mathbf{v}_i = \Phi(w)\mathbf{u}_i, \ i = 1, \ 2, \tag{1}$$

которым отвечает аналогичная линейному случаю система уравнений (модель Маскета-Леверетта) относительно насыщенности $s(t,x)$ и давления $p(t,x)$:

$$m\partial_t s(t,x) = \mathrm{div}\Phi^n\left(K_0 \mathrm{grad} s(t,x) - b\mathbf{v} + \mathbf{F} + (1-n)\mathbf{F}_0\right), \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\Phi^n\left(K \mathrm{grad} p(t,x) + \mathbf{f}\right) = 0, \ n = 0, \ 1. \tag{3}$$

Здесь $\Phi_i = p_i + \rho_i g h$ – потенциал, $\mathbf{g} = g\nabla h$, $\mathbf{u}_i = -K_i\left(\nabla p_i + \rho_i \mathbf{g}\right)$, $w = |\mathbf{w}|$, а $\mathbf{w}$ совпадает с одним из $\mathbf{u}_i$, с $\mathbf{v}$ или с $K_0 \nabla p_c$, что соответствует предположению о выполнении обычного нелинейного закона Дарси для компоненты $\mathbf{u}_i$, предположению о пропорциональности сил взаимодействия общему расходу смеси или допущению о преимущественном влиянии капиллярных сил на процесс взаимодействия компонент. Смотрите [1, с. 302], Глава V, § 11. Нерешенные проблемы.

Начально-краевая задача для (2), (3). Рассмотрим фильтрационное течение в заданной конечной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Эта граница $\partial\Omega$ может разбиваться на несколько связных компонент $\partial\Omega^i$. Пусть $Q = \Omega \times [T, 0]$, $S^i = \partial\Omega^i \times [T, 0]$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Запишем граничные данные для s, p. Условия непротекания на $\partial\Omega^0$ для обеих фаз эквивалентны следующим:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (t,x) \in S^0 = \partial\Omega^0 \times [T, 0]. \tag{4}$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$p = p_0(t,x), \quad s = s_0(t,x), \quad (t,x) \in S^2 = \partial\Omega^2 \times [T, 0], \tag{5}$$

$$-\left(K\nabla p + \mathbf{f}\right) \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = R(t,x), \quad (t,x) \in S^1 = \partial\Omega^1 \times [T, 0], \tag{6}$$

$$-\left(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \mathbf{f}_0\right) \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = bR(t,x), \quad (t,x) \in S^1. \tag{7}$$

Так как равенства (6), (7) при $R(t,x) = 0$ эквивалентны (4), то естественно включить $\partial\Omega^0$ в $\partial\Omega^1$ и предполагать, что $\partial\Omega^1$ состоит из нескольких компонент, на части которых $R(t,x) = 0$.

Таким образом, $\partial\Omega = \partial\Omega^1 \cup \partial\Omega^2$. Система уравнений (2), (3) не удовлетворяет условиям Коши – Ковалевской (второе уравнение не содержит $\partial_t p$), и поэтому достаточно задавать начальное условие лишь для насыщенности $s(t, x)$:

$$s(0, x) = s_0(0, x), \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Приведем сводку формул, выражающих коэффициенты уравнений (2) – (3) и граничных условий (4) – (7):

$$a = -\partial_s p_c \frac{k_{01}k_{02}}{k},\ k = k_{01} + k_{02},\ b = \frac{k_{01}}{k} \equiv K_1 K^{-1},$$

$$\mathbf{f}_0 = K_1 \int_s^1 \nabla \partial_s p_c \frac{k_{02}}{k},\ K_i = k_{0i} K_0,\quad i = 1, 2,$$

$$\mathbf{f} = KK_1^{-1}\mathbf{f}_0 + K_2 \nabla p_c + K_2 \left(\rho_2 - \rho_1\right)\mathbf{g},\ K = K_1 + K_2,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_0 - b\mathbf{f} = -k_{01}k_{02}k^{-1}K_0\left(\nabla p_c + \left(\rho_2 - \rho_1\right)\mathbf{g}\right). \tag{9}$$

Предположим, что коэффициенты и функции в (2) и (3 не зависят от искомых функций $s\left(t, x\right)$ и $p\left(t, x\right)$, и заданы. Дискретизируем (2), (3) и начально-краевые условия (4) – (8) только по временной переменной t неявной схемой. В результате получим следующие уравнения на временных слоях t_{n+1} относительно $s^{n+1}(x)$ и $p^{n+1}(x)$

$$L_s s^{n+1}(x) = D^n(x), \quad x \in \Omega, \tag{10}$$

$$L_p p^{n+1}(x) = G^n(x), \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

Если, входные данные (коэффициенты и функции) задачи (2), (3), (4) – (8) обеспечат эллиптичность операторов L_s и L_p, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. К задаче (10), (11) применимы алгоритмы «блуждания по сферам», «блуждания по шарам» и «блуждания по решеткам» методов Монте-Карло и вероятностно-разностный метод.

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что уравнения (10) и (11) представляют собой квазилинейную систему, состоящую из равномерно эллиптического уравнения для $p(t, x)$ и вырождающегося при $s = 0,\ 1$ параболического уравнения для $s(t, x)$. Смотрите также работы [2], [3], [4], [5], [6].

Список литературы

[1] *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

[2] *Смагулов Ш., Шакенов К.К.* Методы Монте-Карло в задачах гидродинамики и фильтрации. Алматы: Издательство «Қазақ университеті», 1999.

[3] *Shakenov K.K.* Solution of problem for one model of relaxational filtration by probabilitly–difference and Monte Carlo methods. Polish Academy of Sciences. Committee of Mining // Archives of Mining Sciences. Volume 52, Issue 2, Krakow, 2007. P. 247–255.

[4] *Shakenov Kanat.* Solution of Mixed Problem for Elliptic Equation by Monte Carlo and Probability – Difference Methods. 7th International Summer School/Conference "Let's Face Chaos through Nonlinear Dynamics", at the University of Maribor, 29 June – 13 July 2008, Slovenia. American Institute of Physics. AIP Conference Proceedings 1076. P. 213–218.

[5] *Shakenov K.* The Solution of the Initial Mixed Boundary Value Problem for Hyperbolic Equations by Monte Carlo and Probability Difference methods. Trends in Mathematics. Fourier Analysis. Pseudo–differential Operators, Time-Frequency Analysis and Partial Differential Equations. Berkhäuser. © Springer International Publishing Switzerland 2014. P. 349–355.

[6] *Shakenov Kanat.* Numerical Modeling of the one Model of Filtration Process by Monte Carlo Methods. Series "Applied and Numerical Harmonic Analysis". Book "Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory". Springer. Berkhäuser. 2016. P. 237–258.

ДВЕ НЕСМЕШИВАЮЩИЕСЯ ЖИДКОСТИ РАЗДЕЛЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТЬЮ КОНТАКТА БЕЗ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Шияпов К.М.

Казахский государственный женский педагогический университет, КАЗАХСТАН, E-mail: himirankadr@mail.ru

Будем рассматривать течение двух несмешивающихся вязких жидкостей с различными постоянными плотностями в капилляре $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -h < x_2 < h\}$. Движение происходит за счет вешнего давления и силы тяжести. Движущаяся граница, которая появляется естественным образом, разделяет подобласти $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$, которые заполнены различными жидкостями.

Точнее, необходимо решить задачу по нахождению скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathrm{R}^2$, давления $p \in \mathrm{R}$, и плотности $\rho \in \mathrm{R}$ из системы уравнений для скорости и давления

$$\mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p + g\rho\mathbf{e} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

где μ – вязкость жидкости, $\mathbf{e}$ - заданный единичный вектор и g - ускорение силы тяжести, и транспортное уравнение для плотности

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho = 0. \tag{3}$$

Время t входит в уравнение для скорости как параметр, поэтому нам не нужно начальное условие. Граничное условие на боковых поверхностях $S^0 = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = \pm h\}$ границы $S = \partial\Omega$ имеют вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{4}$$

Граничные условия на границе «входа» $S^- = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : x_1 = -1, -h < x_2 < h\} \subset S$ и «выхода» $S^+ = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : x_1 = 1, -h < x_2 < h\} \subset S$ следующие

$$\mathrm{P}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} = -p^0\mathbf{n}, \mathbf{x} \in S^\pm. \tag{5}$$

Здесь

$$\mathrm{P}(\mathbf{u}, p) = 2\mu\mathrm{D}(\mathbf{u}) - pI, \mathrm{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^*),$$

где I единичный тензор, $p^0(\mathbf{x})$ - известная линейная функция, и $\mathbf{n} = (1,0)$ - единичный вектор нормали к $S^\pm$.

В начальный момент времени $t = 0$, плотность является кусочно–постоянной функцией и предполагается равной двум положительным числам, которые описывают различные фазы течения,

$$\rho(\mathbf{x},0) = \rho_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho^+, & \mathbf{x} \in \Omega^+(0), \\ \rho^-, & \mathbf{x} \in \Omega^-(0), \end{cases} \rho^\pm = \text{const}, \rho^- > \rho^+ > 0. \tag{6}$$

Тогда начальные условия для плотности эквивалентно поверхности $\Gamma(0) = \Gamma_0$, которая разделяет две подобласти $\Omega^{\pm}(0)$ изначально занятые различными жидкостями. Для простоты будем считать, что $\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : x_1 = 0, -h < x_2 < h\}$.

Задача сводится к нахождению $\mathbf{u}$, p и плотности $\rho(\mathbf{x},t)$ из уравнений (1) – (3) удовлетворяющих начальным и граничным условиям. Заметим, что данная задача является нелинейной, так как в уравнении (3) присутствует слагаемое $\mathbf{u}\cdot\nabla\rho$.
Для упрощения наших рассуждений мы перейдем к однородным граничным условиям, введя новое $p \to p - p^0(\mathbf{x})$:

$$\mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f} \equiv \nabla p^0 - g\rho\mathbf{e}, \tag{7}$$

$$\mathrm{P}(\mathbf{u}, p)\cdot\mathbf{n} = 0, \mathbf{x} \in S^{\pm}. \tag{8}$$

Ниже будет показано, что движение, описанное вышеупомянутыми уравнениями, сохраняет существование двух подобластей $\Omega^{\pm}(t)$, каждая из которых содержит одну из жидкостей, которые прилюбого времени $t > 0$ разделены постоянной свободной границей $\Gamma(t)$. Таким образом, изучаемая задача эквивалентна нахождению $\mathbf{u}$, p и движущейся границы $\Gamma(t)$.

Теоремы существования обобщенного решения для системы Навье – Стокса для неоднородной несжимаемой жидкости изложены в [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] (без детального анализа множества, где плотность не является непрерывной). Существование и единственность классического решения уравнения Стокса с однородными граничными условиями Дирихле были доказаны в [8], а задача Маскета на микроскопическом уровне с соответствующим усреднением были рассмотрены в [9].

Теорема о существовании и единственности классического решения

Пусть $\Omega^{(m)} = \{\mathbf{x} \in \Omega : -1 + \frac{1}{m} < x_1 < 1 - \frac{1}{m}\}$, $m > 0$.

Наши основные результаты изложены в следующей теореме.

Теорема 1 *Задача (2) – (4), (6)– (8) имеет единственное решение на промежутке $[0,T)$ для некоторого $T > 0$, а решение удовлетворяет следующим свойствам:*

а) Для произвольных положительных $m \in \mathrm{N}, q > 2$ и $\lambda = 1 - \frac{2}{q}$, скорость u удовлетворяет следующим соотношениям

$$\mathbf{u} \in L_\infty(0,T; W^{2,q}(\Omega^{(m)})) \cap L_\infty(0,T; C^{1,\lambda}) \cap C^{0,\lambda}(0,T; C^{1,\lambda}).$$

б) Свободная граница $\Gamma(t)$ является поверхностью класса $C^{1,\lambda}$ для каждого $t \in [0,T)$ и нормальная скорость в каждой точке $\mathbf{x}$ свободной границы $V_n(x,t)$ в направлении нормали n равномерно ограничена,

$$\sup_{\substack{t\in(0,T)\\ \mathbf{x}\in\Gamma(t)}} |V_n(\mathbf{x},t)| < \infty,$$

в) Плотность ρ имеет ограниченную вариацию,

$$\rho \in L_\infty(0,T; BV(\Omega^{(m)})) \cap BV(\Omega_T^{(m)}).$$

Здесь $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$.

Время T *существования классического решения зависит от положения свободной границы* $\Gamma(t)$. *А именно, пусть* $\delta^{\pm}(t)$ *расстояние между* $\Gamma(t)$ *и границами* $S^{\pm}$ *и* $\delta(t)=\min(\delta^{-}(t),\delta^{+}(t))$. *Тогда* $\delta(t)>0$ *для всех* $0<t<T$ *и* $\delta(t)\to 0$ *при* $t\to T$.

Всюду в статье используются общепринятые обозначения функциональных пространств и норм, [10]. Так, $W^{2,q}(\Omega)$ – соболевское пространство функций с производными суммируемыми со степенью q, через $C^{k,\lambda}$ обозначается пространство функций чьи k-тые производные удовлетворяют условию Гельдера со степенью λ.

Список литературы

[2] Antontsev S.N., Kazhikhov A.V. and Monakhov V.N., Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids. North-Holland, Amsterdam–NewYork–Oxford-Tokyo, 1990, 309

[3] BöhmM.On a nonhomogeneous Bingham fluid, J. Diff. Eq. (1985) vol.60, 259-284.

[4] Giga Y., Takahashi S.On global weak solutions of the nonstationary two-phase Stokes flow, SIAM J. Math.Anal.(1994) vol.25, No. 3, 876–893.

[5] Fernández-Cara E., Guillén F., Ortega R.R. Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density, Nonlinear Methods and Appl. (1997) vol.28, No. 6, 1079-1100.

[6] Nouri A., PoupaudF.An existence theorem for the multifluidNavier–Stokes problem, J. Diff. Eq. (1995) vol.13, 463–484.

[7] Simon J. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure, SIAM J. Math. Anal.(1990), vol.21, No. 5, 1093-1117.

[8] Yih C.-S.Dynamics of Nonhomogeneous Fluids, Collier–Macmillan Ltd., London, 1965.

[9] Antontsev S., Meirmanov A. and YurinskyV. A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions Interfaces and Free Boundaries. (2000) vol.2, 413-424

[10] Meirmanov A.TheMuskat problem for viscoelastic filtration, Interfaces and Free Boundaries.(2011) vol.122, No. 1, 71–88.

[11] Galdi G.P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, vol.1, Springer-Verlag, New York, 1994.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОФАЗНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА

Темирбеков Н. М., Мадияров М. Н., Малгаждаров Е. А., Тураров А. К.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, КАЗАХСТАН

E-mail: temirbekov@rambler.ru, madiarov_mur@mail.ru, malgazhdarov_e@mail.ru, t010183@gmail.com

Аннотация. Рассматривается двумерное осесимметричное движения газа и газожидкостной смеси в газлифтной скважине. Проводится численное моделирование одномерной и двумерной модели газлифтного процесса, где движение в газлифтной скважине описывается уравнениями в частных производных гиперболического типа. Разработаны разностные схемы и алгоритм численной реализации для модели газлифтного процесса. Результаты предложенного алгоритма иллюстрируются на примере отдельно взятой нефтяной скважины.

Применение динамических моделей газожидкостных потоков для описания добычи и транспортировки нефти началось сравнительно недавно. В них используются нестационарные уравнения баланса массы, импульса и энергии для жидкой и газообразной фаз. Основной сложностью является наличие разрывов в распределении плотности в скважине. Для этого на основании экспериментальных данных были подобраны непрерывные функции от газосодержания для скорости всплытия газа и параметра профиля потока.

Первые динамические модели газожидкостных потоков пришли в нефтегазовую отрасль именно из области тепловой и атомной энергетики. Работы [1-3] посвящены движению газожидкостных смесей в трубах. Работы [4-8] посвящены моделям и программным пакетам для моделирования нестационарных потоков углеводородов OLGA, TACITE, TUFFP. В работах [9-13] изучается запуск газлифтной скважины и нестабильные режимы работы газлифтного подъемника. В работах [9-12] приводится обзор научных работ, посвященных известным методам исследования и оптимизации работы газлифтных скважин. В работе Барашкина Р.Л. [13] разработана динамическая математическая модель газлифтной скважины с учетом передвижения границ фаз, их образования, смены периода работы скважины и относительной скорости газа.

Во всех вышеперечисленных работах при численном решении используется равномерная сетка по пространственным переменным и в каждой подобласти задача решается отдельно, тогда как на границе раздела фаз имеются большие градиенты скорости, плотности и давления.

В данной работе разработана математическая модель газлифтной скважины в цилиндрических координатах. Сначала рассмотрена одномерная модель газлифтной скважины, в которой предполагается, что поток в кольцевой части и скважине двухфазный и изотермический. Система, описывающая изучаемый процесс, состоит из уравнений движения, неразрывности и уравнений термодинамического состояния, концентраций, гидравлического сопротивления. На границах разделов фаз ставятся условия согласования для давления, скорости и концентрации, которые позволяют получить формулу для определения плотности жидкой фазы в явном виде. Разработана конечно-разностная схема на адаптивной неравномерной сетке, сгущающаяся на границах газовой, жидкостной и газожидкостной фаз. При построении сетки используется кубическая сплайн-функция. Используя предложенный алгоритм численного решения одномерной и двумерной задачи для газлифтной скважины, составлена программа для расчета на компьютере. Исследованы особенности численной реализации разработанного алгоритма для решения двумерной задачи. Из-за несоразмерности диаметра и длины скважины необходимо использовать двумерны массивы, у которых количество столбцов на несколько порядков меньше, чем количество строк. Работа с несколькими такими массивами требуют большого объема памяти компьютера. Поэтому реальные расчеты нефтяных скважин необходимо проводить на суперкомпьютерах или параллельных компьютерах. Предложенными численными алгоритмами решения задачи определения плотности, давления, скорости для газлифтной скважины проведены многочисленные методические расчеты. Из результатов расчетов можно сделать вывод, что разработанная математическая модель, разностная схема и компьютерная программа позволяют изучать физический процесс в газлифтной скважине и решать вопросы оптимального эксплуатирования нефтяных месторождений.

Список литературы

[1] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. - *М.:Наука, 1987* Т.1. –С. 464.

[2] *Кутателадзе С.С., Стырикович М.А.* Гидродинамика газожидкостных систем. - *М.:Энергия,*1976. – С. 296.

[3] *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. - *М.: Наука,*1992. – С. 424.

[4] *BendiksenK., Malnes D., Moe R., Nuland S.* The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application *SPE Production Engineering. May,*1991. –pp. 171-180.

[5] *Minami K., Shoham O.* Transient two-phase flow behavior in pipelines-experiment and modeling *Int. J. of Multiphase Flows.*1994. V. 20. № 4. –pp. 739-752.

[6] *Pauchon C., Dhulesia H., Binh-Cirlot G., Fabre J.* TACITE: A transient tool for multiphase pipeline and well simulation *paper SPE 28545*. 1994. – pp. 311–326.

[7] *Tang Y., Shmidt Z., Blais R.* Transient dinamic characteristics of the gaslift unloading process*paper SPE 38814*. 1997. – pp.268-278.

[8] *Asheim H.* Verification of transient multi-phase flow simulator for gas lift applications *paper SPE 56659*. 1999. – pp.1-16.

[9] *Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А.* Моделирование работы газлифтной скважины. - *Доклад НАН Азерб.*, №4, 2008, – сс. 107-116.

[10] *Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А.,* Задачи управления газлифтным процессом при минимальных потерях дебита в подъемнике. - Институт Прикладной Математики 2013, - с.111-119.

[11] *Алиев Ф.А., Есадуллаев Р., Исмаилов Н.А.,* Алгоритм решения цифровой минимаксной задачи определения оптимального режима газлифта. - *Труды института прикладной математики* Т.1 №1, 2012, – сс. 4-14.

[12] *Шуров В.И.* Технология и техника добычи нефти. - *М., «Недра»,*1983, –С.510.

[13] *Барашкин Р.Л.,* Разработка модели и алгоритмов функционирования газлифтной скважины как объекта системы оперативного управления. Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина - Москва: 2011., – С.152.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АКУСТИКИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Тилепиев М.Ш.
Агротехнический университет имени С. Сейфуллина, КАЗАХСТАН
E-mail: saltanbek.m@gmail.com

В настоящей работе рассматривается задача акустики в пористых средах в трех разделенных подобластей. В каждой области предполагается разные физические свойства. Геометрия пор, вязкость флюида находиться в середине двух упругих областей. Сначала рассматривается решение прямой задачи дифференциальных уравнений, затем решение обратной задачи. При решениях обратной задачи использован метод градиентного спуска. Математическая модель указанных физических явлений описывается начально-краевыми задачами для достаточно сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Целью данного исследования является определение характеристик среды по дополнительному условию. Пусть полупространство

$\Omega=\{x\in R/x>0\}, \Omega_1=\{x\in R/0<x<H_1\}\}, \ \Omega_2=\{x\in R/H_1<x<H_2\}, \Omega_3=\{x\in R/H_2<x<H_3\}$

и полубесконечного слоя $\Omega_4=\{x\in R\backslash x>H_3\}$ Области Ω_1 и Ω_4 являются упругими средами без какой-либо поровой структуры, в то время как области Ω_2 и Ω_3 являются упругими пористыми средами с пористостью m_3 соответственно. Поры области Ω_2 заполнены жидкостью 2 (нефть) и поры области Ω_3 состоит из того материала, что и области Ω_1 и Ω_4.Из всех характеристик сплошной среды мы будем учитывать только плотность ρ_S и скорость звука C_S (безразмерные!) упругой среды,плотность ρ_2 и скорость звука C_2 первой жидкости и плотность ρ_3 и скорость звука C_3 второй жидкости. Согласно [1] давление среды удовлетворяет в Ω при $t>0$ уравнению акустики

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = div(\frac{1}{\rho(x)}\nabla p)$$

где

$$\frac{1}{c^2(x)} = \frac{h_1(x)}{c_s^2} + h_2(x)\left(\frac{(1-m_2)}{c_s^2} + \frac{m_2}{c_2^2}\right) +$$

$$h_3(x)\left(\frac{(1-m_3)}{c_s^2} + \frac{m_3}{c_3^2}\right) + h_4(x)\frac{1}{c_s^2}$$

$$\rho(x) = \rho_s h_1(x) + h_2(x)(\rho_s(1-m_2) + \rho_2 m_2) + h_3(x)(\rho_s(1-m_3) + \rho_3 m_3) + \rho h_4(x)$$

$h_i(x), i = 0,1,2,3-$ характеристические функции областей Ω_i, то есть $h_i(x) = 1$ при $x \in \Omega_i$ и $h_i(x) = 0$ при $x \notin \Omega_i$..На границе задаем нормальное перемещение среды,которое в силу уравнения движения

$$\rho\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} = -\nabla p$$

означает задание производной

$$\frac{1}{\rho}\nabla p\vec{n} = u_1(t), x = 0, t > 0$$

Целью настоящей работы является определение характеристики среды $H_1, H_2, H_3;\ \rho_s, \rho_2, \rho_3 : m_2, m_3 : c_s, c_2, s_3$ по дополнительному условию на границе Г:

$$P = u_0(t), \qquad x = 0, t > 0$$

Задача замыкается начальных условий

$$p(x,0) = 0, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{t}}(x,0) = 0, x > 0, t > 0.$$

О МЕТОДАХ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ДИСТАНЦИОННОМ МОНИТОРИНГЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Турарбек А.Т.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: turarbek_asem@mail.ru

Аннотация. В статье приводятся методы обработки изображений необходимых для улучшения качества снимков дистанционного зондирования Земли.

Информация, полученная дистанционно с помощью методов исследования земной коры в процессе мониторинга землетрясений предоставляет точные данные, которые являются ключевыми для каких-либо прогнозов. Методы и технологии обработки дистанционных данных, основываются на снимки, то есть изображения, сделанные спутником или другим устройством.

В процессе обработки аэрокосмических снимков изображения могут искажаться. Наиболее сложными видами искажения являются смазывание, дефокусирование и зашумление. Следовательно, возникает необходимость улучшения качества изображений снимков. В настоящее время много разных методов улучшения качества изображений, так определение и выбор какого-нибудь из них является актуальной проблемой требующей дополнительного изучение и систематизация методов.

Все методы обработки изображений дистанционного зондирования Земли условно можно разделить на две основные группы:

1) методы улучшение изображений, обеспечивающие преобразования снимков, направленные на облегчение визуального дешифрирования;
2) методы тематической обработки изображения автоматизированного дешифрирования – классификации объектов по снимкам с использованием информации о признаках выделяемых классов или без нее [1].

На изменения качества изображений влияют факторы, которые затрудняют их обработку и интерпретацию:

- мультипликативные помехи;
- аддитивные помехи с неизвестной дисперсией, которая может изменяться в зависимости от дальности до зондируемого участка;
- импульсные помехи, причинами, появления которых могут быть ошибки кодирования-декодирования;
- искажения, обусловленные формой аппаратной функции системы формирования изображения;
- геометрические искажения;
- погрешности калибровки и т.д.

В результате обработки снимков возникает необходимость восстановления математико-компьютерным путем искаженных изображений. Для восстановления изображений при дистанционном зондировании Земли используются следующие методы:

1) Спектральные улучшающие преобразования – это методы связанные с контрастностью изображения, заключающейся в изменение формы гистограммы изображения посредствам изменения значений пикселей. Гистограмма – это график, показывающий количество пикселей $h(I)$ в изображении, имеющих значение спектральной яркости I. Затем находится передаточная функция:

$$f(I)=g_2^{-1}(g_1(I)) \qquad (1)$$

2) Пространственной фильтрацией является локальная или попиксельная операция, то есть изменение значения каждого пикселя в наборе данных согласно значениям соседних пикселей. Эти методы используются при обработке растровых изображений для выделения границ, подавления шумов, подчеркивания структурных особенностей снимка и т.д. Общая формула фильтрации представляется следующим образом:

$$I_f = \frac{\sum_{i=1}^{q}(\sum_{j=1}^{q} f_{ij} I_{ij})}{F} \qquad (2)$$

3) Преобразование Фурье выполняет улучшения изображения путем его разделения на множество различных пространственно-частотных компонент. Согласно этому методу, пространственное распределение яркости на снимке, фиксируемое последовательностями пикселей столбцов и строк, может быть представлено в частотной области линейной комбинацией периодических функций $sin(u)$ и $cos(v)$ с некоторыми коэффициентами. Для обработки растровых снимков было разработано двухмерное дискретное преобразование Фурье и его высокоэффективная компьютерная версия названная, быстрое преобразование Фурье. Для изображений, состоящих из пикселей, осуществляется двумерное быстрое преобразование Фурье, которое выполняет быстрое преобразование в каждом направлении с последующим комбинированием результата [2]:

$$f(x,y)=\sum_{u-0}^{N-1}\sum_{v-0}^{M-1} F(u,v)e^{2\pi i\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right)} \qquad (3)$$

Использование эффективных методов реконструкции изображений позволяет повысить разрешающую способность устройств регистрации изображений. Можно сделать вывод, что за последние десятилетия объем, разнообразие и качество материалов дистанционного зондирования существенно возрос. Так как полезная информация, извлеченная дистанционным зондированием Земли, используется практически во всех сферах деятельности. Анализ существующих методов улучшения качества изображений, позволил определить степень востребованности тех или иных методов и выявить наиболее перспективные из них для использования в мониторинге

Также можно отметить, что методы являются преимущественно проблемно ориентированными, ведь метод улучшения, являющийся полезным для одного снимка, не всегда является полезным для другого. Подбор методов зависит в первую очередь от характера данных, цели обработки, знания представленной на изображении области и подготовленности.

Список литературы

[1] Е.В. Кочуб, А.А. Топаз Анализ методов обработки материалов дистанционного зондирования Земли // Вестник Полоцкого Государственного Университета. 2012/132-140 с.

[2] Токраева О.С. Обработка и интерпретация данных дистанционного зондирования Земли. //Учебное пособие. – Томск, Издательство Томского политехнического университета, 2010/148 с.

[3] Бондур В.Г., Крапивин В.Ф., Савиных В.П. Мониторинг и прогнозирование природных катастроф. //М: Научный мир, 2009/ 692 с.

[4] *Геоинформатика*. Под ред. *Тикунова* В.С. //Москва: 2005. — 480 с.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЕ ПОВЕРХНОСТИ

Жанабеков Ж.Ж., Нарбаева С.М.

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: Saltanat.Narbaeva@kaznu.kz

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления теплообменом в случае теплового пограничного слоя с поверхностью разрыва. На основании необходимого условия экстремума функционала найдено выражение для скорости вдува через проницаемой поверхности.

Рассмотрен частный случай обтекания пластины на передней кромке и вблизи нее.

Актуальной задачей оптимального управления теплообменом в двухфазном пограничном слое является задача нахождения закона вдува вещества, резко отличающегося по своим физическим свойствам от основного потока и обеспечивающего наилучшее охлаждение поверхности конструкции [1].

Ставится вариационная задача: среди всех допустимых управлений $\mathcal{V}_w(x)$ найти доставляющее минимум функционалу

$$Q = \int_0^l k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} dx, \qquad (1)$$

равному количеству тепла, передаваемого в единицу времени при заданной мощности системы охлаждения

$$P = \int_0^l a(x)\mathcal{V}_w^2(x)dx, \qquad (2)$$

где l – заданная длина обтекаемого профиля, $a(x)$- известная функция.

В качестве примера рассматривается случай обтекания пластины при постоянной скорости вдува.

$$f_w(s) = -\frac{\mathcal{V}_w}{\mathbb{U}_\infty}\cdot\sqrt{2s} = -C\sqrt{s}, \qquad (3)$$

где $f_w(s)$- безразмерная функция скорости вдува. Так как точка $s = 0$ является особой для определения условий на поверхности разрыва, то на передней кромке пластины $(0, s_н)$ вдув считается автомодельным и безразмерная скорость вдува удовлетворяет условию

$$-f_w(s) = C_0, \qquad (4)$$

где C_0 определяет массовый расход жидкости через поверхность, $s_н$-начальная точка вблизи линии $x = 0$. При $s > s_н$ функция вдува $f_w(s)$ имеет вид

$$-f_w(s) = C\sqrt{s}.$$

Обсуждаются некоторые трудности, связанные с неавтомодельностью задачи.

Использование метода последовательных приближений для решения основной системы уравнений со сложными граничными условиями и метода последовательного спуска позволяет найти искомый закон вдува.

Полученные данные позволили определить ряд закономерностей течений и теплообмена. В частности, выявлено влияние теплофизических свойств жидкостей и начала рассматриваемого участка относительно передней точки пластины на эффективность управления.

Список литературы

[1] *Жанабеков Ж.Ж., Лукьянов А.Т.* Об оптимальном управлении теплообменном на пористой поверхности. // Изв.высш.учеб.завед. Авиационная техника, Казань, №2,1977.с.55-61.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ВСЕМ ВОЗМОЖНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛАМ В КОНТЕКСТЕ КОМПЬЮТЕРНОГО (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО) ПОПЕРЕЧНИКА

Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н.
Институт теоретической математики и научных вычислений
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, КАЗАХСТАН
E-mail: axaulezh@mail.ru

Аннотация. Получена оценка погрешности снизу приближенного дифференцирования функций по всем возможным линейным функционалам, включая разностные схемы с восполнением до функции из пространства, по норме которой измеряется восстановление. В случае $2 \le p \le q \le \infty$ показано, что $(\alpha_1,...,\alpha_s)-$ производные частичных сумм по кубам тригонометрического ряда Фурье подтверждают оценку снизу (К(В)П-1). Далее показано, что с сохранением порядка восстановления по точной информации при восстановлении по неточной информации вычислительными агрегатами $\varphi_N(z_1,..., z_N; x)$, функционалы $l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}),..., l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)})$ можно вычислять с погрешностью $|l_\tau(f) - z_\tau| \le \tilde{\varepsilon}_N \equiv$ $\equiv N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)} (\tau = 1,..., N)$, причем эта погрешность является предельной (К(В)П-2 – К(В)П-3).

Исследование задачи численного дифференцирования функций производиться по схеме *Компьютерного (вычислительного) поперечника* (необходимые определения и обозначения в теории Компьютерного (вычислительного) поперечника (в сокр. К(В)П) с разбивкой на задачи К(В)П-1, К(В)П-2 и К(В)П-3 см. в [1]). Здесь отправным результатом является следующая оценка снизу. Справедлива

Теорема 1. *Пусть даны целое положительное число* s *и числа* $1 \le p \le q \le \infty$. *Пусть также даны неотрицательные целые числа* $r, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ *такие, что* $r > \alpha_1 + \dots + \alpha_s + sA$, *где* A *равно* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ *или 0, смотря по тому* $2 \le p \le q \le \infty$, $1 \le p < 2 \le q \le +\infty$ *или* $1 \le p \le q < 2$. *Тогда*

$$\inf_{\substack{l_1,\dots,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}; \varphi_N}} \sup_{f \in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot) \right\|_{L^q(0,1)^s} >> \begin{cases} N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, & \text{если } 2 \le p \le q \le \infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \le p < 2 \le q \le +\infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}}, & \text{если } 1 \le p \le q < 2. \end{cases} \qquad (1)$$

Таким образом, всякий построенный по линейной информации вычислительный агрегат дает порядок восстановления не лучше, чем в неравенстве (1).

Теперь перейдем к оценкам сверху. Каждый вычислительный агрегат, подтверждающий оценку снизу по всем вычислительным агрегатам, построенным по произвольной линейной информации сразу же попадает в разряд неулучшаемых по порядку (разумеется, при своих заданных условиях), поскольку задача К(В)П-1 в качестве конкретизаций содержит самые различные задачи – это и известные поперечники Тихомирова, Темлякова и т.п., это и аппроксимационные задачи – любые ряды Фурье и их средние, всевозможные базисы, это и активно исследуемая тематика последнего периода, включая вейвлет-системы и жадные (гриди) алгоритмы.

В теореме 2 установлено, что к вычислительным агрегатам, подтверждающим оценку снизу в случае $2 \le p \le q \le \infty$ относятся $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)-$ производные частичных сумм по кубам тригонометрического ряда Фурье-Лебега:

Теорема 2. *Пусть даны целое положительное число* s, *числа* $2 \le p \le q \le \infty$ *и неотрицательные целые числа* $r, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ *такие, что* $r > \alpha_1 + \dots + \alpha_s + s\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*

К(В)П-1: $\delta_N(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \succ\prec N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$.

К(В)П-2: *Для* $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)-$ *производной частичной суммы ряда Фурье* $(n = 1,2,\dots;\ N = 2^{ns})$

$$\overline{\varphi}\left(\{\hat{f}(m)\}_{m \in I_n}; x\right) \equiv S_N^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(f;x) = \sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_s) \in Z^s: \\ |m_j| \le 2^n \ (j=1,\dots,s)}} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)}$$

величина $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)}$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \succ\prec \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \succ\prec$$

$$\succ\prec \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N) = N^{-\frac{r}{s} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)}; S_N^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(f;x))_{L^q(0,1)^s} \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f \in W_p^r(0,1)^s \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \le 1 (\tau = 1,\dots,N)}} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(x) - \sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_s) \in Z^s: \\ |m_j| \le 2^n \ (j=1,\dots,s)}} \left(\hat{f}(m) + \gamma_N^{(m)} \tilde{\varepsilon}_N\right) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)} \right\|_{L^p(0,1)^s} \succ\prec N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)};\sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_s)\in Z^s\\ |m_j|\le 2^n\,(j=1,\dots,s)}}\hat f(m)\prod_{j=1}^{s}\left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)}\right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(W_p^r(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s}\right)_{L^q(0,1)^s}}=+\infty.$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агреёгат* $\varphi_N\left(\hat f\left(m^{(1)}\right),\dots,\hat f\left(m^{(N)}\right);x\right)$, *построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из* N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $S_N^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(f;x)$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности выполнено равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)};\varphi_N\left(\hat f\left(m^{(1)}\right),\dots,\hat f\left(m^{(N)}\right);x\right)\right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(W_p^r(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s}\right)_{L^q(0,1)^s}}=+\infty.$$

Список литературы

[1] Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2015, том 55, № 9, С. 1474–1485.

ГИПЕРКОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Абиров А.Қ., Кенжебаева Ф.
Х. Досмұхамедов атындағы Атырау мемлекеттік университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: fariza_20.01.95@mail.ru

Жұмыста теңдеудің оң жағы үшін коммутативті гиперкомплекстік сандарда кейбір біртексіз сызықты дифференциалды теңдеудің шешімін табу, теңдеуді шешуде нөлдің бөлгішінің пайда болуының ерекшеліктері қарастырылады.

