ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ атындағы ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

«ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ САЛМАҚТЫ БАҒАЛАУЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫСТАРЫ» атты
халықаралық ғылыми конференция

ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ

THE ABSTRACT BOOK

of the International Scientific Conference
«WEIGHTED ESTIMATES OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS»

04-06 May 2017
Astana, Kazakhstan

УДК 517.9
ББК 22.1
D46

«Дифференциалдық және интегралдық операторлардың салмақты бағалаулары және олардың қолданыстары»: Профессор, ҚР ҰҒА корреспондент мүшесі Рысқұл Ойнаровтың 70-жылдығына арналған халықаралық ғылыми конференцияның тезистер жинағы. –Астана: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2017. – 160 с.

«Весовые оценки дифференциальных и интегральных операторов и их приложения»: Сборник тезисов международной научной конференции, посвященный 70-летию профессора, член-корреспондента академии НАН РК Рыскул Ойнарова. – Астана: Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, 2017. –160 с.

ISBN 978-601-7900-55-7

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Секция 1. Неравенства, интегральные операторы в весовых пространствах и их приложения

Section 1. Inequalities and integral operators in weighted spaces and their applications

Секция 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Section 2. DIFFERENTIAL OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS

НЕРАВЕНСТВА, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

INEQUALITIES AND INTEGRAL OPERATORS IN WEIGHTED SPACES AND THEIR APPLICATIONS

Two-sided estimates of the fractional integration operator

A.M. Abylayeva

L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
abylayeva_b@mail.ru

Let $I = (a, b)$, $0 \leq a < b \leq \infty$. Let v and u be almost everywhere positive functions, which are locally integrable on the interval I.

Let $0 < p < \infty$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Denote by $L_{p,v} \equiv L_p(v, I)$ the set of all functions f measurable on I such that

$$\|f\|_{p,v} := \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Let W be a non-negative, strictly increasing and locally absolutely continuous function on I. Suppose that $\frac{dW(x)}{dx} = w(x)$, a.e. $x \in I$.

We consider the Hardy type operator $T_{\alpha,\beta}$ defined by

$$T_{\alpha,\beta} f(x) := \int\limits_a^x \frac{u(s) W^\beta(s) f(s) w(s) ds}{\left(W(x) - W(s)\right)^{1-\alpha}}, \ \ x \in I.$$

When $u \equiv 1$ and $\beta = 0$ the operator $T_{\alpha,\beta}$ is called the fractional integral operator of a function f with respect to a function W ([3], p.248). When $u \equiv 1$ and $W(x) = x$ the operator $T_{\alpha,\beta}$ becomes the Riemann-Liouville operator I_α defined by

$$I_\alpha f(x) := \int\limits_a^x \frac{s^\beta f(s) ds}{(x - s)^{1-\alpha}}.$$

When $u \equiv 1$ and $W(x) \equiv ln\frac{x}{a}$, $a > 0$, this operator is the Hadamard operator $\mathcal{H}_\alpha$ defined by

$$\mathcal{H}_\alpha f(x) := \int\limits_a^x \frac{\left(ln\frac{s}{a}\right)^\beta f(s) ds}{s \left(ln\frac{x}{s}\right)^{1-\alpha}}.$$

Moreover, when $u \equiv 1$ and $W(x) = x^\sigma$, $\sigma > 0$, we get the operator $E_{\alpha,\beta}$ of Erdelyi-Kober type ([3], p.246) defined by

$$E_{\alpha,\beta} f(x) := \sigma \int\limits_a^x \frac{f(s) s^{\sigma\beta+\sigma-1} ds}{(x^\sigma - s^\sigma)^{1-\alpha}}.$$

The operator $T_{\alpha,\beta}$ was studied in [1] and [2] when $u \equiv 1$, $\beta = 0$ and $u \equiv 1$, $\beta > -\frac{1}{p'}$, respectively.

Theorem 1. *Let $0 < \alpha < 1$, $1 < p \le q < \infty$ and $\beta \ge 0$. Let u be a non-increasing function on I. Then the operator $T_{\alpha,\beta}$ is bounded from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$ if and only if*

$$A_{\alpha,\beta} = \sup_{z \in I} \left(\int\limits_a^z u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

moreover, $\|T_{\alpha,\beta}\| \approx A_{\alpha,\beta}$.

Theorem 2. *Let $0 < \alpha < 1$, $0 < q < p < \infty$, $p > \frac{1}{\alpha}$ and $\beta \ge 0$. Let u be a non-increasing function on I. Then the operator $T_{\alpha,\beta}$ is bounded from $L_{p,w}$ to $L_{q,v}$ if and only if*

$$B_{\alpha,\beta} = \left(\int\limits_a^b \left(\int\limits_z^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{p}{p-q}} \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_a^z u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} u^{p'}(z) W^{p'\beta}(z) w(z) dz \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Moreover, $\|T_{\alpha,\beta}\| \approx B_{\alpha,\beta}$.

References

[1] A.M. Abylayeva, D. Kaskirbaeva, *Boundedness and compactness of fractional integral operator type Holmgren in weighted Lebesgue spaces,* Eurasian Math. J. 2, (2007), 75–86 (in Russian).

[2] R. Oinarov, A.M. Abylayeva, *Criteria for the boundedness of a class of fractional integral operators,* Mathematical Journal. 4 (2004), no. 2 (12), 5–14 (in Russian).

[3] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications,* Science and Technology, Minsk, 1987 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: (26A33, 26D10, 47G10.)

Оценки наилучших приближений функций логарифмической гладкости

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет , Караганды, Казахстан
akishev@ksu.kz

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$, $\mathbb{I}^m = [0,1]^m$ и $\tau, p \in [1, +\infty)$. Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(2\pi\bar{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int_0^1 \left(\int_0^t f^*(y)dy \right)^\tau t^{\tau(\frac{1}{p}-1)-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}$$

конечна, где $f^*(y)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1], сс. 83, 197).

Для заданного натурального числа n рассмотрим множество $\square_n = \{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m \ : |k_j| < n, \ j = 1, ..., m\}$. Рассмотрим кратное ядро Дирихле $D_{\square_n}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\square_M} e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle}$, $\bar{x}\in\mathbb{I}^m$ и свертку функции $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$

$$\sigma_s(f,\bar{x}) = \int_{I^m} f(\bar{y})(D_{\square_{2^s}}(\bar{x}-\bar{y}) - D_{\square_{2^{s-1}}}(\bar{x}-\bar{y}))d\bar{y}, s\in\mathbb{N}.$$

Пусть $1\leq\theta\leq\infty$ и число $\alpha>0$. Рассмотрим пространство всех функций $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha\theta}\Big\|\sum_{s=[2^{l-1}]+1}^{2^l}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau}^{\theta} < \infty.$$

Это пространство обозначается символом $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ и совпадает с пространством Никольского - Бесова с логарифмической гладкостью (см. [2]).

В этом пространстве рассмотривается единичный шар

$$\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta} = \{f\in B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}\ : ||f||_{B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}}\leq 1\},$$

где норма

$$||f||_{B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}} = \|f\|_{p,\tau} + \Big\{\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha\theta}\Big\|\sum_{s=[2^{l-1}]+1}^{2^l}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

$E_{\square_n}(f)_{p,\tau} = \inf_{T\in\mathfrak{F}_{\square_n}} ||f-T||_{p,\tau}$ – наилучшее приближение функции $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ множеством $\mathfrak{F}_{\square_n}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ по каждой переменной. Для заданного класса $F\subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ положим $E_{\square_n}(F)_{p,\tau} = \sup_{f\in F} E_{\square_n}(f)_{p,\tau}$.

Основными результатами доклада являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1\leq\theta\leq\infty$, $1<p<\infty$, $1<\tau_2<\tau_1\infty$. *Если*

$f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{lm(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})\tau_2} \Big\| \sum_{s=[2^{l-1}]+1}^{2^l} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} < \infty,$$

то $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau_2} \leq C \Big\{ \sum_{l=0}^{\infty} 2^{lm(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})\tau_2} \Big\| \sum_{s=[2^{l-1}]+1}^{2^l} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \Big\}^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$. *Если* $\alpha > m(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1})$, *то*

$$E_{\square_n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2} \asymp (\log(n+1))^{-\alpha + m(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Отметим, что оценки наилучших приближений других аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ установил С.А. Стасюк [3], а в пространстве Лоренца даны в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

Список литературы

[1] С.Г. Крейн , Ю.И. Петунин , Е.М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов.* Москва, Наука, 1978.

[2] М.Л. Гольдман, *Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова.* Труды МИ АН СССР. 156 (1980), 47–81.

[3] С.А. Стасюк, *Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью.* Укр. мат. ж. 66 (2014), no 4, 493–499.

[4] Г. Акишев *Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца.* Материалы междунар. конф. "Воронежская зимняя математическая школа" (26 января - 1 февраля) - Воронеж. - 2017, 12-14.

AMS Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A25, 42A10.

Maximal operator in the local "complementary" generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets

X.A. Badalov [1], J.J. Hasanov [2]

[1] *Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan*
xayyambadalov@gmail.com
[2] *Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan.*
hasanovjavanshir@yahoo.com.tr

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $[1,\infty)$. An open set Ω is assumed to be bounded throughout the whole paper. We mainly suppose that

$$1 < p_- \le p(x) \le p_+ < \infty,$$

where $p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) > 1, \quad p_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty.$

We use the following notation: $\mathbb{R}^n$ is the n-dimensional Euclidean space, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an open set, $\chi_E(x)$ is the characteristic function of a set $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\})$, $\widetilde{B}(x,r) = B(x,r) \cap \Omega$, by c,C, c_1, c_2 etc, we denote various absolute positive constants, which may have different values even in the same line.

$\mathcal{P}(\Omega)$ is the set of bounded measurable functions $p : \Omega \to [1,\infty)$;

$\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ satisfying the local log-condition

$$|p(x)-p(y)| \leq \frac{A}{-\ln|x-y|}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2} \ x,y \in \Omega,$$

where $A = A(p) > 0$ does not depend on x, y;
$\mathbb{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ with $1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$;
$\mathbb{P}^{log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ with $1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$;
for Ω which may be unbounded, by $\mathcal{P}_\infty(\Omega)$, $\mathcal{P}^{log}_\infty(\Omega)$, $\mathbb{P}^{log}_\infty(\Omega)$ we denote the subsets of the above sets of exponents satisfying the decay condition (when Ω is unbounded)

$$|p(x)-p(\infty)| \leq \frac{A_\infty}{\ln(2+|x|)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

where $p_\infty = \lim\limits_{x\to\infty} p(x) > 1$.

In the spaces ${}^{\complement}\mathcal{M}^{p(\cdot),\omega}_{\{x_0\}}(\Omega)$ over unbounded sets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ we consider the Hardy-Littlewood maximal operator

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)| dy.$$

Definition 1. Let $x_0 \in \Omega$, $1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$. The local "complementary" generalized Morrey space ${}^{\complement}\mathcal{M}^{p(\cdot),\omega}_{\{x_0\}}(\Omega)$ is defined by the norm

$$\|f\|_{{}^{\complement}\mathcal{M}^{p(\cdot),\omega}_{\{x_0\}}} = \sup_{r>0} \frac{r^{\theta_{p'}(x_0,r)}}{\omega(r)} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega\setminus\widetilde{B}(x_0,r))}.$$

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open unbounded set, $p \in \mathbb{P}^{log}_\infty(\Omega)$ and the functions $\omega_1(t)$ and $\omega_2(t)$ satisfy the condition*

$$\int_t^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}\limits_{s<r<\infty} \omega_1(r) r^{\theta_{p'}(x_0,r)}}{s^{1+\theta_{p'}(x_0,s)}} ds \leq C\omega_2(t).$$

where C does not depend on t. Then the maximal operator M is bounded from the space ${}^{\complement}\mathcal{M}_{\{x_0\}}^{p(\cdot),\omega_1}(\Omega)$ to the space ${}^{\complement}\mathcal{M}_{\{x_0\}}^{p(\cdot),\omega_2}(\Omega)$.

AMJ Mathematics Subject Classification: 42B20, 42B25, 42B35.

Characterization of the spaces $\mathcal{E}^{s}_{\varphi,p,q}(T)$ by using differences of partial sums of the Fourier series

Zh.Zh. Baituyakova, M.T. Ilyasova

[1] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
E-mail:baituyakova.zhzh@yandex.ru

This work is dedicated to the investigation of characterization of the spaces $\mathcal{E}^{s}_{\varphi,p,q}(T)$ by using differences of the partial sums of the Fourier series.

First we give the definition of the generalized periodic Morrey space. Generalized Morrey spaces have been introduced independently by Mizuhara [1] and Nakai [2]. As usual, $B(x,r)$ denotes the open interval $(x-r,x+r)$. $\mathbb{T}$ denotes the one-dimensional torus, usually identified with $[-\pi,\pi]$.