Қазіргі кезде гиперкомплекс сандардың ғылым мен техниканың әртүрлі саласына кірігуіне және табиғи құбылыстарды сипаттауда дифференциалдық теңдеулердің маңызының артуы, гиперкомплекс сандық алгебралық және дифференциалдық теңдеулерді шешуге деген қызығушылықты арттыруда. Гиперкомплекс сандардың құрылымы мен математикалық моделдеуге байланысты кейбір мәселелерді [1,2] әдебиеттерден табуға болады. Мұндағы басты қиыншылық көптеген гиперкомплекс жүйелерде көбейту операциясының коммутативті немесе ассоциативті бола бермейтіні. Соңғы кезде көбейту операциясы коммутативті және ассоциативті болатын гиперкомплекс сандарды полисандар деп атауда. Осымен қатар, екінші бір қиыншылық кейбір полисандар кеңістігінде нөлдің бөлгішінің бар болуында. Мысалға, төртінші ретті комплекстік кеңістіктегі нөлдің бөлгішінің алгебралық және геометриялық құрылымы [3] әдебиетте кеңінен баяндалған.

Тұрақты коэффициентті гиперкомплекс айнымалының бірінші ретті біртексіз дифференциалдық теңдеуі деп мына түрдегі теңдеуді айтамыз:

$$\dot{x} + ax = f(t). \tag{1}$$

Бұндағы a – гиперкомплекс сан, ал $f(t)$ – гиперкомплекстік функция. (1) теңдеудің жалпы шешімі мына біртекті теңдеудің барлық шешімдерінің және қандайда бір (1) теңдеудің жеке шешімінің қосындысы болады:

$$\dot{x} + ax = 0, \tag{2}$$

(1) теңдеудің $u(t)$ – жеке шешімі, ал $v(t)$ – жалпы шешімі болсын. Сонда $\dot{v} + av = 0$, $\dot{u} + au = f(t)$. Бұдан $\dot{u} + \dot{v} + au + av = f(t)$. Демек, $x = v + u$ (1) теңдеудің жалпы шешімі болады..

(1) теңдеудің оң жағы $f(t)$ біртексіз сызықты гиперкомплекстік функция болсын, яғни $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$. Мысалға осы теңдеуді гиперболалық сандар жүйесінде қарастырайық.

Егер айнымалыға байланыссыз гипрекомплекстік функцияның компоненті полином болса, онда дифференциалдық теңдеулер теориясының белгілі әдістерімен шешілетін (1) теңдеу біртексіз нақты айнымалылардың n теңдеулер жүйесін шешуге келеді. Сондықтан жұмыста оң жағы гиперкомплекстік функцияның кішірейтілген түрінде болатын жағдайды қарастырамыз. (1) теңдеудің оң жағы экспонентті функция болсын: $\dot{x} + ax = de^{mt}$, мұндағы a, d и m гиперболалық сандар. Шешімді $x_r = ne^{mt}$ түрдегі жеке жағдайда іздестірейік. Туындыны тауып $\dot{x_r} = nme^{mt}$ және оны теңдеуге қойып, аламыз: $nm + an = d$. Егер $a + m$ нөлге тең емес нмнес нөлдің бөлгіші болмаса, онда $n = d/(a + m)$. Сонымен, жеке жағдайдағы шешім мына түрде болады: $x_r = (de^{mt})/(a + m)$. Демек, жалпы шешім $x = ke^{-\alpha t} + (de^{mt})/(a + m)$ болады, мұндағы k – гиперболалық еркін тұрақт, ал $a + m \neq 0$ және $a + m$ нөлдің бөлгіш емес.

Енді теңдеудің оң жағы гиперболалық функция болсын: $\dot{x} + ax = dshct$; $\dot{x} + ax = dchct$. Теңдеудің жеке шешімін гиперсинус пен гиперкосинустың сызықты комбинация түріндегі іздейік: $x_r = r_1 sh(ct) + r_2 sh(ct)$; $\dot{x_r} = c\big(r_1 ch(ct) + r_2 sh(ct)\big)$.

Бұл шешімдерді теңдеуге қойып табамыз:

$$x_r = \frac{ad}{a^2 - d^2} shct - \frac{cd}{a^2 - c^2} chct;$$

$$x_r = -\frac{cd}{a^2 - c^2} chct + \frac{ad}{a^2 - d^2} shct.$$

Бұл жағдайда $a^2 - c^2 \neq 0$ шешімнің бар болуының негізгі шарты, сонымен қатар берілген теңдеудегі гиперкомплекстік сандар жүйесінде нөлдік бөлгіші болмауы керек.

Енді теңдеудің оң жағы $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, e_i$ түрінде болсын, $f_i(t)$ – нақты айнымалы көпмүшелік, n – гиперкомплекс жүйесінің реті. Сонымен, $\dot{x} + ax = f(t)e^{dt}$.

$f(t)$ өрнегінің сызықтылығынан, оның жеке шешімдерінің қосындысы да жеке шешім болды. Сондықтан $\dot{x} + ax = f_i(t)e_i e^{dt}, i = 1,2, \dots, n$ түрдегі теңдеудің шешімін қарастырған жеткілікті.

Гиперкомплекстік сандар жүйесінің негізгі базистік элементтері тұрақты болғандықтан, ол шешімге тұрақты көбейгіш болып енеді. Сызықтық дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясына сәйкес мына түрдегі нақты шешімі бар $x_r = g(t)e_i e^{Bt}$, мұндағы $g(t)$ фунуциясы $f(t)$–ның дәрежесіне сәйкес дәрежедегі полином. $f(t), g(t)$ фунуцияларының дәрежелері r болсын: $f_i(t) = a_i t^i, i = 0,1, \dots, r$; $g(t) = \beta_i t^i$, мұндағы жоғарғы индекс i айнымалы t–ның дәрежелік көрсеткіші: $x_r = e_i \beta_i t^i e^{dt}$.Туынды алайық: $\frac{dx_r}{dt} = e_i e^{dt}\left(i\beta_i t^{i-1} + d\beta_i t^i\right)$. Сонда тендеуге қою және дәрежелерін теңестіру арқылы

$$\beta_1 + \beta_0(k+1) = \alpha_0; \dots; j\beta_j + \beta_{j-1}(k+1) = \alpha_j; \dots; \beta_r(k+1) = \alpha_r$$

жүйесін аламыз. Осы жүйені шешу үшін мына рекурентті формулалар қолданылады:

$$\beta_r = \frac{\alpha_r}{k+1}; \qquad \beta_j = \frac{a_j - (k+1)\beta_{j-1}}{j}.$$

Жасалынған зерттеулер, аналитикалық түрдегі әртүрлі коммутативті гиперкомплекстік жүйеде гиперкомплекс айнымалы біртексіз дифференциалдық теңдеулердің шешімін алуға мүмкіншілік берді, ал бұның өзі ғылым мен техниканың әр түрлі салаларындағы процестерді моделдеудің өсуіне тиімділігін әкеледі.

Әдебиеттер тізімі

[2] *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.

[3] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.

[4] *Елисеев В. И.*. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. М.: Издательство НИАТ. 1990.

КВАЗИОРТАЛАРДЫҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНУЛАРЫ

Абиров А.Қ., Сырымов Е.
Х. Досмұхамедов атындағы Атырау мемлекеттік университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: ersain_94.94@mail.ru

Оң сандарға байланысты берілген алгебралық өрнектерді төменнен немесе жоғарыдан бағалау математиканың маңызды мәселелерінің бірі болып табылады. Осы мәселені шешуде оң сандардың орталарының, қазіргі кезде квазиорталардың арасындағы байланыстар оң нәтиже беруде. Жұмыста квазиорталардың орта мектеп көлеміндегі күрделілігі жоғары есептерді шешуде қолдану мәселесі қарастырылады.

Оң нақты сандар үшін $min\{x_1, \dots, x_n\} \leq S(x_1, \dots, x_n) \leq max\{x_1, \dots, x_n\}$ шарты орындалатын $S(x_1, \dots, x_n)$ функциясын, олардың ортасы ретінде алуға болады. Көптеген математикалық есептерді шешуде қарапайым және салмақпен алынған гармоникалық, арифметикалық, геометриялық, дәрежелік орталарды пайдалану тиімді болып келетіні белгілі. Олардың арасындағы байланыс мына түрде болады [1,71–72 бет]:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq P_n.$$

Салмақтанған $f^{-1}[\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)]$ ортасын құруда $f = x^r$ функциясы пайдаланатынды. $f = x$ болғанда салмақтанған арифметикалық ортаны, ал $f = \ln x$ болғанда салмақтанған геометриялық ортаны аламыз.

Қандайма бір аралықта f функциясы үзіліссіз, әрі қатаң монотонды болса, онда осы аралықтан алынған $x_1, \dots, x_n$ сандарының *квазиортасы* деп $M(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}[\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)]$ түріндегі шаманы айтамыз, мұнда барлық $i = 1, \dots, n$ үшін $p_i > 0$ және $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Мұнда $f = x,\ f = \ln x,\ f = x^r,\ p_i = 1/n$ деп алсақ, онда квазиортаға қарапайым орталардың енетіндігін көреміз.

Енді квазиорталардың орта мектеп математикасы көлемінде кездесетін күрделілігі жоғары есептерді шешуде қолдануын қарастыралық. Мұндай есептер негізінен олимпиадалық есептерді шешуде немесе оған дайындық барысында кездеседі.

1 есеп. $f(x) = \frac{x^4+6x^2+1}{x^3+x}$ функциясының $(0, +\infty)$ аралығындағы ең кіші мәнін табыңдар.

Берілген аралықтағы ең кіші мәнді табу үшін оқушыларда және мұғалімдерде қалыптасқан дәстүр бойынша функцияның туындысын пайдаланады. Біздің жағдайымызда туындыны пайдалану көптеген қиыншылықтарға алып келеді. Осы есепті шешуде арифметикалық және геометриялық орталарды пайдаланудың тиімділігін көрсetelік. Ол үшін функцияны алдымен ыңғайлы түрге келтіріп, содан кейін оң сандар үшін Коши теңсіздігін пайдаланып, мынаны аламыз:

$$f(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{x^3 + x} = \frac{(x^2 + 1)^2 + 4x^2}{x(x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{4x}{x^2 + 1} \geq 2\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{4x}{x^2 + 1}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Теңдік таңбасы орындалу үшін мына шарттың орындалуы керек:

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

Бұдан, $(x^2 + 1)^2 = 4x^2$ немесе $x = 1$. Сонда $f(1) = 4$. *Жауабы:* $x = 1$.

2 есеп. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ үшін $x \cdot cos\, x \leq \frac{\pi^2}{16}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

$G_2 \leq A_2$ теңсіздігін пайдаланып, мынаны аламыз:

$$x \cdot cos\, x \leq \left(\frac{x + cos\, x}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}.$$

3 есеп. $x, y, z \in (0; 1)$ сандары үшін $8xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$ теңдігі орындалса, онда $x + y + z \geq 1$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеңіз.

$x + y + z < 1$ болсын. Сонда $1 - x > y + z \geq 2\sqrt{yz}$. Дәл осылайша $1 - y > 2\sqrt{zx}$ және $1 - z > 2\sqrt{xy}$. Демек осы үш теңсіздікті көбейтіп, аламыз: $(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} \cdot 2\sqrt{xy} = 8xyz$. Бұл есептің шартына қайшы. Демек $x + y + z < 1$ деп ұйғаруымыз қате болады. Олай болса, $x + y + z \geq 1$.

*4 есеп.*Теңдеуді шешіңіз: $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{2 - z^2} + z\sqrt{3 - x^2} = 3$.

$G_2 \leq A_2$ Коши теңсіздігін пайдалансақ,онда:

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{2 - z^2} + z\sqrt{3 - x^2} \leq$$
$$\leq \frac{x^2 + (1 - y^2)}{2} + \frac{y^2 + (2 - z^2)}{2} + \frac{z^2 + (3 - x^2)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Бұдан $x = \sqrt{1 - y^2} \geq 0;\ y = 2\sqrt{2 - z^2} \geq 0;\ z = \sqrt{3 - x^2} \geq 0$ және $x^2 + y^2 = 1;\ y^2 + z^2 = 2;\ z^2 + x^2 = 3$. Соңғы үш теңдіктен $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ болып, одан алдыңғы теңдіктерді азайтып аламыз: $x^2 = 1, y^2 = 0, z^2 = 2$. Демек, $x = 1, y = 0, z = \sqrt{2}$.

5 есеп. Коэфиценттері нақты сандар болатын $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ көпмүшелігі коэфиценттері нақты сандар болатын сызықты екімүшеліктердің көбейтіндісіне жіктелсе, мынаны дәлелдеңдер: $(n - 1)a_1^2 \geq 2na_0a_2$.

Есептің шартынан көпмүшеліктің n нақты $x_1, x_2, \dots, x_n$ түбірлері бар болатындығын көреміз. Сонда Виет теоремасы бойынша мынаны аламыз: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\,a_1/a_0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_2/a_0$. Бұл екі өрнекті мына формула байланыстырады:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n).$$

Бұдан $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_1^2 - 2a_2a_0}{a_0^2}$. Енді $A_n \leq P_n$ теңсіздігін мына түрде ашып жазалық:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{n}.$$

Бұдан мынаны аламыз:

$$\frac{a_1^2 - 2a_2a_0}{a_0^2} \geq \frac{a_1^2}{a_0^2} \cdot \frac{1}{n}$$

немесе

$$n(a_1^2 - 2a_2a_0) \geq a_1^2, \qquad (n - 1)a_1^2 \geq 2na_0a_2.$$

Әдебиеттер тізімі

[1] *Беккенбах Э., Беллман Р.* Введение в неравенства. М.: Мир, 1965.

НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

Блиев Н.К.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: nurlan.erkinbaev@mail.ru

Эллиптическая система вещественных дифференциальных уравнений Бельтрами на плоскости в комплексной записи имеет вид:

$$\partial_{\bar{z}} W - q(z)\partial_z W = 0. \tag{1}$$

Из условия эллиптичности системы следует, что

$$|q(z)| \leq q_0 < 1 \qquad (q_0 = const). \tag{2}$$

Под обобщенным решением уравнения (1) в области G комплексной плоскости E точек $z = x + iy$ понимается функция $W(z)$, допускающая обобщенные производные $\partial_{\bar{z}} W$ и $\partial_z W$ из $L_p(G)$, $p \geq 1$, и удовлетворяющие (1) почти всюду в G. Обобщенное решение гомеоморфно отображающее ограниченную область (малую окрестность, всю плоскость) называется гомеоморфизмом уравнения Бельтрами.

Всюду в дальнейшем считаем, что измеримая в G функция $q(z)$ удовлетворяет условию (2). Кроме того, $q(z)$ принадлежит некоторым пространствам Бесова, которые будут указаны ниже.

Приведем формулировки следующих используемых в дальнейшем результатов автора из работы [1].

Теорема 1. Пусть $q(z) \in B^r_{p,1}(G_0)$, $2 < p < \infty$, $r = \frac{2}{p}$, в некоторой окрестности G_0, с границей из $\mathbb{C}^1_\nu$, $\frac{2}{p} < \nu \leq 1$, произвольно фиксированной точки $z_0 \in E$. Тогда в малой окрестности $G_0^{'}$, $G_0^{'} \subset G_0$, точки z_0 существует локальный непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм $W_0(z)$ уравнения (1), принадлежащий $B^{1+r}_{p,1}\left(G_0^{'}\right)$ $(B^{1+r}_{p.1}\left(G_0^{'}\right) \hookrightarrow \mathbb{C}^{'}(\overline{G_0^{'}}))$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 на $q(z)$, $W_0(z)$ – гомеоморфизм уравнения (1), соответствующий окрестности $G_0^{'} \subset G_0$ точки z_0. Тогда любое обобщенное решение $W(z)$ уравнения (1) в $G_0^{'}$ имеет вид:

$$W(z) = \Phi(W_0(z)),$$

следовательно, принадлежит $B^{1+r}_{p,1}\left(G_0^{'}\right)$. Здесь $\Phi(W)$ – произвольная голоморфная функция комплексного аргумента в области $W_0\left(G_0^{'}\right)$. С помощью теоремы 1 доказываются следующие теоремы 3 и 4.

Теорема 3. Пусть $q(z) \in B^r_{p,1}(E)$ $1 < p < \infty$, $r = \frac{2}{p}$. Тогда в любой области G компактно расположенной в E $(\overline{G} \subset E)$ существует непрерывно дифференцируемый глобальный гомеоморфизм уравнения (1), который принадлежит $B^{1+r}_{p,1}$ в любой ограниченной части E.

Теорема 4. Пусть $q(z) \in B^r_{p,1}(E)$ $2 < p < \infty$, $r = \frac{2}{p}$, и $q(z) \equiv 0$ вне некоторого фиксированного круга K с центром в начале координат. Тогда уравнение (1) имеет полный непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм, отображающий плоскость z на плоскость W, вида

$$W(z) = z - \frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} dK_\zeta,$$

где $\omega(z) \in B_{p,1}^r(E)$ – решение сингулярного интегрального уравнения

$$\omega - q(z)\prod\omega = q(z).$$

Здесь $\prod\omega = -\frac{1}{\pi}\iint_K \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dK_\zeta$ существует в смысле главного значения Коши.

Следующая теорема доказывается с помощью теорема 2.

Теорема 5 (Принцип аргумента). Пусть $q(z) \in B_{p,1}^r(E) \quad 2 < p < \infty, \quad r = \frac{2}{p}$, и $W(z)$ – решение уравнения (1) в G, которое удовлетворяет условиям: 1) $W(z) \in \square(\overline{G})$, 2) $W(z) \neq 0$ на границе Г области G. Тогда $W(z)$ может иметь внутри G лишь конечное число нулей, которое определяется по формуле

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma arg W(z),$$

причем каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

Список литературы

[1] Блиев Н.К., Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах, Алма – Ата, “Наука”, 1985, 160с. (англ.пер. Bliev N., Generalized analytic functions in practional Spaces, Longman, 1997, Published in USA by Published Addison. Wesley Longman Inc).

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ СУЖЕНИЕ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Елеуов А.А, Тунгатаров Н.Н.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: eleuov@mail.ru

Аннотация. В данном работе мы опишем всевозможные сужения замкнутого оператора, который к тому же устойчиво обратимы на своем множестве значений.

Линейный оператор L с областью определения $D(L), D(\tilde{L}) - H$ называется максимальным, если L – замкнут и уравнения $Lu = f \in H$ имеет решение $u \in D(L)$ для любого H. Оператор $\tilde{L}$ – называется сужением L, если $D(\tilde{L}) \subseteq D(L)$ и при $x \in D(\tilde{L})$ выполнено равенство $\tilde{L}x = Lx$. Сужение $\tilde{L}$ –максимального оператора L называется корректным, если уравнение $\tilde{L}u = f$ имеет единственное решение из $D(\tilde{L})$, удовлетворяющее оценке

$$|u| \leq C|\tilde{L}u|, \quad (u \in D(\tilde{L})) \tag{1}$$

где C – не зависет от $u \in D(\tilde{L})$.

Обозначим $R = KerL = \{u : u \in D(L), Lu = 0\}$ это множество замкнутое подпространство в H и называется ядром оператора L. Если $R = 0$, то единственным корректным сужением L является он сам.

Теорема 1. а) Пусть L_Φ – некоторое корректное сужение L. Тогда а) Если $\tilde{L}$ некоторое корректное сужение $\tilde{L}$ – то существует непрерывное преобразование K, действующее из H в R, и выполнено

$$\tilde{L}^{-1} = L_\Phi^{-1} + K, \tag{2}$$

б) Если K – непрерывное преобразование $K: H \to R$, то формула (2) определяет оператор обратный к корректному сужению L.

Теорема 2. Пусть L_Φ – некоторое корректное сужение оператора L. Тогда справедливы а) и б): а) Пусть $K: H \to D(L)$. Тогда оператор

$$L_K^{-1} f = L_\Phi^{-1} f + \left(E - L_\Phi^{-1} L\right) K f \tag{3}$$

Есть оператор, обратный к некоторому корректному сужению L_K оператора L.
б) Обратно, если $\tilde{L}$ – некоторое корректное сужение оператора L, то существует $K: H \to D(L)$ такой, что верна формула (3):

$$\tilde{L}^{-1} f = L_\Phi^{-1} f + \left(E - L_\Phi^{-1} L\right) K f$$

В данном работе мы опишем всевозможные сужения замкнутого оператора, который к тому же устойчиво обратимы на своем множестве значений. Результаты настоящего пункта охватывает не только линейные сужения, утверждения данного пункта дают и нелинейные сужения, несмотря на то, что исходный замкнутый оператор был линейным. В данной работе изложены результаты М. Отелбаева по теории сужений операторов. Изложение построено таким образом, что после чтения данной работы читатель сможет довольно хорошо разбираться, какого сорта результаты правдоподобны и какие методы надо применить, чтобы получить эти результаты.

Список литературы

[1] Отелбаев М. Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского. // Доклады АН СССР – №4, 265, 1982. – С. 815-819.

[2] Отелбаев М. Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К теория сужений и расширений операторов. // Известия АН КазССР – сер. физ.-мат. - №5, 1982. – С. 24-26.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕЗЕРВА УБЫТКОВ

Мадибекова Г.Ш., Қуанышбекова Қ.Қ., Сихов М.Б.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
МНБ РК при Нархоз Университет, КАЗАХСТАН
E-mail: gulzhaina@bk.ru

В данной работе рассматриваются методы оценки резера убытков, такие как методы цепной лестницы, Мака, Борнхьюттера-Фергюсона и Бутстрэп. В рамках работы были произведены расчеты резерва убытков на основе конкретных данных, также был сделан сравнительный анализ между методами.

Страхование сегодня является актуальным социальным благом, сущность которого состоит в предоставлении людям и их имуществу страховой защиты от опасностей различного характера. Для того чтобы в случае неблагоприятного события страховая компания гарантированно смогла покрыть обязательства по отношению к страхователю, формируются страховые резервы. Данная статья посвящена исследованию методов оценки резерва убытков в общем страховании.

На сегодняшний момент для оценки резерва убытков страховой компании используются различные статистические методы, основными двумя из которых являются сценарный анализ (детерминированные модели), финансовый динамический анализ (стохастические модели).

Детерминистические методы, многие из которых дают "среднюю ожидаемую оценку" будущих убытков, основываются на средних исторических показателях компании за предыдущие периоды, но при этом, они не учитывают колебания платежей страховых выплат, а также не учитывают неопределенности предположений, которые входят в расчет.

В моделях оценки неоплаченных будущих убытков существует множество факторов (или неопределенностей), которые могут повлиять на точность конечной оценки. К ним относятся качество входных данных, предположения об уровне убыточности по рассматриваемому продукту или по портфелю в целом, оценка отклонений наблюденных неоплаченных убытков. Чаще всего случается так, что фактические будущие страховые выплаты отличаются от центральной оценки будущих выплат, которая производилась сегодня, и эта разница растет со временем. Для того чтобы избежать возникновения такой разницы и ее последующего роста, сегодня в страховой практике все чаще начинают пользоваться стохастическими методами оценки резерва убытков. С их помощью можно минимизировать разницу между фактическими будущими страховыми выплатами и их прогнозными значениями.

Согласно Постановлению Правления Национального Банка Республики Казахстан от 6 мая 2014 года №76 «Об учреждении Требований к формированию, методике расчета страховых резервов и их структуре» расчет резерва убытков осуществляется следующими актуарными методами (методы треугольников):

1) метод цепной лестницы с поправкой и без поправки на инфляцию;
2) метод Борнхьюттера-Фергюсона;
3) метод Мака.

Как известно, при расчете резерва убытков методом цепной лестницы и Борньюттера-Фергюсона, не учитываются так называемый «фактор хвоста», а также при применении этих методов дается только оценка ожидаемого среднего значения резерва убытков и нет никакой информации о стандартном отклонении от этого среднего значения резерва убытков.

Процедура метода Бутстрэп является универсальным алгоритмом, который может использоваться в комбинации с другими методами и моделями. В основе метода лежит предположение, что существует некоторая модель, с помощью которой можно получить прогноз развития убытков компании, которое было бы достаточно близко к фактическим данным [1, с. 211].

Преимущества

- Универсальный метод и его можно применять к большому числу моделей расчета наилучшей оценки будущих обязательств.
- Можно достаточно просто дополнять оценками факторов убытков в хвостах распределения убытков.
- В явном виде учитывается риск неадекватности оценки параметров. Так же в модели можно учитывать риски самого процесса убытков, как одно из усовершенствований основного метода.

Недостатки

- В базовой версии модели остатки рассчитываются с помощью треугольников метода цепной лестницы, поэтому нельзя сказать, что остатки являются одинаково распределенными.

В статье более подробно сравниваются плюсы и минусы вышеуказанных моделей расчета резерва убытков на основе реальных(конкретных) данных. А также проводится анализ результатов.

Список литературы

[1] Яранцева Е.А. Методы оценки рисков, воздействующих на финансовую устойчивость страховых организаций. М.: Московский Государственный университет имени М.В.Ломоносова, 2016. С. 229.

[2] Жаклин Ф., Рэйчел Д., Эдварда Л. Базовые методы неоплаченных претензий. 2009. С.129.

[3] Крук С. И. Оценка и анализ адекватности резервов убытков страховой компании / С. И. Крук, О. В. Чарышкина // Научные записки молодых исследователей. - 2014. - № 4. - С. 5-10.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ БОНУС-МАЛУС И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В СТРАХОВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Мамбетова Б.Ж., Ақанбай Е.Н., Сихов М.Б.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
МНБ РК при Нархоз Университет, КАЗАХСТАН
E-mail: bayeka@mail.ru

В данной работе рассматриваются некоторые модели системы бонус-малус для числа страховых случаев. Для каждой из отдельных моделей были произведены расчеты по определению относительной премии страховщика на основе конкретных данных и получены результаты по их оптимальному применению.

В практике общего страхования широкое распространение получила система бонус – малус (СБМ). Это система назначения страховых премий, при которой премия страхователя, имевшего за предыдущие периоды страхования страховые случаи, увеличивается (малус). Соответственно, страхователь, у которого за предыдущие периоды страхования не было страховых случаев, получает бонус, т.е. его страховая премия уменьшается. Введение СБМ способствует уменьшению числа страховых случаев, а также привносит в систему страхования некую “справедливость”: платит больше тот, кто вносит больше риска в портфель страховой компании.

Различные СБМ могут существенно отличаться друг от друга. Большинство СБМ строится по следующему принципу: 1) задается разбиение всех страхователей на классы на основе априорной информации (мощность двигателя, возраст, стаж вождения и т.д.) 2) правила перехода из класса в класс определяются по количеству страховых случаев, имевших место в предыдущие периоды страхования.

Большинство СБМ обладает рядом недостатков, среди которых можно отметить два – финансовая несбалансированность и несправедливость по отношению к некоторым группам страхователей. При неудачно сформулированных правилах перехода, с течением времени возникают такие распределения страхователей по классам, при которых расходы по выплатам бонусов не покрываются доходами от собираемых малусов, и страховая компания вынуждена менять базовую ставку страховой премии.

В работе рассмотрены некоторые модели для числа страховых случаев, такие как:

а) гамма - пуассоновская модель

б) бета - биномиальная модель

в) бета – геометрическая модель

В частности, рассматривается применение моделей СБМ для страхования автомобилей. По результатам с использованием реальных данных по Италии (в связи с отсутствием данных по РК на данный момент), были получены следующие результаты: гамма – пуассоновская и бета-биномиальная модели для данной страны различаются не существенно. Так же можно отметить, что бета - геометрическая модель является существенно более “мягкой”, то-есть она предоставляет меньшие скидки в случае отсутствия страховых случаев, и в меньшей степени увеличивает страховые премии при наличии страховых случаев.

Цель данной работы - определение оптимальной системы бонус – малус для обязательного страхования гражданско-правовой ответственности владельцев траноспортных средств (далее ОГПО ВТС) для рынка Казахстана и перерасчет тарифов по страховании ОГПО ВТС на реальных статистических данных по рынку.

Под оптимальной СБМ понимается система, которая соответствует требованиям как страховщика, так и страхователя, т.е., если она финансово сбалансирована и справедлива (каждый страхователь платит премию, размер которой пропорционален риску, который он представляет).

Как уже отметили выше, при построении оптимальной системы бонус-малус могут быть использованы различные модели числа страховых случаев, поэтому выбор модели исходя из ситуации является основной задачей. Следовательно, для использования той или иной оптимальной СБМ требуется анализ реальных данных. Анализ реальных данных показывает, что для различных стран, а возможно и для различных регионов одной страны, модели для построения оптимальных СБМ могут быть различными.

Тем самым, в дальнейшем используя статистические данные страхового рынка РК мы будем заниматься выбором модели для построения оптимальных СБМ в зависимости от класса страхования, региона с предложением конкретных моделей для страховых организации РК. В частности, будут пересчитаны тарифы по страхованию ОГПО ВТС, которые были установлены в 2003 году и не менялись до сих пор.

Список литературы

[1] Michel Denuit, Xavier Marchal, Sandra Pitrebois, Jean-Franois Walhin. Actuarial Modelling of Claim Counts Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems, 2000. С. 245-248.

[2] Сунчалина А.Л. Некоторые модели оптимальных систем бонус-малус // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. «Естественные науки». №4. 2006. С. 80-82.

[3] Лемер Ж. Автомобильное страхование. Актуарные проблемы. М.: Янус-К, 1998. С. 367.

ТЕХ-ВЕСОВОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Ойнаров Р., Калыбай А.А.

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, КАЗАХСТАН

E-mail: o_ryskul@mail.ru

Пусть $1 < p, r < \infty$ и $0 < q < \infty$. Пусть $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ веса, то есть положительные функции локально интегрируемые на $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$.

Для всех $f \geq 0$ рассмотрим следующие операторы :

$$\boldsymbol{S}^{-}f(x) = \left(\int_0^x \left(\int_t^x f\,(s)ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

и

$$\boldsymbol{S}^{+}f(x)=\left(\int_x^{\infty}\left(\int_x^{t}f(s)ds\right)^{r}w(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

На основе этих операторов мы рассмотрим следующие неравенства:

$$\left(\int_0^{\infty}u(x)(\boldsymbol{S}^{-}f(x))^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_0^{\infty}v(x)f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

и

$$\left(\int_0^{\infty}u(x)(\boldsymbol{S}^{+}f(x))^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_0^{\infty}v(x)f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

что представляются обычные неравенства типа Харди для различных интегральных операторов. Наиболее полный обзор по неравенствам типа Харди приведен в [1] и [2]. Неравенства (1) и (2) были охарактеризованы в [3] и [4] для неотрицательных функций f. Здесь мы рассмотрим на множестве монотонных функций $f\ge 0$.

Список литературы

[1] *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy inequality. About its history and some related results - Pilsen: Vydavatelský servis, 2007.

[2] *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted Inequalities of Hardy Type - New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2003.

[3] *Oinarov R., Kalybay A.* Three-parameter weighted Hardy type inequalities // Banach J. Math. Anal. - 2008. - V. 2, no. 2. - P. 85-93.

[4] *Oinarov R., Kalybay A.* Weighted inequalities for a class of semiadditive operators // Ann. Funct. Anal. - 2015. - V. 6, no. 4. - P. 155-171.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРА ПО ВЫПУКЛОМУ МНОЖЕСТВУ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Серовайский С.Я.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: serovajskys@mail.ru

Аннотация. Вводится понятие производной оператора по выпуклому множеству, более сильное, чем производная по направлению, но более слабое, чем производная Гато. Ее особенностью является использование произвольной выпуклой вариации. Оно может заменить производную Гато во многих приложениях. В качестве примера рассматривается задача управления в коэффициентах для уравнения эллиптического типа, для которой однозначная разрешимость краевой задачи гарантирована лишь на множестве допустимых управлений, а не на всем пространстве. Это не позволяет использовать производную Гато зависимости функции состояния от управления. С помощью предлагаемой производной получены необходимые условия оптимальности.

В основе локального нелинейного бесконечномерного анализа лежит дифференцирование операторов. Наиболее естественная конструкция производной оператора A, связывающего линейные топологические пространства X и Y, в некоторой точке x его области определения, предполагает рассмотрение разности $A(x+\sigma h)-Ax,$ где σ есть число, а

h – элемент пространства *X*. Если при $\sigma \to 0$ существует предел указанной разности, разделенной на σ, то он называется производной оператора *A* в точке *x* по направлению h. Если же такой предел существует для любой точки h из *X*, причем он линеен относительно h, то зависимость этого предела от h называется производной Гато $A'(x)$ оператора в указанной точке. Производная по направлению является чрезвычайно общим понятием. Однако из-за своей слабости она, по существу, не имеет практического применения. В то же время производная Гато используется повсеместно. К примеру, необходимым условием минимума в точке *u* дифференцируемого по Гато функционала *I* на выпуклом подмножестве *U* линейного топологического пространства является вариационное неравенство

$$I'(u)(v-u) \geq 0 \ \forall v \in U.$$

К сожалению, на практике часто возникает ситуация, когда требование существования производной Гато оказывается чрезвычайно ограничительным, а дифференцируемости по отдельному направлению не достаточно для получения эффективных результатов. Иногда для достижения желаемой цели используется производная по подпространству. Она использует конструкцию производной Гато, но предполагает выбор направлений h не из всего пространства *X*, а лишь из некоторого его линейного подпространства. Однако и этому требованию зачастую не удается удовлетворить. В следствии этого возникает необходимость в определении более слабой формы операторной производной, оказывающейся, тем не менее, достаточно содержательной практического применения.

Мы предлагаем выбирать направления не из всего пространства и даже не из его подпространства, а лишь из некоторого выпуклого множества *U*, содержащего точку, в которой находится производная. При этом в определении производной мы не можем использовать классическую форму вариации. Однако здесь применима выпуклая вариация. В частности, в приведенной выше разности значений оператора в качестве h выбирается значение $v-x$, где v – произвольный элемент множества *U*. Таким образом, ***производной оператора A по выпуклому множеству U*** в точке *x* этого множества называется такой аффинный непрерывный оператор $A'_U(x)$, определенный на множестве всевозможный разностей $v-x$ и принимающий значения из пространства *Y*, что при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость

$$\frac{A\left[x+\sigma(v-x)\right]-Ax}{\sigma} \to A'_U(x)(v-x) \text{ в } Y \text{ для всех } v \in U.$$

Покажем, что это понятие является достаточно эффективным.

Теорема 1. *Если функционал I дифференцируем по выпуклому множеству U в точке и его минимума на этом множестве, то он удовлетворяет вариационному неравенству*

$$I'_U(u)(v-u) \geq 0 \ \forall v \in U.$$

Для доказательства достаточно разделить неравенство $I\left[u+\sigma(v-u)\right]-I(u) \geq 0$, справедливое для любых $v \in U$ и чисел σ из единичного интервала, на σ и перейти к пределу при $\sigma \to 0$.

Рассмотрим один пример. В открытой ограниченной области Ω евклидова пространства рассматривается уравнение

$$-\Delta y + vy = f$$

с однородными граничными условиями (задача Дирихле). Здесь f – известная функция из пространства $H^{-1}(\Omega)$, а управление v выбирается из выпуклого замкнутого подмножества *U* пространства $V = L_2(\Omega)$ при условий, что все значения этих функций не отрицательны. Нетрудно убедиться, что для любого управления $v \in U$ краевая задача имеет единственное решение $y = y(v)$ из пространства $Y = H_0^1(\Omega)$. В то же время при отрицательных значениях управления решение краевой задачи может не существовать, а может и быть не единственным. Задача оптимального управления состоит в минимизации на множестве U функционала

$$I(v) = \frac{\alpha}{2}\|v\|_V^2 + \frac{1}{2}\|y(v) - y_d\|_Y^2,$$

где $\alpha > 0$, а $y_d \in Y$ есть известная функция.

Для получения условий оптимальности мы не можем использовать здесь конструкцию производной Гато, поскольку в процессе ее определения для отдельных направлений могут получаться отрицательные значения управления, для которых существование или единственность решения не выполняются. Однако использование производной по выпуклому множеству позволяет в процессе ее определения оставаться в пределах действия теоремы об однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 2. *Отображение $v \to y(v)$ и функционал I дифференцируемы по множеству U на всем этом множестве.*

С помощью этого утверждения устанавливаются необходимые условия оптимальности для рассматриваемой задачи.