Definition 1. Let $0 \le p < \infty$ and a function $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$,$\varphi \in \mathcal{G}_p$. We say that a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-periodic, belongs to the generalized periodic Morrey space $M_p^{\varphi}(\mathbb{T})$ if $f \in L_p(B(x,r))$ for all $x \in \mathbb{R}$ and all $r > 0$ and the following expression is finite:

$$\|f\|_{M_p^{\varphi}(\mathbb{T})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{0<r\le 2\pi} \frac{\varphi(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))}}{|B(x,r)|^{\frac{1}{p}}} \tag{1}$$

Remark 1. Clearly, if $\varphi(r) := |B(0,r)|^{-\lambda+1/p}, r > 0$, then we have coincidence $M_p^{\varphi}(T) = M_p^{\lambda}(T)$, in particular, if $\varphi(r) :=$

$|B(0,r)|^{1/p}, r>0$, then $M_p^{\varphi}(T) = L_p(T)$

In the definition of $M_p^{\varphi}(\mathbb{T})$, we assume that φ is in $\mathcal{G}_p$, that is, there exist some constants $C, C' > 0$ such that the inequalities

$$\varphi(t_1) \leq C\varphi(t_2) \quad \text{and} \quad C' t_1^{-\frac{d}{p}}\varphi(t_1) \geq t_2^{-\frac{d}{p}}\varphi(t_2)$$

hold for $0 < t_1 \leq t_2 < \infty$.

Definition and basic properties

Let $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ be a function such that

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{if} \quad |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Then, with $\phi_0 := \psi$,

$$\phi(x) := \phi_0(x/2) - \phi_0(x) \qquad \text{and} \qquad \phi_j(x) := \phi(2^{-j+1}x), \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

This implies

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(x) = 1 \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

We shall call $(\phi_j)_{j=0}^{\infty}$ a smooth dyadic decomposition of unity.

We define

$$S_N f(x) = S_{-N,N} f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{ikx} \quad x \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}_0$$

Here $c_k(f)$ is the Fourier coefficient of f given by

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Definition 2. Let $(\phi_j)_j$ be a smooth dyadic decomposition of unity as defined (1), (3). Let $s \in \mathbb{R}$ and $0 \leq q \leq \infty$. Let $0 < p < \infty$

and a function $\varphi \in \mathcal{G}_p$.Then $\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{T})$ is defined to be the set of all $f \in M^{\varphi}_p(\mathbb{T})$ such that

$$\|f|\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{T})\| := \Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\Big|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\phi_j(k)c_k(f)e^{ikx}\Big|^q\Big)^{1/q}\Big|M^{\varphi}_p(\mathbb{T})\Big\| < \infty. \tag{4}$$

Remark 2. Taking $\varphi(r) := |B(0,r)|^{\frac{1}{p}}$, $r > 0$, we are back in the case of classical periodic Lizorkin-Triebeland Nikol'skij-Besov spaces, i.e., we have

$$\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{T}) = F^s_{p,q}(\mathbb{T})$$

We shall call the spaces $\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{T})$ generalized periodic Lizorkin-Triebel-Morrey spaces. They represent the Lizorkin-Triebel scale built on the generalized Morrey space $M^{\varphi}_p(\mathbb{T})$. The nonperiodic version of this scale of spaces has been introduced by Tang and Xu in the year 2005 (for Morrey spaces). Lizorkin-Triebel-Morrey spaces, related to generalized Morrey spaces, have been considered recently by Nakamura, Noi and Sawano.

Theorem 1. *Let* $1 < p,q < \infty, s > 0$ *and* $\varphi \in \mathcal{G}_p$. *A function* $f \in M^{\varphi}_p(\mathbb{T})$ *belongs to* $\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{T})$ *if and only if*

$$\begin{aligned}\|f|\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}(\mathbb{T})\|^* &:= \|S_1 f|M^{\varphi}_p(\mathbb{T})\| \\ &+ \Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}|S_{2^{j+1}}f - S_{2^j}f|^q\Big)^{1/q}|M^{\varphi}_p(\mathbb{T})\Big\| < \infty.\end{aligned}$$

Furthermore the quantities $\|\cdot|\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}\|^*$ *and* $\|\cdot|\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}\|$ *are equivalent on* $M^{\varphi}_p(\mathbb{T})$, *i.e., there exist two positive constants A,B such that for all* $f \in M^{\varphi}_p(\mathbb{T})$,

$$A\|f|\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}\|^* \le \|f|\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}\| \le B\|f|\mathcal{E}^s_{\varphi,p,q}\|^*.$$

In case $\varphi(r) := |B(0,r)|^{1/p}, r > 0$ this goes back to Lizorkin (Besov spaces) and in case $\varphi(r) := |B(0,r)|^{-\lambda+1/p}, r > 0$ this theorem was proved in [3].

References

[1] T. Mizuhara, *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, Harmonic Anal., Proc. Conf., Sendai/Jap.* 1990, ICM-90 Satell. Conf. Proc., 183-189, 1991.

[2] E. Nakai, *Hardy "Littlewood maximal operator, singular integral operators, and the Riesz potential on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. 166 (1994), 95-103.

[3] M. Sautbekova and W. Sickel, *Strong summability of Fourier series and Morrey spaces*, Analysis Math. 40 (2014), 31-62.

AMS Mathematics Subject Classification: (42A15,42A20, 46E30.)

Integral inequalities for decreasing functions in Orlicz space

E.G. Bakhtigareeva[1], M.L. Goldman[2]

[1] *RUDN university, Moscow, Russia*
E-mail:salykai@yandex.ru

[2] *RUDN university, Moscow, Russia*
E-mail:seulydia@yandex.ru

Let $R_+ = (0, \infty)\,,\ M = M(R_+)$ be the set of Lebesgue measurable almost everywhere finite functions,
$M_+ = \{f \in M(R_+) : f > 0\}\,, u, v \in M_+$.

Let $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ be the Young function, i.e.

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau, \tag{1}$$

where function $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ is increasing and left-continuous, moreover $\varphi(0) = 0$, $\quad \varphi$ is neither identical to zero nor identical to infinity on $(0, \infty)$. Denote

$$t_0 \equiv t_0(\Phi) = \sup\{t \in [0, \infty) : \quad \Phi(t) = 0\}\,; \tag{2}$$

$$t_\infty \equiv t_\infty(\Phi) = \inf\{t \in R_+ : \quad \Phi(t) = \infty\} \tag{3}$$

(if $\Phi(t) < \infty, \quad t \in R_+$, we assume $t_\infty(\Phi) = \infty$). Then,

$$t_0 \in [0, \infty); \quad t_\infty \in (0, \infty]; \quad t_0 \le t_\infty, \tag{4}$$

$$\Phi(t) = 0, \quad t \in [0, t_0], \quad \Phi(t) = \infty, t > t_\infty \tag{5}$$

(the last when $t_\infty < \infty$). We require that

$$t_0 t_\infty^{-1} = 0 \tag{6}$$

(i.e., at least one of the conditions is fulfilled: $t_0 = 0; \quad t_\infty = \infty$).

Let Ψ be the complementary Young function for Φ, that is

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \infty];$$
$$\psi(\tau) = \inf\{\sigma : \varphi(\sigma) \ge \tau\}, \quad \tau \in [0, \infty]. \tag{7}$$

Function ψ is left-inverse for the left-continuous increasing function φ. It has the same properties as φ, so that Ψ is the Young function.

Definition 1. Recall that Orlicz space $L_{\Phi,v}$ is determined as the set of functions $f \in M : \|f\|_{\Phi,v} < \infty$, where

$$\|f\|_{\Phi,v} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_0^\infty \Phi\left(\lambda^{-1}|f(x)|\right) v(x) dx \le 1\right\}.$$

Consider

$$0 < V(t) := \int_0^t v d\tau < \infty, \quad \forall t \in R_+, V(+\infty) = \infty. \tag{8}$$

and

$$\begin{array}{ll} \Re_a(g;t) & := V(t)^{-1} \int_{\delta_a(t)}^t g(\tau) d\tau, \\ \delta_a(t) & := V^{-1}\left(aV(t)\right), \quad t \in R_+. \end{array} \tag{9}$$

Its conjugate operator is following

$$\Re_a^*(f;\tau) = \int_\tau^{\delta_{a^{-1}}(\tau)} \frac{f(t)}{V(t)} dt, \quad \tau \in R_+. \tag{10}$$

Theorem 1. *Let T, T^* be positively homogeneous operators mapping M_+ in M_+ and be conjugate, i.e.,*

$$\int_{R_+} gTf d\tau = \int_{R_+} fT^* g d\tau, \quad f, g \in M_+. \tag{11}$$

Let Φ_1, Φ_2 - be Young functions satisfying (6); let Ψ_1, Ψ_2 be their complementary functions; let $u, v, w \in M_+$, and the condition (8) be fulfilled. We fix $a \in (0,1)$, and define operator $\Re_a$ by formula (9). Then the following three inequalities are equivalent:

$$\exists c_1 \in R_+ : \|wTf\|_{\Phi_2,u} \leq c_1 \|f\|_{\Phi_1,v}, \quad f \in \Omega; \tag{12}$$

$$\exists c_2 \in R_+ : \|\Re_a T^*(wg)\|_{\Psi_1,v} \leq c_2 \left\|gu^{-1}\right\|_{\Psi_2,u} \quad g \in M_+; \tag{13}$$

$$\exists c_3 \in R_+ : \|wT\Re_a^*(vf)\|_{\Phi_2,u} \leq c_3 \|f\|_{\Phi_1,v} \quad f \in M_+. \tag{14}$$

Remark 1. Constants c_2, c_3 in (13), (14) depend on $a \in (0,1)$, besides

$$0 < e(a) \leq c_1 c_3^{-1} \leq E(a) < \infty.$$
$$0 < d \leq c_3 c_2^{-1} \leq D < \infty,$$

where d, D do not depend on a.

Theorem 2. *In the conditions of Theorem 1 we assume that*

$$t_0(\Phi_1) = t_0(\Phi_2) = 0, \quad t_\infty(\Phi_1) = t_\infty(\Phi_2) = t_\infty \in (0, \infty]$$

(see (2),(3)). Then the following inequalities are equivalent:

$$\exists c_1 \in R_+ : \Phi_2^{-1}\left\{\int_{R_+} \Phi_2\left(wTf\right) udt\right\}$$
$$\Phi_1^{-1}\left\{\int_{R_+} \Phi_1(c_1 f) vdt\right\}, \quad f \in \Omega;$$

$$\exists c_3 \in R_+ : \Phi_2^{-1}\left\{\int_{R_+} \Phi_2\left(wT\Re_a^*(vf)\right) udt\right\}$$
$$\Phi_1^{-1}\left\{\int_{R_+} \Phi_1\left(c_3 f\right) vdt\right\}, \quad f \in M_+.$$

Moreover, c_3 is connected with c_1 as in Theorem 1; in particular the estimate holds

$$0 < e(a) \leq c_1 c_3^{-1} \leq E(a) < \infty.$$

This work is supported by The Russian Foundation for Basic Research (pr. no 15-01-02732).

References

[1] S. Bloom, R. Kerman, *Weighted integral inequalities for operators of Hardy type.* Studia Math.,vol. 110 (1994), is. 1, 35–52

[2] P. Drabek, ,H. P Heinig, A. Kufner, *Weighted modular inequalities for monotone functions.* J. Inequal. and Applications, vol. 1 (1997), 183–197.

AMS Mathematics Subject Classification: 42A16, 46E30.

Об оценке сверток функций в многомерных пространствах типа Морри

Б.Е. Батыров

Назарбаев интеллектуальная школа химико-биологического направления, Петропавловск, Казахстан
E-mail: b_batyrov@mail.ru

Настоящая работа посвящена исследованию свойств функций в связи с оценками сверток в многомерных пространствах Морри.

Известно, что в теории дифференциальных уравнений с частными производными и в теории вариации вместе с весовыми пространствами $L_{p,w}$ важную роль играют пространства Морри $M_{p,\lambda}$. Они определяются следующим образом.

Определение 1. Пусть $0 < \lambda < n$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда говорят, что $f \in M_{p,\lambda}$, если $f \in L_p^{loc}(R^n)$ и

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} = \sup_{x \in R^n} \sup_{,r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty.$$

Здесь $B(x, r)$ – открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \epsilon R^n$.

Введем понятие свёртки функций.

Определение 2. Свёрткой функций $f_1, f_2 \in L_1^{loc}(R^n)$ называется функция $f_1 * f_2$, определяемая для любых $x \in R^n$ равенством

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{R^1} f_1(x - y) f_2(y) \, dy,$$

если написанный интеграл существует и конечен.

Вопрос о существовании свертки в пространствах Морри связан с вопросом о существовании свертки в n-мерном шаре $B(0,\ |x|)$.

Пусть

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{B(0,|x|)} f_1(x - y) f_2(y) \, dy = \int_0^x f_1(x - y) f_2(y) \, dy.$$

Сформулируем аналог неравенства Юнга для оценки норм сверток в пространствах Морри $M_{p,\lambda}$.

Теорема. *Пусть* $0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < n$, $1 \leq p_1, p_2 \leq p_3 \leq \infty$ *и* $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$. *Тогда для любых* $f_1 \in M_{p_1,\lambda_1}$, $f_2 \in M_{p_2,\lambda_2}$ *почти для всех* $x \in R^n$ *существует свёртка* $(f_1 * f_2)(x)$, $(f_1 * f_2)(x) \in M_{p_3,\lambda_3}$ *и*

$$\|f_1 * f_2\|_{M_{p_3,\lambda_3}} \leq \|f_1\|_{M_{p_1,\lambda_1}} \|f_2\|_{M_{p_2,\lambda_2}}.$$

В работе [1] автором был рассмотрен случай, когда $n = 1$. Аналог неравенства Юнга для функций из общих глобальных пространств типа Морри обстоятельно исследован в [2].