Теорема 3. *Управление u, минимизирующее функционал I на множестве U, удовлетворяет вариационному неравенству*

$$\int_\Omega (\alpha u + yp)(v - u)dx \geq 0 \ \forall v \in U,$$

где p есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p + up = \Delta y - \Delta y_d .$$

HARDY-TYPE INEQUALITIES FOR MATRIX OPERATORS

Shaimardan S.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, KAZAKHSTAN

E-mail: serikbol-87@yandex.kz

Annotation: To investigate that the problems necessary and sufficient conditions the validity of Hardy-type inequality with the case $0 < p \leq q < \infty$, $0 < p < 1$ and under weaker conditions on the matrices $(a_{i,j})$ for all sequences $f \geq 0$. Moreover, we study these problems on the cone of monotone sequences.

Let $0 < p, q < \infty$. Let $\omega_i = \{\omega_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ and $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ be are non-negative real number sequences and $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a positive real number sequence. $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a non-negative sequence.

We consider the following inequalities:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{A}f)_i^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{\,p} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall f \geq 0, \tag{1}$$

for the operators in the following form:

$$(\mathrm{A}f)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j, \quad i \geq 1,$$

respectively, where C and C^* are positive finite constants independent of f and $(a_{i,j})$ is an arbitrary non-negative matrix.

The inequality (1) has been investigated for the case $0 < p, q < \infty$ with a triangular matrix ($a_{i,j} \ge 0$ for $1 \le j \le i$ and $a_{i,j} = 0$ for $i < j$) in [2], [3] and [4] and the references given therein. However, these inequalities have not been studied for the case $0 < p \le q < \infty$ and $p \le 1$. Only, in 1991 G. Bennett [1] studied the inequality (1) for the this case with the identity matrix.

Notation. The symbol $M << K$ means that there exists $\alpha > 0$ such that $M \le \alpha K$, where α is a constant which may depend only on parameters such as p, q, r. If $M << K << M$, then we write $M \approx K$.

Our main results read as follows.

Theorem 1. *Let $0 < p \le q < \infty$ and $0 < p \le 1$. Let the entries of the matrix $(a_{i,j}) \ge 0$ such that $a_{i,j}$ is non-increasing in the second index. Then the inequality (1) holds if and only if*

$$\mathrm{B} = \sup_{j \ge 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} < \infty,$$

holds. Moreover, $\mathrm{B} \approx C$, where C is the best constant in (1).

Assume that

$$B = \sup_{k \ge 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j} \right)^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{k} v_m^p \right)^{-\frac{1}{p}},$$

$$A := \sup_{k \ge 1} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j} \right)^p v_j^p \right)^{-\frac{1}{p}},$$

$$A^* := \sup_{k \ge 1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j} \right)^p v_j^p \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Theorem 2. *Let $0 < p \le q < \infty$ and $0 < p \le 1$. Then the inequality (1) on the cone of non-negative and non-increasing sequences $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ holds if and only if $B < \infty$ holds. Moreover, $B \approx C$, where C is the best constant in (1).*

Theorem 3. *Let $1 < p \le q < \infty$. Then the inequality*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{A}f)_i^p v_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

on the cone of non-negative and non-increasing sequences $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ holds if and only if $A < \infty$ holds. Moreover, $A \approx C$, where C is the best constant in (2).

References

[1] Bennett G. Some elementary inequalities III, Quart // J. Math. Oxford Ser. № 166. 1991. P. 149-174.

[2] Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ // Math. Inequal. Appl. № 4. 2007. P. 843-861.

[3] Oinarov R., Taspaganbetova Zh. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators // J. Inequal. Appl. № 53. 2012. P. 1-18.

[4] Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M. Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \le q$ // Math. Inequal. Appl. №4. 2009. P. 891-903.

ТОЧНЫЕ ПОРЯДКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ КОРОБОВА ПОСРЕДСТВОМ ОПЕРАТОРОВ, ПОСТРОЕННЫХ МЕТОДОМ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ

Темиргалиев Н., Наурызбаев Н., Шоманова А.

Евразийский национальный университета им. Л.Н. Гумилева, КАЗАХСТАН

E-mail: ntmath10@mail.ru

Любое число *a* равно (приближенно) любому числу *b* (в обозначении $a \approx b$) с точностью $|a-b|$: например, $1 \approx 100$ с точностью |1-100|=99. Здесь все дело в том, что главным в приближенном равенстве, стало быть, в численном анализе и теории аппроксимаций, является оценка $|a-b| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - заданная точность.

Задача восстановления функции $f(x)$ операторами типа конечной свертки

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) D_N(x-\xi_k),$$

где D_N – стандартное ядро, представляет собой важную с теоретической и, в особенности, с практической точек зрения задачу. А. Зигмунд (см. гл. X монографии [1]) еще в 1959 году отмечал *«О поведении интерполяционных полиномов для общих систем известно мало»*, это положение сохраняется до сих пор.

Особенность обсуждаемой тематики исследования в данной статье в [1] описывается так (см. стр. 9, 11 и 28-29 соответственно):*«…имеет нечто общее с проблемой представления функций при помощи рядов Фурье*

$$S_N(x;f) \equiv \int_{\Omega} f(y) D_N(x-y)dy,$$

… в некоторых пределах это действительно так, хотя параллелизм не идет так далеко, как это можно было бы ожидать из формального сходства.… Причина в том, что поведение интерполяционного полинома $I_N(f)$ зависит от значений f только на счетном множестве точек и поведение f на этом множестве может быть «плохим», хотя интегральный признак может выполняться».

Пик активных исследований по этой тематике приходится на 30-50 годы прошлого столетия (см., напр., [2, стр. 72-84], [3, стр. 489-589] и [4, глава X]), из более поздних работ отметим только [5]-[6].

Как нам представляется, тема восстановления функций по их значениям в точках, несмотря на ее возрастающее значение в связи с развитием компьютерных технологий, изучена недостаточно полно.

Данная работа относится к этой теме. В продолжение [7-8], в [9-10] была получена общая формула переноса результатов меньшего числа переменных на большие как принципиально новое развитие «Алгоритма Смоляка» (так его называют на Западе):

$$\left(\otimes\prod_{j=1}^{s} B^{(j)}\right)(f)-\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega\subset Z^s_{\nu_0}}\ \sum_{\substack{\varepsilon_j=0\ \text{или}\ 1\\ j=1,\dots,s}}\otimes\prod_{j=1}^{s}\left(-\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\right)^{\varepsilon_j}\alpha^{(j)}_{\nu_j-\varepsilon_j}(f)=$$

$$\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}\setminus\Omega}\ \sum_{\substack{m_j\in M_j\\ j=1,\dots,s}}\left\langle f,\prod_{j=1}^{s}\varphi^{(j)}_{m_j}\right\rangle\sum_{\substack{\varepsilon_j=0\ \text{или}1\\ j=1,\dots,s}}\ \prod_{j=1}^{s}\left(-\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\right)^{\varepsilon_j}\alpha^{(j)}_{\nu_j-\varepsilon_j}\left(\varphi^{(j)}_{m_j}\right),\tag{1}$$

где $\left\{\varphi^{(j)}_{m_j}(x_j)\right\}_{m_j\in M_j}$, $x_j\in E_j, M_j\subset Z^{\tau_j}$ -ортонормированная, быть может с весом, система,

$$\lim_{\nu_j\to+\infty}\alpha^{(j)}_{\nu_j}=B^{(j)},\quad Z^s_{\nu_0}\equiv\left\{(\nu_1,\dots,\nu_j)\in Z^s:\nu_j\ge\nu_j^{(0)}\ge 0,\ j=1,\dots,s\right\}.\tag{2}$$

Равенство (1) позволяет переносить результаты о приближениях функционалов $B^{(j)}$ меньших размерностей на большие.

В задаче восстановления функций по их значениям в точках к оптимальным или близким к оптимальным результатам приводит следующая конкретизация общей формулы (1) – (2).

Пусть целое $\nu^{(0)}\ge 0$ -дано, и для всякого целого $\nu\ge\nu^{(0)}$ задана действительнозначная последовательность $\left\{\lambda^{(\nu)}_n\right\}_{n\in Z}$, такая что

$$\lambda^{(\nu)}_n=\lambda^{(\nu)}_{-n}\quad (\text{n=0, 1, 2,…}),\quad \lambda^{(\nu)}_n=0\quad\left(n>2^{\nu-1}\right).\tag{3}$$

Положим $(\nu=\nu_j)$

$$M_\nu(x)=\sum_{n=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}}\lambda_n^{(\nu)}e^{2\pi inx},\ \alpha_\nu(x;f)=\frac{1}{2^\nu}\sum_{k=0}^{2^\nu-1}M_\nu\left(x-\frac{k}{2^\nu}\right)f\left(\frac{k}{2^\nu}\right),$$

$$\theta_\nu=\alpha_\nu-\operatorname{sgn}(\nu-\nu^{(0)})\alpha_{\nu-1}.\tag{4}$$

Если

$$\lim_{\nu\to\infty}\lambda^{(\nu)}_n=1\ \text{ и }\ \sum_{\nu:\nu>\nu_0}\left|\lambda^{(\nu)}_n-\lambda^{(\nu-1)}_n\right|<+\infty\ \ (n\in Z),\tag{5}$$

то выполнено (2) и, одновременно, (1).

Полагая, что при всех $j=1,\dots,s$ при $\nu_j\ge\nu_j^{(0)}$ заданы действительнозначные последовательности $\lambda^{(\nu_j)}_{n_j}\equiv\lambda^{(\nu_j)}_{n_j}(j)\equiv\lambda^{(\nu_j)}_{n_j}\left(j;M_{\nu_j}\right)$, удовлетворяющие условиям (3)-(5), из (1)-(2) получаем

$$\Delta_\Omega(x,f;M):=f(x)-\Lambda_\Omega(x,f;M),\tag{6}$$

где оператор восстановления $\Lambda_\Omega(x,f;M)$ имеет вид:

$$\Lambda_\Omega(x,f;M)\equiv\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega\subset Z^s_{\nu_0}}\frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\dots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}\left\{\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=-2^{\nu_j-1}}^{2^{\nu_j-1}}\left[\lambda^{(\nu_j)}_{n_j}(j)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda^{(\nu_j-1)}_{n_j}(j)\right]\cdot e^{2\pi in_j\left(x_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)}\right\}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right).\tag{7}$$

Исследуемая тематика основана на видении Г.Харди ([11, стр.33]) информации, заложенной в равенствах (или формулах) типа (1):*«…изредка они (британские аналитики первой половины девятнадцатого века) приходили к формулам, заслуживающим исследования и сейчас. Так, формулы Грегори*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+n)=0,\ \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\varphi(x+n)=0,\ \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\varphi(x+n)-\varphi(x-n)\right]=\varphi'(x)$$

верны непосредственно или при надлежащем истолковании в модифицированном виде для интересных классов функций».

Для частичных сумм ряда Фурье – сверток приближаемой функции с ядром Дирихле, в случае непрерывных функций Анри Лебег (1909 год) установил неравенство

$$\left\|f(t)-\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos kt+b_k\sin kt\right)\right\|_{C[0,2\pi]}\leq\left(4+\frac{4}{\pi^2}\ln N\right)E_N(f)$$
,

где $E_N(f)=\inf\limits_{T_N}\max\limits_{x}\left|f(x)-T_N(x)\right|$ - наилучшие приближения тригонометрическими многочленами $T_N(x)$ порядка не выше *N*.

В связи с этим результатом из теории суммирования тригонометрических рядов, цель настоящей работы заключается в изучении аппроксимативных возможностей агрегатов приближения (7) «типа Смоляка» восстановления функций по их значениям в точках в случаях, когда $\lambda_n^{(\nu)}$ есть коэффициенты ядра Дирихле.

Погрешность (6) оператора восстановления (7) выписывается в виде (см. [10])

$$\Delta_\Omega(x,f;M)=\sum_{(\nu_1,..,\nu_s)\in Z_{\nu_0}^s\setminus\Omega}\ \sum_{\substack{(\wp_1,..,\wp_s):\wp_j=1,2,3\\ (j=1,..,s)}}\ \sum_{(\tau_1,...,\tau_s)\in A_{\wp_1}^{(\nu_1)}\times\ldots\times A_{\wp_s}^{(\nu_s)}}\delta_{\wp_1}^{(\nu_1)}(\tau_1,x_1;M).....\delta_{\wp_s}^{(\nu_s)}(\tau_s,x_s;M)\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{(t_1,..,t_s)\in Z^s}\hat{f}\left(2^{\nu_1}t_1+\tau_1,...,2^{\nu_s}t_s+\tau_s\right)\right], \qquad (8)$$

где $\hat{f}(m)=\hat{f}(m_1,...,m_s)=\int\limits_{[0,1]^s}f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx$ - тригонометрические коэффициенты Фурье, $\nu\geq\nu_0\geq 0,\quad m=2^\nu\cdot l+\tau,\quad -2^{\nu-1}\leq\tau<2^{\nu-1},\ l\in Z$,

$$\delta_1^{(\nu)}(\tau,x;M)=\left[\lambda_\tau^{(\nu)}-\operatorname{sgn}(\nu-\nu_0)\lambda_\tau^{(\nu-1)}\right]e^{2\pi i\tau x},\quad \text{если}\ \tau\in A_1^{(\nu)}(M)\equiv\left\{\tau\in Z:\ \ |\tau|<2^{\nu-2}\right\},$$

$$\delta_2^{(\nu)}(\tau,x;M)=\left[\lambda_\tau^{(\nu)}-\operatorname{sgn}(\nu-\nu_0)\lambda_{\tau-\operatorname{sgn}\tau 2^{\nu-1}}^{(\nu-1)}e^{-\operatorname{sgn}\tau\cdot 2\pi i\cdot 2^{\nu-1}x}\right]e^{2\pi i\tau x},\quad \text{если}\ \tau\in A_2^{(\nu)}(M)\equiv$$
$$\equiv\left\{\tau\in Z:\ \ 2^{\nu-2}<|\tau|<2^{\nu-1}\right\},$$

$$\delta_3^{(\nu)}(\tau,x;M)=\begin{cases}\lambda_{-2^{\nu-1}}^{(\nu)}e^{-2\pi i2^{\nu-1}x}+\lambda_{2^{\nu-1}}^{(\nu)}e^{2\pi i2^{\nu-1}x}-\operatorname{sgn}(\nu-\nu_0)\lambda_0^{(\nu-1)}, & \text{если}\quad \tau=-2^{\nu-1},\\ \lambda_{\pm 2^{\nu-2}}^{(\nu)}e^{2\pi i(\pm 2^{\nu-2})x}-\operatorname{sgn}(\nu-\nu_0)\left[\lambda_{-2^{\nu-2}}^{(\nu-1)}e^{-2\pi i2^{\nu-2}x}+\lambda_{2^{\nu-2}}^{(\nu-1)}e^{2\pi i2^{\nu-2}x}\right], & \text{если}\quad \tau=\pm 2^{\nu-2}.\end{cases}$$

В обозначениях (3)-(4) и (8) для ядра Дирихле имеем

$$\lambda_\tau^{(\nu)}=\lambda_\tau^{(\nu)}(D_\nu)=\begin{cases}1 & \text{если}\,|\tau|\leq 2^{\nu-1},\\ 0 & \text{если}\,|\tau|>2^{\nu-1},\end{cases}$$

$$\delta_1^{(\nu)}(\tau, x; D_\nu) = [1 - \operatorname{sgn}(\nu - \nu_0)]e^{2\pi i \tau x}, \quad \text{если } \tau \in A_1^{(\nu)} \equiv \{\tau \in Z: \quad |\tau| < 2^{\nu-2}\},$$

$$\delta_2^{(\nu)}(\tau, x; D_\nu) = \left[1 - \operatorname{sgn}(\nu - \nu_0)e^{-sgn\tau \cdot 2\pi i \cdot 2^{\nu-1}x}\right]e^{2\pi i \tau x}, \text{ если } \tau \in A_2^{(\nu)} \equiv \{\tau \in Z: \quad 2^{\nu-2} < |\tau| < 2^{\nu-1}\}.$$

и при $\tau \in A_3^{(\nu)} = \{\tau = -2^{\nu-1}; -2^{\nu-2}; 2^{\nu-2}\}$

$$\delta_3^{(\nu)}(\tau, x; D_\nu) = \begin{cases} e^{-2\pi i 2^{\nu-1}x} + e^{2\pi i 2^{\nu-1}x} - 1, & \text{если} \quad \tau = -2^{\nu-1}, \\ e^{2\pi i\left(\pm 2^{\nu-2}\right)x} - \left[e^{-2\pi i 2^{\nu-2}x} + e^{2\pi i 2^{\nu-2}x}\right] & \text{если} \quad \tau = \pm 2^{\nu-2}. \end{cases}$$

Для класса Коробова E_s^r при $r > 1$ справедлива

Теорема. *При всех* q , $q > \nu_0^{(1)} + \ldots + \nu_0^{(s)}$

$$\sup_{f \in E_s^r} \left\| f(x) - \Lambda_q(x; f; D) \right\|_{C([0,1]^s)} \succ\prec \frac{(\ln N)^{(s-1)r}}{N^{r-1}}.$$

где $\Omega_q = \{(\nu_1, \ldots, \nu_s) \in Z_{\nu_0}^s : \nu_1 + \ldots + \nu_s \le q\}$, $\Lambda_q = \Lambda_{\Omega_q}$, $N = N(q) \succ\prec 2^q \cdot q^{s-1}$.

Список литературы

[1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. -М.: Мир. -1965. -Т. 2.

[2] Никольский С.М. Избранные труды. Т. 1. Теория приближений.-М.: Наука. -2006.

[3] Волков И.И., Ульянов П.Л. 0 некоторых новых результатах по общей теории суммирования рядов и последовательностей.- В кн. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.-М.: ГИФМЛ, -1960. -С. 363–467.

[4] Натансон И.П. Конструктивная теория функций. - М.: ГИФМЛ. -1949.

[5] OskolkovK. I. Inequalities of the ‘large sieve’ type and applications to problems of trigonometric approximation // Anal. Math. 12:2 (1986), 143–166,

[6] TemlyakovV. N. Approximate recovery of periodic functions of several variables // Mat.Sb. 128 (170):2 (10) (1985), 256–268; English transl., Math. USSR-Sb. 56:1 (1987), 249–261.

[7] Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. -1963. -Т. 148. № 5. -С. 1042–1045.

[8] Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: // Дисс. . . . канд. физ.- матем. наук. М.: 1965. Орг. п/я 2325. С. 118–119.

[9] Темиргалиев Н. Классы $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ и квадратурные формулы // Докл.РАН. -2003. -Т. 393. № 5. -С.605-608.

[10] Темиргалиев Н. Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл. РАН.-2010. -Т. 430. № 4. -С. 460-465.

[11] Харди Г. «Расходящиеся ряды», «Иностранная литература».-Москва, 1951, -С.33

ПРИМЕНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ФОРМИРОВАНИИ РЕЗЕРВОВ УБЫТКОВ В СТРАХОВАНИИ

Уасилова Ж.С.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: zhibek_94@mail.ru

В данной работе исследуется задача оценки резерва убытков в моделях с дискретным временем. Прогнозное значение резерва убытка находится как условное математическое ожидание, в качестве оценки которого используется ядерная оценка Надарая-Ватсона. Параметры, относящиеся к позднему урегулированию, оцениваются с использованием метода максимального правдоподобия. Полученные результаты сравниваются с детерминистическим методом цепной лестницы.

Выполнение обязательств по страховым выплатам коммерческая страховая организация реализует за счет **специальных страховых резервов.** Правильное формирование страховых резервов наряду с другими не менее важными функциями страховых организаций является основой финансовой устойчивости страховщиков.

В составе страховых резервов особое место занимают резервы убытков. Между моментом наступления страхового события и моментом его окончательного урегулирования всегда проходит определённый срок. Сначала убыток должен быть заявлен страховщику, а последующее урегулирование убытка, включающее его оценку, возможное рассмотрение дела в суде и окончательное согласование, может потребовать много времени, особенно в случае больших убытков. Во многих случаях формируется общий резерв произошедших, но не урегулированных убытков, включающий в себя убытки произошедшие, но не заявленные (IBNR, IncurredButNotReported), заявленные, но недооцененные (IBNER, IncurredButNotEnoughReserved) и заявленные, но не урегулированные (RBNS, ReportedButNotSettled).

Одним из наиболее известных детерминистических методов расчета резервов убытков является метод цепной лестницы, который в своей традиционной форме из-за скоррелированности множителей развития критиковался известными актуариями. Пока в 1993 году Т.Мак не обосновал метод цепной лестницы в рамках стохастической модели. В связи с этим существенно возрос интерес к стохастическим методам резервирования, использование которых позволяет получить не просто точечную оценку резерва, но определить границы доверительного интервала, который заключает истинное значение резерва с заданной вероятностью.

Общим правилом для построения стохастической модели резервирования является совпадение прогноза резерва, полученного как математическое ожидание случайной величины, с результатом одного из детерминистических алгоритмов (обычно, с методом цепной лестницы и Борнхюеттера-Фергюсона). В мировой практике существует ряд методов оценки резерва убытков. Большинство из них основано на прогнозировании рапределения оплаты убытков во времени на основании развития оплаты убытков в прошлые периоды. Суть методов в том, чтобы сложившийся порядок увеличения суммы убытков в прошлом от одного временного периода к другому применить к будущим отчетным периодам.

В данной работе IBNR резерв рассчитывается через условное математическое ожидание, в оценке параметров которого используется ядерная оценка Надарая-Ватсона. Полученные данные сравниваются с детерминистическими расчетами, а именно методом цепной лестницы и Борнхюеттера-Фергюсона. Следует отметить, что все методы оценки резерва убытков носят вероятностный характер, поскольку существует неопределенность относительно как самого факта наступления страхового случая, так и времени его наступления и размера ущерба. Величина резерва убытков в значительной степени зависит от выбираемого метода его расчета. Размеры оценок, определенные двумя различными способами, могут отличаться друг от друга. Также на размер резерва убытков существенно влияет исходная статистическая информация об убытках и принимаемые допущения. Резервирование средств должно осуществляться исходя из принципа адекватности резерва убытков принятым страховым обязательствам. Однако следует учитывать, что отчисления в страховые резервы уменьшают финансовый результат. Использование альтернативных методов оценки резерва убытков иногда приводит к искусственному выбору метода резервирования для достижения определенных финансовых показателей, что в свою очередь влечет за собой снижение платежеспособности страховой организации.

В заключение хотелось бы отметить, что принятие единой для всех страховых организаций методики оценки достаточности страховых резервов либо разработка показателей достаточности резервов в разрезе групп видов страхования – все это позволило бы быстрее внедрить использование альтернативных методов расчета резервов убытков в нашей стране.

Список литературы

[1] Мак Т. Математика рискового страхования. М.: Олимп-Бизнес, 2005.

[2] Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д. Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001 г.

[3] Huang Jinlong, Wu Xianyi, Individual RBNS Loss Reserving in Discrete Time Model // Chinese Journal of Applied Probability and Statistics. Vol.31 No.3 Jun. 2015

ОБ ОДНОМ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СВОЙСТВЕ НОРМЫ МОРРИ В ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЙ

Жайнибекова М.А., Джумакаева Г.Т.

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, г.Астана, КАЗАХСТАН

«Тема Морри» берет начало со статьи [1] и периодически оказывается на волне международной публикационной активности с сопровождающими конференциями [2].

Обычные постановки задач в этой теме состоят в замене нормы Лебега на норму Морри в известных результатах теории вложений, теории операторов и т.п.

В несколько ином контексте «тема Морри» в 80-ых годах прошлого века развивалась в Алма-Ате под руководством К.Ж.Наурызбаева [3-5] .

Во-первых, степенная функция в определении нормы Морри была заменена на произвольную неубывающую с выполнением Δ_2-условия.

Во-вторых, и это главное, цель исследования была определена как дополнение к классической теореме вложения С.Л.Соболева в случае ее невыполнения.

Согласно классической теореме С.Л.Соболева [2] при $rp \neq s$ для вложения класса Соболева $W_p^r(0,1)^s$ в пространство $C(0,1)^s$ равномерно непрерывных на $(0,1)^s$ функций, необходимо и достаточно выполнение неравенства $rp > s$. В связи с этой теоремой естественно задаться вопросом о переходе к более узким классам r раз дифференцируемых функций с производными из лебегова пространства $L^p(0,1)^s$, для которых выполнено вложение в $C(0,1)^s$ при $rp < s$, что находится в русле теории вложений функциональных пространств и их приложений.

Исполнение высказанных выше идей иллюстрирует следующая (определения и обозначения см. в [6-7])

Теорема. *Пусть даны целые положительные числа* $s, r_1, ..., r_s$, *положительные числа* $\aleph_j \left(j = 1, ..., s \right)$, *действительное число* $1 \le p < \infty$ *и неубывающая на* $\left(0,1\right]$ *положительная функция* $\Phi(\delta)$, *удовлетворяющая условию* $\Phi\left(2\delta\right) << \Phi\left(\delta\right)$. *Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$W^{r_1, ..., r_s}_{p, \Phi, \aleph_1, ..., \aleph_s} \left(0,1\right)^s \subset C\left(0,1\right)^s$$

достаточно, а в случае выполнения условий

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{r_j} \ne 1 \ \text{и} \ r_\tau \aleph_\tau = 1 \left(\tau = 1, ..., s \right)$$

И

$$\eta \Phi\left(\delta\right) << \delta \, \Phi\left(\eta\right) \left(0 < \eta < \delta < 1\right)$$

необходимо, чтобы

$$\int_0^1 \delta^{\left(1 - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{r_j}\right) \frac{\max_{\tau=1,...,s} r_\tau \aleph_\tau}{|\aleph|}} \Phi(\delta) \frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

Содержательное дополнение к теореме Соболева в случае её невыполнения было получено в силу использования свойств нормы Морри. В связи с чем возникает задача о построении других норм с такими же свойствами.

Список литературы

[1] Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. №43. 1938. P. 126-166.

[2] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

[3] Наурызбаев К.Ж., Темиргалиев Н., Джумакаева Г.Т. Критерий вложения классов Лебега – Морри в пространства Лоренца и смежные задачи // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева. №6. 2012. С. 6-28.

[4] Джумакаева Г.Т., Наурызбаев К.Ж. О пространствах Лебега – Морри // Известия АН Казахской ССР, серия физико-математическая. № 5. 1982. С. 7-12 .

[5] Джумакаева Г.Т. Критерий вложения класса Соболева – Морри $W^1_{p,\Phi}$ в пространство C // Математические заметки. Т. 37. № 3. 1985. С. 399-406.

[6] Темиргалиев Н., Жайнибекова М. А., Джумакаева Г. Т. Критерии вложения классов типа Морри // Известия вузов. Математика. № 5. 2015. С. 80–85.

[7] Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумахаева Г.Т. Критерий вложения анизотропных классов Соболева-Морри в пространство равномерно непрерывных функций // Сибирский математический журнал. том 57. № 5. 2016. С. 1156-1170.

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ПОТАПОВА-СИМОНОВА В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Жайнибекова М.А., Кенес Ж.К.

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, КАЗАХСТАН

В постановках различных задач участвуют разные множества, составленные из всех функций для каждой из которых выполнены заранее объявленные свойства, т.е. классы функций. Изучение взаимоотношений между классами составляет предмет *теории вложений* – необъятного раздела теории функций с многочисленными ответвлениями в многие области математики. При этом постановка задач теории вложений, по существу, заключается в выяснении неулучшаемых соотношений между числовыми и функциональными параметрами, определяющих два класса, при выполнении которых один из них в том или ином смысле содержится в другом.

Центральными понятиями теории вложений и приближений являются понятия модуля непрерывности и наилучшего приближения (полиномами по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$) функции $f(x)\in L^p(a,b)(1\le p\le\infty, L^\infty\equiv C)$,

Общепринято, что модуль гладкости и наилучшие приближения отражают совершенно различные свойства функции – структурные (как быстро изменяется на промежутке задания) и конструктивные (как хорошо приближается линейной комбинацией функций, принятых в качестве эталонных) соответственно, и в этом заключается «интрига» темы.

Тем самым, следующие соотношения между ними (здесь ортогональная система – тригонометрическая; $1\le p\le\infty$; *n=1,2,…*)

$$E_n(f)_p \le c\omega_p\left(\tfrac{1}{n}, f\right) \qquad \text{и} \qquad \omega_p\left(\tfrac{1}{n}, f\right) \le c\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_k(f)_p$$

составляют основу теории и называются соответственно прямыми и обратными теоремами теории приближений (а им подобные - теоремами типа Джексона и типа Бернштейна соответственно, - по именам авторов).

Тем не менее, развитие теории приближений, даже в ее основах, продолжается (см. [3] и имеющуюся в нем библ.). Здесь в качестве показательного примера можно привести следующее, в какой-то мере неожиданное, соотношение Потапова – Симонова [1,2] (в одной и той же метрике p, $1<p<\infty$; $\alpha>0$)

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{n}; f\right)_p \succ\prec E_n(f)_p + n^{-\alpha}\left\|S_n^{(\alpha)}(f)\right\|_p \ (n=1,2,...), \tag{1}$$

показывающее, что если привлечь еще и частичные суммы $S_n(f)$ тригонометрического ряда Фурье функции $f\in L^p(0,2\pi)$ по спектру $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx$, по которому производится наилучшее приближение, то структурные и конструктивные характеристики функции f «смыкаются».

Зададимся вопросом «Насколько в теореме Потапова-Симонова важно присутствие каждого слагаемого правой части в неравенстве (1)?».

В данной работе получен ответ на этот вопрос в отношении первого члена $n^{-\alpha}\left\|S_n^{\{\alpha\}}(f)\right\|_p$ в случае *p=2*.

Вычислены порядки следующих слагаемых в порядковом соотношении Потапова-Симонова:

$$E_n(\overline{f})_2 \succ\prec \left\| f - S_n(\overline{f}) \right\|_{L_2} \succ\prec \frac{1}{N^{\alpha+\frac{1}{2}}} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{N^{\alpha}} \left\| S_N^{(\alpha)} \right\|_2 \succ\prec \frac{1}{N^{\alpha}}, \qquad (3)$$

где $\overline{f}(x) \overset{L^2(0,2\pi)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^{\alpha+1}}$.

Из (2)-(3) следует, что в теореме Потапова-Симонова слагаемое $n^{-\alpha}\left\| S_n^{\{\alpha\}}(f) \right\|_p$ опустить без потери справедливости утверждения (1) нельзя.

Список литературы

[8] Симонов *Б.В.* О свойствах преобразованного ряда Фурье // Деп. в ВИНИТИ 22.06.81, № 3031-81. С. 45.

[9] Потапов М.К., Симонов Б.В. О взаимосвязи обобщенных классов функций Бесова-Никольского и Вейля-Никольского // Analysis Mathematica. т. 22. 1996. С. 299-316.

[10] Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012. С. 1-259.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ ТИПА МОРРИ

Жайнибекова М.А., Монтай А.О.

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, КАЗАХСТАН

Классическая теорема С.Л.Соболева [1] утверждает, что для вложения класса Соболева $W_p^r(0,1)^s$ в пространство $L^q(0,1)^s$ $(1 \le p < q < \infty)$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $\frac{r}{s} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ при $1 < p < \frac{s}{r}$. С позиций теории вложений функциональных пространств и их приложений интересен вопрос о переходе к более узким классам r раз дифференцируемых функций с производными из лебегова пространства, для которых выполнено вложение $W_p^r(0,1)^s \subset L^q(0,1)^s$ $(1 \le p < q < \infty)$.

В связи с переходом заменой лебеговой L^p-нормы на норму Морри от класса Соболева $W_p^r(0,1)^s$ к более узкому классу r-раз дифференцируемых функций с производными из $L^q(0,1)^s$ получаем (в определенном смысле) неулучшаемое условие вложения в лебегово пространство $L^q(0,1)^s$ в случае $\frac{r}{s} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то есть когда вложения в $L^q(0,1)^s$ класса $W_p^r(0,1)^s$ нет.

Теперь приведем необходимые определения и обозначения (в целом придерживаясь [2-3]).

Пусть даны целые положительные числа s и r_j $(j = 1,...,s)$, положительные числа $\aleph_j$ $(j = 1,...,s)$, $1 \le p < \infty$ и положительная неубывающая на $(0,1]$ функция $\Phi(\delta)$.

Определим множество параллелепипедов $T_{\aleph_1,...,\aleph_s}$,

$$T_{\aleph} = T_{\aleph_1,...,\aleph_s} = \left\{ I_{\vartheta^{\aleph}}(y) = \prod_{j=1}^{s} \left[y_j - \frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j}, y_j + \frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j} \right] \subset [0,1]^s : 0 < y_j < 1 (j = 1,...,s), \quad 0 < \vartheta \le 1 \right\}$$

и соответствующую ей квазинорму

$$\|\varphi\|_{p,\Phi,T_{\aleph}} \equiv \|\varphi\|_{p,\Phi,T_{\aleph_1,\dots,\aleph_s}} \equiv \|\varphi\|_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s} \equiv \sup_{E\in T_{\aleph}} \frac{1}{\Phi(|\mathrm{E}|)} \left(\int_E |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $|\mathrm{E}|$ есть лебегова мера множества E.

Тогда классом Соболева-Морри $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}(0,1)^s$ назовем множество, состоящее из всех измеримых на $[0,1]^s$ функций $f(x)$, для каждой из которых

$$\|f\|_{W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}} \equiv \|f\|_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s} + \sum_{j=1}^{s} \left\| D^{r_j}_{x_j} f \right\|_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s} \le 1,$$

где $D^{r_j}_{x_j} f$ - обобщенная производная порядка r_j по переменной x_j.

Класс $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}(0,1)^s$ в случае $r_1 = \dots = r_s = r, \aleph_1 = \dots = \aleph_s$ обозначим через $W^r_{p,\Phi,T}(0,1)^s$, где T есть семейство всех s-мерных кубов из $(0,1)^s$, стороны которых параллельны осям координат.

Ясно, что при $\Phi(\delta) \equiv 1$ классы $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s} \equiv W^{r_1,\dots,r_s}_{p,1,\aleph_1,\dots,\aleph_s}$ сводятся к соответствующим пространствам Соболева $W^{r_1,\dots,r_s}_p(0,1)^s$. Для степенных функций $\Phi(\delta)$ классы $W^r_{p,\Phi,T}$ впервые были изучены Морри [4].

Исследования Ч. Морри 1938 года [4] получили продолжение в работах Греко, Ниренберга, Компанато, Бароцци, В.П. Ильина, Росса, Ю.В. Нетрусова и др. (см. §27 в [2]). К.Ж. Наурызбаевым и Г.Т. Джумакаевой в первой половине 80-ых годов XX века был сделан новый шаг – переход от степенного $\Phi(\delta) = \delta^\beta$ к произвольному случаю (см., напр., [3] и [5]). В последнее время эта идея развивалась в работах[6-7].

Через $D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}F$ обозначим множество, составленное из всех определенных на единичном s-мерном кубе $[0,1]^s$ функций $f(x) = f(x_1,\dots,x_s)$, обобщенные производные $f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(x)$ которых принадлежат классу F. Здесь общее достаточное условие вложения (см. [6])

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{p;\Phi;\aleph_1\dots\aleph_s}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)} L^q(0,1)^s$$

при $1 \le p < q < \infty$ состоит в сходимости интеграла

$$\int_0^1 \vartheta^{-\sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j}{r_j} - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}} \Phi^{1-\frac{p}{q}}\left(\vartheta^{\frac{\aleph_1+\dots+\aleph_s}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \aleph_\tau}} \right) d\vartheta < +\infty .$$

В данной работе доказан следующий критерий в степенном случае.

Теорема. *При* $\Phi(\delta) = \delta^\beta (\beta > 0)$, $\frac{r}{s} < \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $1 \le p \le \frac{q}{(1+\sqrt{q})}$ *имеем*

$$W^r_{p,\delta^\beta,T}(0,1)^s \subset L^q(0,1)^s \Leftrightarrow \beta > \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) - \frac{r}{s} \right] \cdot \frac{1}{1-\frac{p}{q}}.$$

Здесь достаточность(см.[6]) следует из общего вида, а необходимость доказани нами.

Список литературы

[1] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[2] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

[3] Джумакаева Г.Т. Критерий вложения класса Соболева - Морри $W^1_{p,\Phi}$ в пространство C // Математические заметки. Т. 37. № 3. 1985. С. 399-406.

[4] Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. №43. 1938. P. 126-166.

[5] Джумакаева Г.Т., Наурызбаев К.Ж. О пространствах Лебега – Морри // Известия АН Казахской ССР, серия физико-математическая. № 5. 1982. С. 7-12 .

[6] Темиргалиев Н., Жайнибекова М. А., Джумакаева Г. Т. Критерии вложения классов типа Морри // Известия высших учебных заведений. Математика. №5. 2015. С. 80–85.