Список литературы

[1] Б.Е. Батыров, *О свойствах функций в одномерных пространствах типа Морри,* Материалы международной научно-практической конференции “Теория функций, функциональный анализ и их приложения” 1 (2013), -82-84.

[2] В.И. Буренков, Т.В. Тарарыкова, *Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространств типа Морри,* Тр. МИАН 293 (2016), 113–132.

AMS Mathematics Subject Classification: 42 B20, 42 B25, 42 B39

Некоторые фракталы на плоскости Лобачевского

Ж.А. Бахрамов

Институт математики, Ташкент, Узбекистан
bahramovjasurbek@gmail.com

Наша цель — построение фракталов в пространстве Лобачевского. Для этого из известных моделей пространства Лобачевского мы выбрали модель Бельтрами-Клейна на открытом круге единичного радиуса $B(O,1) \subset \mathbb{R}^2$. Среди всевозможных способов построения фракталов мы решили использовать системы итерированных функций(СИФ) и L-системы ([1]).

Поскольку для построения аттракторов СИФ мы работаем с компактными множествами, мы ограничимся рассмотрением замкнутого шара $\bar{B}(O,R) \subset B(O,1), \quad R \in (0,1)$. Тогда по известной теореме Хатчинсона ([1]) для СИФ $\{\{f_i\}_{i=1}{}^N, \quad \bar{B}(O,R)\}$ $(N \in \mathbb{N})$, где $f_i : \bar{B}(O,R) \longrightarrow \bar{B}(O,R)$ — сжимающие отображения, существует и единственно непустое компактное множество $A = \cup f_i(A)$, называемое аттрактором этой СИФ. Зачастую A является фрактальным множеством.

В случае СИФ на $\mathbb{R}^2$ наиболее часто используют аффинные преобразования f_i. Эти преобразования представимы в виде композиции сжатий по двум осям, поворота, отражения и параллельного переноса. Мы даем аналоги этих преобразований для модели Бельтрами-Клейна и строим СИФ на $B(O,1)$, аттракторы которых являются некоторыми геометрическими аналогами аттракторов СИФ на $\mathbb{R}^2$.

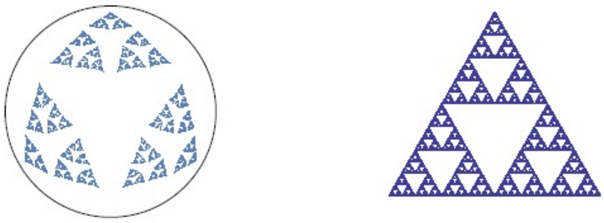

Рис 1. Пример аналога Ковра Серпинского в пространстве Лобачевского (слева аттрактор в $B(O,1)$, справа — в $\mathbb{R}^2$).

Список литературы

1. Р.М. Кроновер, *Фракталы и хаос в динамических системах,* – М.: Техносфера, 2006.

2. Е.Н. Сосов, *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 1,* Учебно-методическое пособие. – Казань: Казанский федеральный университет, 2012.

3. Е.Н. Сосов, *О действии мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского,* Учен. зап. Казан. гос. ун–та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012. С. 156–160.

Об $L_p - L_q-$ ограниченности некоторых классов псевдодифференциальных операторов на $n-$мерном торе

Д.Б. Базарханов

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail:dauren.mirza@gmail.com

В сообщении будут представлены результаты об $L_p - L_q-$ ограниченности некоторых классов псевдодифференциальных операторов на $n-$мерном торе с
(a) так называемыми грубыми символами;
(b) символами из периодических классов Хёрмандера для ряда соотношений между p, q и параметрами классов

AMS Mathematics Subject Classification: 58J40, 35S05, 42B05

Characterizations of semifinite subdiagonal algebras

T.N. Bekjan [1], M. Zhaxylykova[2]

[1] *Xinjiang University, Xinjiang, China*
E-mail: bekjant@yahoo.com
[2] *L. N. Gumilyov Eurasian national University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: makpal.zhaksylykova@mail.ru

In 1967, Arveson [1] introduced the notion of finite, maximal, subdiagonal algebras $\mathcal{A}$ of $\mathcal{M}$, as non-commutative analogues of weak* Dirichlet algebras. In [5], among other things, Blecher and Labuschagne studied tracial subalgebras of $\mathcal{M}$ and transfered a large part of the circle of theorems characterizing weak* Dirichlet algebras, to Arveson's noncommutative setting of subalgebras of finite von Neumann algebras. The first author and Oshanova [3] defined tracial subalgebras of semifinite von Neumann algebras and proved that if a tracial subalgebra $\mathcal{A}$ has the unique normal state extension property and τ-maximal or satisfies L_2-density, then $\mathcal{A}$ is a subdiagonal algebra. This is the extensions of corresponding results in [5] to the semifinite case.

In this talk we extend some results in [5] to the semifinite case.

We denote by $\mathcal{M}$ a semifinite von Neumann algebra on the Hilbert space $\mathcal{H}$ with a normal faithful semifinite trace τ. The set of all τ-measurable operators will be denoted by $L_0(\mathcal{M})$. For $0 < p < \infty$, $L_p(\mathcal{M})$ is defined as the set of all τ-measurable operators x such that

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

In addition, we put $L_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ and denote by $\|\cdot\|_\infty$ $(= \|\cdot\|)$, the usual operator norm.

Definition 1. A w*-closed subalgebra $\mathcal{A}$ of $\mathcal{M}$ is called a subdiagonal algebra of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathcal{E}$(or $\mathcal{D}$) if

(i) $\mathcal{A} + J(\mathcal{A})$ is w*-dense in $\mathcal{M}$, where $J(\mathcal{A}) = \{x^* : \ x \in \mathcal{A}\}$,

(ii) $\mathcal{E}(xy) = \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)$, $\forall\, x, y \in \mathcal{A}$,

(iii) $\mathcal{A} \cap J(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ is then called the diagonal of $\mathcal{A}$.

Since $\mathcal{D}$ is semifinite, we can choose an increasing family of $\{e_i\}_{i\in I}$ of τ-finite projections in $\mathcal{D}$ such that $e_i \to 1$ strongly, where 1 is identity of $\mathcal{M}$. Throughout, the $\{e_i\}_{i\in I}$ will be used to indicate this net.

Definition 2. A weak*-closed subalgebra $\mathcal{A}$ of $\mathcal{M}$ is called a tracial subalgebra of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathcal{E}$(or $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap J(\mathcal{A})$) if

(i) $\mathcal{D}$ is semifinite,

(ii) $\mathcal{E} : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ is a normal homomorphism,

(iii) $\tau(x) = \tau(\mathcal{E}(x))$, $\forall\, x \in \mathcal{A}$.

By Lemma 2.3 of [3], $\mathcal{E}$ is precisely the restriction to $\mathcal{A}$ of the unique faithful normal conditional expectation Φ from $\mathcal{M}$ onto $\mathcal{D}$ such that $\tau = \tau \circ \Phi$. Hence we may continue to write Φ as $\mathcal{E}$, and we call this extension the conditional expectation onto $\mathcal{D}$.

Let $\mathcal{A}$ be a tracial subalgebra of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathcal{D}$ and let e be a projection in $\mathcal{D}$. We define

$$\mathcal{M}_e = e\mathcal{M}e, \quad \mathcal{A}_e = e\mathcal{A}e, \quad \mathcal{D}_e = e\mathcal{D}e,$$

and $\mathcal{E}_e$ be the restriction of $\mathcal{E}$ to $\mathcal{M}_e$. By Lemma 2.5 in [3], we have that $\mathcal{A}_e$ is a tracial subalgebra of $\mathcal{M}_e$ with respect to $\mathcal{E}_e$ (or $\mathcal{D}_e$).

We obtain the following characterizations of subdiagonal algebra.

Theorem 1. *Let $\mathcal{A}$ be a tracial subalgebra of $\mathcal{M}$ with respect to $\mathcal{D}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *$\mathcal{A}$ is a subdiagonal algebra of $\mathcal{M}$.*

(ii) *For any $i \in I$, $\mathcal{A}_{e_i}$ is a subdiagonal algebra of $\mathcal{M}_{e_i}$.*

(iii) *For any $i \in I$, $\mathcal{A}_{e_i}$ has factorization.*

(iv) *For any $i \in I$, $\mathcal{A}_{e_i}$ is logmodular,*

(v) *For any $i \in I$, $\mathcal{A}_{e_i}$ satisfies Szegö's theorem.*

References

[1] W.B. Arveson, *Analyticity in operator algebras*, Amer. J. Math. 89 (1967), 578–642.

[2] T.N. Bekjan, *Noncommutative Hardy space associated with semi-finite subdiagonal algebras*, J. Math. Anal. Appl. 429(2015), 1347–1369.

[3] T.N. Bekjan, A. Oshanova, *Semifinite tracial subalgebras*, to appear Ann. Funct. Anal.

[4] D.P. Blecher, L. E. Labuschagne, Logmodularity and isometries of operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003),1621-1646.

[5] D.P. Blecher, L.E. Labuschagne, *Characterization of noncommutaive* $\mathcal{H}^\infty$, Integr. Equ. Oper. Theory 56 (2006), 301-321.

AMS Mathematics Subject Classification: Primary 46L52; Secondary 47L05.

О порядке тригонометрического поперечника анизотропного класса Никольского–Бесова

К.А. Бекмаганбетов[1], Е. Толеугазы[2]

[1] *Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан*
E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.ru
[2] *ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: toleugazy-y@yandex.ru

Пусть $V \subset L_1(\mathbb{T}^n)$ – нормированое пространство и $F \subset V$ – некоторый функциональный класс. Тригонометрический поперечник класса F в пространстве V определяется следующим образом (см. [3])

$$d_M^T(F,V) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f\in F} \inf_{t(\Omega_M;\mathbf{x})} \|f(\cdot) - t(\Omega_M;\cdot)\|_V ,$$

где $t(\Omega_M;\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{M} c_j \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_j,\mathbf{x})}$, $\Omega_M = \{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_M\}$ – набор векторов $\mathbf{k}_j = (k_1^j,\dots,k_n^j)$ из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, c_j – некоторые числа $(j = 1,\dots,M)$.

Для изотропных пространств и классов, а именно, когда $V = L_q(\mathbb{T}^n)$, а $F = W^{\mathbf{r}}_{p,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ или $F = H^{\mathbf{r}}_p(\mathbb{T}^n)$ порядки тригонометрических поперечников исследованы в работе Э.С. Белинского [2], а в случае $F = B^{\mathbf{r}}_{p,\theta}(\mathbb{T}^n)$ – в работе А.С. Романюка [4].

Нами исследуется задача об оценке порядка тригонометрического поперечника анизотропного класса Никольского-Бесова $B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)$ в метрике анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{q}\theta}(\mathbb{T}^n)$.

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ – измеримая функция, заданная на $\mathbb{T}^n$. Через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1,\ldots,t_n)$ обозначим функцию, полученную применением к первой невозрастающей перестановки, последовательно по переменным $x_1,\ldots,x_n$, при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n)$ удовлетворяют условиям, если $0 < p_j < \infty$, то $0 < r_j \le \infty$, если же $p_j = \infty$, то и $r_j = \infty$ для $j = 1,\ldots,n$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)$ называется множество функций, для которых конечна следующая величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)} = \Bigg(\int_0^{2\pi}\cdots\Bigg(\int_0^{2\pi}\Big(t_1^{1/p_1}\cdots$$

$$\cdots\ t_n^{1/p_n} f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1,\ldots,t_n)\Big)^{r_1}\frac{dt_1}{t_1}\Bigg)^{r_2/r_1}\cdots\frac{dt_n}{t_n}\Bigg)^{1/r_n}.$$

Здесь выражение $\left(\int_0^{2\pi}(G(s))^r\frac{ds}{s}\right)^{1/r}$ при $r = \infty$ понимается как $\sup_{s>0} G(s)$.

Для функций $f \in L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)$ обозначим через

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f)e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

где $\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}$ – коэффициенты Фурье функции f по кратной тригонометрической системе, $\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n : \left[2^{s_i-1}\right] \le |k_i| < 2^{s_i}, i = 1,\ldots,n\}$, $(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$.

Пусть далее $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) < \infty$, $\mathbf{0} < \tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n) \le \infty$. Анизотропным классом Никольского-Бесова

$B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)$ (см. [1]) называется множество функций f из $L_{\mathbf{pr}}$ для которых справедливо неравенство

$$\|f\|_{B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)} = \left\| \left\{ \mathbf{2}^{(\alpha,\mathbf{s})} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f,\cdot)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n)} \right\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^n_+} \right\|_{l_\tau} \leq 1,$$

где $\|\cdot\|_{l_\tau}$ – норма дискретного пространства Лебега l_τ со смешанной метрикой.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \mathbf{2} < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{1} \leq \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n), \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n), \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$ *и* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *таково, что* $\alpha_j > 1/p_j$ *для* $j = 1, \ldots, n$. *Пусть далее* $\zeta = \min\{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j : j = 1, \ldots, n\}$, $D = \{j = 1, \ldots, n : \alpha_j - 1/p_j + 1/q_j = \zeta\}$, $j_1 = \min\{j : j \in D\}$, $q_j = q_{j_1}$ *для всех* $j \in D$ *и* $q_j \geq q_{j_1}$ *для всех* $j \notin D$. *Тогда справедливо*

$$d^T_M(B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^n), L_{\mathbf{q}\theta}(\mathbb{T}^n)) \asymp M^{-(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2)} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2) + \sum_{j\in D\setminus\{j_1\}} \left(1/2 - 1/\tau_j\right)_+}, \quad (1)$$

где $|D|$ *– количество элементов множества* D, $a_+ = \min(a; 0)$.

Замечание 1. Отметим, что при $\mathbf{p} = \mathbf{r} = (p, \ldots, p)$, $\tau = (\tau, \ldots, \tau)$ и $\mathbf{q} = \theta = (q, \ldots, q)$ утверждение доказанной теоремы совпадает с соответствующим результатом из работы А.С. Романюка [4].

Работа выполнена в рамках проекта, финансируемого Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант № 0816/ГФ4).

Список литературы

[1] Г.А. Акишев, *О порядках M-членного приближения классов в пространстве Лоренца.* Мат. журнал 11 (2011), no. 1 (39), 5–29.

[2] Э.С. Белинский, *Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники,* Докл. АН СССР 284 (1985), no. 6, 1294–1297.

[3] Р.С. Исмагилов, *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами,* УМН 29 (1974), no. 3, 161–178.

[4] А.С. Романюк, *Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных,* Мат. сбор. 197 (2006), no. 1, 71–96.

О достаточных условиях компактности коммутатора для потенциала Рисса в обобщенных пространствах Морри

Н.А. Бокаев, Д.Т. Матин

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, г.Астана, Казахстан
E-mail: bokayev2011@yandex.ru, d.matin@mail.ru

В данной работе приводятся достаточные условия компактности коммутатора для потенциала Рисса $[b, I_\alpha]$ в обобщенных пространствах Морри M_p^w.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, w измеримая неотрицательная функция на $(0, \infty)$. Обобщенное пространство Морри $M_p^w \equiv M_p^w(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{M_p^w} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| w(r) \, \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\infty(0,\infty)},$$

где $B(x, r)$ шар с центром в точке x и с радиусом r.

Пространство M_p^w совпадает с известным пространством Морри M_p^λ при $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, которое, в свою очередь, для $\lambda = 0$ совпадает с пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$ [1].

В соответствии с обозначениям [3], [4], обозначим через $\Omega_{p\infty}$ множество всех функций, которые являются неотрицательными, измеримыми на $(0,\infty)$, не эквивалентные 0 и такие, что для некоторого $t>0$, $\|w(r)r^{\frac{n}{p}}\|_{L_\infty(0,t)}<\infty$, $\quad \|w(r)\|_{L_\infty(t,\infty)}<\infty$.

Потенциал Рисса I_α порядка $\alpha(0<\alpha<n)$ играет важную роль в гармоническом анализе и в теории потенциалов, и определяется следующим образом

$$I_\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

Для функции $b \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ через M_b обозначим мультипликационный оператор $M_b f = bf$, где f- измеримая функция. Тогда коммутатор для потенциала Рисса I_α и оператора M_b определяется равенством

$$[b, I_\alpha] = M_b I_\alpha - I_\alpha M_b = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{[b(x)-b(y)]\, f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Коммутаторам $[b, I_\alpha]$ посвящены работы [5], [6].

Говорят, что функция $b(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $BMO(\mathbb{R}^n)$, если $\|b\|_* = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |b(x)-b_Q|\, dx = \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} M(b,Q) < \infty$, где Q - куб из $\mathbb{R}^n$ и $b_Q = \frac{1}{|Q|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$.

Через $VMO(\mathbb{R}^n)$ обозначим BMO-замыкание пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ множество всех функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем. Через $\chi_{(a,b)}$ обозначим характеристическую функцию отрезка (a,b), через ${}^cB$ – дополнение множества B.

Теорема А. (см. [1], [2]) Предположим, что $1 \le p \le \infty$ и $w \in$

$\Omega_{p\infty}$. Предположим, что подмножество S из M_p^w удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{f\in S}\|f\|_{M_p^w}<\infty, \tag{1}$$

$$\lim_{u\to 0}\sup_{f\in S}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_{M_p^w}=0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{f\in S}\left\|f\chi_{{}^cB(0,r)}\right\|_{M_p^w}=0. \tag{3}$$

Тогда S является предкомпактным множеством в $M_p^w(\mathbb{R})$.

Следующее утверждение является следствием теоремы 3.8 работы [4].

Теорема B (см. [5]) Пусть $0<p<q<\infty$, $0<\lambda<\frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q}<\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ и (w_1,w_2) удовлетворяют следующему условию

$$\int_r^\infty ln\left(e+\frac{l}{r}\right)\frac{ess\inf\limits_{t<s<\infty}w_1(s)dt}{t}\le Cw_2(r). \tag{4}$$

Тогда $[b,I_\alpha]$ ограничен из $M_p^{w_1}\mathbb{R}^n$ в $M_q^{w_2}\mathbb{R}^n$.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы о достаточном условии компактности коммутатора $[b,I_\alpha]$ в обобщенном пространстве Мории $M_p^w(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<n(1-\frac{1}{q})$, $1\le p\le\ \infty$, $1<q<\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, $b\in VMO(\mathbb{R}^n)$, *функции* $w_1,w_2\in\Omega_{p,\infty}$ *удовлетворяют условию (4). Тогда коммутатор* $[b,I_\alpha]$ *является компактным оператором из* $M_p^{w_1}$ *в* $M_q^{w_2}$.

Данная работа выполнена при поддержке Государственного проекта 0085/PTSF-14, гранта Министерства образования и науки (проект 2709/ГФ4).

Список литературы

[1] N.A. Bokayev, V.I. Burenkov, D.T. Matin, *On the pre-compactness of a set in the generalized Morrey spaces*, AIP Conference Proceedings., Vestnyk KarGU , 20 (2016), no. 4, 18 – 30. (in Russian)

[2] N.A. Bokayev, V.I. Burenkov, D.T. Matin, *On the pre-compactness of a set in the generalized Morrey spaces,* AIP Conference Proceedings, 3 (2016), 1759, 020108. doi: 10.1063/1.4959722

[3] V. I. Burenkov, *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I.*, Eurasian Math. J. 3 (2012), no. 3, 11 – 32.

[4] V. I. Burenkov, *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II*, Eurasian Math. J. 4 (2013), no. 1, 21 – 45.

[5] V. S. Guliyev, *Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators*, Eurasian Math. J. 3 (2012), no. 3, 33 – 61.

[6] Y. Chen, Y. Ding, X. Wang, *Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey space,* Potential Anal. 4 (2009), 301–313.

AMS Mathematics Subject Classification:42 B20, 42 B25, 42 B39

О множествах единственности для рядов по обощенной системе Фабера-Шаудера

Н.А. Бокаев, А.Т. Сыздыкова

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, г.Астана, Казахстан
E-mail: bokayev2011@yandex.ru, aizhan-syzdykova@yandex.kz

В работе приводится необходимое и достаточное условие для того чтобы заданное множество было множеством единственности для произвольного ряда по обобщенной системе Фабера-Шаудера. Для рядов со сходящимися к нулю коэффициентами доказано, что счетное множество является множеством единственности.

Пусть задана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел, таких, что $p_0 = 1$, а $p_n \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Положим $m_n = p_0 p_1 \cdots p_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда для любой точки $x \in [0,1] \backslash Q$, где

$$Q = \left\{ \frac{l}{m_n} \right\}, \quad 0 \leq l \leq m_n, \quad n \geq 0, \quad l \in Z,$$

существует единственное разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{m_k},$$

$0 \leq \alpha_k(x) \leq p_k - 1$, $\alpha_k(x)$-целые.

Любое целое число $k \geq 2$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} &k = m_n + r(p_n + 1 - 1) + s, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ &r = 0, 1, \ldots, m_n - 1; \quad s = 1, 2, \ldots, p_n + 1 - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Определим систему функций $\Phi\{p_n\} = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $x \in [0,1]$,

$$\varphi_k(x) = \varphi_{n,r}^{(s)}(x) =$$

$$\begin{cases} (m_{n+1}x - p_{n+1}r - \alpha_{n+1}(x)) \exp \frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}} + \frac{1 - \exp \frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}}}{1 - \exp \frac{2\pi i s}{p_{n+1}}}, & x \in \left(\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right) \backslash Q \\ 0, & x \bar{\in} \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right] \end{cases} \tag{2}$$

где $k \geq 2$, n, r, s из (1).

Пользуясь тем, что множество $[0,1] \backslash Q$ всюду плотно на $[0,1]$, продолжим функцию $\varphi_{n,r}^{(s)}(x)$ по непрерывности на отрезок $\left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right]$.

Таким образом, система $\Phi\{p_n\}$ полностью определена и состоит из непрерывных, кусочно-линейных функций. При $p_n = 2,\ n = 1, 2, ...$ система функций $\Phi\{p_n\}$ совпадает с системой Фабера - Шаудера.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(x). \tag{3}$$

Определение. Множество $E \subset [0, 1]$ называется U-множеством или множеством единственности для ряда (3), если из сходимости ряда (3) к нулю на $[0, 1]\backslash E$ следует, что $a_k = 0,\ k = 0, 1, ...$

Теорема 1. *Для того, чтобы множество было множеством единственности для рядов по системе $\Phi\{p_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы $E \subset [0, 1]\backslash Q$.*

Теорема 2. *Если ряды по системе $\Phi\{p_n\}$ удовлетворяют условию,*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}(x) = 0,\ x \in Q \tag{4}$$

где $n_k(x)$ -возрастающая последовательность номеров всех тех функций $\phi_n(x)$ носители которых содержат x, то множество $E \subset [0, 1]$, для которого $E \frown Q$ конечно, будет множеством единственности для таких рядов.

Теорема 3. *Счетное множество является множеством единственности для рядов по системе $\Phi\{p_n\}$ с условием (4).*

В случае $p_n = 2\ n = 1, 2, ...$ подобные результаты доказаны в [4].

Данная работа выполнена при поддержке Государственного проекта 0085/PTSF-14, гранта Министерства образования и науки (проект 2709/ГФ4).

Список литературы

[1] Т.У. Аубакиров, Н.А. Бокаев, А. Зулхажав, *О свойствах разложений функций в ряд по системе типа Фабера-Шаудера*, Вестник КарГУ, 1 (2002), no. 1(25), 11-22.

[2] Т.У. Аубакиров, Н.А. Бокаев, *О новом классе систем функций типа Фабера-Шаудера*, Математические заметки. 82 (2007), no.5, 643-651.

[3] Б.С. Кашин, А.А. Саакян, *Ортогональные ряды,* Наука, 1984.

[4] Н.Н.Холщевникова, *О множествах единственности для рядов по различным системам функций*, Известия РАН, серия математическая, 57 (1993), no. 1, 167-182.

AMS Mathematics Subject Classification: 42 B20, 42 B25, 42 B39

Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space

V.I. Burenkov

RUDN university, Moscow, Russia
E-mail: burenkov@cardiff.ac.uk

Abstract of the talk for a wide range of the numerical parameters necessary and sufficient conditions will be presented on the weight function of the weighted Lebesgue space and on the functional parameter of the general local Morrey-type space, ensuring the boundedness of the general multi-dimensional Hardy operator from the weighted Lebesgue space to the general local Morrey-type space.

Weighted norm inequalities for generalized Fourier-type transforms

A. Debernardi

Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona, Spain
E-mail: adebernardi@crm.cat

We study weighted norm inequalities

$$\|Ff\|_{q,u} \lesssim \|f\|_{p,v}$$

(focusing especially on those with power weights u, v) for the integral transform

$$Ff(y) = \int_0^\infty s(x)f(x)K(x,y)\,dx,$$

where K is a continuous kernel and s is a nonnegative nondecreasing function such that $s(x) \lesssim s(2x)$ for $x > 0$. Furthermore, we assume there exists a nonnegative nondecreasing function w satisfying $s(x)w(1/x) \asymp 1$ for $x > 0$, such that $|K(x,y)| \lesssim \min\left\{1, (s(x)w(y))^{-1/2}\right\}$ for $x, y > 0$. The considered transforms are similar to the Fourier-type transforms, those satisfying Bessel's inequality (see [2, 4, 5]), i.e.,

$$\|Ff\|_{2,w} \lesssim \|f\|_{2,s}.$$

However, we do not assume the latter. This leads into results that are not optimal when applied to Fourier-type transforms (such as the Fourier transform, or the classical Hankel transform, cf. [1]), but on the other hand they can be applied to a wider amount of transforms, and in the latter case they are best possible in general.

Among the applications, we can derive weighted norm inequalities for several transforms. We mention the so-called $\mathcal{H}_\alpha$ and $\mathcal{Y}_\alpha$-transforms, where the kernels are the Bessel function of the second kind Y_α and the Struve function $\mathbf{H}_\alpha$, respectively. We can also prove that for transforms with kernel represented by a power series, its corresponding weighted norm inequalities hold under less restrictive conditions for functions with certain vanishing moments (see, for instance, [3]).

This research was partially supported by Centre de Recerca Matemàtica in Barcelona and the grant MTM2014–59174–P. The author also acknowledges Fundació Ferran Sunyer i Balaguer from Institut d'Estudis Catalans.

References

[1] D. Gorbachev, E. Liflyand, S. Tikhonov, *Weighted Pitt inequalities for integral transforms*,

[2] G.H. Hardy, E.C. Titchmarsh, *A class of Fourier kernels*, Proc. London Math. Soc. (1933), no. 35-S2, 116–155.