[7] Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумахаева Г.Т. Критерий вложения анизотропных классов соболева-морри в пространство равномерно непрерывных функций // Сибирский математический журнал. том 57. № 5. 2016. С. 1156-1170.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАЙНОВ, ПРИБЛИЖАЮЩИХ ЗАДАННУЮ ФУНКЦИЮ

Женсикбаев К.С., Женсикбаев С.К.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН

E-mail: kuantkan_s@mail.ru

Пусть C – пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой: $||f|| = max|f(x)|$, $s(x)$ есть 2π-периодический полиномиальный сплайн порядка r дефекта 1 с равноотстоящими узлами $x_i = \frac{\pi i}{n}$ $(i = 0: n-1)$, множество которых обозначим через S_n^r, а $s^{(k)}(x)$ – его производная порядка k $(1 \le k \le r-1)$. Для $k = 1,2,\ldots$ и $h > 0$ положим

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f(x + (k-2j)h)$$

Известно [1], [2,с.228] следующее обобщение неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов порядка n

$$\left|\left|T^{(k)}\right|\right| \le \left(\frac{n}{sinnh}\right)^k \left|\left|\Delta_h^k T\right|\right| \le n^k \left|\left|T\right|\right| \qquad (1)$$

справедливое при $h < \frac{\pi}{n}$ и $h < \frac{\pi}{2n}$ соответственно и обращающееся в равенство для полиномов вида $T(x) = asinnx + bcosnx$.

Пусть $\varphi_r(x) (r \epsilon \mathbb{N})$ есть r -й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(x) = sgnsinx$. Для $\mu > 0$ положим $\varphi_{\mu,r}(x) = \mu^{-r}\varphi_0(\mu x)$. Отметим, что $||\varphi_r|| = K_r$, где K_r -константы Фавара.

В работе [3] обобщение неравенство Бернштейна вида (1) доказано для периодических полиномиальных сплайнов минимального дефекта, а именно:

$$\left|\left|s^{(k)}\right|\right| \le \frac{\left|\left|\varphi_{n,r-k}\right|\right|}{\left|\left|\Delta_h^k \varphi_{n,r}\right|\right|} \cdot \left|\left|\Delta_h^k s\right|\right| \le \frac{\left|\left|\varphi_{n,r-k}\right|\right|}{\left|\left|\varphi_{n,r}\right|\right|} \cdot \left|\left|s\right|\right|, \qquad (2)$$

справедливое соответственно при $h < \frac{\pi}{kn}$ и $h < \frac{\pi}{2kn}$ и обращающееся в равенства для сплайнов вида $s(x) = a\varphi_{nr}(x)$

В работе [2] на основе неравенства (1) установлена близость модулей непрерывности самой функций и приближающего ее тригонометрического многочлена, удовлетворяющего неравенству Джексона.

В предлагаемой работе устанавливается, что если сплайн s, приближающий функцию f, удовлетворяет неравенству Джексона, то его модули непрерывности можно оценить через модули непрерывности самой функции, что находит разные приложения, например, при оценке погрешности приближенных решений (сингулярных) интегральных уравнений.

Определение. Пусть k натуральное число. Будем говорить, что функция $\omega(f,\delta)$ есть модуль непрерывности k-го порядка функции f, если

$$\omega_k(f,\delta) = \max_{|h|\le\delta} ||\Delta_h^k f(x)||.$$

Теорема. Пусть произвольные$k, n\epsilon\mathbb{N}$ фиксированы, и пусть

$$\left||f-s|\right| \le C_1\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

Введём константы:

$$D_{nk} := \frac{||\varphi_{r-k}(nx)||}{\left||\Delta_{1/n}^k\varphi_r(nx)|\right|}(1+2^kC_1),\ D'_{nk} := \frac{||\varphi_{r-k}(nx)||}{\left||\Delta_{1/n}^k\varphi_r(nx)|\right|},\ \ D_{nk}^0 = max(2^kD_{nk}, 1+2^kC_1)$$

Тогда $\forall\delta > 0$ выполняются следующие неравенства:

$$\omega_k(s,\delta) \le \omega_k(f,\delta) + 2^kC_1\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

$$\omega_k(s,\delta \le D_{nk}n^k\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)\delta^k \tag{5}$$

$$\omega_k(s,\delta) \le D_{nk}\omega_k(f,\delta) \tag{6}$$

$$\left||s^{(k)}|\right| \le D_{nk}^0\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right) \tag{7}$$

Следствие 1. Пусть для некоторого $k\epsilon\mathbb{N}$ и любого $n\epsilon\mathbb{N}$ для $s\epsilon S_n^r$ выполнено

$$\left||f-s|\right| \le C_2\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

Тогда для любого $\delta > 0$

$$\omega_k(s,\delta) \le C_3\omega_k(f,\delta)$$

равномерно относительно *n*.

Следствие 2. Пусть для некоторого $k\epsilon\mathbb{N}$ и любого $n\epsilon\mathbb{N}$ для $s\epsilon S_n^r$ выполнено

$$\left||f-s|\right| \le C_4\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

Тогда

$$\left||s^{(k)}|\right| \le C_5(k)n^k\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)\quad (n = 1,2,3,\dots)$$

Список литературы

[1] Стечкин С.Б. Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т.60, №9. С.1511-1514.

[2]Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т.15. С.219-242.

[3]Бабенко В.Ф., Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок // Докл. АН СССР. 1986. С.290.

ФУНДАМЕНТАЛЬДЫ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ПӘНДЕРДІ САПАЛЫ ИГЕРУ ТУРАЛЫ КЕЙБІР МӘСЕЛЕЛЕР

Абдуахитова Г.Е., Жуманова Л.К.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: lzhumanova@mail.ru

Фундаментальды математикалық пәндерді игеру барысында студенттердің өзіндік жұмыстарына көңіл бөле отырып, білімді тексерудің инновациялық формаларын қолдану ретінде тестік білім тексеру жүйесі басқа білім тексеру формаларымен қатар қолданылса деген тұжырымға келеміз.

Қазіргі білім беру жүйесінде жоғары оқу орнындағы сапалы білім беру процесі өте маңызды, оның ішінде тексеру мен білімді бағалау көпшілік жағдайда әдеттегі үрдіс бойынша: білім, қабылеттілік пен біліктілікті арттыру барысында жалпы мәдени және кәсіпқой біліктілік дағдыларды қалыптастыра отырып жасалады.

Тексеру мен білімді бағалауға көңіл бөлуді қажет ететін себебі бағалау оқыту нәтижесін анықтау үшін қолданылатын тәсіл, білімді тексеру кезінде қажетті информацияны студенттің қабылдау деңгейі анықталады. Сондықтан жоғары оқу орындарында аудиторлық сабақтардың сағаты азайып бара жатқанда оқу процесінің сапасын арттыру тек қана студенттердің шығармашылық ізденістерін арттыратын өзіндік жұмыстарын қадағалау және оқу материалын меңгеру дағдыларын да жиі тексеру барысында ғана мүмкін болады. Сессиядағы студенттің алған қорытынды көрсеткіштері студенттің білім деңгейін әрқашанда нақты көрсете алмауы да мүмкін. Сонымен қатар білімді тексеру оқу процесінің бір құрамдас бөлігі дей отыра, ең алдымен оқытушының мақсаты тереңдетілген білім беру, өз пәнінің негізгі бағыттарын студенттерге ұғындыру, өз пәнінің қыр-сырына оларды қанықтыру және кәсіптік білім беруге ұмтылу. Студенттерді пән бойынша емтиханға дайындау, олардың рейтингтік қорытындыларын шығару ол екінші мәселе.

Білім алуға қызықтыра білу бірнеше факторларға байланысты, соның ішінде атап айтсақ: оқытушының студенттермен психологиялық пікірлесуі, «кері байланыс» орната алу, өз пәніндегі теорияның практикамен байланысын көрсете алу және оқу процесінде оқытудың әртүрлі тәсілдерін қолдана алуы, яғни өз пәніне деген студенттің қызығушылығын арттыру, сабақты жарыс түрінде студенттерді қызықтыра отырып өткізу.

Оқытудың кредиттік технологиясының негізгі басым бағыттары, студенттердің өздігінен ұйымдастыру қабілеттілігін және оқу үрдісі шеңберінде білім беретін треакторияны таңдау негізінде өз бетімен білім алуды дамыту болып табылады. Студенттердің өзіндік жұмыстарын ұйымдастыру жолдарында жеке методикаларды да қолдануға болады деп есептейміз. Әр түрлі әдебиеттерді зерделей отырып, әсіресе математикалық пәндерді оқытуда студенттердің өзіндік жұмыстарын ұйымдастыруда жүйелілік өте маңызды орын алатынын байқауға болады. Оқу үрдісі жүйелі түрде жүргізілгені жөн. Заманауи талаптарға сай мамандарды дайындаудың да бірден бір жолы оқытудың дәріс-семинар формасын қолдана отырып, оларды өзіндік жұмыстармен байланыстыра дамыту. Өзіндік жұмыстардың сапасын арттыру үшін оқу әдебиеттерін оқу-әдістемелік құралдармен және әдістемелік нұсқаулықтармен толықтыру абзал. Олар студенттерге өзіндік жұмыс жасауда жетекші ретінде бағыт-бағдар беріп отырумен қатар, материалды қандай үрдіспен оқуды, тақырыптың немесе тараудың қандай ерекшеліктеріне көңіл бөлу керектігін, қандай маңызды мәліметтерге назар аудару керектігін көрсетеді және күрделі тақырыптарды түсінуге көмек бере алады.

Студенттердің өзіндік жұмыстары барлық курс студенттері үшін маңызды, бірақ төменгі курс пен жоғары курс студенттерінің өздік жұмыстарының өзіндік ерекшелігі бар. Жоғары оқу орнына енді ғана қадам басқан бірінші курс студенттері үшін университеттегі оқу процесі басқаша. Жоғары оқу орнында материалды есте сақтаумен қатар, берілген білімді қабылдау және оны зерделей білу, реттеу және өз көзқарасының бір бөлігі ретінде қабылдау қабілеті болу керек. Кейбір зерттеушілердің пайымдауы бойынша, болашақтағы мамандыққа деген қызығушылық осы кезден басталады.

Оқытудың алғашқы этапында болашақ маманның математикалық пәнмен танысуы, пәннің мақсаты мен міндеттері, басқа математикалық пәндермен байланысы қарастырылады. Екінші этапта дәрісте берілген теориялық білімді игеру, практикалық сабақтарға өз бетінше дайындалу, есептің дұрыс шешімін табуға үйрену, осының бәрі студенттің өз мамандығы бойынша білім алуының негізі болады. Студент оқу барысында алған білімінің қажеттігін сезіне алатындай бағдар берілгені жөн. Ол үшін күрделі есепті шығару кезінде студент белгілі бір білім дағдысы болмайынша, есептің дұрыс шешімі болмайтынын түсінгені абзал. Студенттер өзіндік жұмыстарға белсене араласу үшін біз аудиториялық жұмыс пен аудиториядан тыс жұмыстардың әртүрлі формалары мен тәсілдерін қарастырдық. Аталған жұмыстардың арасындағы тығыз байланыс оның саралануын көрсетеді және оның орындалу тиімділігі ұйымдастырылуына, мазмұнына, оқу процесінің логикасына тәуелді. Аудиториялық өзіндік жұмыс түрлеріне дәріс және практикалық сабақтар бойынша ағымдағы кеңестер, пәннің теориялық мазмұнын меңгеруді бақылау формасы ретінде қолдану, коллоквиумды оқу жоспары бойынша белгіленген кеңестер кезінде қабылдау, сарамандық сабақтар кезінде үй тапсырмаларын тексеру және талдау, оқу жоспарында белгіленген курстық жұмыстар мен курстық жобаларды орындату, жетекшілік ету, кеңес беру, қорғату жатады.

Аудиториядан тыс студенттің өзіндік жұмыс түрлері: оқытушы ұсынған әдебиеттер мен ақпараттық білім беру ресурстарын (электронды оқулықтар, электронды кітапханалар, слайд дәрістер т.б.) қолдану негізінде дәріс конспектісінің мазмұнын меңгеру, рефераттар жазу, семинарларға әзірлік, семестрлік тапсырмаларды орындау, коллоквиумға дайындалу, кіші зерттеу жұмысын орындау, сарамандық нұсқаулар әзірлеу, жеке есептер түріндегі үй тасырмаларын орындау, компьютермен есептеу жұмыстарын, пәннің белгілі тараулары бойынша жеке жұмыстарды орындау, емтиханға дайындық.

Пәннің тараулары бойынша студенттердің білімін тексеруге тестің екі негізгі түрі қолданылады: стандарттық тестер және ашық тест немесе перспективті тест. Стандарттық тестерде берілген тапсырма бойынша дүрыс жауапты таңдау тексерілетін болса, ал ашық тест немесе перспективті тест түрінде дұрыс жауаптар варианттары болмайды, берілген сұраққа студенттің жауабының түсіндірмесі, ситуацияны өзінше бағалауы тексеріледі. Ашық тест немесе перспективті тест түрінде студент берілген сұраққа жауап беріп қана қоймай, сонымен қатар өз ойын ашық айтып, берілген сұрақты талдайды.

Тестік тапсырмаларға жоғары оқу орындарындағы оқытушылар көзқарастары әртүрлі, бірақ біздің ойымызша студенттің білімін тексеруде басқа әдістермен қоса бұл тексеру әдістерін де қолданған дұрыс деп есептейміз.

Студенттердің білімін бағалауда тестік тапсырмалар қолдану ыңғайлы. Оның бір артықшылығы рубеждік бақылау кезінде де топтағы студенттер саны көп болғанда уақытты үнемдеп қана қоймай, тексеруге тиісті тақырыптардың барлығын тестермен қамтуға болады.

ОБ УПРОЩЕННЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Абдулла Г.О, Аканбай Н.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: noureke1953@gmail.com

Аннотация. Как известно, вычисления вероятностей по классическому определению вероятности сводятся к подсчету числа элементов соответсвующего рассматриваемой задаче конечного пространства элементарных событий и подходящим образом «подобранных» подмножеств этого пространства, т.е. к применению методов комбинаторики. С другой стороны применение вероятностных методов часто позволяет получить часто как новые доказательства известных комбинаторных соотношений, так и новых комбинаторных формул.

Нашей целью в данной работе является получение некоторых комбинаторных соотношении как следствия решения сформулированных на языке теории вероятностей задач на примере одной известной задачи теории вероятностей.

Рассмотрим следующую классическую задачу о случайном распределении частиц (шаров) по ячейкам (ящикам).

Пусть имеется N ячеек и в эти ячейки независимо друг от друга случайно бросают n частиц так, что любая частица с одинаковой (равной $1/N$) вероятностью может попасть в любую из N ячеек и каждое из N^n распределении имеют одинаковую вероятность N^{-n} (напомним, что в таких задачах обычно говорят о статистике Максвелла-Больцмана).

Введем случайную величину $\mu_0(n,N)$ – число пустых ячеек при таком распределении.

Утверждение 1. Закон распределения числа пустых ячиков $\mu_0(n,N)$ задается формулами

$$P\{\mu_0(n,N)=k\}=C_N^k\left(1-\frac{k}{N}\right)^n P\{\mu_0(n,N-k)=0\}, \quad (1)$$

$$P\{\mu_0(n,N)=0\}=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j C_N^j\left(1-\frac{j}{N}\right)^n \quad (2)$$

Замечание. Формулы (1) и (2), записанные в несколько иных обозначениях и видах, имеются в [1] (см. [1], стр. 18-19, задачи 8,9), но там доказательства этих формул основаны на некотором другом (предварительно установленном) комбинаторном соотношении ([1], стр. 18, соотношение (11.6)). Сейчас мы дадим другое (вероятностное) доказательство формул (1) и (2).

Доказательство утверждения 1. Пусть A_i - событие, состоящее в том, что i – ая ячейка осталась пустой, $\bar{A}_i$- противоположное событие. Тогда

$$\mathrm{P}\{\mu_0(n,N)\} = k\xi = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N} \mathrm{P}\left(A_{i_1}\ldots A_{i_k}\bar{A}_{j_1}\ldots\bar{A}_{j_{N-k}}\right) \quad (3)$$

где $\{j_1,\ldots,j_{N-k}\}=\{1,2,\ldots,N\}\backslash\{i_1<i_2\ldots<i_k\}$. В сумме (3) все вероятности равны друг другу, а их число равно C_N^k. Далее, по теореме умножения вероятностей,

$$\mathrm{P}\left(A_{i_1}\ldots A_{i_k}\bar{A}_{j_1}\ldots\bar{A}_{j_{N-k}}\right)=\mathrm{P}\left(A_{i_1}\ldots A_{i_k}\right)\mathrm{P}\left(\bar{A}_{j_1}\ldots\bar{A}_{j_{N-k}}\right)=$$

$$=\mathrm{P}\left(A_{i_1}\ldots A_{i_k}\right)\mathrm{P}\{\mu_0(n,N-k)=0\}=\left(\frac{N-k}{N}\right)^n\mathrm{P}\{\mu_0(n,N-k)=0\},$$

т.е. верна (1). Для доказательства (2) достаточно заметить, что

$$1-P\{\mu_0(n,N)=k\}=P\{\mu_0(n,N)>0\},$$

$$P\{\mu_0(n,N)>0\}=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_N),$$

$$\mathrm{P}(A_i) = \frac{(N-1)^n}{N^n} = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n, \quad 1 \le i \le N, \ \mathrm{P}(A_i A_j) = \frac{(N-2)^n}{N^r} = \left(1-\frac{2}{N}\right)^n, \ 1 \le i, j \le N, i \ne j, \text{ и т.д.}$$

Утверждение 2. Для математического ожидания числа пустых ячеек $M\mu_0(n,N)$ верна формула

$$M\mu_0(n,N) = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n. \tag{4}$$

Доказательство. Сначала подставляем найденные формулой (2) вероятности в (1) и выписав формулу вычисления математического ожидания (по определению), мы увидим, что нам нужно вычислить сумму

$$\sum_{k=0}^{N} kC_N^k \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j C_{N-k}^j \left(1-\frac{k}{N}\right)^n \left(1-\frac{j}{N-k}\right)^n. \tag{5}$$

Вычисление (5) технически очень сложно. Поэтому мы вычислим искомое математическое ожидание другим (вероятностным) методом. Для этого введем случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ следующим образом: если i -ая ячейка пустая, то положим $\xi_i = 1$; если занята, то положим $\xi_i = 0$. Теперь доказательство утверждения получается из цепочки соотношении:

$$\mu_0(n,N) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N, \ M\mu_0(n,N) = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_N,$$

$$M\xi_i = P\{\xi_i = 1\} = \frac{(N-1)^n}{N^n} = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n, i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$M\mu_0(n,N) = \sum_{i=1}^{N} M\xi_i = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n.$$

Из доказанного утверждения и из (5) получим следующее комбинаторное соотношение:

$$\sum_{k=0}^{N} kC_N^k \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j C_{N-k}^j \left(1-\frac{k}{N}\right)^n \left(1-\frac{j}{N-k}\right)^n = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n. \tag{6}$$

Вычислим второй факториальный момент $M\mu_0(\mu_0 - 1)$. Так как $\mu_0(\mu_0 - 1) = \mu_0{}^2 - \mu_0$, $\xi_i^2 = \xi_i$, то имеем $\mu_0(\mu_0 - 1) = \sum_{i \ne j} \xi_i \xi_j$, откуда следует, что

$$M\mu_0(\mu_0 - 1) = \sum_{i \ne j} M\xi_i\xi_j = \sum_{i \ne j} \mathrm{P}\{\xi_i = 1, \xi_j = 1\} = N(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n,$$

$$\sum_{k=0}^{N} k(k-1) C_N^k \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j C_{N-k}^j \left(1-\frac{k}{N}\right)^n \left(1-\frac{j}{N-k}\right)^n = N(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n. \tag{7}$$

Из равенства (6) и (7) немедленно вытекает следующее соотношение

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 C_N^k \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j C_{N-k}^j \left(1-\frac{k}{N}\right)^n \left(1-\frac{j}{N-k}\right)^n = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + N(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n. \tag{8}$$

Аналогичными способами можно показать, что для m- го факториального момента $\mu_0(n,N)$ верна формула (ниже $(x)_m = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1)$)

$$M(\mu_0)_m = (N)_m\left(1-\frac{m}{N}\right)^n.$$

и выписать соответствующие им комбинаторные соотношения, в частности из (6) – (8) можно вывести формулу для дисперсии $\mu_0(n,N)$.

Список литературы

[1] *В.Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1. М.: Мир, 1984.

ГАМБУРГТЕГІ КОНГРЕССТЕН (ICME-13) ТҮЙГЕН ОЙЛАР

Айдос Е.Ж.
Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті,
ҚАЗАҚСТАН, E-mail: erkaraai@mail.ru

Мақалада ICME-13 ұйымдастыру комитетінің гранты бойынша Гамбургте математикалық білім бойынша өткен конгрессте баяндама жасап келген автордың ой-пікірлері келтірілген. Мұнда математиканы оқытудың қазіргі таңдағы проблемалары және оларды шешу сұрақтары қарастырылады.

Гамбургте, 2016 ж. 24-31 шілдеде математикалық білім саласы бойынша 13-ші халықаралық конгресс (ICME-13) болып өтті. ICME халықаралық математикалық одақтың басқаруымен төрт жылда бір рет шақырылады. Конгресстің негізгі мақсаты – математиканы оқытуды жетілдіруге ықпал жасау, тәжірибе алмасу, заманауи компьютерлік технология мен ақпарат алу шеңберіндегі құралдармен таныстыру және т.с.с. Мұнда, білікті оқытушыларды дайындау мәселелері, педагогтарды математиканы және жоғары математика курстарын оқыту әдістерін жетілдіруге ынталандыру, математиканы оқытудың сапасын арттыруға арналған тағы да басқа мәселелер талқыланады. Конгресске 109 елдің 3500-ге тарта өкілдері қатысты, оның ішінде конгресстің ұйымдастыру комитетінің грантына ие болған 220 математик болды (олардың бірі – Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ профессоры Е.Ж. Айдос). Халықаралық бағдарлама комитеті Конгресстерге қатысатын кандидаттарды өте мұқият таңдап алады, олардың есімдері педагогтар әлемінде белгілі және құрметті. Олардың баяндамаларында оқу процесін ұйымдастыру бойынша қызық және қалыптан тыс ой-пікірлерді, сапалы оқулықтар туралы, оқыту технологиясы мен практикасы, дидактикалық материалдар туралы талқылауларды көре аласыз. Конгрессте математикалық білім беру саласындағы аса көрнекті жетістіктері үшін, Felix - Klein атындағы медальға Франция математигі Michèle Artigue және Австралия математигі Alan J. Bishop, Hans–Freudenthal атындағы медальға Гонконг математигі Frederick K.S. және Оңтістік Африка математигі Jill Adler, Emma – Castelnuovo сыйлығына Ұлыбритания математиктері Hugh Burkhardt пен Malcolm Swan ие болды. Бұл, Оңтүстік-Шығыс Азия мен Африка елдерінде математикалық білімнің ролі мен мәртебесінің өскендігін көрсетеді. Халықаралық комиссияның шешімімен кезектегі математикалық білім саласы бойынша конгресс – ICME-14 2020ж. Шанхайда ұйымдастырылады.

Конгресске қатысқан математиктердің өзара дискуссиясынан туған, математикалық білім беру туралы кейбір ой пікірлерді келтірейік.

«Батыс әлемінде математикалық ғылым және онымен тығыз байланыстағы білім беру жүйесі тоқырауға түскен. Мектеп математикасы балаларды алгоритм мен ережені жаттауға баулиды, олардың өзбетінше ойлау қабілетін арттыру емес, механикалық дағдысын ғана қалыптастырады, дайын формуланы пайдаланып шығаратын, «күнделікті өмірдегі практикалық қажеттілікке» ғана жарайтын механикалық есептер қарастырылады. Батыстағы білім беру саласының екі басты проблемасы бар: оқытушылардың білімі және оқулық. Оны дәлелдейтін мысалдардың бірі – 7 сыныптың математика оқулығының бірінде мынадай есеп келтірілген: гипотенузасы 8см. және оған түсірілген биіктігі 5см. тең тікбұрышты үшбұрыштың ауданын табу керек. Оқытушылардың басым көпшілігі, геометрияны жақсы білмейтіндіктен, мұндай тікбұрышты үшбұрыштың болмайтынына көз жеткізе алмаған. Батыс елдерінің ішінде математикалық білімнің тоқырауы бойынша АҚШ алда келеді. Әлемге белгілі академик Владимир Игоревич Арнольд: «Америкадағы математикадан білім беретін мұғалімдерінің 80 пайызы бөлшектерге амал жасауды білмейді» деп айтқаны тегін болмаса керек. АҚШ-та технологиялық жетістіктерінің биік деңгейін жапон, қытай және орыс мамандарын пайдаланып ұстап тұрғаны белгілі. Егер бұл елдерде де оқытуды американдандыру үдерісі жүргізілетін болса, онда білікті мамандарды пайдалану арнасы мүлдем жойылуы мүмкін. Математиканы оқытудың осындай келеңсіз көріністерінің Шығыс елдеріне де жылдам тарап кету қауіпін сезген академик В.И. Арнольд мынадай ой айтқан еді: «Өткен ғасырдағы математиканың гүлденуі көптеген елдерде ғылым мен білімді жою тенденциясына ауысып жатыр. Бұл жағдай римдіктер қиратқан эллиндік мәдениеттің тарихына ұқсайды, ал римдіктерді тек соғыс ісіне, теңізге жүзу және архитектураға пайдалы нәтижелер ғана қызықтырды. Көптеген елдердің қоғамын американдыру үрдісі, адамзаттың ғылымы мен мәдениетін де осындай жойылуға әкелуі мүмкін. Қазір, математика жойылудың бірінші кезегінде тұр. Компьютерлік революция білімді құлдарды білімсіздерге ауыстыруға мүмкіндік береді. Математикалық тұжырымдарды дәлелдемеу – аса қауіпті. Мектепте дәлелдеу өнерін үйренбеген бала, дұрыс пен қате пайымдауларды ажырата алмайды. Мұндай адамдардың өмірде де алдануы қиын емес».

Көптеген елдердегі оқыту жүйесі Америкалық оқыту жүйесінің бір бөлшегі сияқты. Ал бөлшек бүтіннен аса алмайды. Сондықтан да бұл елдердегі математиканы оқыту АҚШ-тағы оқыту жүйесінен артық бола алмайды.

Математиканы оқып үйренудің нәтижесі – интеллектуалды даму мен білімнің іргелілігі, ал бұлар практикалық қолданыстардың негізі.

Автордың ICME-13 конгресіндегі баяндамасын [1] қарауға болады.

Әдебиеттер тізімі

[1] *E.Zh.Aidos* ’’Addressing issues related to some Concerts of Mathematics’’, 13th International Congress on Mathematical Education 2016, Von-Melle-Park 8 20146 Hamburg / Germany

О НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ОСНОВАХ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕИЕ» В КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аканбай Н, Сабири М.Х.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН,
E-mail: nourek1953@gmail.com

Нормальное «гауссовское» распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике, а также в различных прикладных вопросах. Эта «универсальность» нормального закона объясняетя тем, что согласно центральным предельным теоремам всякая случайная величина (случайный вектор), являющаяся суммой очень большего числа независимых случайных величин (случайных векторов), каждая из которых оказывает лишь незначительное влияние на сумму, распределена почти по нормальному закону.

В работе предложен один из вариантов изложения данной тематики в университетских курсах по теории вероятностей и математической статистике.

В традиционных университетских курсах теории вероятностей изучение нормального распределения обычно начинается с изучения одномерной нормальной случайной величины ξ с плотностью распределения $f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $a\in R$, $0<\sigma<\infty$. (символическое обозначение: $\xi \sim N(a,\sigma^2)$). Смыслы параметров выясняются в последуюшем, после введения понятий числовых характеристик случайных величин: a - математическое ожидание, σ^2 – дисперсия случайной величины. Заметим здесь, что если σ стремиться к нулю ($\sigma\to 0$), то функция $f_\xi(x)$ стремиться к «сосредоточенной в точке $x=a$ *дельта-функции»* : $f_\xi(x)\to\delta(x-a)$, $\sigma\to 0$. Поэтому *вырожденную*, т.е. принимающую с вероятностью единица постоянное значение a случайную величину ξ ($P\{\xi=a\}=1$) естественно считать нормальной случайной величиной с параметрами $(a,0)$

Далее, многомерная *невырожденная* нормальная случайная величина (случайный вектор) $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ определяется как многомерная случайная величина с плотностью распределения (ниже и всюду в дальнейшем для $a,b\in R^n$ их скалярное произведение определено соотношением $(a,b)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$)

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det R}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(R^{-1}(x-a),\ x-a\right)\right\}, \tag{1}$$

где $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $|a_k|<\infty$, а $R=\|r_{kl}\|_{k,l=1}^{n,n}$ *строго* положительно определенная симметричная матрица (символическое обозначение: $\xi\sim N(a,R)$).

Из вида многомерной плотности распределения (1), определении математического ожидания случайной величины и ковариации случайных величин, с помощью использования некоторых нетривиальных фактов из теории преобразовании многих переменных можно получить: $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ - вектор математического ожидания; $R=\|r_{kl}\|_{k,l=1}^{n,n}$ – ковариационная матрица; каждая компонента нормального случайного вектора является нормальной случайной величиной; линейные комбинации любых (не обязательно независимых) нормальных случайных величин опять является нормальными случайными величинами и т.п. Но, как уже было отмечено выше, на доказательства вышеприведенных утверждении с помощью прямого использования вида плотности в виде (1) потребуются определенные (не совсем простые) усилия технического характера, к тому же (по крайней мере при определении плотности по формуле (1)) не совсем ясна ситуация в случае вырожденности ковариационной матрицы.

Но оказывается, можно будет дать такое определение нормального распределения, которое сразу будет охватывать как *невырожденные* (σ^2>0, $\det R\neq 0$), так и *вырожденные* (σ^2=0, $\det R=0$) случаи. Это определение дается в терминах характеристической функции случайной величины или вектора, и это определение будет корректным (потому что вероятностное распределение случайной величины и ее характеристическая функция взаимно однозначно определяют друг друга).

Согласно этому определению многомерная нормальная (гауссовская) случайная величина (случайный вектор) $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ определяется как случайная величина (случайный вектор) с характеристической функцией

$$\varphi_\xi(t)=Me^{i(t,a)-\frac{1}{2}(Rt,t)},\quad t\in R^n, \tag{2}$$

где $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $|a_k|<\infty$, а $R=\|r_{kl}\|_{k,l=1}^{n,n}$ - *неотрицательно* (не обязательно *строго*) *определенная* симметрическая матрица.

Прежде всего нужно доказать корректность определения (2), т.е. показать, что определенная формулой (2) функция действительно является характеристической функцией. В случае невырожденности R ($\det R\neq 0$, а значить $\det R>0$) это вытекает из соотношения

$$\int_{R^n} e^{i(t,x)} f(x)dx = e^{i(t,a)-\frac{1}{2}(Rt,t)}, \tag{3}$$

где стоящая под интегралом функция $f(x)$ определена формулой (1). Соотношению (3) можно доказать, например, с помощью приводящего матрицу R к диагональному виду ортогонального преобразования ([1], гл. IV). Если $\det R = 0$, то взявь любое $\varepsilon > 0$ рассмотрим положительно определенную матрицу $R_\varepsilon \equiv R + \varepsilon E$, где $E = diag(1,1,...,1)$ - единичная матрица. Тогда, по доказанному выше, функция $\varphi_\varepsilon(t) = e^{i(t,a)-\frac{1}{2}(R_\varepsilon t,\, t)}$ является характеристической функцией. Так как $\varphi_\varepsilon(t) \to \varphi(t) = e^{i(t,a)-\frac{1}{2}(Rt,\, t)}$ ($\varepsilon \to 0$), и предельная функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке $t = 0$, то по теореме непрерывности для характеристических функции она ($\varphi(t)$) является характеристической функцией (что показывает корректность определения (2)).

Из формулы (2) получаем, что для $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$

$$\varphi_{\xi_j}\left(t_j\right) = \varphi_{\xi_1,...,\xi_n}\left(t_1,...,t_n\right)\Big|_{t_l=0(l\neq j)} = e^{it_j a_j - \frac{r_{jj}}{2}t_j^2},$$

а это показывает, что каждая компонента многомерной нормальной случайной величины (нормального вектора) сама является нормальной случайной величиной: $\xi \sim N(a,R)$ $\Rightarrow \xi_j \sim N(a_j, r_{jj})$. Из вида (2) можно легко получить: $a = M\xi$, $R = \left\|\operatorname{cov}\left(\xi_j,\xi_l\right)\right\|_{j,l=1}^{n,n}$, и из $\operatorname{cov}\left(\xi_j,\xi_l\right) = 0$ $(j \neq l)$, вытекает, что компоненты ξ_j и ξ_l некоррелированы и т.п.

Список литературы

[1] *Н.Ақанбай.* Ықтималдықтар теориясы. Алматы.: Қазақ университеті, 2009

К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ В МУЛЬТИНОМИАЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ СХЕМЕ

Аренбаев Н.К., Абдулахад Ариан
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

Аннотация. В сообщении рассматривается нахождение и обоснование нормировки в многомер-ной локальной теореме Муавра-Лапласа, для вероятностей мультиномиального распределения.

Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ последовательность независимых, одинаково распределенных случайных векторов, заданных в к - мерном евклидовом пространстве таких, что

$$P\{Y_1 = (1,0,0,\dots,0)\} = p_1, \; P\{Y_2 = (0,1,0,\dots,0)\} = p_2, \dots, P\{Y_k = (0,0,0,\dots 0,1)\} = p_k$$

где $p_i > 0, \; p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Рассмотрим сумму $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

В этом случае, распределение суммы имеет мультиномиальный закон распределения [1, с. 76, 3, с.174]

$$P(\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{m}) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!} \, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \,,$$

где

$$\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k), \quad m_i \ge 0, \qquad m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

Отметим также, что

$$E\boldsymbol{Y}_1 = (p_1, p_2, \dots, p_k); \quad D\boldsymbol{Y}_1 = (p_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_k q_k); \quad (q_i = 1 - p_i).$$

Запишем вероятности мультиномиального распределения в виде произведения условных биномиальных вероятностей

$$P(\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{m}) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} \, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n_i!}{m_i!(n_i - m_i)!} \alpha_i^{m_i} \beta_i^{n_i - m_i},$$

где

$$\alpha_i = \frac{p_i}{1 - p_1 - \dots - p_{i-1}}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i.$$

Запишем общий вид условного биномиального распределения при фиксированных $m_1, \dots, m_{i-1}$. В этом случае

$$P_{n_i}(m_i) = \frac{n_i!}{m_i!(n_i - m_i)!} \left(\frac{p_i}{u_i}\right)^{m_i} \left(\frac{u_{i+1}}{u_i}\right)^{n_i - m_i} \qquad (*)$$

где $n_i = n - m_1 - \dots - m_{i-1}, \; n_k = m_k, \; u_i = 1 - p_1 - \dots - p_{i-1}, \; u_1 = 1, \; u_k = p_k$.

Применяя результат локальной теоремы Муавра к вероятностям (*) при $n \to \infty$ и $|t_i| < c$ получим [2, с. 27]

1

$$P_{n_i}(m_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t_i^2}{2}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\},$$

где

$$t_i = \frac{m_i u_i - n_i p_i}{u_i \sigma_i} \,,$$

$$\sigma_i^2 = n_i p_i \frac{u_{i+1}}{u_i}, \quad n_i = n - m_1 - \dots - m_{i-1}, \; u_i = 1 - p_1 - \dots - p_{i-1}, \; c = const.$$

Таким образом при фиксированных $m_1, \dots, m_{i-1}$, в качестве приближения для $P_{n_i}(m_i)$, имеем условное нормальное распределение. Отметим также, что $\Delta t_i = t_i(m_i + 1) - t_i(m_i) = 1/\sigma_i$. Следовательно, мы можем перейти и к интегральной теореме

$$P(a \le t_i \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t_i^2}{2}} dt_i \left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\},$$

где

$$t_i = \frac{m_i u_i - n_i p_i}{\sqrt{n_i} p_i u_i u_{i+1}} \qquad \sigma_i^2 = \frac{(n - m_1 - \cdots - m_{i-1}) p_i u_{i+1}}{u_i^2}$$

Запишем условные математические ожидания и дисперсии. Имеем,

$$E\left(m_j \middle| m_1, \dots, m_{j-1}\right) = (n - m_1 - \cdots - m_{j-1}) \frac{p_j}{u_j}$$

Следовательно, безусловное математическое ожидание равно

$$Em_j = np_j$$

Теперь запишем условную дисперсию

$$D\left(m_j \middle| m_1, \dots, m_{j-1}\right) = \frac{(n - m_1 - \cdots - m_{j-1}) p_j u_{j+1}}{u_j^2}$$

Усреднение, приводит к виду

$$Dm_j = \frac{np_j u_{j+1}}{u_j}$$

В результате полученных выражений для безусловных моментов, составим следующую нормировку

$$y_j = \frac{m_j - (n - m_1 - \cdots - m_{j-1}) \frac{p_j}{u_j}}{\sqrt{n} p_j \frac{u_{j+1}}{u_j}}\ , \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

Список литературы

[1] Б.В.Гнеденко, Курс теории вероятностей, «Наука», М. 1969.