[3] C. Sadosky, R.L. Wheeden, *Some weighted norm inequalities for the Fourier transform of functions with vanishing moments*, Trans. Amer. Math. Soc. (1987) no. 300, 521–533.

[4] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1937.

[5] G.N. Watson, *General transforms*, Proc. London Math. Soc. (1933), no. 35-S2., 156–199.

AMS Mathematics Subject Classification: 42A38.

Неравенства типа Ульянова для модулей гладкости дробного порядка

А.А. Джумабаева

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан; ainurjumabay@gmail.com

Пусть $L_p = L_p[0,2\pi]$ $(1 \leq p < \infty)$ пространство $2\pi-$периодических измеримых функций, для которых $|f|^p$ интегрируема, и $L_\infty \equiv C[0,2\pi]$ -пространство $2\pi-$периодических непрерывных функций с $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, 0 \leq x \leq 2\pi\}$.

Пусть

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p = \sup_{|h|\leq\delta} \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_p$$

модуль гладкости дробного порядка функции $f(x) \in L_p$ где

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu C_\alpha^\nu f(x + (\alpha-\nu)h), \alpha > 0.$$

Пусть функция $f \in L_1$ имеет ряд Фурье

$$f(x) \approx \sigma(f) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu(f)\cos\nu x + b_\nu(f)\sin\nu x) \qquad (1)$$

преобразованным рядов Фурье (1), мы обозначим ряд

$$\sigma(f,\lambda,\beta) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left[a_\nu \cos(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}) + b_\nu \sin(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}) \right],$$

где $\beta \in R$, $\lambda = \{\lambda_n\}$ данная последовательность положительных чисел.

Мы называем функцией $\varphi(x) \sim \sigma(f,\lambda,\beta)$ $(\lambda,\beta)-$ производная функции $f(x)$ и его обозначим $f^{(\lambda,\beta)}(x)$. Для $\lambda_n = n^r, r > 0, \beta = r,$ $f^{(r)}$ дробные производные в смысле Вейля и $\lambda_n =$

$n^r, r > 0, \beta = r + 1$ дробной производной $\tilde{f}^{(r)}$, где $\tilde{f}$ -сопряженная функция f.

Известны следующие (p,q)-неравенства между модулями гладкости, которые в наши дни называются неравенства типа Ульянова:

$$\omega_k(f^{(\rho)},\delta)_q \lesssim \left(\int\limits_0^\delta \left(t^{-\theta-\rho}\omega_{k+\rho}(f,t)_p\right)^{q_1} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1},$$

$$\rho \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 0 < p < q \leq \infty, \quad \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad q_1 = \begin{cases} q, & q < \infty, \\ 1, & q = \infty. \end{cases}$$

Определение 1. *Последовательность $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ называется общей монотонной, записанной $\lambda \in GM$, если выполняется следующие условия*

$$\sum_{k=n}^{2n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leq C|\lambda_n|$$

для всех целых n, где константа C не зависит от n.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p$, $1 < p < q < \infty$, $\theta = 1/p - 1/q$ и $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in GM$. Тогда для любого $\alpha > 0$,*

$$\omega_\alpha\Big(\varphi, \frac{1}{2^n}\Big)_q \lesssim \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left(2^{m(\theta+\rho)} \Lambda_{2^m} \omega_{\alpha+\rho+\theta}\Big(f, \frac{1}{2^m}\Big)_p\right)^q \right)^{1/q},$$

где $\Lambda_n := \max\limits_{1\leq k\leq n} \frac{|\lambda_{2^k}|}{2^{k\rho}}$, $\rho > 0$.

Теорема 2. *Пусть $f \in L_p$, $1 = p < q < \infty$, $\theta = 1 - 1/q$ и $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in GM$. Тогда для любого $\alpha > 0$, $2\rho > \varepsilon > 0$,*

$$\omega_\alpha\Big(\varphi, \frac{1}{2^n}\Big)_q \lesssim \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left(2^{m(\theta+\rho)} \Lambda_{2^m} \omega_{\alpha+\rho+\theta-\varepsilon}\Big(f, \frac{1}{2^m}\Big)_1\right)^q \right)^{1/q},$$

где $\Lambda_{2^n} := 2^{-n\frac{\varepsilon}{2}} \max\limits_{1\le k\le n} \frac{|\lambda_{2^k}|}{2^{k(\rho-\frac{\varepsilon}{2})}}$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_p$, $1 < p < q = \infty$, $\theta = 1/p$, *и* $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$, $2\rho > \varepsilon > 0$,

$$\omega_\alpha\Big(\varphi, \frac{1}{2^n}\Big)_\infty \lesssim \sum_{m=n}^{\infty} 2^{m(\theta+\rho)} \Lambda_{2^m} \omega_{\alpha+\rho+\theta-\varepsilon}\Big(f, \frac{1}{2^m}\Big)_p,$$

где $\Lambda_{2^n} := 2^{-n\varepsilon/2} \max\limits_{1\le k\le n} \frac{|\lambda_{2^k}|}{2^{k(\rho-\varepsilon/2)}}$.

Список литературы

[1] R. Taberski, *Differences, moduli and derivatives of fractional orders,* Comment. Math. Prace Mat. 19 (1977), no. 2, 389–400.

[2] S. Tikhonov, W. Trebels, *Ulyanov-type inequalities and generalized Liouville derivatives,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 141 (2011), no. 1, 205–224.

[3] S. Tikhonov, *Trigonometric series with general monotone coefficients,* J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 721–735.

AMS Mathematics Subject Classification: 41A17, 26A15, 26D15.

Anisotropic estimates for integral norms of differentiable functions on irregular domains

A.Yu. Golovko

Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia
E-mail: andrewgolovko@yandex.ru

In 1938, for bounded domains $G \subset R^n$ satisfying the cone condition, Sobolev (see, for example, [4]) established an embedding theorem $W_p^s(G) \subset L_q(G)$ characterized by the inequality

$$\|f\|_{L_q(G)} \leq C\|f\|_{W_p^s(G)} = C\left(\sum_{|a|=s}\|D^\alpha f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{L_p(G)}\right),$$

where $1 < p < q < \infty$ and $s \in \mathbb{N}$, provided that

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0.$$

Later, this theorem was extended to more general classes of domains. In 2001, Besov [2] proved this theorem for domains satisfying the flexible σ-cone condition provided that the following relation holds:

$$s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{n}{q} \geq 0.$$

A more detailed history of this problem can be found, for example, in [2].

In 2010, Besov [1] extended this embedding theorem to the case of norms of a more general form (which include the sum of norms of only part of the generalized partial derivatives of order s).

Definition (see [2]). For $\sigma \geq 1$, a domain $G \subset \mathbb{R}^n$ is called a domain with the flexible σ-cone condition if, for some $T > 0$, $\varkappa > 0$ and any $x \in G$, there exists a piecewise smooth path $\gamma : [0, T] \to G, \gamma(0) = x, |\gamma'| \leq 1$ almost everywhere, such that $\rho(\gamma(t)) \geq \varkappa t^\sigma$ for $0 < t \leq T$ (where $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)$).

Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $1 \leq m \leq n$, $i_0 = 0$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m = n$ — be a positive integers, $n_j = i_j - i_{j-1}$, $\chi_j : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0,1\}$,

$$\chi_j(i) = \begin{cases} 1 \quad \text{for} \quad & i_{j-1} + 1 \leq i \leq i_j, \\ 0 \quad \text{for} \quad & 1 \leq i \leq i_{j-1} \quad \text{and for} \quad i_j + 1 \leq i \leq i_m = n. \end{cases}$$

For $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ set $\alpha^j := \chi_j \alpha = (0, \ldots, \alpha_{i_{j-1}+1}, \ldots, \alpha_{i_j}, 0, \ldots, 0)$, so that $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha^j$.

Theorem 1. (see [3]) Let G be a domain with the flexible σ-cone condition, $\sigma \geq 1$; $s_j, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq m \leq n$, $l < s_j$, $1 \leq q, r < \infty$, $p_j < q$, $r \leq q$, $1 < p_j < \infty$ for $j = \overline{1, m}$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\beta| = l$. Then the estimate

$$\|D^\beta f\|_{L_q(G)} \leq C \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s_j} \|D^\alpha f\|_{L_{p_j}(G)} + \|f\|_{L_r(G)} \right)$$

is valid for functions f with finite right-hand side provided that the following relations hold for all $j = \overline{1, m}$:

$$l\sigma - \frac{n}{q} \leq s_j - (\sigma - 1) \sum_{i=1, i \neq j}^{m} (s_i - 1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p_j}.$$

Theorem 1 is a generalization of the embedding theorem from [1] to the anisotropic case.

This theorem is sharp in the class of domains with the flexible σ-cone condition for $l = 0$. Necessary conditions for the satisfaction of this estimate also were obtained in other cases.

Also the multiplicative estimate (Gagliardo-Nirenberg type multiplicative inequality) is established.

Theorem 2. (see [3]) Let G be a domain with σ-cone condition, $\sigma \geq 1$; $s_j, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq m \leq n$, $l < s_j$, $1 \leq q, r < \infty$, $p_j < q$, $r \leq q$, $1 < p_j < \infty$ for $j = \overline{1, m}$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\beta| = l$. Let $r < q$ if $l = 0$, $\sigma = 1$. Then the Gagliardo-Nirenberg type multiplicative inequality

$$\|D^\beta f\|_{L_q(G)} \leq C \left(\|f\|_{L_r(G)}^{1-\theta} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s_j} \|D^\alpha f\|_{L_{p_j}(G)} \right)^\theta + \|f\|_{L_r(G)} \right)$$

is valid for all functions f with finite right-hand side provided that the relation

$$l\sigma - \frac{n}{q} \leq \theta \left(s_j - (\sigma - 1) \sum_{i=1, i\neq j}^{m} (s_i - 1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p_j} \right) +$$

$$(1-\theta) \left(-\frac{n\sigma}{r} - (\sigma - 1) \left(\sum_{i=1}^{m} s_i - m \right) \right)$$

holds for all $j = \overline{1, m}$.

If $m = 1$ and the boundary of the domain is smooth ($\sigma = 1$), then theorem 2 coincides with the Gagliardo-Nirenberg result for $q > p$ and $q \geq r$, which was established them in 1959.

I am grateful to O.V. Besov for discussion of the results and a number of useful remarks.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 14-50-00005.

References

[1] O.V. Besov, *Integral estimates for differentiable functions on irregular domains,* Sb. Math. 201 (2010), no. 12, 1777–1790.

[2] O.V. Besov, *Sobolev's embedding theorem for a domain with irregular boundary.* Sb. Math. 192 (2001), no. 3, 323–346.

[3] A.Yu. Golovko *Additive and multiplicative anisotropic estimates for integral norms of differentiable functions on irregular domains,* Proc. Steklov Inst. Math. 290 (2015), 293–303.

[4] S.L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics,* R.I. Amer. Math. Soc. 1991. Fizmatlit, Moscow, 2008 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 46E35.

Оптимальные вложения потенциалов типа Рисса с базовым пространством Лоренца

М.Л. Гольдман[1], Г.Ж. Каршыгина[2]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
E-mail: seulydia@yandex.ru

[2] *Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: karshygina84@mail.ru

В работе приведена теорема об оптимальном вложения пространств потенциалов типа Рисса в перестановочно инвариантное пространство (кратко ПИП). В качестве базового ПИП выбрано пространство типа Лоренца $\Lambda^p(u)$, $1 < p < \infty$.

Рассмотрим пространство потенциалов $H_E^G(R^n) = \{U = G * f : f \in E(R^n)\}$, где E - перестановочно инвариантное пространство, G-ядро специального вида [1],[2], $G(x) = \Phi(V_n |x|^n)$, $0 \leq \Phi \downarrow$. Здесь в качестве базового ПИП выступает пространство Лоренца $\Lambda^p(u)$ с весом u:

$$\|f\|_{\Lambda^p(u)} = \left(\int\limits_0^\infty f^{*p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty,$$

где f^*-убывающая перестановка функции f. Пространством Лоренца $\Gamma^p(u)$ с весом u называется и пространство

$$\|f\|_{\Gamma^p(u)} = \left(\int\limits_0^\infty f^{**p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 < p < \infty,$$

где $f^{**} = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)ds, t > 0$. Определим функцию $f_\Phi(t,\tau) = min\,\{\phi(t), \phi(\tau)\}$, рассмотрим оператор $\Re_{\Phi,\infty} : \tilde{E}(R_+) \to \tilde{X}(R_+)$, определенный в следующем виде:

$$\Re_{\Phi,\infty}[g](t)=\int\limits_0^\infty f_\Phi(t,\tau)g(\tau)d\tau,\ g\in\tilde{E}(R_+.$$

Пусть $E = E(R^n)$ есть ПИП, $E^{'} = E'(R^n)$ - ассоциированное ПИП, т.е. такое ПИП, что

$$\|g\|_{E'}=sup\left\{\int\limits_{R^n}|fg|\,d\mu : f\in E, \|f\|_E\leq 1\right\}.$$

Для ПИП $E(R^n)$ и $E'(R^n)$ рассмотрим пространства $\tilde{E} = \tilde{E}(R_+)$, $\tilde{E}^{'} = \tilde{E}^{'}(R_+)$-их представления Люксембурга, т.е. ПИП, для которых выполнены следующие соотношения: $\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}}$, $\|g\|_E = \|g^*\|_{\tilde{E'}}$. Известно, что для обобщенных потенциалов Рисса вложение

$$H_E^G(R^n)\subset X(R^n) \tag{1}$$

эквивалентно ограниченности оператора $\Re_{\Phi,\infty}$ [1], [2]. Кроме того, оптимальное ПИП $X_0(R^n)$ для вложения (1) имеет эквивалентную норму:

$$\|f\|_{\tilde{X}_0}(R_+)=sup\left\{\int\limits_0^\infty f^*g^*dt : g\in L_0(R_+); \|\Re_{\Phi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{E}'(R_+)}\leq 1\right\}.$$

Здесь $L_0(R_+)$ - множество измеримых и почти всюду конечных на R_+ функций.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{'}} = 1$, u - измеримая функция, $0 < u < \infty$ почти всюду на R_+, и для $t \in R_+$,

$$U(t)=\int\limits_0^t u(\tau)d(\tau),\ \upsilon(t)=\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)},\ V(t)=\int\limits_0^t \upsilon(\tau)d(\tau).$$

Пусть весовые функции удовлетворяют условиям:

$$A = \sup_{x>0} \left[\left(\int_0^\infty \left(\frac{x}{t+x} \right)^{p'} \upsilon(t)dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{t}{t+x} \right)^{p} \frac{\upsilon(t)dt}{V(t)^p} \right)^{\frac{1}{p}} \right] < \infty,$$

$$B = \sup_{t>0} \left[V(t)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^\infty \frac{\upsilon^{1-p}(\tau)d\tau}{\tau^p} \right)^{\frac{1}{p}} \right] < \infty.$$

Тогда оптимальное ПИП для вложения

$$H^G_{\Lambda^p(u)}(R^n) \subset X(R^n)$$

имеет эквивалентную норму: $\|f\|_{\tilde{X}_0(R^n)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w)}$, где

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int\limits_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau)d\tau}{\left(V(t) + t^{p'} \int\limits_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau)d\tau \right)^{p+1}}$$

Оптимальное вложение (1) рассмотрено и в работе [3], для некоторых частных случаев - в [1], [2]. В отличие от работы [3] нами накладываются условия на веса, которые позволяют снять некоторое требование на ядро потенциала, наложенное в работе [3].

Список литературы

[1] M.L. Goldman, *Optimal embeddingsof generalized Bessel and Riesz potentials,* Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 246 (2010), no. 4, 1–21.

[2] М.Л. Гольдман, О.М. Гуссельникова, *Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса,* Вестник РУДН, серия: Математика, информатика, физика. (2011), no. 3, 5–17.

[3] А.В. Малышева, *Оптимальные вложения обобщенных потенциалов Рисса,* Вестник РУДН. Вестник РУДН, серия: Математика, информатика, физика. (2013), no. 2, 28–37.

AMS Mathematics Subject Classification: 42 B 20,42 B 25, 42 B 39.

Some new inequalities for the Fourier transform

A.N. Kopezhanova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail: Kopezhanova@mail.ru

Let

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx, \ x \in \mathbb{R},$$

be the Fourier transform of a function $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Let $1 < p < 2, p' = \frac{p}{p-1}$ and $0 < q \leq \infty$. Then we have the following inequalities

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leq c_1 \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p',q}(\mathbb{R})} \leq c_2 \|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R})}, \tag{2}$$

where $L_{p,q}(\mathbb{R})$ is the classical Lorentz space. These inequalities are called the Hausdorff-Young inequality and the Hardy-Littlewood-Stein inequality, respectively, (see e.g. [1]).

Note that these inequalities (1) and (2) hold with equality for $p = q = 2$ (Plancherel's theorem) but do not hold in general for $2 < p < \infty$.

Let $0 < p, q \leq \infty$, M be the set of the segments $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ and $|e| = b - a$. The net space $N_{p'q}(M)$ is defined as the set of all measurable functions f such that the quasinorm

$$\|f\|_{N_{p'q}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}}\overline{f}(t, M)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

for $q < \infty$, and

$$\|f\|_{N_{p'\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p'}}\overline{f}(t, M) < \infty$$

for $q = \infty$, where $\overline{f}(t; M) := \sup\limits_{\substack{|e|\geq t \\ e\in M}} \frac{1}{|e|} \left|\int\limits_e f(x)dx\right|$.

These spaces were introduced in [2] (see also [3]). In particular, the following result was proved:

Theorem A. *Let $2 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Then*

$$\|\widehat{f}\|_{N_{p'q}(M)} \leq c_3\|f\|_{L_{pq}(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

The inequality (3) complements the Hardy-Littlewood-Stein inequality. Similar results for the Fourier transform in the periodic case were obtained in [3] and [4].

The main aims of this work are to derive the sufficient condition so that the Fourier transform $\widehat{f}$ belongs to L_p-space $(1 < p < \infty)$ and to obtain conditions so that the norm of the Fourier transform $\widehat{f}$ in L_p-space $(1 < p < \infty)$ has both upper and lower estimates.

The total variation of the function f, defined on an interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ is the quantity

$$V_a^b(f) := \sup_{\mathfrak{P}} \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

where the supremum is taken over all partitions of [a, b]:
$\mathfrak{P}: \ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \ n \in \mathbb{Z}_+.$

We say that the measurable function $f(x) \in V([a,b])$ if $V_a^b(f) < \infty$.

The main results read as follows.

Theorem 1. *Let* $1 < p < \infty$ *and* $f \in L_1(\mathbb{R})$. *If* f *satisfies the condition*

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{\frac{k}{p'}} V_{2^k}(f)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

then $\widehat{f} \in L_p(\mathbb{R})$ *and the inequality*

$$\|\widehat{f}\|_{L_p} \leq c \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{\frac{k}{p'}} V_{2^k}(f)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

holds. Here the constant c *does not depend on* f.

Theorem 2. *Let* $1 < p < \infty$. *Assume that the function* f *satisfy that there exists* $c > 0$ *such that*

$$V_{2^k}(f) \leq c \sup_{\substack{|e|\geq 2^k \\ e\in M}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x)dx \right|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Then $\|\widehat{f}\|_{L_p(R)} < \infty$ *if and only if* $\|f\|_{N_{p'p}} < \infty$ *and, moreover,*

$$\|\widehat{f}\|_{L_p(\mathbb{R})} \asymp \|f\|_{N_{p'p}(M)}.$$

The author was supported by the grant no. 5540/GF-4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces,* Princeton University Press, Princeton, 1972.

[2] E.D. Nursultanov, *Network space and Fourier transform,* Dokl. Russ. Akad. Nauk. 361 (1998), no. 5, 597–599 (in Russian).

[3] E.D. Nursultanov, *Network spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type,* Mat. Sb. 189 (1998), no. 3, 83–102 (in Russian).

[4] A. Kopezhanova and L.-E. Persson, *On summability of the Fourier coefficients in bounded orthonormal systems for functions from some Lorentz type spaces,* Eurasian Math. J. 1 (2010), no. 2, 76–85.

AMS Mathematics Subject Classification: 34K05, 34K10, 45J05, 45L05.

On the L^p Hardy inequality

P.D. Lamberti

University of Padova, Padova, Italy
E-mail: lamberti@math.unipd.it

Given a domain Ω in $\mathbb{R}^n$ and $p \in]1, \infty[$, we say that the L^p Hardy inequality is satisfied if there exists a constant $c > 0$ such that

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq c \int_\Omega \frac{|u|^p}{\mathrm{dist}^p(x, \partial\Omega)} dx\,, \qquad \text{for all } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

The best constant c is called L^p Hardy constant and is denoted by $H_p(\Omega)$.

In this talk we present a few stability results, jointly obtained with Gerassimos Barbatis, concerning the dependence of $H_p(\Omega)$ upon variation of p and Ω, with special attention to non-convex domains (in which case the value of $H_p(\Omega)$ is in general not explicitly known).

We shall also present some results obtained with Yehuda Pinchover devoted to the generalization to the case of $C^{1,\alpha}$ domains of a few classical existence and non-existence results for the minimizers.

References

[1] G. Barbatis, P.D. Lamberti, *Monotonicity, continuity and differentiability results for the L^p Hardy constant*, Israel J. Math. 215 (2016), no. 2, 1011-

1024.

[2] G. Barbatis, P.D. Lamberti, *Shape sensitivity analysis of the Hardy constant,* Nonlinear Anal. 103 (2014), 98-112.

[3] P.D. Lamberti, Y. Pinchover, *L^p Hardy inequality on $C^{1,\gamma}$ domains*, submitted.

AMS Mathematics Subject Classification: 49R05, 35B09, 35J92

Сложность решеток квазимногообразий для многообразий канторовых алгебр

С.М. Луцак

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

В настоящее время сложность решеток квазимногообразий характеризуется с различных точек зрения. Хорошо известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: Q-универсальность (по М.В. Сапиру [4]) и невычислимость множества всех их конечных подрешеток (свойство Нуракунова [3] или иррациональность по К. Херрманну). Наличие в решетках квазимногообразий континуума элементов, не имеющих покрытий, также говорит о сложности строения этих решеток; в этом случае существует континуум подквазимногообразий данного квазимногоообразия $\mathbf{K}$, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{K}$.

Напомним, что класс $\mathbf{K}$ алгебраических систем фиксированной сигнатуры σ, аксиоматизируемый с помощью некоторого множества тождеств [квазитождеств, соответственно] той же сигнатуры, называется *многообразием* [*квазимногообразием*] [1, с. 15]. Квазимногообразие, замкнутое относительно гомоморфных образов, является многообразием. Множество квазитождеств, истинных во всех системах из данного класса $\mathbf{K}$, называется *квазиэквациональной теорией* $\mathbf{K}$ и обозначается $T_q(\mathbf{K})$.

Пусть $\mathbf{K}$ — квазимногообразие и $\mathbf{K}'$ — некоторое его расширение. Мы говорим, что подмножество $\Sigma \subseteq T_q(\mathbf{K})$ есть *базис* $T_q(\mathbf{K})$ *относительно* $\mathbf{K}'$ или *базис квазитождеств* $\mathbf{K}$ *относительно* $\mathbf{K}'$, если $\mathbf{K} = \mathbf{K}' \cap \mathbf{Mod}(\Sigma)$. Базис Σ для $\mathbf{K}$ относительно $\mathbf{K}'$ называется *конечным*, если Σ конечно, и *независимым*, если для любого $\varphi \in \Sigma$ найдется система $\mathcal{A} \in \mathbf{K}'$ такая, что $\mathcal{A} \models \Sigma \setminus \{\varphi\}$ и $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ [1, с. 90]. Квазимногообразие $\mathbf{K}$ имеет *независимый базис квазитождеств*, если существует множество Σ квазитождеств, такое что $\mathbf{K} = \mathbf{Mod}(\Sigma)$ и $\mathbf{K} \neq \mathbf{Mod}(\Sigma \setminus \varphi)$ для любого $\varphi \in \Sigma$ [1, definition 5]. Множество квазитождеств Σ называется *ω-независимым* относительно класса $\mathbf{K}$, если существует разбиение $\Sigma = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n$ такое, что $\Sigma_n \neq \varnothing$ и $\mathbf{K} \cap \mathbf{Mod}(\Sigma) \neq \mathbf{K} \cap \mathbf{Mod}(\Sigma \setminus \Sigma_n)$ для всех n. Любой бесконечный независимый базис квазитождеств является ω-независимым; обратное утверждение не верно [1, с. 320].

Первые примеры квазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств, а также более сложные примеры многообразий с аналогичным свойством построены с помощью следующего утверждения В.А. Горбунова. Пусть $\mathbf{K}$ — квазимногообразие; для обозначения решетки квазимногообразий $\mathbf{K}$ используется запись $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$.

Теорема 1. *[1, предложение 6.3.1] Пусть* $\mathbf{K}$ *— произвольное квазимногообразие и* $\mathbf{K}_0$ *— его собственное подквазимногообразие. Если* $\mathbf{K}_0$ *имеет бесконечный независимый базис квазитождеств относительно* $\mathbf{K}$*, то для любого квазимногообразия* $\mathbf{K}_1 \in \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$*, содержащего* $\mathbf{K}_0$ *и* *конечно аксиоматизируемого относительно* $\mathbf{K}$, *число покрытий* $\mathbf{K}_0$ *в* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}_1)$ *бесконечно. Аналогичное утверждение верно для тождеств.*

В работе [1, theorems 5, 6, 7] было доказано, что определенные Q-универсальные квазимногообразия содержат континуум подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств. А именно, данный результат был установлен для многообразия всех дифференциальных группоидов, квазимногообразия всех ориентированных графов, многообразия всех точечных Абелевых групп.

Пусть $n, m \in Z^+$ и $n \geqslant m \geqslant 1$. Рассмотрим многообразие $\mathbf{C}_{mn}$ сигнатуры, состоящей из m-арных функциональных символов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и n-арных функциональных символов $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, определенное тождествами:

1. $\alpha_i(\lambda_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \lambda_m(x_1, \ldots, x_n)) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $\lambda_j(\alpha_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \alpha_n(x_1, \ldots, x_m)) = x_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Следуя [6], мы называем $\mathbf{C}_{mn}$-алгебры *канторовыми алгебрами.* М. С. Шеремет доказал, что многообразия $\mathbf{C}_{mn}$, $n \geqslant m \geqslant 1$, канторовых алгебр Q-универсальны [5, theorem 3.2]. В работе М. В. Швидефски [7, с. 395] установлен факт того, что в этих многообразиях существует подкласс систем, обладающий определенными свойствами (P_0)–(P_4); т. е. эти многообразия являются AD-классами. В работе [3, теорема 3] было показано, что многообразия $\mathbf{C}_{mn}$ канторовых алгебр содержат континуум собственных подклассов, обладающих свойством невычислимости Нуракунова, но, тем не менее, не являющихся Q-универсальными. Автором доказано, что каждое такое многообразие $\mathbf{C}_{mn}$, $n \geq m \geq 1$, содержит континуум подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств, но имеющих ω-независимый базис квазитождеств относительно $\mathbf{C}_{mn}$, см. теорему 2. При доказательстве данного факта используются идеи из работы [1].