[2] Н.К.Аренбаев, О нормировке случайных векторов, Вестник КазГУ, серия математика, механика, информатика, N 4 (23), 2000, 26-35.

[3] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Том 1,«Мир», М., 1967.

ОЦЕНКА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МУЛЬТИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аренбаев Н.К., Абдулахад Ариан

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН

В результате вывода локальных теорем, опуская излишнюю детализацию, мы получаем следующее выражение, в частности для биномиального распределения

$$exp\{c_1 \frac{x^3}{\sqrt{npq}} + c_2 \frac{x^4}{npq} + c_3 \frac{x^5}{(npq)^{\frac{3}{2}}} + \cdots\}$$

Следовательно, для того чтобы выражение под знаком экспоненты при $n \to \infty$ стремилось к нулю, необходимо, чтобы $|x| = o(n^{1/6})$. Таким образом, зоной нормального приближения является интервал $|x| < r, \quad r = o(n^{\frac{1}{6}}), \ n \to \infty.$ Возникает задача о поведении вероятностей распределений при $|x| > r.$ Эта задача получила свое распространение и на суммы независимых случайных величин. Одним из первых, кто занимался этим вопросом, был С.Н.Бернштейн [1, с. 331], мы будем пользоваться результатами [2, с.106-107].

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$- независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в гильбертовом пространстве и удовлетворяющие условиям

$$EX_i = 0, \ EX_i^2 = \sigma^2, \ \left||X|\right| \le L, \ S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

тогда

$$P\left(||S_n|| \geq r\sqrt{n}\right) \leq 2exp\{nf(z)\}$$

где

$$f(z) = \frac{-a}{a-z}\left\{\frac{z^2}{2}\frac{a^2-1}{a^2} + \frac{z^3}{2\cdot 3}\frac{a^2-1}{a^3} + \frac{z^4}{3\cdot 4}\frac{a^4-1}{a^4} + \frac{z^5}{4\cdot 5}\frac{a^4-1}{a^5} + \cdots\right\}$$

$$z = \frac{ra}{r + 2\Lambda L\sqrt{n}}\ , \qquad \Lambda L^2 = \sigma^2\ ,\ \ a = \sqrt{1+4\Lambda}$$

Следствие. В условиях теоремы 1 выполняется следующее неравенство

$$P(||S_n|| \geq r\sqrt{n}) \leq 2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\left(1+\frac{rL}{2\sigma^2\sqrt{n}}\right)^{-1}}} \qquad (*)$$

Рассмотрим оценку больших уклонений для вероятностей мультиномиального распределения

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимые одинаково распределенные векторы со значением в R^{k-1}определены следующим образом

1

$$X_j = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$$

где $x_i = (-\frac{p_1}{\sigma_1}, \frac{p_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{p_{i-1}}{\sigma_{i-1}}, \frac{u_i - p_i}{\sigma_i}, 0, \dots, 0),\ \ i = 1,2,\dots,k-1\ ; \qquad x_k = -\frac{p_1}{\sigma_1} \dots - \frac{p_{k-1}}{\sigma_{k-1}}$

$$P(X_j = x_i) = p_i, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ \ u_i = p_1 + \cdots + p_k,\ \ \sigma_i^2 = p_i u_i u_{i+1}.$$

Рассмотрим сумму $\quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = (y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$, где

$$y_i = \frac{m_i u_i - (n - m_1 - \cdots - m_{i-1})p_i}{\sqrt{p_i u_i u_{i+1}}},$$

Здесь m_i означает число исходов x_i в сумме S_n и $0 \leq m_1 + \cdots + m_{k-1} \leq n.$ Из комбинаторных соображений следует, что S_n подчинено мультиномиальному распределению. Следовательно,

$$P\left(||S_n|| > r\sqrt{n}\right) = \sum \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$$

где суммирование проводится по всем целочисленным точкам области

$$\sum_{i=1}^{k-1} y_i^2 > r^2$$

Для нахождения искомой оценки для вероятностей больших уклонений определим значения L и $E||S_n||^2$. Рассмотрим

$$||x_i||^2 = \frac{p_1}{u_1 u_2} + \frac{p_2}{u_2\, u_3} + \dots + \frac{p_{i-1}}{u_{i-1} u_i} + \frac{u_{i+1}}{p_i\, u_i} =$$

$$= \left(\frac{1}{u_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_{i-1}}\right) + \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{u_i}\right) = \frac{1}{p_i} - 1$$

Следовательно, $L = 1/p_0$ где $p_0 = \min\limits_{1\leq i\leq k} p_i$. Используя моменты мультиномиального распределения, несложно показать, что $E||S_n||^2 = k-1$. На основании (*) получим

$$P(||S_n||^2 > r^2 n) \leq 2exp\left\{-\frac{r^2}{2(k-1)}\left(1 + \frac{r}{2(k-1)\sqrt{np_0}}\right)^{-1}\right\}$$

Список литературы

[1] С.Н.Бернштейн, Теория вероятностей, ОГИЗ, Гостехиздат 1946.

[2] Юринский В.В., О бесконечномерном варианте неравенств С.Н.Бернштейна, Теория вероятностей и ее применения. – 1970,15, 1, - с. 106-107.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ БӨЛЕКТЕНУІН ОҚЫТУДА БОЛАШАҚ МҰҒАЛІМДЕРДІҢ ЛОГИКАЛЫҚ ОЙЛАУ МӘДЕНИЕТІН ДАМЫТУ

Біргебаев А., Тәліпахын Л., Адил Н.
Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: ahtai@mail.ru

Жұмыста болашақ математика саласының мұғалімі болатын студенттердің логикалық ойлау мәдениетінің проблемалары қарастырылған.Дифференциалдық операторлар және бөлектену теориясын баяндау стилі мен тілінің болашақ математик мұғалімдердің сөйлеу мәдениетін дамытудағы әсері баяндалған. Мысал ретінде Шредингер операторы зерттеліп және оның кванттық механикамен байланысы қарастырылған. Сонымен қатар оның студенттердің логикалық ойлау мәдениетін дамыту мағынасында да, физикалық үдерістердің дүниетанымдық әдістерін игеру мақсатында да бір-бірін толықтырып тұратыны түсіндірілген. Аталған дифференциалдық оператордың шешімдерінің тегістігі туралы қажетті теоремалар келтірілген

«Логика» термині loyos деген грек сөзінен шыққаны белгілі. Ол «ой», «сөз», «сана», «заңдылық» деген мағынаны білдіреді, ойлау үдерісі бағынатын ережелер топтамасын белгілеу үшін, яғни талдау ережелері туралы ғылымды және оны жүзеге асыру формасын белгілеу үшін пайдаланылады. Логика сананың пәндік мағынасы мен үйлестіру үдерісі анықталатын ойлау заңдылықтарын және формасын зерттейді. Дүниетану үдерісін толық көлемде философия арқылы оқып үйренетіндіктен, логика философиялық ғылым болып табылады.

Дифференциалдық теңдеулерге қойылатын есептерді шешуде білімді, білікті, дағдыны қалыптастырудың қажетті шарттарының бірі математикалық тілді жақсы игеру. Тілдік дағды мазмұнына әр түрлі ұғымдардың анықтамаларын түйсінудегі біліктілікті жатқызамыз. Ол дифференциалдық теңдеулерге қойылатын есептерді операторлар әдісімен шешуде, оның шешімдерінің бар болуын, жалғыздығын, бөліктенуін, коэрцитивті бағалауларды, сонымен қатар дифференциалдық теңдеулер сызықты емес болғанда оның шешімдерінің бар болуын дәлелдеуде маңызды роль атқарады. Функционалдық кеңістіктерде кездесетін жаңа ұғымдар онда қарастырылатын дифференциалдық теңдеулер үшін әлсіз шешімдер, күшті шешімдердің анықтамаларын және кеңістіктердегі енгізілу теоремаларын білу студенттердің математикалық логикалық ойлауын жетілдіреді. Математика әдістерінің ерекшелігіне байланысты Г.Штейнгауз: «Математиканың негізгі үдерістерінің бірі ондағы кез келген ұғымдардың барлық қасиеттері қатаң логикалық түрде берілген формальды анықтамалардан туындайды...» дейді [2]

Мысал ретінде кванттық механиканың негізгі теңдеуі болып табылатын сызықтық емес қалыпты жағдайдағы Шредингер теңдеуін Гильберт кеңістігінде шешімін табу есебін қарастырайық. Бұл есепті шығаруды автордың бірі өзі жүргізген [3].

Бұл жұмыста

$$Lu = -\Delta u + q(x,u)u = f(x) \in L_2(R^m) \qquad \text{(I)}$$

сызықтық емес операторының шешімінің тегістігі қарастырылады.

Алдымен, сызықтық емес Штурма-Лиувилл дифференциалдық теңдеуі үшін коэрцитивті бағалауларды және шешімнің бірінші туындысының салмақты нормалардағы бағалауларын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттар табылған. Сонан соң алдынғы алынған нәтижелер m =3 болған жағдайда Шредингер теңдеуі үшін жалпыланған.

Штурма-Лиувилл теңдеуі үшін алынған бір нәтижені келтірейік.

I. **Теорема**. Мына шарттар орындалсын дейік:

а) $q(x, y) \geq \delta \rangle 0$; б) $q(x, y)$ - екі айнымалыдан тәуелді үзіліссіз функция $\tilde{o}, \acute{o} \in \mathrm{R}^2$;

в) $\sup\limits_{[x-\eta]\leq 1} \quad \sup\limits_{|C_0 - C_1| \leq A} \quad {}_{|C_0|\leq A} \quad \dfrac{q(x, C_0)}{q(x, C_1)} \langle \infty,$

мұндағы $\grave{A}$ – кез келген ақырлы сан. Онда кез келген $f(x) \in L_2(R^m)$ үшін, $Ly = -y''(x) + q(x, y)y = f,$ теңдеуінің екінші туындысының квадраты қосындыланатын шешімі *y(x)*-бар болады және ол

$$y''(x) \in L_2(R^m).$$

Осындай нәтижелер сызықтық емес операторлардың кең кластарына да орынды болады. Сызықтық операторлар үшін осындай жұмыстар басқа еңбектерде қарастырылған [1].

1 теореманы дәлелдеуде функционалдық кеңістіктердің енгізілу теоремаларын дифференциалдық операторлар әдістерін пайдалану логикалық ойлаудың жүйелі түрде жүргізілуін талап етеді. Шаудер теоремасы, компакт оператордың қасиеттері т.б. ұтқырлықпен пайдалану және оның физикалық мағыналарын ашу студенттердің логикалық ойлау жүйесін дамытумен қатар студенттердің ғылыми ойлау жүйесін қалыптастырады. Қойылған есептің шешімін кванттық механика жүйесіндегі толқындық функциясы ретінде қарастыруға болады. Ол кванттық механика жүйесін сипаттауға жәрдемдеседі, әрі оның модулінің квадратын ықтималдық амплитудасы деп аталады. Белгілі бір уақыт моментіндегі бөлшектің кеңістіктің нүктесіндегі болуының ықтималдық тығыздығы сол күйдің толқынды функциясының абсолютті мәнінің квадратына тең екендігі кванттық механикадан белгілі. Теңдеудің шешімі ретінде табылған толқынды функцияны Гильберт кеңістігінің элементі ретінде қарастырады. Студенттің логикалық мәдениетін дамытуда кеңістіктер теориясы мен операторлардың бөліктенуін оқытудың математиканың ішкі дамуындағы және қолданбалы бағыттарындағы рөлін айқындау маңызды. Математикалық әдістерді логикалық талдау, ол әдістің мүмкіндіктерін ашып қарастырылып, отырған теңдеудің физикалық мәнін ашуға мүмкіндік береді. Сонымен математиканы және математикалық модельдеудің практикаға қолданылуын оқыту болашақ мұғалімдердің логикалық ойлау мәдениетін дамыту мағынасында және әлемді тану әдістері мағынасында бір - бірін өзара толықтырып отырады.

Әдебиеттер тізімі

[1] Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография. - Екатеринбург: Уральское издательство, 2004 - 383 с.

[2] Штейнгауз Г. Задачи и размышления. – М.: Мир, 1974. - 400 с

[3] Биргебаев А. Элементы теорем вложения и теории разделимости. КазНПУ им. Абая Алматы-2008, 88 стр.уч. пос.

ЖОҒАРЫ СЫНЫПТА ТУЫНДЫ, ИНТЕГРАЛ ТАҚЫРЫПТАРЫН ПАЙДАЛАНЫП, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ОҚЫТУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛІК ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Касенов[1] С.Е., Иманова[2] Г.Б.
[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
[2]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: syrym.kasenov@mail.ru

Аңдатпа. Математика сабағында теориялық материал мен есеп шығару материалын тығыз байланыстырып, оқушының нақты да жүйелі математикалық дағдысын қалыптастыру керек. Себебі бұл дағды математиканы әрі қарай меңгеруге, оны өмірде, кәсіпте қолдануға қажет болады. Мектепте оқушылар көп жағдайда абстракциялы мазмұнды есептер шығарады, балалар шартты есепке көп ынта қоймағандықтан олардың белсенділігі төмендейді. Сол себепті ортақ математикалық моделі бар әр түрлі мазмұнды қолданбалы есептерді, абстракциялы, дерексіз есептерді тәжірибелік мазмұнмен толықтыру керек. Осы орайда қолданбалы есептерді шығаруға оқытудың әдістемесін қарастыру өзекті болып отыр.

Математиканың ерекшелігі – оның қолданылымының әмбебаптығы. Табиғаттың рухани және материалдық байлықтарын ұқыпты игеруде өлшеп, есептеп, саралап алмай мәселені шешуге тіптен болмайтыны өзінен-өзі белгілі. Міне, осы кезде математиканың табиғаттағы, адам өміріндегі рөлі айқындалады.

Мектепте математика курсын оқытудың ең маңызды мақсаттарының бірі – математиканың қолданбалы мүмкіндіктерін ашу. Ал бұл мүмкіндікті ашуда қолданбалы есептердің маңызы зор. Математиканы қолданбалы бағытта оқыту дегеніміз – математиканы оқытуда техника мен оған жақын ғылымдарда оны қолдану, халық шаруашылығы мен тұрмыста қолдануға бағыттау, немесе оқытуға политехникалық бағыт беру, яғни физика, химия, география, сызу, технология сабақтарымен байланыс орнату; компьютерлік сауаттандыру, математикалық ойлау және жұмыс дағысын қалыптастыру, оқушыны есептер шешуге, мысалдар шығартуға, оқушы өз бетінше есептей білу дағдыларын қалыптастыру.

Негізінде қолданбалы есептерде мынандай талаптар болуы керек: математикалық және математикалық емес проблемалар көрініс табуы керек, бағдарламаға сай болуы, есеп мазмұны нақтылыққа құрылған, шығарылу жолы практикалық әдіс тәсілдерге жақын болуы керек.

Әдістемелі әдебиетте үшінші және төртінші дәрежелі теңдіктерді шешуге келтіретін қолданбалы тапсырмалар сирек келтіріледі. Бұл, мұндай тапсырмалардың ереже бойынша физика, техника немесе т.б. пәндік салалардың анықталған теориялық мәліметтерінің қатыстырылуын талап ететіндігімен түсіндіріледі. Бұдан басқа мектепте жоғары дәрежелі теңдеулерді шешудің жан-жақты әдістері де қарастырылмайтындықтан, тапсырмаларды құрастырушылардан теңдіктерді көбейткіштерге жіктеудің көмегімен, көмекші айнымалыларды енгізу немесе басқа да жасанды тәсілдердің көмегімен шығаруға болатын теңдеулерді мұқият іріктеуге тура келеді.

Жоғары дәрежелі теңдеу тақырыбына арналған қолданбалы бағыттағы есеп: Айман мен Шолпан жаңа жыл кешіне жиналды.

–Айман: (Неге шыға алмай кеттің). Не істеп жатырсың?

–Міне, жаңа жыл кешінің көйлегіме әлі 23 түйме тігу керек.

Айман оларды тіге бастады, 2 минуттан кейін Шолпан шыдай алмай оған жәрдем бере бастады. Айман тұрақты жылдамдықпен 11 түймені тікті, және Шолпаннан қалыспау үшін 12-түймені алып тігу жылдамдығын 10 т/мин арттырды.(т/мин – 1 түймені тігуге кететін уақыт минут есебімен).

Ал Шолпан Айманның бастапқы жылдамдығынан 1т/мин артық жылдамдықпен асықпай отырып 10 түйме қадады. Соңғы 11 түймеде ол жылдамдығын 1т/мин арттырды. Олар түймелерді бір мезгілде қадап бітірді. *Айман қанша уақыт тікті.*

Шешуі: Егер v – Айманның бастапқы жылдамдығы болсын.

Айманның барлық жұмысқа жұмсаған уақыты $t_1 = \frac{11}{v} + \frac{1}{v+10}$

Шолпан барлық жұмысқа жұмсаған уақыты $t_2 = \frac{10}{v+1} + \frac{1}{v+2}$

Бұдан $t_1 - t_2 = 2$ ескерсек, келесі теңдеуді аламыз

$$\frac{12v+110}{v^2+10v} - \frac{11v+21}{v^2+3v+2} = 2$$

Ықшамдағаннан кейін келесі

$$2v^4 + 25v^3 + 49v^2 - 104v - 220 = 0$$

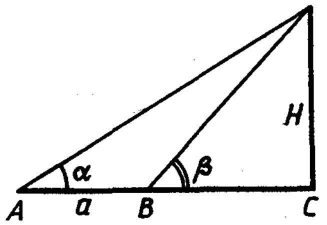
теңдеуі келіп шығады, 220 санының бөлгіштерін тексере отырып іріктеу арқылы осы теңдеудің түбірін табамыз. $v = 2$ теңдің шешімі болатынан көз жеткіземіз.

Айманның жұмыс уақыты $t(2) = \frac{11}{2} + \frac{1}{12} = 5мин35с$

Прогрессия тақырыбына арналған қолданбалы бағыттағы есеп: Ежелгі кезден-ақ тастармен ойнаудың біршама түрлері белгілі.Соның бірі келесі ойынды айтуға болады: Екі кісі ойнайды. Олар 1- ден 10-ға дейінгі аралықта кез келген санды тастарды кезектесіп ортаға тастап отырады. Кім тастар санын 200-ге жеткізсе сол жеңіске жетеді. Кім ұтады – біріншісі ме, екіншісі ме? Жеңіске жету үшін қалай ойнау керек?

Шешуі : Аяғынан бастап талқылаймыз. Егер менің жүрісімде үйіндіде 190-199 тас болса, онда мен 200 –ші тасты қойып жеңіске жетемін. Сондықтан оның алдында мен қарсыласыма дәл 189-ыншы тасты қойып беруім керек. Одан әрі қарай үйлестіре ойлай отырып жеңіске жететін саннда тізбегін табамын: 2, 13,24,35,46,57,68,79,90, 101, 112, 123, 134, 145, 156, 167, 178, 189, 200. Сонымен, бірінші, үйіндіні алғашқы екі тасты ортаға қойып, өзінің жеңісін қамтамасыз етеді.

Тригонометрия тақырыбына арналған қолданбалы бағыттағы есеп: Үшбұрыштарды шешу жолымен қол жетімді емес арақашықтықтарды өлшеудің тәсілдері көп. Жақындап баруға мүмкіндік болмайтын (биіктігіне қол жетпейтін) ғимараттар шатқалдардың биіктігін анықтаудың бір тәсілі мынадай:Төмендегі суреттегі a қашықтығын және α, β бұрыштарды өлшейді. Н-ті қалай табамыз?



Шешуі: $a = AC - BC = Hctg\alpha - Hctg\beta = H(ctg\alpha - ctg\beta)$, $H = \frac{a}{ctg\alpha - ctg\beta}$

Әдебиеттер тізімі

[1] Әбілқасымова А.Е. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі. - Алматы, 2014.

[2] Фоминых Ю.Ф. Прикладные задачи по алгебре для 7-9 классов. М., Просвещение, 1999.

ЖОҒАРЫ СЫНЫПТА ТУЫНДЫ, ИНТЕГРАЛ ТАҚЫРЫПТАРЫН ПАЙДАЛАНЫП, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ОҚЫТУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛІК ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Касенов[1] С.Е.,Тлеулесова[1] А.М., Таирова[2] А.Б.
[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
[2]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: syrym.kasenov@mail.ru

Аңдатпа. Мақалада туынды, интеграл және диффренциал көмегімен дифференциалдық теңдеулер ұғымын енгізудің әдістемелік ерекшеліктері қарастырылады. Дифференциалдық теңдеулер заманауи математиканың ең үлкен салаларының бірі. Дифференциалдық теңдеудің қазіргі математика ғылымында алатын орны оның қолданулармен тікелей байланыста болуында. Сол себепті мақалада жоғары сынып оқушыларына арналған дифференциалдық теңдеулер тақырыбымен байланысты элективті курс жоспары ұсынылып отыр.

Жаратылыстану ғылымдары мен техника есептерінде дифференциалдық теңдеулерінің орны ерекше. Көптеген құбылыстардың математикалық моделі дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталады. Дифференциалдық теңдеулерді қолдану қажеттігі туындамайтын ғылым немесе өндіріс саласын елестету өте қиын. Жекелегенде оларға түрлі физикалық және химиялық типтес процесстер, мұнай мен газ өндіру, геологиялық, экономикалық және тағы басқа да процесстерді жатқызуға болады. Егер кейбір физикалық өлшемдер (дененің қозғалуы, сұйықтың белгіленген нүктеге қабаттық (пластовое) қысымы, заттың концентрациясы, өнімнің сатылым көлемі) уақыт өте келе қандай да бір факторлардың әсерінен өзгермелі болатын болса, оның уақыт бойынша өзгеретіндігі де заңдылық болып саналады. Бастапқы айнымалыны уақыт функциясы және функцияның туындысы ретінде байланыстыратын теңдеу, яғни дифференциалдық теңдеумен сипатталады. Сондықтан дифференциалдық теңдеулерді оқыту жалпы математикалық мәдениетті қалыптастыруда және білімді тиянақты етуде қажетті шарт болып есептелінеді.

Математиканы табиғат құпиясына енудің әдісі ретінде сипаттасақ, осы әдісті қолданудың негізгі жолы шынайы әлемнің математикалық моделін қалыптастыру мен зерттеу болып табылатынын айтуға болады. Кез келген зерттеуші қандай да бір құбылысты зерттеуде, алдымен оның математикалық моделін құрады, яғни құбылыстың қосымша сипаттауларын ескере отырып, ол осы құбылысты басқаратын негізгі заңдарды математикалық түрде жазады. Осы заңдар өте жиі дифференциалдық теңдеулер түрінде өрнектеуге болады. Бұндайға механиканың, физиканың, химияның, биологияның және экономиканың моделдері болып табылады.

Математиканың ғылыми-жаратылыстануға және өндіріске кеңінен енуіне байланысты оқушыларды негізгі қолданбалы бағытымен таныстыру қажеттілігі туындайды. Сондықтан дифференциалдық теңдеулер ұғымын мектеп оқушыларына элективті курс ретінде енгізіп, таныстыру бүгінгі математикалық білім беруде өзекті болып отыр.

Элективтік курстар – мектептің жоғарғы баспасында салалық оқу жүйесіндегі айрықша рөл атқаратын оқу жоспарының элементі. Қазіргі кезде мектептерде бар факультативті курстардан айырмашылығы элективті курстар жоғарғы сынып оқушылары үшін міндетті.

Элективті курстарды оқудың мақсаты – оқушыларды әлеуметтендіру және оқытуды жекелендіруге (индивидуализация), болашақ кәсіби мамандық сферасын жауапты және түсініп тандауға дайындауды бағыттау.

Элективтік курстар келесі мәселелерді шешуге көмектеседі:

1. Оқушы белгілі бір кәсіби қызмет түрімен байланысты және әрі қарай оқу бағытын таңдауының дұрыс екендігіне көз жеткізу немесе бас тартуға жағдай жасау.

2. Одан гөрі тереңірек зерттеу үшін, онымен байланысты қызмет түрлерінің әртүрлілігін қарастыру үшін ғылым бөлігін таңдауды алдыңғы жақындауда жүзеге асырған жоғары сынып оқушысына көмек көрсету.

Элективгі курстар салалы білім берудің мақсаты мен міндеттеріне сәйкес әртүрлі қызмет атқара алады:

– негізгі пәндерді оқу деңгейін көтеру;

– салалы деңгейде аралас пәндерді оқыту; аралас пән қатынастарын жүзеге асыру, бөлек пән шеңберінде құрылган әртүрлі пікірді бір бүтін әлем бейнесіне біріктіру;

– негізгі деңгейде сабақ оқитын оқушылардың емтиханға дайындығын жоғары деңгейге көтеру;

– болашақ кәсіби қызмет ерекшеліктеріне бағыттандыру, "кәсіби сынақ";

– танымдық, ұйымдастырушылық қызмет қабілеттілігін жетілдіруге бағыттандыру [

Көрсетілген функциялардың әрбіреуі жетекші болуы мүмкін, бірақ жалпы алғанда олар кешенді атқарылуы керек.

«Дифференциалдық теңдеудерді шешу» атты элективті курсының күнтізбелік жоспары

Жоспар 1-2 тоқсанға арналған, аптасына 2 сағаттан, барлығы 30 сағат.

№	Сабақ тақырыбы	Сағат саны
1	Функцияның туындысы;	2
2	Функияның дифференциалы;	3
3	Дифференциалдың негізгі қасиеттері;	3
4	Интеграл. Алғашқы функция;	3
5	Дифференциалдық теңдеу ұғымы, дифференциалдық теңдеуге келтірілетін есептер;	2
6	Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің негізгі ұғымы;	2
7	Айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу;	3
8	Біртекті дифференциалдық теңдеу;	2
9	Дифференциалдық теңдеудің физикада қолданылуы;	2
10	Дифференциалдық теңдеудің биологиядағы қолданылуы;	2
11	Дифференциалдық теңдеудің химиядағы қолданылуы;	2
12	Дифференциалдық теңдеудің экономикадағы қолданылуы;	2
13	Бақылау жұмысы	2

Әдебиеттер тізімі

[1] Сүлейменов Ж.С. Дифференциалдық теңдеулер курсы. Оқулық. Алматы: «Қазақ университеті», 2009. – 440 б.

[2] Әбілқасымова А.Е. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі. - Алматы, 2014.

[3] Бабаджанян С.Б., Монахов В.М. Междупредметные связи естест- венныхдисциплин на факультативных занятиях.-Сов.пед.1990.

[4] Қожабаев Қ.Қ. Математиканы оқыту әдістері. «Санат» мемлекеттік баспасы. 1998.

К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ (5-11 КЛАССЫ)

Казешев А.
г. Астана КАЗАХСТАН, E-mail: algabas44@mail.ru

Работа посвящена проблеме формирования содержания темы «Элементы статистики и теории вероятностей» (5-11классы) в школьном курсе математики. Впервые в системе среднего образования разработано полное содержание этой темы в соответствии с Государственными общеобязательными стандартами среднего общего образования Республики Казахстан (2002 год) на казахском и русском языках с учетом возрастных особенностей учеников и уровня знаний по математике в каждом классе.

В Государственные общеобязательные стандарты среднего общего образования Республики Казахстан в 2002 году впервые включена тема «Элементы статистики и теории вероятностей».

Согласно этим стандартам данная тема изучается непрерывно с 5-го по 11 классы. Первоначальные понятия статистических данных вводятся в 5-ом классе. Затем соблюдая принцип преемственности изложения различные вопросы темы «Элементы статистики» изучаются в 6-м, 8-м, 9-м и 11-м классах. В частности в рамках этой темы изучаются следующие вопросы:

-изучение элементов статистики с целью формирования умений со сбором статистических данных и их графическим представлением;

-формирование умений анализа статистических данных, представленных в виде таблиц, диаграмм и графиков;

-определение содержательного смысла статистических характеристик;

-формирование умений группировки и анализа статистических данных, представленных в более общем виде и имеющих сложную структуру.

Умение сбора статистических данных формируется в процессе проведения наблюдений над некоторым явлением. Результаты испытаний, измерений и социологических опросов также образуют статистические данные. Начиная с 5-го класса, с учетом уровня знаний по математике и возрастных особенностей школьников, рассматривается примеры сбора статистических данных. Затем для наглядности эти статистические данные записываются в виде таблиц: строчные, столбчатые и прямоуголные. По этим таблицам производится первоначальный анализ этих данных. В процессе анализа статистических данных важную роль играет их графические представления. Используются горизонтальные, вертикальные, круговые диаграммы и простые графики в зависимости от содержания полученных статистических данных. Для анализа статистических данных в некоторых случаях предварительно производится группировка статистических данных и на основе вновь полученных данных осуществляется более глубокий анализ, с целью получения выводов практического характера. Для анализа статистических данных используются и статистические характеристики. Для каждого ряда чисел формально можно вычислить все статистические характеристики, однако для конкретного примера вычислять все характеристики необязательно. Все зависит от конкретной цели анализа и содержательного смысла статистических данных. Например, если необходимо знать среднее значение статистических данных, то находят среднее арифметическое статистических данных и при этом также находят отклонения статистических данных от среднего арифметического, последнее позволяет более достоверно определить содержательный смысл среднего арифметического статистических данных. По мере накопления знаний переходят к анализу более сложных статистических данных. Более сложные статистические данные, как правило,характеризуются объемом и чем больше объем статистических данных, тем сложнее их табличные и графические представления, а значит и сложно провести их анализ. В 9-м классе рассматриваются статистические данные более сложной структуры. Для анализа таких статистических данных переходят к рассмотрению вариационных рядов. Для этого эти данные предварительно упорядочиваются и представляются в виде таблицы, состоящей из двух строк. В первой строке располагают значения результатов испытаний в порядке возрастания или убывания, во второй строке записывают числа, указывающие во сколько раз встречались эти значения. Рассматриваются дискретные и интервальные вариационные ряды. Дается правило приведения интервального вариационного ряда к дискретному ряду.Затем анализ исходных статистических данных прозводится с помощью соответствующего вариационного ряда. Для этого также используются числовые характеристики и графическое представление данного вариационного ряда. Таким образом, изучение элементов статистики проводится поэтапно, путем постепенного рассмотренния статистических данных различной структуры и сложности и в зависимости от уровня знаний по математике учащихся соответствующих классов.

В 11-м классе рассматриваются элементы выборочного метода. Здесь статистическими данными являются выборки - как резуьтат n независимых испытаний, т.е. как совокупность значений некоторой случайной величины. Заметим, что тема «Элементы статистики» является частью более общей темы «Элементы статистики и теории вероятностей» (5-11классы) в школьном курсе математики.

Тема «Элементы статистики и теории вероятностей» (5-11классы) в школьном курсе математики является наиболее практико-ориентированной темой. Ее изучение в школьном курсе математики будет способствовать усилению общекультурного потенциала учащихся, гуманитаризации математического образования и формированию функциональной грамотности учащихся.

Впервые в учебно-методической литературе дан глоссарий основных понятий по теме «Элементы статистики и теории вероятностей» в школьном курсе математики.

Список литературы

[1] *Казешев А.* «Статистика және ықтималдықтар теориясы элементтері», 5-11сыныптар // Оқу құралы.- Алматы: - «Дәуір Кітап»,2014,-168б (ҚР БҒМ оқу құралы ретінде ұсынған)

[2] *Казешев А.* «Элементы статистики и теории вероятностей», 5-11классы // Учебное пособие. - Алматы: - «Дәуір Кітап»,2014,-168с. (Рекомендовано МОН РК в качестве учебного пособия)

ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫНДА КЕҢІСТІК ФИГУРАЛАРЫН КЕСКІНДЕУ

Керімбаев Р.Қ., Нұрпейіс Ж., Таласбаева Ж.Т.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: z_talasbaeva@mail.ru

Бұл мақала геометрия курсында кеңістік фигураларын кескіндеу әдістері қарастырылған. Және кейбір фигураларды кескіндеу мысалдары келтірілген.

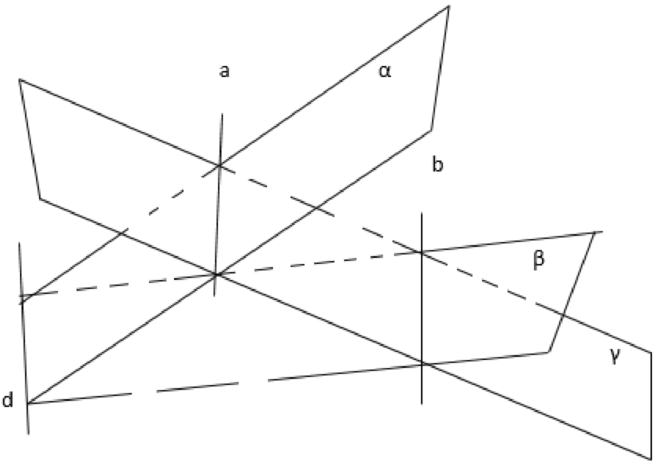
Мектептің «Геометрия» оқулығымен танысқаннан кейін кейбір материалдардың оқушыларға көптеген қиындық туғызатынын байқау қиын емес. Мұндай тақырыптардың бірі-онықшы класта кеңістіктіктегі көпжақтардың жазық қималарын салу. Жазық фигуралардың кескінін салуда айтарлықтай қиындық кездесе қоймайды, салынған кескін не түпнұсқасының көшірмесі не берілген фигураға ұқсас фигура болады. Біз негізінен кеңістіктегі көпжақтардың жазық қималарын салу теориясына тоқталып өтеміз. Мектептегі оқулықта жиындар теориясының белгілері қолданылмайды, бірақ «Мектептегі математика» журналында бұл белгілеулерді қолдануға болатыны атап өтілген. Осы себепті мұғалімдерге ұсынылатын көмекші мақалада $\in, \cup, \cap$ белгілерін қолданамыз.

Көпжақтарды жазықтықпен қиғандағы қиманы дұрыс салу оқушылардың кеңістік деген түсінігін, кеңістікке деген көзқарасын арттырады. Қиманы салу әдісін үйретпестен бұрын жазықтықтардың төмендегідей орналасуларына назар аударған жөн:

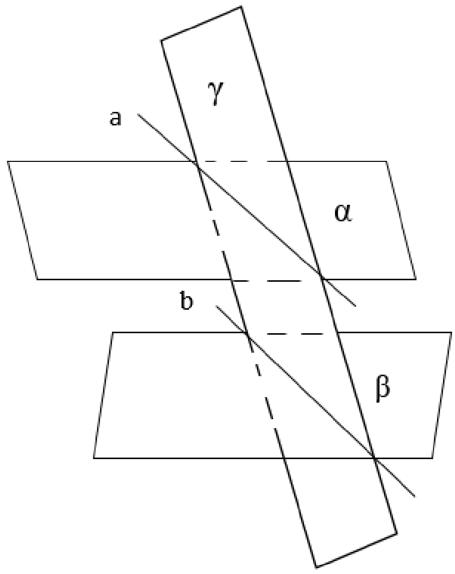
А. Егер α, β, жазықтықтарды, α түзуі бойынша қиылысса, ал γ жазықты α, β жазықтарын сәйкесінше a және b түзулері бойынша қиып өтсе, онда a және b түзулері не d түзуіне параллель не d түзуінде жататын нүкте бойынша қиылысады (1 сурет).

Ә. Егер α, β жазықтары параллель, ал γ жазықтығы бұл жазықтықтарды сәйкесінше a мен b түзулері бойынша қиып өтсе, онда a және b түзулері өзара параллель болады (2 сурет).

Қима жазықтықты әдетте а) бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте бойынша , ә) түзу және осы түзуден тасқары нүкте бойынша, б) қиылыспайтын екі түзу бойынша салу талап етіледі.



1 сурет



2 сурет

Қиманы салуда сәйкестік және қиманың ізін салу әдісін қолданамыз. Сәйкестік әдісте ізделінді қима мен көпжақтың табанына ортақ нүктені саламыз, ал қиманың ізін салуда ізделінді қима мен көпжақтың жағына ортақ түзуді –ізді саламыз. Осы айтылғандарға сүйеніп, кескіндеу әдісінің , демек, көпжақтардың қималарын салудың мынандай салу, тізбегін негізге алуға болады:

1. Ізделінді қима мен көпжақтың жақтарымен қиылысатын түзулерді тауып салу.

2. Жазықтықтардың қиылысу сызығын тауып салу үшін екі жазықтыққа ортақ екі нүктені тауып, осы екі нүкте бойынша қиылысу сызығын жүргізу.

3. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін табу үшін берілген түзумен қиылысатын жазықтықтағы белгілі бір түзуді көрсету.

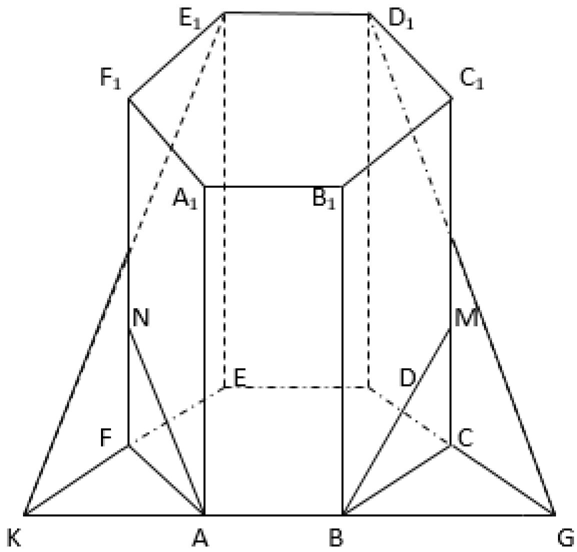
Кескіндеу әдісіне уақыт аз берілгендіктен, кескіндеу әдісерінің көптеген есептерін факультативтік немесе қосымша сабақтарда тиянақты шығарып көрсетуге болады.

Келесі есепті қарастырайық:

1-есеп. Бүйір жақтары квадраттар болатын алтыбұрыш дұрыс призманың ішінен төменгі табанының қабырғасы мен жоғарғы табанында оған қарсы жатқан қабырғасы арқылы жазықтық жүргізіңдер.

Ізделінді қима мен DCC_1D_1 жағының қиылысу түзуін табамыз. Бұл түзудің D_1 нүктесі белгілі. Екінші нүкте ABCD жазықтығымен DCC_1D_1 жазықтықтарының қиылысу түзуінде жатады. Демек , $DE=ABCDEF\cap DCC_1D_1$. Ізделінді қима AB_1 E_1 D_1 табандары арқылы өтеді, олай болса

$ABD_1E_1\cap$ DCC_1D_1 ал D_1G түзуі CC_1 қырын M нүктесінде қияды: $M=D_1$ $G\cap CC_{1.}$ Осы сияқты N нүктесін табамыз: $N=ABD_1$ E_1 $\cap FF_1$. Демек, ізделінді қима $ABMD_1$ E_1 NA.



4 сурет

Әдебиеттер тізімі

[1] *Бескин Л.Н.* Стереометрия, Москва:Просвещение, 1971.

[2] *Бескин Л.Н.* Изображения протранственных фигур, Москва: Наука, 1971.

ГИПОТЕЗА ОБ ЯКОБИАНЕ ВЕРНА

Керимбаев Р.К.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: ker_im@mail.ru

Аннотация. Речь идет о знаменитой проблеме об якобиане. Пусть f и g многочлены от двух переменных над полем K характеристики нуль. То есть

$$f(x,y), g(x,y) \in K[x,y].$$

Проблема о якобиане состоит в следующем: *если якобиан $J(f,g)$ многочленов f,g обратим в кольце $K[x,y]$, то многочлены f,g задают K −автоморфизм кольца многочленов $K[x,y]$.*

Данная проблема решена для отдельных случаев. И приведены в книге [1]. Тем не менее, проблема полностью не решена. Ниже мы изложим решение данной проблемы.

Формальное обратное отображение

На ряду с кольцом многочленов $K[x,y]$ полезно рассмотреть и кольцо формальных степенных рядов $K\big[[x,y]\big]$, где K - поле. Здесь есть ряд неудобств. Дело в том, что композиция многочленов всегда определена, а композиция рядов не всегда определена. Композиция формальных степенных рядов определена в том случае, когда степенные ряды без свободных членов. С другой стороны, формальные степенные ряды, с отличными от нуля свободными членами, всегда обратимы в кольце $K\big[[x,y]\big]$. И так, в книге [1] доказана следующая теорема.

Теорема о формальной обратной функции. *Пусть $f(x,y), g(x,y) \in K\big[[x,y]\big]$ формальные степенные ряды со следующими свойствами:*

$$f(0,0) = 0, g(0,0) = 0 \text{ и } J(f,g)(0,0) \in K^*.$$

Тогда существуют формальные степенные ряды $u(x,y)$, $v(x,y) \in K\big[[x,y]\big]$ такие, что $u(0,0) = 0, v(0,0) = 0$ и $u(f,g) = x$, $v(f,g) = y$. Более того, такие формальные ряды существуют единственным образом и они также удовлетворяют условиям $f(u,v) = x$, $g(u,v) = y$.

Как следствие из этой теоремы, немедленно получаем следующую лемму.

Лемма. *Если $f(x,y)$, $g(x,y) \in K[x,y]$ многочлены со свойствами*

$$f(0,0) = 0,\ g(0,0) = 0 \text{ и } J(f,g)(x,y) \in K^*$$

то алгебраическое многообразие многочленов f и g состоит из одной нулевой точки. А именно,

$$V(f,g) = \{(x,y) \in K^2 | f(x,y) = 0,\ g(x,y) = 0\} = \{(0,0)\}.$$

Доказательство. Действительно, по теореме о формальной обратной функции, существуют ряды $u(x,y), v(x,y) \in K\big[[x,y]\big]$ такие, что

$$u(0,0) = 0 = v(0,0) \text{ и } x = u\big(f(x,y), g(x,y)\big), y = v\big(f(x,y), g(x,y)\big).$$

Тогда, если

$$f(a,b) = 0 = g(a,b),$$

то

$$a = u\big(f(a,b), g(a,b)\big) = v(0,0) = 0,$$
$$b = v\big(f(a,b), g(a,b)\big) = v(0,0) = 0,$$

то есть $V(f,g) = \{(0,0)\}$.

Теперь легко доказывается следующая теорема.

Теорема инъективности. *Пусть $f(x,y)$, $g(x,y) \in K[x,y]$ многочлены со свойством $J(f,g)(x,y) \in K^*$. Тогда полиномиальное отображение*

$$\phi: K^2 \longrightarrow K^2, \qquad \phi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$$

инъективно.

Доказательство. Пусть $\phi(a,b) = \phi(c,d)$. Рассмотрим следующие многочлены

$$F(x,y) = f(x+a, y+b) - f(a,b), \qquad G(x,y) = g(x+a, y+b) - g(a,b).$$

Тогда $F(0,0) = 0 = G(0,0)$ и $J(F,G) \in K^*$. Но, по лемме $V(F,G) = \{(0,0)\}$. Имеем $F(c-a, d-b) = 0$, $G(c-a, d-b) = 0$. Значит $(c-a, d-b) \in V(F,G) = \{(0,0)\}$. То есть $c = a$, $d = b$. ϕ инъективно.

Список литературы

[1] van den Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Birkhauser: Progress in Mathematics, 2000.

МАМАН ДАЯРЛАУДА СЫМСЫЗ ТЕХНОЛОГИЯ ӘДІСІН ОҚЫТУ

Хакимова Т., Спабекова Ж.
Әл-Фараби атындағы Казақ ұлттық университеті, КАЗАҚСТАН
E-mail: tyyshtyq.hakimova@gmail.com

Андатпа. Қазіргі таңда бүкіл әлемде болып жатқан кең ауқымды қайта құрулар ақпараттық-коммуникациялық технологиялардың (бұдан әрі - АКТ) қарқынды дамуына байланысты. Ғаламдық ақпарат қоғамның Хартиясында (Окинава) атап көрсетілгендей, "ақпараттық-коммуникациялық технологиялар жиырма бірінші ғасыр қоғамының қалыптасуына әсер ететін ең маңызды факторлардың бірі болып табылады. Олардың революциялық әсері адамдардың жүріс-тұрысына, олардың біліміне және жұмысына, сондай-ақ үкімет пен азаматтық қоғамның өзара қарым-қатынасына қатысты. Ақпараттық технологияларды оқытуда заман талабына сай жаңа байланыс ұсыныстарын пайдалана отырып, жоғары жылдамдықтағы ғаламтор байланысын, Wi-Fi технология қорында компьютерлік желіні пайдаланумен, «IT-жөндеу» жеке кәсіпкерлігінде сымсыз кеңжолақты байланыс желісін құруды үйрету.

Сымсыз желі – барлық құрылғылардың бір бірімен өзара әрекеттесуіне мүмкіндік беретін байланыс желілері арқылы қосылған.Желілер шағын немесе үлкен, кабельдер арқылы тұрақты жалғанған, немесе телефон желілері мен сымсыз арналар арқылы уақытша жалғанған болуы мүмкін. Ең үлкен желі — Интернет, ол бүкіләлемдік желілер тобы болып табылады.Жергілікті желі (ағылш. Local Area Network, LAN) — салыстырмалы түрде шектеулі кеңістіктің (мысалы ғимараттың) шегінде компьютерлер, басып шығарғыштар мен басқа да құрылғылар тобын біріктіретін коммуникациялық желі. Жергілікті желі бір біріне қосылған құрылғылардың өзара әрекеттесуіне мүмкіндік береді.Желі – мәліметтерді компьютерлер арасында жеткізу құралдарымен біріктірілген компьютерлердің жиынтығы. Есептеу желісі – бір-бірімен байланысқан желі элементтері арасында мәліметтер жеткізуге арналған программалық және аппараттық құрауыштардың күрделі жүйесі. Аппараттық жабдықтар ішінде әртүрлі типті және класты компьютерлермен қатынастық жабдықтарды атауға болады. Программалық құрауыш операциялық жүйе мен желілік қолданбалардан тұрады. Желілік ОЖ – есептеу желісін бір орталықтан басқаруға арналған программалар кешені (Windows NT, Novell NetWare, т.б.). Желілік қолданбалар – желілік ОЖ-нің мүмкіндіктерін кеңейтетін қолданбалы программалық кешендер (пошталық программалар, желілік мәліметтер қорлары, т.с.с.). Желіге қосылатын барлық құрылғыларды үш функционалдық топқа бөледі, олар:- жұмыс станциялары;- желі серверлері;- қатынастық тораптар.Жұмыс станциясы (ЖС) (workstation) – желіге қосылған дербес компьютер және ол арқылы пайдаланушы өз жұмысын атқарады және желінің ресурстарына қатынауды жүзеге асырады. Ол өзіндік операциялық жүйемен жабдықталған (MS DOS, Windows және т. б.) және пайдаланушыға қолданбалы есептерді шығаруда барлық қажет құралдармен қамтамассыз етілген. Жұмыс станцияларының үш типін ерекшелеуге болады, олар – жергілікті дискілі жұмыс станциясы, дискісіз жұмыс станциясы, қашықтағы жұмыс станциясы. Жергілікті дискілі жұмыс станциясында ОЖ осы дискіден, ал дискісіз жұмыс станциясында ОЖ файлдық серверден жүктеледі. Қашықтағы жұмыс станциясы – желіге телеқатынастық байланыс арнасы (мысалы, телефон желісі) арқылы қосылған станция[1].

Сервер (server)– желіге қосылған және оның пайдаланушыларына белгілі қызмет көрсетуді қамтамассыз ететін компьютер. Серверлер желіні пайдаланушылардың қажеттілігінен туындайтын мәліметтерді сақтауды, мәліметтер қорына сұраныстарды өңдеуді, жойылған тапсырмаларды өңдеуді, тапсырмаларды басып шығаруды және басқа да іс-әрекеттерді жүзеге асырады. Сервер – желі ресурстарының қайнар көзі. Атқаратын функцияларына байланысты серверлердің келесі типтерін анықтайды.

Сымсыз жүйелер архитектурасы. Сымсыз жүйелердің дамуы тиесілі ұйымдардың бақылауынан өтеді. Оның ішінде ең бастысы IEEE (Insfidute of Electronic Engineers, Электротехника және электроника инженерлерінің халықаралық институты) болып табылады. Негізінде сымсыз стандарттарды, жүйелік құралдарды және сымсыз жүйеге қатысты барлығын WLAN (Wirelees Local Area Network, сымсыз локалды анықтайтын жүйе) жұмыс группасы бақылайды, оған 100 ден астам жүйелі құралды көрсететін әртүрлі университеттер мен компаниялар-ойластырушылар кіреді. Бұл коммисия бар стандарттарды жаңаландыру және соңғы зерттеулерге және компьютерлік кемтетіктерге базаланатын жаңа стандарттарды шығару мақсатымен жылына бірнеше рет жиналады. Россияда, Беседа – мәліметтерді сымсыз жүйелі жіберу ассоциациясы бар, ол мәліметтерді сымсыз жүйелі жіберу аумағында бірегей политиканы енгізумен айналысады. Сымсыз жүйе архитектурасына қарасақ. Бүгінгі күнде екі сымсыз архитектура варианттары немесе жүйені құру варианттары пайдаланылады: тәуелсіз конфигурация (Ad-Hoc) және инфроструктуралы конфигурация. Екеуінің айырмашылығы тым көп емес алайда олар қосылатын тұтынушылар саны, жүйе радиусы, кедергіге тұрақты деген сияқты көрсеткіштерге кардинальды әсер етеді. Жүйе конфигурациясының қандай да бірі таңдалғанымен стандарттар тасушыға кіру хаттамасының бір түрін және физикалық каналдар үшін әртүрлі спецификацияларын анықтайды. Физикалық канал бойынша хаттамамен жіберілетін мәліметтер пакеті бірнеше блоктарға бөлінеді:

- Бақылаушы және адресті мәліметтер 30 байт
- Ақпараттық мәліметтер 2 Кбайт
- Ақпараттық мәліметтердің бақылауы 4 байт

Сымсыз жүйенің артықшылығы –жеңілдігі және реструктуризация. Бір немесе одан көп кіру нүктелерімен бір-бірінен үлкен қашықтықта орналасқан бөлек тұратын ғимараттар мен компьютерлерді бірегей локальді жүйеге байланыстыруға болады.Сымсыз байланыстың кең таралуының келеңсіз жағдайы ол ақпараттың қауіпсіздігі. Сымсыз байланыс жүйесі WEP шифрлау кілтінің база ортасында құрылған. Ең алғашқы шифрлау кілтінің ұзындығы - 40 тан 128-ге дейін және тіпті и 256 битке дейін. Ақпараттық және телекоммуникациялық технологияларды дамытудың қазіргі дәрежесі оқытушы мен шәкірт бір-бірінен қанша қашықтықта тұрса да, олардың жанды пікір алмасуын қамтамасыз ететін қашықтықтан білім берудің ауқымды жүйесін жасау мүмкіндіктері болады.Қашықтан білім беру жүйесінің қалыптасуы және одан әрі өркендеуі электронды кітапханалар мен үлестірілген типтегі университеттердің құрылуы [2].

Әдебиеттер тізімі

[1] Андрианов В.И., Соколов А.В. Сотовые пейджинговые и спутниковые средства связи. – СПб: БХВ Петербург -2001

[2] Хакимова Т. Мәліметтерді қорғауда шифрлаудің қарапайым әдістері.// Материалы международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы информатики и процессов управления».г.Алматы, 15-16 ноября 2012 года. Часть II.406-411стр.

ИБАДУЛЛА АҚБЕРГЕНОВ ЖӘНЕ ОНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МҰРАЛАРЫ

Қосанов Б.М.

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, ҚАЗАҚСТАН

E-mail: kossanov89@mail.ru

Аннотация. В статье приводятся краткие сведения о биографии и деятельности одного из первых казахских профессиональных математиков Ибадуллы Акбергенова. Доказана, что он был не только первоклассным математиком, но и замечательным педагогом, много способствовавшим развитию математического образования в Республике Казахстан. Особенное внимание уделяется анализу до сих пор неисследованных его математических трудов.

ҚР-ындағы математика ғылымының қалыптасуының бастауында тұрған ғалым-дарымыздың бірі-Ибадулла Ақбергенов(1907-1938).

И. Ақбергенов 1907 ж. Оңтүстік Қазақстан облысы Созақ ауданында дүниеге келді. 1931 жылы Орта Азия МУ-ін бітіріп,1932 ж. оның аспирантурасына түсті және 1934 ж. Ленинград МУ-інің аспирантурасына ауысты[1;174-б.].Сол жылы Ленинградта өткен 2-Бүкілодақтық математикалық съезге қатысып,онда «Об оценке погрешности приближенного решения интегрального уравнения Fredholm'a второго рода по способу E. Nyström'a» деген тақырыпта баяндама жасады[2;386-387-б.б.].Атақты математиктер Л.В.Канторович пен В.И.Крылов 1936 ж. қазақ математигінің осы баяндамасына сілтеме жасап,оған мынадай баға берген еді:««Некоторая попытка оценки погрешности при замене интегрального уравнения системой линейных уравнений была сделана И.Акбергеновым...»[3;120-б.],«Оценка погрешности,произведенная в других предполо-жениях,чем приведенная здесь,имеется в кандидатской диссертации И.А.Агбергенова, выполненной в 1935 году Ленинградском НИИММ.Там же дана оценка погрешности при определении собственных значений» [Сонда;161-б.]».

И.Ақбергенов 1935 ж. Л.В.Канторовичтің жетекшілігімен Ленинград механика-математика ғылыми-зерттеу институтында «О приближенном решении линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода и об определении его собственных значений» деген тақырыпта кандидаттық диссертациясын сәтті қорғап шығады және бұл жұмысының нәтижелері сол жылы-ақ «Математический сборник» журналының 42-томының 6-шығарылымында жарияланды[4;679-697-б.б.]. 1935-36 ж.ж. Ташкентте Орта Азия МУ-інде қызмет істейді ал 1936 ж. ҚазМУ-дің математика кафедрасының меңгерушісі қызметіне шақырту алып,сонда ауысып келеді.

И.Ақбергенов кафедра меңгерушісі бола жүріп,математиканың жалпы және арнаулы курстарынан дәрістер оқыды,математикалық пәндер бойынша оқу үдерісін ұйымдастыру мен оқыту сапасын арттыру бағытында көптеген жұмыстар атқарды,математика кафедрасының ғылыми әлеуетін көтеруге үлкен үлес қосты,Мәскеу мен Ленинградтан білікті ғалым-математиктерді жаңадан қалыптаса бастаған ҚазМУ-ға тарта білді (И.П.Натансон, Б.М.Басков, М.И.Ельшин, М.В.Пентковский,т.б.).Ол математикадан ұлттық ғылыми кадрлар дайындау мәселесіне де айтарлықтай көңіл бөлді. Мәселен, Қазақстанда математика ғылымының өркендеуіне үлкен үлес қосқан Б.М.Оразбаев ҚазМУ-дің математика кафедрасына 1937 жылдың ақпан айында оған И.Ақбергенов жетекшілік еткен уақытта жұмысқа қабылданды**.** И.Ақбергеновтың оқытушы, кафедра меңгерушісі, университеттің Ғылыми Кеңесі мен дирекция мәжілісінің және қабылдау комиссиясының мүшесі ретінде атқарған жұмыстары әкімшілік тарапынан жоғары бағаланып, ол әр түрлі марапаттауларға ие болды [5; 175-179-б.б.].

И.Ақбергеновтың Фредгольмнің интегралдық теңдеулерін шешумен байланысты ғылыми жұмыстарының нәтижелері 1937 ж. Ташкентте Орта Азия МУ-інің баспасынан монографиялық еңбек болып басылып шықты.Оған атақты математик В.И.Романов-скийдің редактор болуының өзі-ақ оның аса құнды еңбек болғандығын аңғартады.

Алайда, И.Ақбергенұлы сталиндік репрессия тұзағына ілігіп,1938 жылдың наурызында тұтқынға алынды және сол жылдың 11-қарашасында ату жазасына кесілді[6;5-б.].

Жалпы алғанда,И.Ақбергенов қазіргі күні бізге мынадай төрт еңбегімен белгілі болып отыр:

1) 1934 жылы Ленинград қаласында өткен 2-інші Бүкілодақтық математикалық съезде жасаған баяндамасы[2;386-387-б.б.];

2)1935 жылы Ленинград механика-математика ғылыми-зерттеу институтында орындаған және қорғаған кандидаттық диссертациясы[3;161-б.];

3) 1935 жылы «Математический сборник» журналының 42-томының 6-шығарылы-мында жарияланған мақаласы[4;679-697-б.б.];

4) 1937 жылы Ташкент қаласында басылып шыққан монографиясы[7].

И.Ақбергенұлының соңғы еңбегінің материалдары оның алғашқы үш еңбегін толығымен қамтитындықтан, біз соған қысқаша талдаулар жасайық.

Еңбек орыс тілінде жазылған, сонымен қатар сыртқы мұқабасында оның латын тіліндегі атауы да келтірілген.Бұл оның ғылыми маңызы өте жоғары, әлемдік деңгейде жазылған еңбек болғандығын аңғартады.Алғашқы бетінде еңбекті басу кезінде жіберілген қателер мен олардың түзетілуі көрсетілген кесте берілген.Одан кейінгі беттің жоғарғы жағында «Ибадулла Акбергенович Акбергенов,доцент Казахского государственного университета»,төменгі жағында «Ответ.редактор проф.В.И.Романовский,тех.редактор Б.Н.Смолин» деп анық жазылған.Атап айтарлық жайт,«Ташкент.Узполиграфкомбинат» дегеннен кейінгі жазу біреудің қолымен қара сиямен баттастырылып,әдейі өшірілген. Біздің ойымызша,ол 1938 жылы монография авторы репрессияға ұшырағаннан кейін жасалған сияқты.Ұзынша қағаздарға журнал сияқты етіп басылған еңбектің көлемі 49 бет.1563 данамен басылып шыққан ол кіріспеден және екі тараудан тұрады.

И.Ақбергенұлының осы аса маңызды ғылыми жұмысының мазмұны мынадай:

«Кіріспе

I тарау. Фредгольмнің интегралдық теңдеуін шектеулі жүйеге алмастыру арқылы жуықтап шешу

§1.E.Nyström тәсілі

§2.Фредгольмнің интегралдық теңдеуін оны сызықтық алгебралық теңдеулердің шектеулі жүйесімен алмастыру арқылы шешу барысындағы қателікті бағалау

II тарау.Фредгольмнің интегралдық теңдеуін ядроны өзгеше ядромен алмастыру арқылы жуықтап шешу

§1. Фредгольмнің өзгеше ядросы бар интегралдық теңдеуін шешу

§2. H.Bateman тәсілі

§3. F.Tricomi тәсілі бойынша жуықтап шешудің қателігін бағалау

§4. Шешу қателігін квадраттық бағалау

§5.Ядроны жақын ядромен алмастыру кезінде шешімдер айырмасының абсолюттік шамасын бағалау

§6.Фредгольмнің интегралдық теңдеуінің меншікті мәндерінің орналасу облысын анықтау.
§7.Ядроның негізгі бөлігін бөліп шығару идеясына негізделген шешімнің қателігін бағалау
§8.Қандай да бір облыста меншікті мәндердің бар болу критерийін беретін теореманың басқа дәлелдемесі».

Кіріспеде Фредгольмнің екінші текті интегралдық теңдеулерін жуықтап шешудің аса маңызды әдістеріне қысқаша шолу жасалғандығы және автордың осы бағыттағы қол жеткізген нәтижелері баяндалғаны атап көрсетілген.Бұдан кейін автор интегралдық теңдеулер теориясында классикалық тәсілдер болып саналатын Фредгольмнің, Нейманның және Гильберт-Шмидтің теориялық және тура тәсілдеріне тоқталмайтын-дығын айтады да Фредгольмнің екінші текті интегралдық теңдеуін жуықтап шешудің сол уақытқа дейінгі белгілі тәсілдерін екі топқа бөліп қарастырады:

1)λ параметрінің өте кіші мәндері үшін ғана жарамды болатын тәсілдер;

2)λ параметрінің меншікті мәндер болып табылмайтын кез келген мәндері үшін жарамды тәсілдер.

Бұдан кейін бірінші топқа жататын тәсілдерге (Нейман,Крылов пен Тамаркин, Чаплыгин,Канторович тәсілдері) сипаттама беріліп, екінші топқа жататын екі негізгі тәсіл атап көрсетіледі,олар:а) интегралдық теңдеуді сызықтық теңдеулердің шектеулі жүйесі-мен алмастыру тәсілі;ә)интегралдық теңдеуді ядроны өзгеше ядроға алмастыру арқылы жуықтап шешу тәсілі.Әрі қарай а) тәсілін E.Nyström'ның көрсеткені,оны дербес жағдайларда қолдану тәсілін Н.М.Крылов пен А.Н.Боголюбовтың қарастырғаны және ә) тәсілінің негізгі идеялары E.Schmidt пен E. Goursat еңбектерінде келтірілгені атап көрсетіледі де кейінірек H.Bateman'ның қарапайым әрі тамаша тәсілді тапқандығы,бірақ оның шешу қателігін бағалауды келтірмегені және оны F.Tricomi'дің жүзеге асырғаны баяндалған.Сонымен қатар Фредгольмнің интегралдық теңдеулерін шешу мәселесіне қатысты E.Schmidt,O.D.Kellogg,Otto Blumenthal,А.Н.Крылов,П.Ф.Папкович,С.Г.Гершго-рин сияқты шетел және орыс ғалымдарының еңбектеріндегі негізгі идеяларға талдаулар жасалған.

Кіріспенің соңында жұмыстың екі тараудан тұратындығы,I тараудың интегралдық теңдеуді сызықтық теңдеулердің шектеулі жүйесімен алмастыру арқылы жуықтап шешу мәселесіне арналғандығы атап көрсетілген.Автор бұдан әрі:«В §2 этой главы дана оценка погрешности решений способа E.Nyström'а,указанная Л.В.Канторовичем.Оценка близости интеграла

$$\int_a^b K(x,y)\,\varphi\,(y)dy$$

к сумме

$$\sum_{k=1}^{n} C_n\ K(x,y_k)\varphi(y_k),$$

в случае интегрального уравнения Фредгольма,**дана автором раньше** и часть доказательства,приведенного здесь,имеется и там»,-деп жаза отырып,өзінің 1934 жылғы 2-математикалық съезде жасаған баяндамасына сілтеме жасайды(қарамен ерекшелеген біз-Б.Қ.)[7;5-6-б.б.].

Келесі кезекте жұмыстың II тарауына сипаттама беріліп,оның 4,6,7 және 8-параграфтарында тікелей өзі қол жеткізген және алған ғылыми нәтижелердің келтірілгенін қадап айтады.Бұл жөнінде II тараудың басында автор тағы да былай деп жазады:«В §1 этой главы мы излагаем,каким образом решение интегрального уравнения может быть сведено точно к решению n линейных алгебраических уравнений,если ядро вырожденное. Далее приводим способ H.Bateman'а ...Дополняем способ H.Bateman'а...После этого даем квадратичную оценку погрешности решений..., **принадлежащую автору**.

Приводим еще другую оценку абсолютной величины разности решений, чем у F.Tricomi,полученной Л.В.Канторовичем, и наконец даем теорему, устанавливающую наличие собственных значений в некоторой области и **принадлежащую автору»** (қарамен ерекшелеген біз-Б.Қ.) [Сонда;15-16-б.б.].

Бұл айтылғандардан автордың өз тарапынан аса маңызды ғылыми нәтижелерге қол жеткізгенін байқаймыз.Сонымен қатар С.А.Чаплыгин, Н.М.Крылов,А.Н.Крылов,т.с.с. атақты орыс ғалымдарының еңбектеріне, E.Nyström, E.Goursat, H.Bateman, F.Tricomi, O.D.Kellogg сияқты шетел математиктерінің еңбектерінің түпнұсқаларына сілтеме жасауы және олардың идеяларына жоғары ғылыми біліктілікпен талдаулар жасауы Ақбергеновтың орыс тілін былай қойғанда,шетел тілдерін де жақсы білгендігін аңғартады.

И.Ақбергеновтың аты кеңестік математика ғылымының тарихында алтын әріппен жазылған және оның еңбектеріне сілтеме жасаушылар көп болған.Мәселен, Л.В.Канторович 1948 жылы «Успехи математических наук» журналында жарияланған ғылыми еңбегінде былай деп атап көрсетеді:«...Беря в качестве X пространства L^2 и L (соответственно),можно получить аналогичного характера теоремы, известные ранее (Л.В.Канторович и В.И.Крылов, И.А.Акбергенов)»[8;128-б.].Сонымен қатар пайдаланыл-ған әдебиет тізімінде И.Ақбергеновтың «Математический сборниктегі» мақаласы бірінші болып келтірілген екен,бірақ оның жарияланған жылы 1933 жыл деп қате көрсетіліпті [Сонда;89,184-б.б.].

1948 ж. жарық көрген «Математика в СССР за тридцать лет(1917-1947)» атты жинақта оның аты атақты орыс математиктерімен қатар аталады.Көрсетілген кезеңде математика ғылымының әр саласы бойынша қол жеткізілген ғылыми жетістіктер жүйеленіп берілген осы жинақта:«...Некоторая попытка оценки погрешности при применении этого метода сделана И.А.Акбергеновым» деп анық жазылған[9;794-б.].Ал келесі бетінде былай деп жазылыпты:«…Второй метод,также применимый в ряде случаев, это замена ядра на вырожденное и сведение таким образом задачи опять к алгебраической системе. Оценки погрешности при применении этого метода, такого же характера, как упомянутая выше, дана Л.В.Канторовичем и В.И.Крыловым, **а затем тем же методом** для ряда других случаев И.А.Акбергеновым» (қарамен ерекшелеген біз-Б.Қ.)[Сонда;795-б.]. Жинақтың 1917-1947 ж.ж. кезеңіндегі КСРО-дағы аса маңызды деген математикалық еңбектер тізіліп берілген әдебиет тізімінде И.Ақбергеновтың үш еңбегі беріліпті [Сонда;819-б.].

И.Ақбергеновтың математика ғылымына қосқан қомақты үлесі 1959 ж. жарық көрген «Математика в СССР за сорок лет(1917-1957)» атты екі томдық жинақта да атап көрсетілген.Атап айтқанда,оның 1-томында оның үш еңбегі тізіліп көрсетілген екен.Бұл жердегі назар аударарлық жағдай, оның алғашқы мақаласының басылып шыққан жылы 1934 жыл деп дұрыс көрсетіліпті[10;17-18-б.б.].Жинақтың 2-томында КСРО-дағы математика ғылымының өркендеуіне зор үлес қосқан математиктер туралы мәліметтер берілген.Өкiнiштiсi,басқа математиктер сияқты И.Ақбергеновтың өмір жолы мен атқарған қызметі жайында ештеңе айтылмайды,бірақ оның үш еңбегі тағы да тізіп көрсетіліпті [11;15-16-б.б.].

Л.В.Канторович пен В.И.Крылов 1936 жылғы монографияларының 3-басылымында да И.Ақбергеновтың жұмысына сілтеме жасауды ұмытпапты,бірақ онда «**Менее совершенная попытка** оценки погрешности при замене интегрального уравнения системой линейных уравнений была сделана И.Акбергеновым.Труды 2 матем. съезда, **1935**»,-деп жазыпты (қарамен ерекшелеген біз-Б.Қ.)[12;120-б.].Олар онан әрі меншікті мәндерді анықтау кезіндегі қателікті бағалау әдісінің И.Ақбергеновтың диссертациясында бар екендігін және диссертацияның негізгі нәтижелерін «Математический сборникте» жарияланған мақаласынан тауып алуға болатынын айтады,бірақ неге екені белгісіз,ол мақаланы 1936 жылы басылып шыққан деп көрсетеді. [Сонда;159-б.].

Сонымен қорыта айтқанда,И.Ақбергенов туралы біздің жүргізген зерттеулеріміз барысында төмендегідей мәселелер анықталды.

1)И.Ақбергенов-қазақтың алғашқы кәсіби математиктерінің бірі және бірегейі.

2)Ол негізінен алғанда,Фредгольмнің екінші текті интегралдық теңдеулерін жуықтап шешу мәселесімен айналысып,төмендегідей ғылыми нәтижелерге қол жеткізген:

-интегралдық теңдеуді сызықтық теңдеулер жүйесімен ауыстыру кезіндегі қателікті бағалау әдісін көрсеткен;

-интегралдық теңдеуді ядроны өзгеше ядромен алмастыру арқылы шешу әдісін жетілдірген;

-ядроны өзгеше ядромен алмастыру кезіндегі қателікті квадраттық бағалау әдісін тапқан;

-берілген интегралдық теңдеу үшін қандай да бір облыста меншікті мәндердің бар болу критерийін беретін теореманы дәлелдеген.

3) Кеңестік дәуірдегі кейбір еңбектерде оның алғашқы ғылыми мақаласы 1935 ж.[12;120-б.], ал екінші мақаласы 1936 ж.[12;159-б.] шыққан деп қате көрсетілген. Сол сияқты Л.В.Канторович пен В.И.Крылов 1936ж. жарық көрген монографияларында И.Ақбергеновтың еңбегіне «Некоторая попытка...сделана И.Акбергеновым»[12;121-б.] деп баға берсе,оның 1962 ж. 3-басылымында «Менее совершенная попытка...сделана И.Акбергеновым» деп жалтарады. Бұл сияқты жағдай 1948 ж. «Математика в СССР за тридцать лет(1917-1947)» атты жинақта да қайталанады[9;795-б.].Біздің ойымызша, Л.В.Канторович пен В.И.Крыловтың монографиялары 1936 ж. ғана жарық көргендіктен, қазақ математигі мұндай нәтижелерге олардан кейін ғана қол жеткізген деген ойды бекіте түсу үшін әдейі жасалған сияқты.Мұның бәрін ақиқатқа қайшы, ғылымға және ең бастысы,қазақ математигінің мұраларына жасалған қиянат деп бағалауға болады.

5) И.Ақбергенов бар-жоғы 27 жасында математика ғылымы бойынша қазақ ұлтының атын Одақтық деңгейде жарқыратып шығарған ғалым,сондықтан да оның есімі математика тарихында алтын әріппен жазылуға тиісті тұлға.

Өз заманында КСРО-ның ең беделді деген математиктерін мойындатқан жан-жақты білімді,әрі талантты қазақ ғалымының тұлғасы міне,осындай.Ибадулла Ақбергенов сынды қазақтың біртуар ұлын біз де осылай танимыз.

Әдебиеттер тізімі

[1] Қазақстан.Ұлттық энциклопедия.1-том.А-Ә.Алматы,1998.

[2] И.Акбергенов.Об оценке погрешности приближенного решения интегрального уравнения Fredholm'а второго рода по способу E. Nyström'а//Труды 2-го Всесоюзного математического съезда.Том II.-М.-Л.,1936.

[3] Л.В.Канторович, В.И.Крылов.Методы приближенного решения уравнений в частных производных.Л.-М.,1936.

[4] И. Акбергенов. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода и об определении его собственных значений //«Математический сборник». Т.42,вып.6.-М.-Л.,1935.

[5] Ахметжанова А.Судьба ученого-последствие имперской политики советского государства//«Вестник КазНУ»,№1, 2012.

[6] Б.Қанғужин,Н.Иманбаев.Жалындап өткен бір ғұмыр//«Қазақстан мұғалімі». 21.06.1998.

[7] Акбергенов И.А. О приближенном решении линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода и об определении его собственных значений.-Ташкент,1937.

[8] Канторович Л.В.Функциональный анализ и прикладная математика//«Успехи математических наук»,1948.Том 3,выпуск 6.

[9] Математика в СССР за тридцать лет (1917-1947).-М.-Л.,1948.

[10] Математика в СССР за сорок лет (1917-1957).Том 1.-М.-Л.,1959.

[11] Математика в СССР за сорок лет (1917-1957).Том 2.-М.-Л.,1959.

[12] Л.В.Канторович, В.И.Крылов.Приближенные методы высшего анализа.-М.-Л.,1962.

О КОМБИНИРОВАННОМ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ

Ковалева И., Таласбаева Ж.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: irina-math@bk.ru

Аннотация. В данной статье речь идет о комбинированном (аудиторное плюс онлайн) обучении студентов механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби на основе разработанного онлайн-курса по теории вероятностей.