Теорема 2. *Многообразие $\mathbf{C}_{mn}$, $n \geqslant m \geqslant 1$, канторовых алгебр содержит континуум подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств, но имеющих ω-независимый базис квазитождеств относительно $\mathbf{C}_{mn}$.*

Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях. Представляет интерес вопрос о том, для каких еще Q-универсальных классов алгебраических систем будет справедлив результат теоремы 2.

Список литературы

[1] A. Basheyeva, A. Nurakunov, M. Schwidefsky, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. III.* Sib. Electr. Math. Rep. 14 (2017), 252–263.

[2] V. A. Gorbunov, *Algebraic theory of quasivarieties.* Plenum, New York, 1998.

[3] S. M. Lutsak, *On the complexity of quasivariety lattices.* Sib. Electr. Math. Rep. 14 (2017), 92–97 (in Russian).

[4] M. V. Sapir, *The lattice of quasivarieties of semigroups.* Algebra Universalis. 21 (1985), no. 2/3, 172–180.

[5] M. S. Sheremet, *Quasivarieties of Cantor algebras.* Algebra Universalis. 46 (2001), 193–201.

[6] D. M. Smirnov, *Cantor algebras with one generator. I.* Algebra and Logic. 10 (1971), no. 1, 40–49.

[7] M. V. Schwidefsky, *On the complexity of quasivariety lattices.* Algebra and Logic. 54 (2015), no. 3, 381–398 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 06B15, 08C15.

О мультипликаторах в весовых пространствах Соболева

Л.К. Кусаинова[1], А.Х. Мырзагалиева[1], Я.Т. Султанаев[2]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: leili2006@mail.ru,
E-mail: mir_aigul@mail.ru

[3] *Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия*
E-mail: sultanaevyt@gmail.com

Пусть E, F – банаховы пространства функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функцию $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют (точечным) мультипликатором, действующим в паре (E, F), если $\gamma f \in F$ для всех $f \in E$. Через $M(E \to F)$ будем обозначать пространство всех мультипликаторов γ в паре (E, F), удовлетворяющих условию: существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|\gamma f\|_F \leq c\|f\|_E$ для всех $f \in E$. Если $\gamma \in M(E \to F)$, то оператор умножения на γ ограничен как оператор из E в F. Положим $\|\gamma;\ E \to F\| \stackrel{\text{def}}{=} \|T;\ E \to F\|$, $Ty = \gamma y,\ y \in E$.

В работе получены описания мультипликаторов γ в весовой паре $(W^l_{p,v}, W^m_{p,\omega})$, где $1 < p < \infty$, $0 < m < l$ – целые, $\omega = v^{*-mp}$, v^* – одна из "бегущих средних" Отелбаева (см. [1]),

$$v^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\left\{h > 0\colon h^{lp-n}\int_{Q_h(x)} v \leq 1\right\},$$

v почти всюду положительная локально суммируемая в $\mathbb{R}^n$ функция (вес). Через $W^l_{p,v}$ ($W^m_{p,\omega}$) обозначается пополнение множества функций C_0^∞ по норме

$$\|u; W^l_{p,v}\| = \left(\int |\nabla_l u|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int |u|^p v(t)\, dt\right)^{1/p}$$

(по норме $\|u; W^m_{p,\omega}\|$), где $|\nabla_l u| = \left(\sum\limits_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\right)^{1/2}$. Через $W^m_{p,loc}$

обозначается пространство $\{u\colon \eta u \in W_p^m \quad \text{для всех} \quad \eta \in C_0^\infty\}$ (см. [2]). Далее I^n – совокупность всех кубов вида $Q = Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon |y_i - x_i| < \frac{h}{2}, i = 1, \ldots, n\}$.

В работе были использованы описания пространств $M(W_p^l \to W_p^m)$ на паре пространств Соболева (см. [2]) и одна теорема о двойном покрытии по типу покрытий Безиковича-Гузмана (см. [3]). В [2] было доказано, что норма

$$\|\gamma; M(W_p^l \to W_p^m)\| \sim C_\gamma,$$

где при $1 < p < n/l \quad C_\gamma = \sup\limits_{\{d(e)\le 1\}} \left(\frac{\|\nabla_m \gamma; L_p(e)\|}{\mathrm{cap}(e, W_p^l)^{1/p}} + \frac{\|\gamma; L_p(e)\|}{\mathrm{cap}(e; W_p^{l-m})^{1/p}} \right)$; $C_\gamma = \sup\limits_{\{B_1\}} \|\gamma; W_p^m(B_1)\|$ если $lp > n$. $\{B_1\}$ – множество всех шаров $B_1 = B(x;1)$ в $\mathbb{R}^n$, $\{d(e) \le 1\}$ множество всех компактов $e \subset \mathbb{R}^n$ диаметра $d(e) \le 1$. Емкость $\mathrm{cap}(e, W_p^l) = \inf\left\{\|u; W_p^l\|^p,\ u \in C_0^\infty,\ u \ge 1 \text{ на } e\right\}$.

Если $0 < v^*(x) < \infty$ п. в. в $\mathbb{R}^n$, то v^* порождает покрывающее семейство кубов $\mathcal{B}_v^* = \{Q^*(x)\}$, где $Q^*(x) = Q_h(x)$ с $h = v^*(x)$.

Как известно, вес ρ в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (A_∞), если найдутся такие $0 < \delta, \tau < 1$, что для всех $Q \in I^n$

$$\rho(e) \le \tau \rho(Q) \ \text{ как только } \quad e \subset Q, \quad |e| \le \delta |Q|. \tag{1}$$

Запись $\rho \in A_\infty^*$ будет означать, что вес ρ удовлетворяет условию (1) на кубах $Q \subset Q^*(x)$ (если $0 < v^*(x) < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$).

Пусть $\gamma \in W_{p,loc}^m$. Каждому $Q^*(x)$ соотнесем число

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\gamma^*(x) \ &= \ v^*(x)^{l-n/p} \left(\int_Q |\nabla_m \gamma|^p \, dy \right)^{1/p} \\ &+ \ v^*(x)^{l-m-n/p} \left(\int_Q |\gamma|^p \, dy \right)^{1/p}, \ Q = \frac{1}{2} Q^*(x) \end{aligned}$$

Пусть $K_\gamma^* = \operatorname*{ess\,sup}\limits_x \mathcal{K}_\gamma^*(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < m < l$ *– целые,* $lp > n$. *Пусть вес* $v \in A^*_\infty$. *Тогда* $M(W^l_{p,v} \to W^m_{p,v^*-mp}) = M(W^l_{p,v^*-lp} \to W^m_{p,v^*-mp}) = \{\gamma \in W^m_{p,loc}\colon K^*_\gamma < \infty\}$. *При этом* $\|\gamma; M(W^l_{p,v} \to W^m_{p,v^*-mp})\| \sim K^*_\gamma$.

Пусть $\gamma \in W^m_{p,loc}$. Пусть $\theta(\cdot) \in C^m_0(Q_1)$, $Q_1 = Q_1(0)$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta = 1$ на $\frac{1}{2}Q_1$. Кубу Q соотнесем величину

$$\mathcal{R}_{\gamma,\theta}(Q) = \sup_{e \subset \frac{1}{2}\overline{Q}} \left[\left(\int_e |\nabla_m(\gamma\theta_x)|^p \, dy/\mathrm{cap}(e; W^l_p) \right)^{1/p} + \right.$$
$$\left. + \left(\int_e |\gamma|^p \, dy/\mathrm{cap}(e; W^{l-m}_p) \right)^{1/p} \right],$$

где $\theta_x(y) = \theta(h(x)^{-1}(y-x))$. Пусть $R^*_{\gamma,\theta} = \operatorname{ess\,sup}_x \mathcal{R}_{\gamma,\theta}(Q^*(x))$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < m < l$ *– целые,* $lp < n$. *Пусть* $v^* < \infty$ *п.в. в* $\mathbb{R}^n$ *и, к тому же,* $v \in A^*_\infty$. *Тогда* $\{\gamma \in W^m_{p,loc}\colon R^*_{\gamma,\theta} < \infty\} \subset M(W^l_{p,v} \to W^m_{p,v^*-mp})$. *При этом* $\|\gamma; M(W^l_{p,v} \to W^m_{p,v^*-mp})\| \ll R^*_{\gamma,\theta}$.

В работе также получены оценки нормы $\|\gamma; M(W^l_{p,v} \to W^m_{p,v^*-mp})\|$ снизу в аналогичных терминах.

Замечание 1. Для пары $(W^l_{p,v^*-lp}, W^m_{p,v^*-mp})$, где $v \in A^*_\infty$, известны описания интерполяционных пространств Петре (см. [3]).

Список литературы

[1] М. Отелбаев, *Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера,* Труды МИАН. 150 (1979), 265-305.

[2] В.Г. Мазья, Т.О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций,* Изд-во Ленинградского университета, Ленинград, 1986.

[3] Л.К. Кусаинова, *Об интерполяции весовых простанств Соболева,* Известия МН-АН РК. 5 (1997), 33-51.

AMS Mathematics Subject Classification: 47B38, 47B99

О тригонометрических рядах Фурье функций из пространств Липшица

А.Б. Муканов

Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан
E-mail: mukanov.askhat@gmail.com

В работе рассматривается тригонометрический ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in [0, 2\pi] \tag{1}$$

интегрируемой функции $f(x)$.

Для ряда Фурье (1) с монотонными коэффициентами Г. Лоренц в статье [3] (см. также [1, Гл. 2, §3]) установил следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *невозрастающие последовательности. Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *следующие условия эквивалентны:*

$$f \in Lip\ \alpha; \tag{2}$$

$$a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Через $Lip\ \alpha$ обозначено пространство Липшица, т.е.

$$Lip\ \alpha = \left\{ f \in C[0, 2\pi] : \omega(f, \delta)_{C[0,2\pi]} \leq C\delta^{\alpha} \right\}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

где $\omega(f, \cdot)_{C[0,2\pi]}$ – модуль непрерывности функции f.

Нетрудно показать, что условие (3) для монотонных $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентно условию:

$$\|f - S_n\|_{C[0,2\pi]} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где через $S_n(x)$ обозначена n-ая частичная сумма ряда (1).

В недавней работе [2] М. Дьяченко и С. Тихонов вместо монотонных последовательностей рассмотрели более широкий класс обобщенно монотонных последовательностей GM.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ обобщенно монотонна (или принадлежит классу GM), если существуют константы $C > 0$ и $\lambda > 1$ такие, что для любого $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{2n} |c_k - c_{k+1}| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=\frac{n}{\lambda}}^{\lambda n} |c_k|.$$

В выражении справа суммирование ведется по всем целым k из отрезка $\left[\frac{n}{\lambda}, \lambda n\right]$.

В работе [2] был обобщен результат Г. Лоренца на класс обобщенно монотонных последовательностей.

Теорема 2. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *следующие условия эквивалентны:*

1. $f \in Lip\ \alpha$;
2. $|a_n|, |b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

В данной работе установлена следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для любого* $0 < \alpha \leq 1$ *следующие условия эквивалентны:*

1. $\|f - S_n\|_{C[0,2\pi]} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ *при* $n \to \infty$;

2. $|a_n|, |b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

Из теорем 2 и 3 получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *следующие условия эквивалентны:*

1. $f \in Lip\ \alpha$;

2. $\|f - S_n\|_{C[0,2\pi]} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ *при* $n \to \infty$;

3. $|a_n|, |b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

Работа выполнена при поддержке МОН РК (грант no 3311 ГФ4).

Список литературы

[1] Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*, ГИФМЛ, Москва, 1961.

[2] M.I. Dyachenko, S. Yu. Tikhonov, *Smoothness properties of functions with general monotone Fourier coefficients.* Preprint.

[3] G.G. Lorentz, *Fourier-koeffizienten und funktionenklassen*, Math. Z. (1948), no. 51., 135–149.

AMS Mathematics Subject Classification: 42A10, 42A32.

Least squares estimator asymptotics for vector autoregressions with deterministic regressors

K.T. Mynbaev

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: kairat_mynbayev@yahoo.com

We consider a mixed vector autoregressive model with deterministic exogenous regressors and an autoregressive matrix that has characteristic roots inside the unit circle. The errors are $(2+\epsilon)$-integrable martingale differences with heterogeneous second-order conditional moments. The behavior of the ordinary least squares (OLS) estimator depends on the rate of growth of the exogenous regressors. For bounded or slowly growing regressors we prove asymptotic normality. In case of quickly growing regressors (e.g., polynomial trends) the result is negative: the OLS asymptotics cannot be derived using the conventional scheme and any diagonal normalizer.