В настоящее время во всем мире, в частности, в Казахстане, получает все более широкое распространение обучение онлайн. Это связано с тем, что в нашей республике образование, в том числе и высшее, становится все более массовым. Среди видов обучения в вузах важное место занимает СРС (самостоятельная работа студента). СРС обычно проводится как выдача домашних заданий, а затем их прием. Однако время не останавливается и необходимо менять формы обучения с учетом требований современной эпохи всеобщего распространения интернета.

Не секрет, что практически у всех студентов есть персональные компьютеры, а если и не они, то сотовые телефоны с доступом в интернет. Именно это преимущество авторы статьи хотят использовать для облегчения работы, как своей, так и студентов. А именно, принимать СРС онлайн, причем проверяет СРС сама информационная система. В случае возникновения у студентов вопросов по выполнению СРС в системе предусмотрен форум, где студенты могут общаться между собой и с преподавателем. Также предполагается проведение видеоконференций. Это уже делается в некоторых вузах ближнего и дальнего зарубежья, но для Казахстана это инновация.

В 2015 году в КазНУ был разработан и апробирован онлайн-курс «Теория вероятностей» для учеников старших классов, а также для всех желающих повысить свой математический уровень. Необходимость разработки подобного курса была продиктована тем, что в последнее время в старших классах средней школы вводится изучение теории вероятностей. Кроме того, курс преследует и профориентационные цели: любой желающий поступить на естественный факультет КазНУ (и любого другого технического или экономического вуза) на бесплатной основе может изучить начала теории вероятностей с тем чтобы в дальнейшем облегчить себе прохождение этого курса в вузе.

Содержание курса и задания подготовила доцент кафедры фундаментальной математики Ирина Ковалева, а за техническую сторону отвечали сотрудники Центра дистанционного образования (ЦДО) КазНУ им. аль-Фараби во главе с начальником ЦДО Ермеком Алимжановым. В будущем планируется разработка такого курса на казахском и английском языках.

Курс был размещен на платформе с открытым исходным кодом Open edX [2], специально разработанной для проведения МООК (массовых открытых онлайн-курсов) Массачусетским технологическим институтом совместно с Гарвардским университетом. Эту платформу используют многие МООК-провайдеры по всему миру [3]. Сам онлайн-курс, как и другие разработанные ППС КазНУ совместно с ЦДО, размещен по Интернет-адресу http://open.kaznu.kz (см. рис. 1). Подробно с платформой Open edX можно ознакомиться на официальном сайте [2].

При создании курса Ковалевой И. пришла в голову мысль использовать этот курс для нового (для Казахстана) вида обучения – комбинированного обучения, которое заключается в следующем. Идет обычный учебный процесс, студенты слушают лекции в аудитории, сдают рубежные контроли, мидтерм (промежуточный экзамен), итоговый экзамен. А вот домашние задания сдают онлайн. Это очень удобно преподавателю: он не сидит вечером с тетрадками, а просто переносит в журнал оценки студентов, выставленные системой, что значительно облегчает и без того нелегкий преподавательский труд. В настоящее время Ковалева И.

работает над расширением курса и созданием полноценного студенческого онлайн-курса «Теория вероятностей и математическая статистика» (ТВиМС). Таласбаева Ж. планирует его перевод на казахский язык.

Заметим, что МООК - это передовое направление в электронном образовании, основывающееся на предоставлении академических курсов от ведущих мировых вузов в дистанционном режиме любому человеку из любой точки земного шара с соблюдением четких сроков сдачи промежуточных и финальных проверочных заданий и возможностью организации свободного общения между преподавателем и сотнями тысяч его студентов (см. [1], [2]).

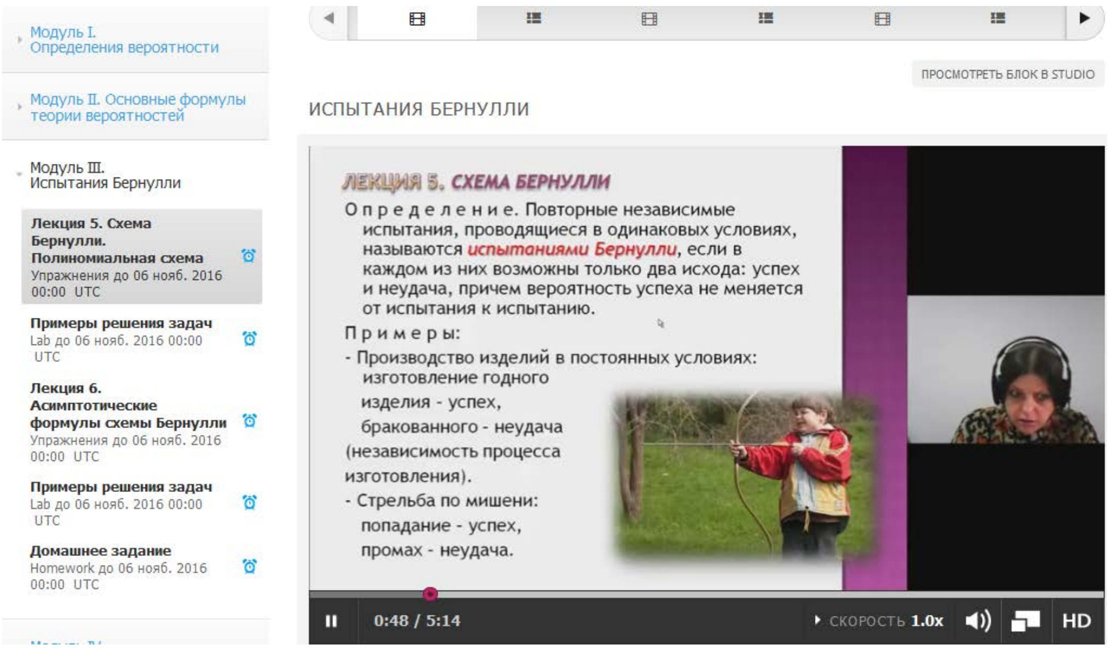


Рис. 1

К сведению. Курс теории вероятностей для школьников проводится уже в четвертый раз, в первый раз на курс записались 258 человек, в числе которых были учащиеся Назарбаев-интеллектуальных и других школ с физико-математическим уклоном, но полностью курс прошли примерно 10% из них (по исследованиям статистических показателей МООК эта цифра является приемлемой). Это те слушатели, которые набрали не менее 50 баллов из 100 возможных, выполняя задания и отвечая на тесты. В курсе участвуют и студенты КазНУ дневной формы обучения, которые параллельно проходят ТВиМС, т.к. этот онлайн-курс включает в себя первую часть университетского курса (в облегченной форме). После проведения анализа было замечено, что эти студенты лучше сдали тесты первого рубежного контроля, нежели те, которые его не прошли.

Список литературы

[1] http://www.coursera.org (01.11.2016)
[2] http://www.edx.org (01.11.2016)
[3] http://open.edx.org (01.11.2016)
[4] https://github.com/edx/edx-platform/wiki/Sites-powered-by-Open-edX (01.11.2016)

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАЧЕСТВА ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Лал Мохаммад Гайрат
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
РЕСПУБЛИКА АФГАНИСТАН

Работа посвящена описанию методики определения качества тестовых заданий, оцениваемых по дихотомической шкале оценки знаний. Предлагается проведение статистической обработки результатов тестирования с использованием корреляционного анализа, а также непараметрическое и робастное оценивание распределения. Исходными данными для определения качества тестовых заданий результаты тестирования студентов, заданные в виде неупорядоченной матрицы результатов.

Задачи оценки качества и рационализации контроля учебного процесса инициировали широкое применение тестовых технологий на всех стадиях процесса обучения в системе высшего образования. Современная дидактическая тестология считает, что необъективность результатов тестирования знаний студентов зависит в основном от низкого качества тестовых заданий, отсутствия проверки их на надежность и валидность. Валидность – это мера соответствия результатов иссследования поставленным целям, которая вычисляется с помощью коэффициента коррреляции. Повышение качества тестовых материалов на стадии их разработки обеспечивается их экспертизой и коррекцией по результатам предварительного тестирования. При экспертизе качества тестовых заданий и теста в целом необходимо оценить каждый компонент структуры тестового задания не только отдельно, но и в системе отношений с другими тестовыми заданиями. Исходными данными для проведения определения качества тестов являются результаты тестирования выборки субъектов обучения, заданные с помощью неупорядоченной матрицы результатов, в которой столбцы соответствуют номерам тестовых зданий, строки – фамилиям субъектов обучения. Элементами неупорядоченной матрицы тестирования являются результаты a(i,j) - i-го субъекта обучения за выполнение j-го задания, оцененного по непрерывной системе в диапазоне [0,1]. По исходной неупорядоченной матрице строится упорядоченная матрица, данные из которой являются исходными к проведению дальнейших вычислений. По упорядоченной матрице строится корреляционная матрица тестовых заданий, которая отображает степень связи тестовых результатов субъектов обучения. Применение описываемого метода на практике осложняется тем, что распределение случайной величины - реальных знаний студентов (в баллах) не известно. Поэтому актуальной становится задача оценки распределения случайной величины и оценки ее моментов - математического ожидания, дисперсии, ковариации и коэффициента корреляции. В арсенале математической статистики предлагаются разнообразные методы для решения этой задачи. В предлагаемой работе предлагается непараметрический метод ядерной оценки корреляционной матрицы.

Список литературы

[1] Кабанова Т.А., Новиков И.А. Тестирование в современном образовании. Уч.пособие.-М: Высшая школа, 2010.

[2] Fan Y. Fan, J. and J. Lv. High dimensional covariance matrix estimation using a factor model.//Journal of Econometrics, 147:186–197, 2008.

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ МАМАНДЫҚТАРЫНДА МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДЫҢ КЕЙБІР МӘСЕЛЕЛЕРІ

Махмеджанов Н.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН

Математика – нақты дүниенің кеңістіктік пішіндері сандық қатынастары туралы ғылым.

Математика атауы гректің mathema – білім деген сөзінен шыққын. Уақыт өткен сайын математика үйренетін кеңістік пішіндер мен сандық қатынастар үзіліссіз кеңеюде, сондықтан берілген анықтаманы кең мағынада түсіну керек.

Қазіргі ғылыми-техникалық революция ғылымының жекелеген салаларын математикаландыру негізінде жүзеге асуда. Өз кезегінде көптеген ғылыми жетістіктер таза математикалық жолмен табылуда. Мысалы – кванттық механика. Бұл жетістіктер кейіннен тәжрибе жолымен дәлелденді.

Биология саласында математикаландыру процесі молекулярлық деңгейдегі зерттулердің жәтижесінен кейін күшейді.

Демек жекелеген ғылым салалары математиканы дамытуға, өз кезегінде математика жекелеген ғылым салаларын дамытуға әсерін тигізуде.

Осы тұжырымды әрбір студент оқу процесінде ұстаным етуі керек.

Математика пәніне қойылатын негізгі талаптар:жаратылыстану есептерінің математикалық моделін құруға, оны талдауға және шешуге мүмкіндік беретін математикалық аппаратты игеру; математикалық біліктілігін өзбетінше жетілдіре отырып, ғылыми әдебиеттерді оқып үйренетіндей дәрежеге көтеріліп, солардың негізінде жаратылыстану есептерін өзбетімен талдауға жаттығу; студенттің логикалық және алгоритмдік ойлау қабілетін дамыту; қойылған нақты математикалық есепті зерттеу және шешу әдістерін меңгеру.

Бұл талаптарды орындау үшін тиянақты бағдарлама, студенттің игеруіне мүмкіндік беретін уақыт және оны бақылып, бағалайтын мүмкіндік қажет.

Айта кететін жәйт, кредиттік технологияның енуімен математикаға бөлінген уақыт күрт азайды. Мәселен биология мамандықтарына бұрын екі семестрде 70 сағат лекция 70 сағат іс тәжрибе сабағы болған болса, қазір 3 кредит, яғни 15 лекция 30 іс-тәжрибе сабағы өтуде. Гидрология матерология мамандықтарында да үш семестр 210 сағат орнына үш кредит бөлінуде.

Жаңа кредиттік технология оқу жүйесіндегі қойылған мақсатқа жету үшін келесі шараларды жүзеге асыру керек.

Мамандыққа қажетті математикалық тақырыптарды сабақ беретін кафедра мен мамандық кіретін факультеттің әдістемелік бюросы тыңғылықты анықтау;

Студенттің пәннің таңдалған бағдарламасын игеруіне мүмкіндік беретін кредит санын тиянақты анықтау;

Бақылыу және бағалау жүйесін қалыптастыру;

Әдістемелік бөлімдердің жұмысын жандандыру;

Сапалы кадрларды дайындауда жаңа талаптарға жауап беру үшін көрсетілген шараларды үлкен жауапкершілікпен жүзеге асыру керек.

Әдебиеттер тізімі

[1] Шипачев В.С. Высшая математика.Учебник.М:Высшая школа,2005.

[2] Махмеджанов Н. Жоғарғы математика есептерінің жинағы. Оқу құралы. Алматы2008.

РАСШИРЕНИЕ И УСИЛЕНИЕ КУРСА МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Нурлыбаев А.Н., Бекжигитова Г.С.
Гимназия № 175 «Жаңа Ғасыр» города Алматы, КАЗАХСТАН
E-mail: esentai_63@mail.ru

Аннотация. Предлагается существенное усиление и интенсификация содержания курса математики школы и ВУЗ-ов с ярко выраженной акцентацией на алгоритмические аспекты (временная и ёмкостная сложности алгоритмов), что достигается посредством введения элементов комбинаторики и алгебры n-членных выражений (n-номов).

Математизация в век компьютеризации - важнейшее условие повышения качества подготовки не только специалистов инженерно-технического профиля, физиков, химиков и экономистов, но и гуманитариев, что красноречиво подтверждается делами немеркнущих корифеев науки.

На этом фоне выглядит диссонансом содержание стандартных курсов математики РК, в частности некоторых учебников алгебры. Так, только в старших классах школы изучают, и то в ограниченном объеме, лишь некоторые факты античной и средневековой алгебры (прогрессии, квадратные уравнения и задачи, приводящие к ним), упуская, например, весьма важные темы: диофантов анализ (III век), формулы Кардано и Феррари (XVI век) и даже не в полном объеме дается теорема Виета (отца алгебры, XVI век). Содержание этих учебников алгебры и начал анализа XXI века недалеко ушло от одноименного учебника А.П. Киселева для 8-10 классов, написанного еще в XIX веке, более того такие важные для практики его разделы как «Комплексные числа», «Неопределенные уравнения», «Соединения и бином Ньютона», отсутствуют в большинстве из них. Один из выходов в создавшемся положении – это усовершенствование учебной программы школ, ее интенсификация. В этом отношении мы поддерживаем и развиваем шире точку зрения известного математика и педагога, профессора М.И.Башмакова: «**содержательная, идейная сторона учебников алгебры 7-9 классов может быть существенно усилена при сохранении доступности курса**». К слову, он на практике удачно реализовал эту концепцию в прекрасных по содержанию и насыщенности учебниках: «Алгебра -7,8,9» и рабочих тетрадях к ним.

Предлагается в курс алгебры 7-8 классов ввести «Элементы комбинаторики» (3-4 часа), знакомящий с важнейшими свойствами перестановок, сочетаний и бином Ньютона, что позволяет максимально полно обобщить формулы сокращенного умножения квадратов и кубов двучленов (биномов) на квадраты, кубы плюс биквадраты и пятые степени n– членных многочленов (n-номов), а также на их суммы (разности) кубов. Ведь, на самом деле, **лавинный эффект сокращения (упрощения) достигается на формулах для степени n-номов**, а не биномов (n=2). Уже алгебра триномов (n=3) **намного обогащает курс математики,** что подтверждено учебниками Башмакова Н.И. и Виленкина Н.Я.

Знание основ комбинаторики позволяет естественным образом получить тождество Лагранжа для квадрата скалярного произведения векторов (следствие его есть неравенство Коши-Шварца, вместе с неравенством Коши – Буняковского являющееся основным инструментом для доказательства многих нетривиальных неравенств). Помимо этого, комбинаторный аспект проясняет суть хрестоматийных формул алгебры. Так, сумма S_n первых *n*членов арифметической прогрессии (АП) равна полусумме крайних членов, умноженной на *n*: $S_n = (a_1+a_n)n/2$, но, в то же время «в тени» остается эквивалентная ей формула: « S_n равна произведению *n* на a_1 плюс произведение разности d на число сочетаний из *n* по два: $S_n = a_1C_n^1 + dC_n^2$». Именно эта формула допускает обобщение при вычислении более сложных выражений: нахождение формул для суммы *n* частичных сумм и т.д., вывод формул суммы произвольного фрагмента (а не только первых *n* ее членов) арифметической и геометрической прогрессий.

Также, считаем целесообразным в школьном курсе рассмотреть арифметико-геометрическую прогрессию (АГП), обобщающую арифметическую и геометрическую прогрессии, получение формулы суммы для любого фрагмента АГП и суммы бесконечной АГП, составляющие эффектный аппарат для вычисления сложных сумм. Такое мощное усиление курса алгебры не требует каких-либо дополнительных сведений и не усложняет ясность изложения (воспринимаемость) материала при его доступности.

Правомерен вопрос: зачем такое расширение материала курса? На что можно ответить так: да, изложение его по традиционной схеме и объеме подачи материала чревато трудностями. Но мы предварительно существенно обогатили используемый инструментарий за счет включения в него элементов комбинаторики, тождеств и неравенств для n-номов, арифметико-геометрической прогрессии (АГП). Так, формула суммы S_n первых n членов $c_n=a_nb_n$, *где* $a_n= a_1+ (n-1)d$ *и* $b_n=b_1q^{n-1}$, равна

$$S_n= b\left[\frac{a-a_nq^n}{1-q}+\frac{dq(1-q^n)}{(1-q)^2}\right].$$

Из нее при d=0 вытекает формула n первых членов геометрической прогрессии, а при $q\to 1$ формула суммы арифметической прогрессии. Формула суммы АГП позволяет легко вычислять сложные выражения, не являющиеся ни арифметической, ни геометрической прогрессиями. Например, $S_n= 1+ 2x+\ldots+nx^{n-1} =?$

Здесь имеем АГП с параметрами: $a=b=1,\ d=1,\ q=x,\ a_n= n$, поэтому

$$S_n(x)=\frac{nx^n-1}{x-1}+\frac{x(1-x^{n-1})}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Заметим, что формула верна и при $x=0$: $S_n(0) = 1$ и при $x=1$: $S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

С помощью формулы бесконечно убывающей АГП легко показать, что бесконечное произведение $P=2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot 16^{\frac{1}{16}}\ldots=4$ (известная задача).

Доказательство следующего тождества:

$$(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

традиционным способом довольно громоздко и сложно. Но если применить формулу суммы трех кубов: $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz$, то задача теряет трудность и становится уже ординарной.

Последнее показывает, что понятие «задача повышенной трудности», в определенном смысле, является относительным, так как все зависит от того, какие средства (аналитический аппарат), для ее решения используются.

Список литературы

[1] Башмаков М.И. Алгебра-7,8,9 – М.: Просвещение. 2003, 2004, 2005.

[2] Нурлыбаев А.Н. Комбинаторика формул сокращенного умножения для n-номов//Физмат, 2007г., №2-5.

БАҒЫТ БОЙЫНША ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ

Нұрпейіс Ж., Көшербаева Ұ.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: ulbi-70@mail.ru

Аннотация. Дифференциалдық геометрияда негізгі ортонормаланған қозғалмалы реперде евклидтік кеңістіктің структуралық формаларын қорытып және контровариантты, ковариантты векторлардың компоненталарының арасындағы байланысты өрнектейді. Бұл жұмыста дифференциалға сызықты тәуелді компоненталарды таңдау және кеңістікте үшжақтың ығысуын осы параметрлер бойынша анықтау сұрақтары қарастырылды, дифференциалдық геометриядағы тұжырымдар қозғалмалы реперде баяндалды.

Пфафф формасы берілсін:

$$\omega = a_1dx^1+a_2dx^2+\ldots+a_ndx^n$$

Тәуелсіз айнымалылардың дифференциалдарын dx^1, dx^2,..., dx^n тәуелсіз айнымалылар ретінде қарастыруға болады, демек, оларды берілген тәуелсіз айнымалылардың функциясы деп қарастыруға болады:

$$dx^i=\zeta^i(x^1,\ldots,x^n)$$

d және δ дифференциалдау символдарын және дифференциалдаудың бір-бірінен өзгеше қатарларын қарастырамыз, олар өзара ауыстырымды деп қосымша шарт қоямыз:

$$d\delta x^1, d\delta x^2,\ldots, d\delta x^n$$

$$\delta dx^1, \delta dx^2,\ldots, \delta dx^n$$

Бұл екі дифференциалдау символдары өзара ауыстырымды деп, қосымша шарт қоямыз:

$$d\delta x^i = \delta dx^i \qquad \delta df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}dx^i\delta x^k+\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Теорема. Егер d және δ дифференциалдау символдары тәуелсіз айнымалылар үшін ауыстырымды болса,онда олар функциялар үшін де ауыстырымды.

Дәлелдеу: Шынында да, f функциясын қарастырайық:

$$f = f(x^1,\ldots,x^n)$$

Сонда

$$df = -\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\ ; \quad \delta f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\delta x^i$$

Екінші ретті дифференциалдаудан:

$$\delta df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}dx^i\delta x^k+\frac{\partial f}{\partial x^i}\partial dx^i$$

$$d\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}\partial x^i dx^k+\frac{\partial f}{\partial x^i}d\delta x^i$$

Келесі айырымды есептейміз:

$$\delta df - d\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}dx^i\delta x^k+\frac{\partial f}{\partial x^i}\delta dx^i - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}\delta x^i dx^k - \frac{\partial f}{\partial x^i}d\delta x^i \ \underset{=}{i \Leftrightarrow k} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}\right]dx^i\delta x^k$$

$i \Leftrightarrow k$ белгілеуі қосындыдағы i индексін k индексіне , ал k индексін i индексіне ауыстыруды білдіреді. Бұдан

$$\delta df = d\delta f$$

Салдар: d және δ дифференциалдау символдары үшін ауыстырымдылықтың қасиеті тәуелсіз айнымалыларды таңдап алуға тәуелсіз.

Әдебиеттер тізімі

[1] *Атанасян Л.С., Базылев В.Т., Дуничев К.И.* «Геометрия», Просвещение, 2000.
[2] *Нұрпейіс Ж.* «Дифференциалдық геометрия», АлМУ, 1998.

ОҚЫТУДЫҢ САБАҚТАСТЫҚ ЖҮЙЕСІНДЕГІ МАҚСАТ, МАЗМҰН САБАҚТАСТЫҒЫ

Оразбекова Л.Н.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: orazbekova_ln@mail.ru

Аңдатпа. Оқытудың сабақтастық жүйесіндегі экономикалық мамандықтарға қажетті математикалық мазмұнды жобалу мәселесі қарастырылады.

Аннотация. Рассмотриваются вопросы проектирования содержания математики для экономических специальностей в системе пееемственности обучения.

Annotation. There is the problems of designing the content of mathematics for economic specialties in the succession system of training

Жалпы білім беретін мектеппен салыстырғанда бейіндік мектеп артықшылығы оның жастарға кәсіби білім бағдарламасын меңгеруге дайындығының жоғары болатындығында. Десек те, мазмұнды жаңғырту және ғылыми-әдістемелік (білім беру стандарттары, оқу жоспарлары, бағдарламалар, оқулықтар, оқу-әдістемелік құралдар, оқытушы мамандар дайындау және т.б.) тұрғыдан алып қарағанда бейіндік оқыту тыңғылықты дайындықты қажет етеді. Жоғары оқу орнында білімін жалғастыруға келген жастарға білім беруде бұл қажеттілік мәселесі арта түседі.

Оқушы мен студентті математикаға оқытудағы сабақтастықты жүзеге асыруға бағытталып құрылған сабақтастық жүйесінде оқыту үдерісі зерттеу объектісі болып табылады. Ұсынылып отырған жүйеде жүйежасаушы компоненттері болып мыналар анықталды: мақсатты-мазмұндық компонент, әдістемелік компонент, бағалап-түзету компоненті. Әр компонентке локальді тәуелсіздік пен даму тән. Сонымен қатар, әр компонент өз кезегінде жүйе болып табылады да, сабақтастық жүйесінің ішкі жүйесін құрайды. Әдістемелік жүйенің құраушылары сабақтастық жүйесінде былайша топтасты: *мақсат, мотив, мазмұн* мақсатты-мазмұндық компонентке; *әдіс, құрал, форма* әдістемелік компонентіне; ал *бақылау, бағалау, түзету* бағалап-түзету компонентке топтастырылды. Ішкі жүйе компоненттері өзара тығыз байланыста және бір-біріне әсері ең жоғары болу белгісі бойынша топтастырылды [1].

Мақсатты-мазмұндық ішкі-жүйенің мәні жүйенің жүйежасаушы фактор ретінде *білім нәтижесіне* жету үшін мақсатты дұрыс қоюды, осы мақсатқа мативацияны дұрыс бағдарлау және сәйкес мазмұнды таңдау. Бұл жүйеде оқу үдерісінің тікелей ішкі қатысушыларының – студент пен оқытушы – ғана емес, сонымен қатар сыртқы-тапсырыс беруші мақсатының да ескерілуі маңызды. Тапсырыс берушінің мақсаты мен мотивін (оған қандай маман керек, жұмысқа қабылдағалы отырған жас маманның қандай білімі, білік-дағдысының болуы міндетті, және т.б. талаптары) ескеру, локалды оқыту үдерісін болашақ көздеген қызмет орнында шығармашылықпен жұмыс істей алатын маман дайындауға бағыттауға мүмкіндік туғызады.

Жүйеде, білім берудің деңгейлері арасында немесе бір деңгейдегі әр бейіндік бағыттарда, сабақтастықты іске асыру педагогикалық үдерісті тиімді басқарып бағыттауға тікелей әсер етеді. Ал бұл жүйеде әдістемелік-зерттеу жұмысын жүргізу нәтижесінде әдіскер-оқытушының педагогикалық білімі шыңдап, кәсіби құзіреттілік деңгейі көтерілетінін атап өту керек [2].

Математикалық білім берудің мақсаты мен мазмұны, қоғам дамуының әр кезеңіне сай, оқу бағдарламаларында, математика оқулықтары мен оқу құралдарында көрсетіліп отырады. Қоғамдағы өзгерістер білім берудің мақсаты мен мазмұнын жаңартуға алып келеді. Қазіргі уақытта мазмұн білім, білік және құзіреттілікпен анықталады. Сондықтан, ұсынылып отырған сабақтастық жүйесінде жүйежасаушы фактор ретінде *білім нәтижесі* алынды. Біздің ойымызша, білім нәтижесі білім берерудің жаңа парадигмасының негізгі көрсеткіші ретінде тұлғаны жетілуге және өмір бойы оқуға дайын болуына алып келеді.

Мемлекеттік білім беру стандарттары негізінде «Экономикадағы математика» пәні бойынша студент мынадай күтілетін нәтижелерге қол жеткізуі керек деп санаймыз:

- студент ғылым мен мәдениеттің заманауи деңгейіне сәйкес дүниетанымы қалыптасқан;
- оқушы өз бетімен шығармашылық іс-әрекет жасауға қабілетті және дайын;
- студент математиканың негізгі ұғымдарын, заңдарын, заңдылықтарын біледі және оны түрлі жағыдайда қолдана алады;
- студент қажетті математикалық амалдарды (өлшеу, есептеу, кестені, диаграмманы, графикті оқый алу және құра білу және т.б.) негіздеп таңдауға қабілетті;
- студент стандартты математикалық есептерді шығару әдіс-тәсілдерін біледі;
- студенттің сыни ойлауы қалыптасқан, математикалық тілді қолданып өз ой-ұстанымын түсіндіріп бере алады;
- студент жеке және коллективте жұмыс істеуге қабілетті;
- студент зерттеу жұмысын жүргізуге дайын және зерттеу нәтижесін негіздеуде математикалық тіл мен ақпараттық коммуникациялық технологияны сауатты түрде қолдана алады.

Құрылған математикалық білім берудің сабақтастық жүйесінде экономикалық бағыттағы студенттерге қажетті математикалық мазмұн зерттеліп, жобаланды. Нәтижесінде «Экономикадағы математик-1», «Экономикадағы математик-2» атты оқу құралдары дайындалып, студенттер қолданысына берілді [3, 4].

Әдебиеттер тізімі

[1] Оразбекова Л.Н. Пути реализации преемственности обучения математике в условиях перехода на двенадцатилетнее обучение в школах Казахстана // Известия РГПУ им. А.И.Герцена, РОССИЯ. № 177. 2015. С. 106–113.

[2] Оразбекова Л.Н. Математикалық білімді бақылау, бағалау және түзетудегі сабақтастық. "Білім беру бағдарламаларын жаңғырту: аккредитация және кадрлар дайындау сапасының кепілі" 46-ғылыми-әдістемелік конференция материалы, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 14.01.2016-15.01.2016 – 137-141 б.

[3] Оразбекова Л.Н._Экономикадағы математика-1. Оқу құралы - Алматы: Қазақ университеті, 2014 – 222 б.

[4] Оразбекова Л.Н._Экономикадағы математика-1. Оқу құралы - Алматы: Қазақ университеті, 2015 – 224 б.

КРЕДИТТІК ТЕХНОЛОГИЯ ЖҮЙЕСІНДЕ ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КУРЫСТАРЫН ОҚЫТУДЫҢ ЖАҢА МОДЕЛІ

Сатыбалдиев О.С.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ҚАЗАҚСТАН
E-mail: oraz_55_55@mail.ru

Дүниежүзілік жаһандану үрдісі, жұмыс күшінің халықаралық миграциясы, Қазақстанның Бүкіләлемдік Сауда ұйымына кіруі, еліміздің саяси және экономикалық өмірінде болып жатқан ұлы өзгерістер, еңбек ресурстары, қызмет көрсету, тауар өндіру және т.б. салалар бойынша бәсекелестікті арттыруды талап етуде. Бұл, әрине, ең бірінші кезекте заман талабына тез бейімделе алатын, толғағы жеткен проблемаларларды мезгілінде шеше білетін, өзінің жетекші идеясы бар және творчестволық ойлау қабілетін меңгерген мамандарды қажет ететіні сөзсіз; екіншіден олардың білімдеріне, іскерліктері мен дағдыларына деген жоғары талаптар жүктейді.

Қазіргі уақытта Республикамызда бен бүкіл әлемде болып жатқан саяси, экономикалық, т.б. өзгерістер білім беру жүйесінің жаңа моделін енгізуді талап етіп отыр. Ақпараттық технологияның қарқындап өсуі, оқытудың жаңа заман ағымына сай талаптары мен білім берудегі ескі қағидалар арасындағы қайшылықтар жоғары білім беруді жетілдіруге бағытталған көптеген тәжірибелік тұрғыдағы кешендік мәселелерді айқындап, оларды жүзеге асыруды міндеттейді.

Дәстүрлі түрде оқыту үрдісінде білім алушыға және оның кәсіби іс-әрекеттеріне деген талаптардың арасында алшақтықтар көп болды. Дәстүрлі оқу жүйесі қазіргі заман талаптарына сай болмағандықтан, ендігі жерде күрделі кәсіби, өндірістік және ғылыми проблемаларды өздігінен шеше алатын, білімді, білікті мамандарды қалыптастыруға мүмкіндік беретін оқытудың жаңа моделін құру қажеттілігі туындады.

Бүгінгі таңда жоғары оқу орындарындарында оқытудың кредиттік жүйесіне өтуіне байланысты оқу үрдісінде өзгерістер жасалуда.

Батыстың білім саласындағы тәжірибелерін ескерген жөн шығар, алайда білім сапасын арттыру үшін өзімізде бұрыннан қалыптасқан, сыннан өткен тәжірибелерді пайдаланған дұрыс. Сондықтан, біз, мемлекетімізде бұрыннан қалыптасқан білім жүйесінің жақсы жақтарын жетілдіре түсетін қадамдарды неге жасамаймыз деген тұжырымға келдік.

Іс-әрекеттің психологиялық тұжырымдамасы, белсенді оқыту теориясы, ақыл-ой әрекетін кезеңмен қалыптастырудың психологиялық тұжырымдамасы және оқыту заңдары сияқты теориялық негіздерді басшылыққа ала отырып, біз, кредиттік технология жүйесінде жоғарғы математика курысын оқытудың **бастапқы моделін** анықтадық. Олар:

- оқытудың мақсатын тұжырымдау;
- теориялық және практикалық материалдарды сұрыптау, оларды баяндаудың қатаңдық деңгейлерін анықтау;
- нақты тақырыптардың ішінен негізгі материалдарын бөлу;
- оқытуды мотивациямен қамтамасыз ететін шаралар жүйесі;
- пропедевтикалық өлшемдер жүйесі;
- математиканың әдіснамалық және тарихи мәселелерін бөлу;
- студенттердің өзіндік жұмыстарын ұйымдастырудың жүйесі;
- жеке және ұжымдық тапсырмалар жүйесі;
- студенттердің ғылыми зерттеу және өзіндік жұмыстары бойынша шаралар жүйесі;
- зерттеу тапсырмаларының жүйесі;
- математикалық модельдер мен алгоритмдер жүйесі;
- проблемалық оқытумен қамтамасыз ететін өлшемдер жүйесі;
- пәндердің өзара байланыстары мен олардың өз іштеріндегі бай-ланыстарының жүйесі;
- оқу процесін ұйымдастырудың ұжымдық және жеке формалар жүйесі;
- кері байланысты ұйымдастыру жүйесі.

Сөйтіп, кредиттік технология жүйесінде жоғарғы математика курысын оқытудың бастапқы моделін төмендегі құрамдас бөліктерден тұратын дидактикалық құрылым арқылы сипаттадық. Олар:

- математикалық пəндерді техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне оқытудың бастапқы моделін құру;
- бастапқы модельдің құрамдас бөліктерінің өзара байланыстарына психологиялық-педагогикалық талдаулар жасау;
- психологиялық-педагогикалық талдауларының нəтижелерін ескере отырып бастапқы модельге түзетулер енгізу;
- құрылған моделді оқу процесінде жүзеге асыру;
- оқу процесінде жүзеге асқан моделді кері байланыстың көмегі арқылы арқылы бағалау;
- құрылған модельдің кемшіліктерін сұрыптау;
- сұрыпталған кемшіліктерді ескере отырып, құрылған модельдің алдағы даму бағдарын анықтау;
- анықталған бағдарды ескере отырып, келесі қадамы жүзеге асуына негіз болатын оқытудың жаңа моделін құру.

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДСТВ НАГЛЯДНОСТИ В КОМПЬЮТЕРНОМ ОБУЧЕНИИ

Старовикова И.В., Старовиков М.И.
Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет
имени В.М. Шукшина, РОССИЯ
E-mail: starik@mail.biysk.ru

Аннотация. Анализируется содержание понятия наглядности в условиях широкого применения информационно-компьютерных средств обучения. Выделены регулятивы использования компьютерных моделей как средства наглядности, которые направлены на предотвращение формирования поверхностных знаний и «клипового» мышления.

Возможность представления учебного материала в наглядной форме с использованием мультимедийных средств является важной, сущностной характеристикой обучения, реализуемого с использованием информационно-компьютерных технологий (ИКТ). Со времен Я. А. Коменского дидактический принцип наглядности является одним из основополагающих в педагогике. Этот принцип дополняется новым содержанием в условиях все более широкого распространения ИКТ как в системе образования, так и в других областях общественной жизни. С учетом этого, на наш взгляд, является актуальным вопрос об особенностях реализации принципа наглядности в компьютерном обучении.

Принцип наглядности в обучении утверждает необходимость целесообразного применения наглядных средств в процессе формирования у учащихся знаний, умений и навыков. Понятие наглядности в педагогике обычно определяется как свойство психических образов объектов познания, выражающее степень доступности и понятности этих образов для познающего субъекта [1]. Поскольку психические образы субъективны, их наглядность или ненаглядность зависит от особенностей самого человека (уровня развития его познавательных способностей, мотивации и т. д.) и от его деятельности. Наглядный образ не возникает сам по себе, он образуется только как результат активной работы человека, направленной на его создание. Поэтому «…более адекватной формулой наглядности является следующая: наглядность – это активность субъекта по созданию образа познаваемого объекта и ясное понимание этого образа» [2]. Во всяком наглядном образе с необходимостью и в единстве представлены чувственный и абстрактно-теоретический аспекты знания о предмете.

Чувственная наглядность – это такой образ предмета, в котором отражены преимущественно его внешние, легко обнаруживаемые свойства. Абстрактно-теоретическая наглядность включает знание о сущности изучаемых явлений (их причине, происхождении, закономерных связях, механизмах, структуре). Последний вид наглядности представляет наибольший интерес, поскольку основное содержание научного знания, знание о сущности явлений, выражается в абстрактных, не наглядных понятиях. Онтологические основы ненаглядности научных знаний рассмотрены в книге [3]. Ненаглядность понятий обусловлена тем, что «общее не может непосредственно как таковое быть отражено в чувственном образе, а следовательно, не может быть наглядно изображено потому, что оно отдельно от явлений, само по себе (в платоновском, например, смысле) не существует» [3, с. 279]. Вместе с тем, не наглядное общее, понимаемое как «единое во многом», с необходимостью имеет свой чувственный коррелят. «Иначе мы вынуждены были бы признать, что какая-то часть нашего знания, а именно знание существенного, общего, необходимого и т. д., не происходит из чувственных данных и, следовательно, … мышление может из самого себя извлекать эту часть знания» [3, с. 290]. Формой знания, позволяющей преодолеть ненаглядность абстрактных понятий, В.А. Штофф называет модель: «модель является подлинным промежуточным звеном, соединяющим в научном познании пары полюсов: чувственное и логическое, конкретное и абстрактное, наглядное и не наглядное» [3, с. 290].

Философское рассмотрение понятия наглядности выявляет важные ориентиры в отношении использования наглядности в компьютерном обучении. Компьютер является наиболее совершенным и универсальным средством моделирования явлений самой разнообразной природы, он позволяет реализовать все виды наглядности, кроме кинестетической.

Каким же образом не наглядное абстрактное естественнонаучное знание можно «преобразовать» в наглядное при помощи компьютерных моделей?

Познавательная модель – это заместитель подлинного объекта исследования, имеющий с ним сходство в интересующем исследователя отношении. В процессе создания модели знание о ее оригинале в соответствии с поставленной задачей очищается от элементов случайного, второстепенного. Тем самым осуществляется восхождение от чувственно-конкретного к абстрактно-общему, формализованному, понятийному знанию, отражающему суть изучаемого явления. Далее, на этапе исследования модели все более полно и конкретно воспроизводятся свойства изучаемого фрагмента действительности в рамках найденной концептуальной основы. Изучение модели, как правило, осуществляется при варьировании ее параметров, что способствует уточнению существенных признаков понятий и их дальнейшему обобщению. Таким образом, модель позволяет направлять развитие знания от единичного, особенного к общему абстрактному и далее к теоретически конкретному. Отметим также, что в модели понятия различной степени абстрактности функционируют в единстве, что является важным фактором формирования их наглядных образов.

С учетом сказанного выделяем следующие регулятивы использования компьютерных моделей как средства наглядности.

1. При изложении учебного материала выдерживается логика движения знания от явления к сущности. Этапам «восхождения к абстрактному» и «восхождения к конкретному» соответствуют определенные элементы модели, которые демонстрируются не все сразу, а в надлежащей последовательности.

2. Как отмечено выше, наглядность – это активность субъекта по созданию доступного и понятного ему образа предмета познания. Поэтому занятия с использованием компьютерных моделей в качестве средства наглядности целесообразно проводить преимущественно в интерактивной форме. Модель должна содержать в себе все необходимые для этого компоненты. К числу таких видимых на экране компонентов относятся:

- записи обозначений параметров модели и присвоенных им значений;
- графическая информация (рисунки, анимации, графики и т.п.);

- органы управления моделью (полосы прокрутки, счетчики и т.п.).

Желательно также, чтобы были открыты пользователю и другие компоненты модели, позволяющие создать целостный образ изучаемого предмета (формулы, по которым производятся вычисления, таблицы данных и т.п.).

Представленные требования к использованию компьютерных моделей как средства наглядности, по нашей оценке, позволяют избежать формирования поверхностных знаний, которые, вместе с тем, создают у обучаемых иллюзию их полноценности. Рассмотренный порядок использования моделей противоположен «клиповому» способу предъявления информации и призван предотвращать формирование так называемого «клипового мышления».

Список литературы

[1] Наглядность // Российская педагогическая энциклопедия: в 2 тт. / Гл. ред. В. В. Давыдов.– М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – Т. 2. – С. 16-17.

[2] *Карпенко, А. В.* Соотношение наглядности и моделирования в обучении. – http://school2100.com/upload/iblock/c57/c57fc454ea01f3f5a0bf55c13e79759a.pdf (26.10.2016).

[3] *Штофф В. А.* Моделирование и философия. Л.: Наука, 1966.

МАТЕМАТИКА, ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА В ИТМиНВ ЕНУ им. Л.Н.ГУМИЛЕВА И КАЗНУ им. аль-ФАРАБИ

Темиргалиев Н., Сихов М.Б.

Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ),

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, КАЗАХСТАН

E-mail: ntmath10@mail.ru

Доклад посвящается 100-летию со дня рождения выдающегося организатора математики Казахстана Хасена Ибрашевича Ибрашева

Старший из докладчиков не входит в число прямых направленцев в науку от Х.И. Ибрашева, младший – тоже, по причине возраста. Однако косвенно, именно научная обстановка времен Закарина-Ибрашева определила научный путь старшего докладчика и через него младшего. Тогда Конференции проводились для развития науки (а не получения научных степеней), – приглашались перспективные молодые доктора для прикрепления к ним казахстанцев. В нашем случае цепочка такая – П.Л.Ульянов-К.Ж.Наурызбаев-Т.И.Аманов-И.М.Виноградов-С.М.Никольский.

В результате, на весь Казахстан предлагаются следующие темы исследований, каждая из которых подкреплена оригинальными публикациями в некоммерческих журналах по базам Thomson Reuters и Scopus:

§1. Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П) как синтез известного и нового в численном анализе, который, согласно К. Флетчеру, «включает в себя в качестве составных частей формулировку задачи, математический анализ, построение алгоритма и доведение компьютерной программы до того, чтобы она давала результаты»

§2. Классы (и пространства) функций, что, по словам А.Н.Колмогорова, решает проблему «Нас много», т.е. «многих» обеспечить публикациями

§3. Математический инструментарий прямого применения: алгебраическая теория чисел и тензорные произведения функционалов (в сочетании с гармоническим анализом) в задачах восстановления

§4. Равномерно распределенные сетки («иррегулярное распределения») и метод Квази-МонтеКарло
§5. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах численного интегрирования
§6. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования
§7. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте (К(В)П)
§8. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа
§9. Теория вложений и приближений – решенные и нерешенные задачи
§10. Ряды Фурье
§11. Предпоперечник Колмогорова
§12. Теория «Морри» не как «тривиальные обобщения заменой нормы Лебега на норму Морри»
§13. Дискретные и быстрые «алгебраические» преобразования Фурье
§14. Генераторы случайных чисел в контексте новых формул дискретных «алгебраических» преобразований Фурье
§15. «Геометрия чисел» в контексте алгебраической теории чисел
§16. Применения генераторов случайных чисел от ИТМиНВ (в криптографии, обработке сигналов и т.п.)
§17. Метод Галеркина в контексте всегда сопровождающей его уязвимости
с потенциалом разработок в десятках и сотнях статей, обоснованных в авторских Обзорах по математике-информатике в контексте международной науки.

Остановимся на последних из них принципиального характера с простой формулировкой и потому, как известно, трудных в решениях (как-то С.Б.Стечкин сказал: «*Слишком точно ставить задачу – ошибка молодости*»).

1^0. Предпоперечник Колмогорова – в определении *inf sup inf* оставляется *sup inf*, что приводит к содержательным результатам с практическими приложениями и неограниченным потенциалом продолжений [1].

2^0. Полное спектральное тестирование по методу Ковэю-Макферсона генераторов случайных чисел Лехмера с максимальным периодом. В статье [2] решена задача фундаментального значения в теории «Генераторы случайных чисел»: при заданных $s \geq 2$ и $\tau \geq 2$ и растущем N найти *асимтотику* величины (все параметры – целые положительные числа)

$$\Phi\{N;\, s,\tau,\, a = a(N)\} \equiv \sup\{\nu_s(a, N) : 2 \leq a < N,\ (a-1)^\tau \equiv 0(\operatorname{mod} N),\ (a-1)^{\tau-1} \not\equiv 0(\operatorname{mod} N)\},$$

где $\nu_s(a, N) = \inf\left\{\sqrt{m_1^2 + \ldots m_s^2}\, m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s, m \neq 0,\ m_1 + am_2 + \ldots + a^{s-1}m_s \equiv 0(\operatorname{mod} N)\right\}$.

В трех изданиях 1969, 1981 и 1998 годов монографии [3] «Искусство программирования» Дональда Эрвина Кнута (занимающего 14-место в списке наиболее востребованных в XX веке книг физико-математического цикла) в неизменно присутствующем в каждом издании параграфе «3.3.4 Спектральный тест» неизменно каждый раз ставится и подробно описывается со времени предыдущего издания продвижение по этой задаче, где и в последнем издании 1998 года оставалась известной только оценка сверху $\nu_s(a, N) \leq \gamma_s N^{1/s}$, тем самым, даже правильный *порядок* известен не был. Тем самым, дано решение известной проблемы Ковэю-Макферсона 1965 года формулировки, стало быть с 51-летним стажем, да еще из всемирно известной монографии [3], разумеется, с неограниченным потенциалом применений.

3^0. Дискретные и быстрые "алгебраические" преобразования Фурье (Д"а"ПФ и Б"а"ПФ),

прямые $\hat{f}(m) = \dfrac{1}{|\det d|} \sum\limits_{k \bmod \mathrm{Z}^s d'} f\left(k(d')^{-1}\right) e^{-2\pi i\left(m, k(d')^{-1}\right)} \left(m \bmod \mathrm{Z}^s d\right)$

и обратные $f\left(t(d')^{-1}\right)= \sum_{m \bmod Z^S d} \hat{f}(m) e^{2\pi i\left(t,\, md^{-1}\right)} \quad \left(t \bmod Z^s d'\right),$

где d есть произвольная невырожденная целочисленная $S \times S$-матрица, а d'-транспонирована по отношению к ней, определены в [4].

Эти дискретные "алгебраические" преобразования Фурье, как и всякие ДПФ, имеют многочисленные теоретические применения. При этом значение полученных теоретических результатов неограниченно возрастает в случаях, когда применяемые Д"а"ПФ обладают свойством быстрых «алгебраических» преобразований Фурье, что, как оказалось (вопреки противоположным ожиданиям – все-же матрицы d произвольны!), имеет место для *произвольных* целочисленных треугольных невырожденных матриц d таких, что $\det d = 2^{r_1} \cdots 2^{r_s}$ и $\det d$ есть простое число. Таким образом, в математику-информатику в полном объеме теоретических и вычислительных применений введен новый «гибкий» аппарат быстрых «алгебраических» преобразований Фурье. Можно утверждать, что тема БПФ в виде далеко идущего обобщения знаменитой конструкции Кули-Тьюки 1965 года создания, в будущих учебниках и монографиях должна излагаться именно в форме Б"а"ПФ.

4^0. Геометрия чисел: дано вычислительное решение проблемы оптимальных оценок сверху критических определителей произвольных ограниченных тел с построением соответствующих решеток [5]. Современное состояние теории, составляющей фундамент области математики известной под названием «Геометрия чисел», возникшей в работах Кеплера (17 век) и Лагранжа (18 век), в 19 веке существенно продвинутой Гауссом и Дирихле, с конца 19 века ставшей самостоятельной ветвью математики благодаря работам Минковского и Вороного, с неистощимым запасом дальнейшего развития, в обстоятельной монографии [5] (см. там стр. 375) описывается следующим образом: «*значительного вклада в классическую теорию вычисления и оценки критических определителей в последнее время отмечено не было*».

Этой узловой задаче и сопутствующих ей задачам посвящены тысячи статей, подытоженных в десятках монографий, важнейшие из которых [6-7] (в [6] из 716 страниц списку литературы отведено 100 страниц).

До статьи [5] каких-либо оценок и вычислений критических определителей *произвольных множеств* в научной литературе не было, потому полученное теоретико-числовые решение влечет уже на этой новой основе широкомасштабную программу исследований по теме «Геометрия чисел» и по примыкающим к ней задачам из других областей математики, в том числе нацеленных на практические применения типа упаковок и покрытий.

5^0. Метод Галеркина в вычислительных применениях изначально уязвим. *"Методы Галеркина к настоящему времени были применены при решении многочисленных задач механики конструкций, динамики сооружений, гидромеханики, теории гидродинамической устойчивости, магнитной гидродинамики, теории тепло- и массообмена, акустики, теории распространения микроволн, теории переноса нейтронов и т.п. С помощью предстапвлений Галеркина были проведены исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Стационарные и нестационарные задачи, а также задачи на собственные знания оказались в равной степени поддающимися исследованию на основе подходов Галеркина.* ***По существу, любая задача, для которой можно выписать определяющие уравнения, может быть решена с помощью одной из разновидностей метода Галеркина.***

…

Труккенбродт [Trukkenbrodt E.J.Aero. Sci., 1952, V. p. 428-429] разработал моментально-импульсный метод, который применялся к расчету как ламинарного, так и турбулентного пограничного слоя.», - читаем в [8, стр.10 и 42 соответственно].

Основная теорема (Н.Темиргалиев). *Пусть даны банаховы пространства действительнозначных функций* X *и* $Y = L^2(\Omega_Y)$ *с множествами определения* Ω_X *и* Ω_Y *соответственно, и пусть* L *- линейный оператор, действующий из* X *в* Y.

Пусть также даны целое положительное число $N \geq 2$ *и система линейно независимых функций* $\{\psi_k\}_{k=1}^N$ *из* X *,системы линейных функционалов* $\{c_k\}_{k=1}^N$ *и* $\{l_\tau\}_{\tau=1}^N$ *над* Y *.Тогда найдется функция* f_N *из* $L^2(\Omega_Y)$ *с нормой* $\|f_N\|_{L^2(\Omega_Y)} = 1$ *такая, что для функци и* $u_N(f_N) \equiv u_N(x; f_N) = \sum_{k=1}^N c_k(f_N)\psi_k(x)$ *выполнены равенства* $l_\tau(L(u_N(f_N))) = l_\tau(f_N)$ $(\tau = 1, \ldots, N)$,

однако $\|f_N - L(u_N(f_N))\|_{L^2(\Omega_Y)} = 1$.

Функция f_N, *соответствующее которой уравнение* $Lu = f_N$ *по методу Галеркина приближенно не решается, есть линейная комбинация исходных функций* $\vartheta_1(y) = L\psi_1, \ldots, \vartheta_N(y) = L\psi_N$ *и произвольных функций* $\vartheta_{N+1}(y) = L\psi_{N+1}, \ldots, \vartheta_T(y) = L\psi_T$, *в произвольном количестве* $T \geq 5N$ *удовлетворяющих лишь требованию линейной независимости систем* $\{\psi_k\}_{k=1}^T$ *в* X *и* $\{\upsilon_k\}_{k=1}^T$ *в* Y *»*
вносит новые вопросы в тему "Метод Галеркина".

Получается, что теоремы о сходимости под общим названием «Обоснование метода Галеркина», включая знаменитую статью М.В.Келдыша [9], сразу же теряют силу при каждом применении к линейным операторным уравнениям $Lu = f$, поскольку при каждом N столько нерешаемых правых частей f_N этого уравнения, сколько имеется линейно независимых систем $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$, $b_{N+1}, \ldots, b_T$ с $T \geq 5N$.

Кстати, решенная М.В.Келдышем методом Галеркина задача расчета критических скоростей, исключающих явление флаттера - внезапно возникающих вибраций самолета, приводящих к его разрушению, подтверждает этот вывод – потребовался только случай *N=1*.

Опять же, Основная теорема дает возможность во всех модификациях метода Галеркина предвидеть случаи его неэффективности и получать, в определенном смысле, окончательные результаты, поскольку такое позволяет *произвольность* независимых систем и функционалов в ней.

Список литературы

[1] Сихов М.Б. О некоторых задачах многомерной теории приближений разных метрик. Докторская диссертация. Представлена в Институт математики МОН РК (Алматы) в январе 2005г. по спец. 01.01.01 – математический анализ, защищена 16 декабря 2010 года в Казанском федеральном университете по спец. 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ. Утверждена ВАК России 21.Х.2011.

[2] Temirgaliyeva Zh.N., Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period – http://arxiv.org/abs/1607.00950v1

[3] Knuth D.E. The artof computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3 rd Edition, Publisher: Addison-Wesley,1998.

[4] Temirgaliev N., Temirgalieva Zh.N. Rapid “Algebraic” Fourier Transforms on Uniformly Distributed Meshes// Russian Mathematics (Iz. VUZ). Volume 60. No. 5. 2016. pp. 81–85.

[5] Temirgaliev N., Temirgalieva Zh.N. “Geometry of Numbers”in a Context of Algebraic Theory of Numbers// Russian Mathematics (Iz. VUZ). Volume 60. No. 10. 2016. pp. 77–81.

[6] Грубер П.М., Леккеркеркер К.Г. Геометрия чисел: Пер. с англ.-М.: Наука, 2008.

[7] Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.:Мир, 1965.

[8] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.:Мир, 1988.
[9] Келдыш М.В. О методе Б.Г.Галеркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР. Сер.матем., Т. 6. № 6. 1942. С. 309–330.

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Сулейменов Ж., Саткен Б.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, КАЗАХСТАН
E-mail: zh_suleimenov@mail.ru

Аннотация. В пункте излагается оптимальный метод построения периодического решения линейных дифференциальных уравнений с помощью функций Коши, Грина и граничных функций.

Рассмотрим линейную периодическая система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t), \tag{1.1}$$

где P матрица P и вектор-функция f – непрерывны и ω периодичны на R. ω периодичность решения $x(t)$ системы (1.1), принимаем как периодичность начального условия:

$$x(0) = x(\omega) \tag{1.2}$$

Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы, нормирован

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y, \;\; y = colon(y_1, ..., y_n) \tag{1.3}$$

Общее решение системы (1.3) имеет вид

$$y(t) = Y(t)C$$

где C – произвольная постоянная неособенная матрица. Будем считать, что

$$\Delta(0;\omega) = \det(Y(0) - Y(\omega)) \neq 0$$

Матрица Коши будет иметь вид:

$$K(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s), \;\; t.s \in [0, \omega]$$

Матрица $\Phi(t)$, столбцы который удовлетворяют системе (1.3) и условиям $\varphi^j(0) - \varphi^j(\omega) = e^j = colon(0, ..., 0, 1, ..., 0)$ называется граничной матрицей. Подставляя общее решение в условие (1.2), а найденное значение C в формулу $\Phi(t) = Y(t)C$ получим

$$\Phi(t) = Y(t)(Y(0) - Y(\omega))^{-1}$$

Доказывается, что если $P(t),\ f(t) \in C[0;\omega]$ и $\Delta(0, \omega) \neq 0$ то на отрезке $[0;\omega]$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) и выражается формулой

$$x(t) = -\Phi(t)\int_0^{\omega} K(\omega,s) f(s)ds + \int_0^{t} K(t,s) f(s)ds \tag{1.4}$$

С помощью введения матрицы Грина

$$G(t,s) = \begin{cases} -\Phi(t)K(\omega,s), \; \forall t \in [0;s), \\ -\Phi(t)K(\omega,s) + K(t,s), \; \forall t \in (s;\omega] \end{cases}$$

решения (1.4) записывается в виде

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t,s) f(s) ds \tag{1.5}$$

Такой же подход применяется и для построения периодического решения линейного уравнения высшего порядка.

п 2. В пункте изложен ускоренный метод построения условно-периодического решения одной квазилинейной системы уравнений в критическом случае.

Рассматривается квазилинейная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon f(t,x), \tag{2.1}$$

где $A = (a_{jk}),\ j = k = 1{,}2,\quad f(t,x) = colon(f_1(t,x_1,x_2),\ f_2(t,x_1,x_2))$ – вектор-функция условно-периодическая по t с частотным базисом $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$; аналитическая по t и x в области Д $= \{(t,x) \subset C^3 : \|x\| \le h, \|\mathrm{Im}\,\omega t\| \le q\}$, $\det|A - \lambda E| = 0$ имеет чисто мнимые корни $i\sigma_1, i\sigma_2$, причем числа σ_1, σ_2, рационально несоизмеримы с $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, ε – малый параметр. С помощью неособого линейного преобразования систему (2.1) приводим к виду

$$\frac{dx}{dt} = Jx + \varepsilon f(t, Sx) \tag{2.2}$$

Для отыскания условно-периодического решения (2.2) применям метод ускоренной сходимости [1]. В качестве исходного приближенного условно-периодического решения системы (2.2) выберем $x^{(0)}(t,\varepsilon) := colon\,(0;0).$ Его невязку обозначим $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ и рассмотрим его как первое приближение к искомому решению. Тогда относительно $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ будет иметь

$$\frac{dx^{(1)}(t,\varepsilon)}{dt} = (J + \varepsilon P^{(0)}(t))x^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon\chi^{(1)}(t, x^{(0)}),$$

где $P^{(0)}(t) := f'_x(t,0) := \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)_{(t;0)}$, $j,k = 1{,}2;$ $\chi^{(1)}(t,x^{(0)}) := f(t,0).$ Поправку к $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ обозначим через $y^{(1)}(t,\varepsilon) = colon\,(y_1^{(1)}(t,\varepsilon),\ y_2^{(1)}(t,\varepsilon)).$ Для нее будем систему

$$\frac{dy^{(1)}(t,\varepsilon)}{dt} = (J + \varepsilon f_x^1(t,x^{(1)})y^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon Y^{(1)}(t,x^{(1)}),$$

где $Y^{(1)}(t,x^{(1)}) := f(t,x^{(1)}) - f(t,0) - f'_x(t,0)x^{(1)}.$

Второе приближение определяем по формуле $x^2(t,\varepsilon) := x^{(1)}(t,\varepsilon) + y^{(1)}(t,\varepsilon)$, а поправку к нему обозначим через $y^2(t,\varepsilon)$ и т.д. Для последующих приближений получается аналогичные системы уравнений

Эти системы уравнений имеют одиноковую структуру, т.е. являются системами вида

$$\frac{dz}{dt} = (J + \varepsilon P(t))z + \varepsilon q(t) \tag{2.3}$$

где $J := diag(\sigma_1 i, \sigma_2 i), P(t) = (p_{jk}(t)),\ j,k = 1{,}2$, $q(t) = colon(q_1(t), q_2(t))$. $P(t)$, $q(t)$ – аналитические и условно периодические частотным базисом $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Условно-периодическое решения системы (2.3) будем искать методам неопределенных коэффициентов. Для оценки членов ряда $x^{(1)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\infty} y^{(1)}(t,\varepsilon)$, где $y^{(1)}(t,\varepsilon)$ – поправки применяются специальные неравенства, используемые в теории действительных чисел [2]. Мажорирующий ряд является степенным в степени: $\sum_{j=0}^{\infty} m^{\alpha^j}$. Оценка производятся полосах, где мнимые полосы значении независимой переменный постепенно сужаются. В результате получим решение системы (2.1) на действительной оси.

Такой же метод построения условно-периодического решения применен и для одного дифференциального уравнения.

Список литературы

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев "Наукова думка", 1969.

[2] Зигель К.Л. Лекции по небесной механике ИЛ, 1959.

ИНТЕГРАЛ ТАҚЫРЫБЫН ОҚЫТУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛІК ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Тлеулесова[1] А.М., Касенов[1] С.Е., Бажи[2] А.

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

[2]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, ҚАЗАҚСТАН

E-mail: syrym.kasenov@mail.ru

Аңдатпа. Интеграл тақырыбы жоғары сынып алгебра және анализ бастамалары тарауларының негізгі тақырыптарының бірі болып табылады. Сондықтан бұл тақырыпты оқытудың әдістемелік ерекшеліктерін қарастыру өте маңызды. Мақалада 11-сынып оқушыларының психологиялық-педагогикалық аспектілері қарастырылады. Анықталған интеграл тақырыбын оқытудың ерекшеліктері айтылады.

Алгебра және анализ бастамалары курсында анықталған интеграл және оның қолданулары маңызды бөлімдерінің бірі болып табылады. Функцияның көптеген түрін интегралдау – математикалық анализдің үлкен проблемалары. Ал анықталған интеграл көмегімен есептерді шешу қазірдің өзінде өте күрделі есептері болады. Анықталған интегралды есептеу тек теориялық қызығушылық қана тудырмайды. Сондай-ақ оның есептеуіне адамдардың практикалық іс-әрекетімен байланысты есептер келтіріледі. Сонымен бірге анықталған интеграл физика, экономика және т.б. пәндерінде кеңінен қолданылады. Сондықтан анықталған интеграл және оның қолдануларының әдістемелік ерекшеліктерін қарастыру аса маңызды.

Интеграл тақырыбы 11-сыныпта өткізіледі. Жас ерекшеліктеріне сәйкес оқушылар жасөспірімдік және ерте жеткіншек жаста болады. Мектепте жоғарғы сынып оқушыларының танымдық үдерістері – ересек адамның ой еңбегінің барлық түрлерін орындауға практикалық түрде дайын болады, сонымен қатар, оқушылардың ең қиын танымдық үдерістерінде орындай алады. Олар өздерін икемді ететін қасиеттерге ие болады, сонымен қоса, танымдық әдістерінің дамуы оқушылардың жеке басының дамуынан біршама асып түседі.

Интегралдың кең қолдануының әсерінен оны мектеп математикалық бағдарламасына қосуына әсер етті. Бұл оқушыларды интеграл ұғымының негізгі мағынасын ашып және оның кейбір қолдануларымен таныстырады. Осыған орай бұл тақырып оқушылардың оқу материалына деген қызығушылығын арттырады, оқушыларда техникалық ойлау қабілеттерін дамытады және қазіргі замандағы математиканың орны мен рөлін оң түсінуге әсер етеді.

Математика әр түрлі шамалар арасындағы байланыстарды зерттейді. Мұндай байланыстардың маңызды мысалдары механикалық қозғалыстарды береді. Нүктенің орны (координатадағы) және оның жылдамдығы арасындағы математикалық анализдің негізіне жататын белгілі байланыс бар: жылдамдық уақыт координаталарынан алынған туынды болып табылады. Бұл туындыны табу операциясы дифференциалдау деп аталады. Жылдамдығы арқылы нүктенің орнын табу кері амалы интегралдау деп аталатын келесі бір математикалық операция көмегімен шешіледі.

Біз нүктенің орны мен оның жылдамдығы арасындағы өзара байланысы бар жұп шамаларға көптеген мысалдар білеміз. Бір шамасы белгілі болған жағдайда, дифференциалдау операциясын орындау арқылы келесі бір шаманы таба аламыз. Мысалы, жұқа стержіннің сызықты қатаңдығы оның массасының ұзындығы бойынша туындысына тең және т.с.с. Интегралдау кері амалының көмегімен берілген қатаңдық арқылы массаны, белгілі қуат арқылы жұмысты, берілген ток күші арқылы зарядты және т.б. табамыз.

Баланың есте сақтау қабілетін зерттегенде жасөспірімге бірдеңені еске түсіру деген ойлану болып табылады. Оның есте сақтау процесі ойлаумен, есте сақталған материалмен логикалық қарым-қатынас орнатуымен саяды, ал еске түсіру осы қатынаста материалды қайта қалпына келтірумен қорытындылады.

Жоғарғы мектеп жасы жалпы және арнаулы қабілеттерінің дамуының жалғасуымен сипатталады. Оқу процесінде жалпы зияткерлік қабілеті қалыптасады, әсіресе, теориялық ойлауды түсіну. Бұл ұғымды меңгеруден, оны қолдану қабілетін жетілдіруден, логикалық және абстракты түрде пайымдаудан шығады. Мысалы, анықталған интеграл ұғымын және символын ауыстыруды енгізгенде орын алады.

Алғашқы психологтардың бірі Ж.Пиаже байқағандай, математикалық ұғымның толық қалыптасуы оқушыларды белгілі бір ақыл-ой құрылымын қалыптастырады және өзге математикалық ұғымдар таза логикаға келтірілмейді, керісінше нақты оқу материалы мен «сыртқы» тиімді іс-әрекет пен «ішкі» ақыл-ой амалдарын органикалық байланыстарымен құрастырылған логика-оперативті құрылым деп аталатын талдаудың нәтижесінде оқушының ойлауынан туындайды.

Орыс педагог-психологы Д.Д.Галанин : «...оқытудың ең жақсы жолы- ол ой салу үшін материал беру, ал идеялар өздігінен баланың психологиялық аппаратының көмегімен туады».

Есептер шығару өте пайдалы болып табылады, себебі, олар ойлаудың дамуына тікелей әсер етеді. Мысалы, айнымалыны ауыстыру арқылы шығарылатын анықталған интегралдарға есептер шығару абстракты ойлау қабілетінің дамуына ықпал жасайды. Есептерді шығару үшін біршама теориялық жалпы білім базасы қажет етіледі. Оқушыларға биіктігі 147 м және бүйір жағының квадраты 232 м негізіндегі дұрыс пирамида болып табылатын Хеопс пирамидасының көлемін табуды ұсынуымызға болады.

Ережені қолдану екі ойлау амалдарынан тұрады:

- есепті шешу үшін нақты қай ережені қолдану керек екендігін анықтау;
- жалпы ережені жеке есеп шартына қолдану.

Жасөспірімдер бір есепті әр түрлі жолдармен шешу арқылы оларды зерттеп және салыстырады. Мұндай жағдайда берілген есепті аналитикалық әдіспен немесе анықталған интеграл арқылы шеше алғандықтан, қиық пирамиданың көмегімен табуды тапсырсақ болады. Жасөспірім мен жеткіншек жастың ерекшелігі өзін-өзі жетілдіруге ұмтылуы, сондықтан, бұл жастағы оқушыларға оқулықпен жеке жұмыс істеуді қажет ететін тапсырмалар беру ұсынылады. Мысалы, интегралды есептеу немесе интеграл ұғымы мен интегралдың символының шығу тарихы туралы реферат немесе баяндама жазуды тапсыру.

Әдебиеттер тізімі

[1] Әбілқасымова А.Е. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі. - Алматы, 2014.

[2] Басова Н.В. Педагогика и практическая психология Ростов н/Д: ”Феникс” 1999.

[3] Колмогоров А.Н., Абрамов А.М. Алгебра и начала анализа 10 – 11 М.: Просвещение 1997.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Жайнибекова М.А., Толеубеков А.М.

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, КАЗАХСТАН

При всём разнообразии действительного и воображаемого мира, общим в нём является то, что одни явления происходят под действием других. Понятие функции является отражением таких связей. Связи между различными объектами и явлениями, количественные и качественные соотношения между которыми устанавливаются и изучаются в разных их проявлениях, в наиболее точном виде выражаются посредством понятия функции.

Понятие функции относится к центральным понятиям математики вообще, в частности школьного курса математики.

Учителями средних школ и преподавателями вузов советских и постсоветских времен накоплен различный опыт в преподавании этой темы. Как нам представляется, распространенный способ определения функции в последовательности перменная как нечто меняющееся, независимая переменная, зависимая переменная и функция как определенная связь между переменными, по замыслу предназначенная для упрощения, на деле создает труднопеодолимые препятствия для понимания.

Общее определение функции состоит в следующем:

Пусть даны два множества D и B произвольной природы. Правило (закон, алгоритм) *f*, согласно которому каждому (произвольному) элементу *x* из множества D ставится в соответствие точно один элемент из B (этот элемент обозначают *f(x)*, как символическую запись того, что элементу *x* применено правило *f* и результат есть *f*(*x*)) называют функцией, определенной на множестве D и принимающей значения из множества B.

Элемент *f*(*x*) множества B называют *значением функции f* в точке *x*. Обсудим ключевые понятия, выделенные в данном определении последовательно *буквами* D, *x*(аргумент (независимая переменная) функции), *f* (правило,закон, алгоритм) и B.

Множество D задано и произвольно - этим всё сказано. Множества D называют *множеством определения или задания* (*областью определения*) функции *f*.

Следующая мысль «каждому элементу из множества D» требует специального обозначения, поскольку к нему должно быть «применено правило *f* ». В приведенной формулировке определения произвольный элемент множества D обозначен *буквой x*. На правило *f* также нет никаких ограничений, кроме его действенности, то есть применимости ко всякому элементу из D и *единственности* на каждом элементе, заключенных в словосочетании «точно один элемент».

Правило (или закон) *f* также назван алгоритмом, т.е. «определенной последовательностью действий, производимых над каждым элементом из D». В связи с этим заметим, что основной набор функций, изучаемых в школе, имеет *подчеркнуто выраженный* алгоритмический характер.

Роль множества B в данном определении состоит лишь в том, что *f*(*x*) есть элемент из B. Тем самым, множество B является условием (ограничением) на само правило *f*.

С целью сделать более доступным пониманию учащихся это сложное понятие математики, остановимся на основных моментах, которые необходимо, по нашему мнению, в деталях разработать для изучения функций в средней школе.

1. При введении определения функции необходимо обсудить каждое ключевое понятие (аргумент *x*, правило *f,* значение функции *f(x),* множество определения, множество допустимых значений), входящее в определение[1, стр. 24].
2. «Правило» – это то же самое, что и закон, и алгоритм, и соответствие.

3. Научить учащихся по аналитической записи функции формулировать правило, которым задана функция, а так же и наоборот, по словесной формулировке правила уметь записать его аналитически.
4. Алгоритмическое определение функции целесообразно использовать при задании изучаемых в школе числовых функций.
5. При правильном изучении понятия функции учащиеся свободно могут привести примеры функции из окружающей реальности.
6. Учащиеся должны распознавать среди соответствий те, которые являются и не являются функциями.
7. Наглядное представление функции- ее геометрическая интерпретация – дается более подробным изучением координатной системы в связке число - точка.
8. Необходимо развить у учащихся навыки работы с графиками функций, построение их с помощью преобразований.

Наша цель состоит в пояснении определения функции как правила, алгоритма, закона, примененного к аргументу x как символическому обозначению произвольного элемента множества её задания. При этом воздерживаемся от понятия «зависимая переменная», особое внимание уделяется умению четко указывать для каждого случая аргумент, правило задания функции, множество значений. Для закрепления понятий предлагается учащимся самим составить задачи

В ходе отработки навыков работы с определением функции у учащихся устанавливается четкое и правильное восприятие понятия функции.

Изучение функции в средней школе не ограничивается лишь введением определения этого понятия и умения учащихся распознать функцию и описать ее свойства. Одним из важных моментов в изучении функции является наглядное представление функции – ее геометрическая интерпретация, которая дается посредством понятия графика функции.

Согласно принятой в Республике Казахстан программе, в курсе математики 6-ого класса и алгебры 7-9 классов определение графика функции, обычно, не дается. Понятие графика функции воспринимается учащимися на интуитивной основе, простым сообщением, что графиком линейной функции является прямая, квадратичной – парабола, обратной пропорциональности – гипербола. Полное исследование и построение графика функции изучается в 10-11классах.

Навыки работы с графиками функции целесообразно формировать у учащихся в процессе изучения функции в соответствующих классах. Для этого требуется арифметизация плоскости – введения координатной системы [1, стр.71]. Далее, преобразование графиков функции сначала проводится в модельной ситуации – для линейной, квадратичной функции, обратной пропорциональности. Затем, на основе продемонстрированных наглядных представлений, описывается общий случай.

Наши предложения по теме «Графики функций» базируются на методических решениях проблемы арифметизации прямой и плоскости, разработанной в учебнике [1, стр. 27-28, стр.71-72].

Список литературы

[1] Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. А.: Жазушы, 2002.

М А З М Ұ Н Ы
С О Д Е Р Ж А Н И Е

Вычислительная математика, математическое моделирование и информатика

Теория функций и функциональный анализ

Методика преподавания математики и информатики

Ғылыми басылым

ИБРАШЕВ ХАСАН ИБРАШҰЛЫНЫҢ
100 ЖЫЛДЫҚ МЕРЕЙТОЙЫНА АРНАЛҒАН
«ҚАЗАҚСТАНДАҒЫ МАТЕМАТИКА –
ӨТКЕНІ ЖӘНЕ БОЛАШАҒЫ» атты
халықаралық ғылыми-әдістемелік конференция
М А Т Е Р И А Л Д А Р Ы

23-25 қараша 2016 ж.

Шығарушы редакторы *А. Шуриева*
Мұқаба дизайны *А. Қалиева*

ИБ № 10174
Басуға 18.11. 2016 жылы қол қойылды. Формат 60х84 $^1/_8$.
Көлемі 16,9 б. т. Тапсырыс № 5289. Таралымы 80 дана.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің
«Қазақ университеті» баспа үйі.
Алматы қаласы, әл-Фараби даңғылы, 71.
«Қазақ университеті» баспа үйі баспаханасында басылды.