We consider the asymptotic distribution of the OLS estimator of matrix parameters A and B in the vector autoregression

$$y_t = Ax_t + By_{t-1} + e_t,\ t = 1, ..., n,$$

where y_t and e_t are random and x_t are deterministic vectors. The y_t are observed and the unobserved errors e_t are martingale differences. The purpose is to develop an asymptotic theory of vector autoregressions with assumptions on the deterministic regressors general enough to include various special cases (e.g., polynomial and logarithmic trends), with possible discontinuities arising in the theory of structural breaks.

The framework is based on the L_p-approximability theory [6] previously applied to a scalar autoregressive model [5] $y_t = \alpha x_t + \beta y_{t-1} + e_t,\ t = 1, ..., n,$ (α and β are real parameters). The results presented here are partially new even in this special case and show that vector autoregressions require quite different techniques than spatial models [8], [9] and static models with slowly varying regressors [7]. Because of space limitations, in this paper we consider only the stable case (when the characteristic roots of B lie inside the unit circle $|\lambda| < 1$). [13] and [10] give an idea of the state of affairs in the unstable case.

A detailed comparison of our results with [1], along with some methodological remarks, is provided. To investigate a model with polynomial trends, [12] have suggested a linear transformation. However, that transformation uses unknown coefficients and therefore is not feasible. Our asymptotic result in case of polynomial trends is negative in the sense that the Anderson normalization does not work. We also show that the derivation of the asymptotic distribution of the OLS estimator for an autoregression with a linear trend given in [4, Section 16.3] contains an error.

There have been other suggestions to model deterministic regressors. One approach is appropriate for studying consistency of the OLS estimator; see [10] for the details and history. Another has been proposed in [2] in the context of nonlinear models. Finally, Phillips [11] has employed properties of slowly varying functions [3] to model asymptotically collinear regressors. Mynbaev [7] has shown that all sequences of weights arising in the Phillips approach are L_2-approximable.

The author has been partially supported by the grant 4084-GF4 from the Ministry of Education and Science of Kazakhstan.

References

[1] T.W. Anderson, N. Kunitomo, *Asymptotic distribution of regression and autoregression coefficients with martingale difference disturbances,* J. Multivariate Anal. 40 (1992), 221–243.

[2] D.W.K. Andrews, C.J. McDermott, *Nonlinear econometric models with deterministically trending variables,* Rev. Econ. Stud. 62 (1995), 343–360.

[3] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular variation,* Cambridge University Press, 1987.

[4] J.D. Hamilton, *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994.

[5] K.T. Mynbaev, *Asymptotic properties of OLS estimates in autoregressions with bounded or slowly growing deterministic trends,* Commun. Stat. Theory, 35 (2006), 499–520.

[6] K.T. Mynbaev, *Short-memory linear processes and econometric applications*, Wiley & Sons, 2011.

[7] K.T. Mynbaev, *Central limit theorems for weighted sums of linear processes: L_p-approximability versus Brownian motion,* Economet. Theory, 25 (2009), 748-763.

[8] K.T. Mynbaev, A. Ullah, *Asymptotic distribution of the OLS estimator for a purely autoregressive spatial model,* J. Multivariate Anal. 99 (2008), 245–277.

[9] K.T. Mynbaev, *Asymptotic distribution of the OLS estimator for a mixed regressive, spatial autoregressive model.* J. Multivariate Anal. 101 (2010), 733–748.

[10] B. Nielsen, *Strong consistency results for Least Squares estimators in general vector autoregressions with deterministic terms,* Economet. Theory, 21 (2005), 534–561.

[11] P.C.B. Phillips, *Regression with slowly varying regressors and nonlinear trends,* Economet. Theory, 23 (2007), 557-614.

[12] C.A. Sims, J.H. Stock, M.W. Watson, *Inference in linear time series models with some unit roots,* Econometrica, 58 (1990), 113–144.

[13] K. Tanaka, *Time series analysis: nonstationary and noninvertible distribution theory*, Wiley & Sons, 1996.

AMS Mathematics Subject Classification: 46N30, 97K80.

Wavelet bases and entropy numbers of Hardy operator

M.G. Nasyrova[1], E.P. Ushakova[2,3]

[1,2]*Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia*

[3]*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*

E-mail: [1]*nassm@mail.ru,* [2]*elenau@inbox.ru*

We obtain upper estimates on entropy numbers of a compact Hardy integral operator in weighted spaces of Besov type with small smoothness parameters.

Let $0 < p, q \leq \infty$, $-\infty < s < +\infty$ be parameters and $w = w(x)$ be an admissible weight function. Following [1,2], we consider the (unweighted) Besov spaces $B^s_{pq}(\mathbb{R})$ and its weighted generalizations $B^s_{pq}(\mathbb{R}, w)$ on $\mathbb{R}$.

For $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ we propose the Hardy integral operator

$$Hf(x) := \chi_{(0,\infty)}(x) \int_0^x f(y)\, dy, \tag{1}$$

acting from $B^{s_1}_{p_1 q_1}(\mathbb{R})$ to $B^{s_2}_{p_2 q_2}(\mathbb{R}, w_\alpha^{-1})$, where $w_\alpha(x) = (1 + |x|^2)^{\alpha/2}$, $\alpha \geq 0$, is a polynomial weight. When the mapping $H : B^{s_1}_{p_1 q_1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2 q_2}(\mathbb{R}, w_\alpha^{-1})$ is compact, we study behaviour of its entropy numbers $e_k(H)$. Remind that for $k \in \mathbb{N}$ and a continuous operator T between quasi–Banach spaces A_1 and A_2 the k–th (dyadic) entropy number $e_k(T)$ of $T\colon A_1 \to A_2$ is the infimum of all numbers $\varepsilon > 0$ such that there exist 2^{k-1} balls in A_2 of radius ε which cover TU_1, where U_1 is the unit ball in A_1.

For obtaining our results we follow the well–developed concept of wavelet bases in $B^s_{pq}(\mathbb{R}, w)$ spaces [3] and reduce the initial problem for the Hardy operator in function spaces to the corresponding transformation in sequence spaces. The crucial point of this investigation is a choice of the two particular wavelet bases specially related to each other and the Hardy operator.

The main result is the following

Theorem 1. *Let* $0 < q_1 \leq \infty$, $0 < q_2 \leq \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $\alpha > 1 + 1/p_2$ *and* $1/p_2 - 1 < s_2 < 1/p_2$. *Suppose that* $1/2 < p_1 \leq \infty$ *and* $1/p_1 < s_1 < 1 + \min\{1, 1/p_1\}$. *Put*

$$\delta := s_1 - \frac{1}{p_1} - \left(s_2 - 1 - \frac{1}{p_2} \right).$$

Then the operator $H : B^{s_1}_{p_1 q_1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2 q_2}(\mathbb{R}, w_\alpha^{-1})$ *of the form* (1) *is compact. In addition,*
(i) *if* $\delta + 1 < \alpha$ *then*

$$e_k(H) \lesssim k^{-(s_1 - s_2 + 1)}, \qquad k \in \mathbb{N};$$

(ii) *if* $\delta + 1 > \alpha$ *then*

$$e_k(H) \lesssim k^{-(\alpha - 1 + 1/p_1 - 1/p_2)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(iii) *in the case* $\alpha - 1 = \delta$ *and with* $\tau := s_1 - s_2 + 1 + \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}$ *we have the following estimates:*

$$e_k(H) \lesssim k^{-(s_1-s_2+1)}(1+\log k)^{\tau}, \qquad \tau > 0, \quad 1 < k \in \mathbb{N},$$
$$e_k(H) \lesssim k^{-(s_1-s_2+1)}(1+\log\log k)^{\frac{1}{q_1}}, \qquad \tau = 0, \quad 1 < k \in \mathbb{N},$$
$$e_k(H) \lesssim k^{-(s_1-s_2+1)}, \qquad \tau < 0, \quad 1 < k \in \mathbb{N}.$$

The research of the second author was supported by the Russian Science Foundation (project RSF-DST: 16-41-02004).

References

[1] D.E. Edmunds, H. Triebel, *Function spaces, entropy numbers, differential operators*, Cambridge University Press, 1996.

[2] D. Haroske, H. Triebel, *Wavelet bases and entropy numbers in weighted function spaces*, Math. Nachr. 278 (2005), no. 1-2, 108-132.

[3] H. Triebel, *Bases in function spaces, sampling, discrepancy, numerical integration*, European Math. Soc. Publishing House, Zurich, 2010.

AMS Mathematics Subject Classification: 47G10, 47B06, 42C40, 46E35.

Об одном весовом пространстве Соболева на прямой

Д.В. Прохоров

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия
E-mail: prohorov@as.khb.ru

Пусть $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$, $L^p(I)$ обозначает пространство Лебега с нормой $\|f\|_{L^p(I)} := \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ — пространство всех локально суммируемых на I функций. Пусть $\mathcal{V}_p(I) := \{v \in L^p_{\mathrm{loc}}(I) : v \ge 0, \|v\|_{L^1(I)} \ne 0\}$. Обозначим через $W^1_{1,\mathrm{loc}}(I)$ пространство всех функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, имеющих обобщенную производную $Du \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. В работах [1, 2, 3] изучались свойства весового пространства Соболева

$$W^1_p(I) := \{u \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(I) : \|u\|_{W^1_p(I)} < \infty\},$$

где

$$\|u\|_{W^1_p(I)} := \|vu\|_{L^p(I)} + \|\rho Du\|_{L^p(I)},$$
$$v, \rho \in \mathcal{V}_p(I),\ \frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I), \quad (1)$$

и его подпространств

$$\begin{aligned}\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I) \ &:= \ \{f \in AC(I) : \operatorname{supp} f \text{ компакт в } I, \|vf\|_{L^p(I)} \\ &+ \ \|\rho f'\|_{L^p(I)} < \infty\}\end{aligned}$$

и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(I) = \overline{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)}^{W^1_p(I)}$ — замыкание $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)$ в $W^1_p(I)$. Доклад посвящен некоторым результатам, дополняющим результаты работ [1, 2, 3].

Список литературы

[1] R. Oinarov, *On weighted norm inequalities with three weights,* J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 48 (1993), no. 1, 103–116.

[2] D. Prokhorov, V. Stepanov, E. Ushakova, *On weighted Sobolev spaces on the real line,* Dokl. Math. 93 (2016), no. 1, 78–81.

[3] D.V. Prokhorov, V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, *On associate spaces of weighted Sobolev space on the real line,* Math. Nachr., 2016. Online Version of Record published before inclusion in an issue

AMS Mathematics Subject Classification: 46E35.

Hardy and Rellich type inequalities on the complex affine groups

B. Sabitbek[1 2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Kazakh National University named Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: b.sabitbek@math.kz

Abstract. In this paper, by using properties of the fundamental solution of a canonical right-invariant Laplacian, versions of Hardy and Rellich type inequalities are proved on the complex affine group.

et $\mathbb{G} = \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ be the complex affine group. Here and after $\mathbb{C}^*$ is the multiplicative group of nonzero complex numbers. The group composition law of the complex affine group $\mathbb{G}$ is given by

$$(x, y) \circ (x', y') = (x + yx', yy')$$

for all $x, x' \in \mathbb{C}$ and $y, y' \in \mathbb{C}^*$ and the notations $x := t + is$ and $y := \tau + i\varsigma$ will be also useful in our analysis. The complex affine group is a Lie group and let us denote its Lie algebra by $\mathfrak{g}$.

We now fix a basis $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ of $\mathfrak{g}$ such that

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + s\frac{\partial}{\partial s} + \tau\frac{\partial}{\partial \tau} + \varsigma\frac{\partial}{\partial \varsigma}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad X_4 = -s\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial s} - \varsigma\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau\frac{\partial}{\partial \varsigma}.$$

These right invariant vector fields correspond to the canonical basis elements of $\mathfrak{g}$. Therefore, the (sub-)Laplacian

$$\Delta_X = -\sum_{j=1}^{4} X_j^2,$$

is called a right invariant canonical Laplacian of the complex affine group $\mathbb{G}$. The fundamental solution of the Laplacian Δ_X was computed explicitly by Gaudry and Sjögren [5] in the following form

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2}\frac{|y|^2}{|x|^2 + |1-y|^2}.$$

This explicit formula plays a key role in our proofs. We will also use the notation of the right invariant (canonical) gradient in the form

$$\nabla_X = (X_1, X_2, X_3, X_4).$$

The right-invariant and the left-invariant Haar measures on $\mathbb{G}$ are defined by

$$d\mu_r = dx\frac{dy}{|y|^2}, \quad d\mu_l = dx\frac{dy}{|y|^4}$$

with the modular function $m(x,y) = |y|^2$, respectively. In addition, one has the integration rules with respect to the modular function

$$\int_{\mathbb{G}} f(\eta\zeta)d\mu_l(\eta) = m^{-1}(\zeta)\int_{\mathbb{G}} f(\eta)d\mu_l(\eta),$$

$$\int_{\mathbb{G}} f(\eta^{-1})m^{-1}(\eta)d\mu_l(\eta) = \int_{\mathbb{G}} f(\eta)d\mu_l(\eta).$$

Theorem 1. *Let $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 2-\beta$, $\beta > 2$. Then the following version of the Hardy inequality is valid:*

$$\int_{\mathbb{G}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2-\beta}}|\nabla_X u|^2 \, d\mu_l \geq \left(\frac{\beta+\alpha-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{G}} \varepsilon^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}|\nabla_X \varepsilon^{\frac{1}{2-\beta}}|^2|u|^2 \, d\mu_l, \quad (1)$$

for any $u \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, where $\nabla_X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.

References

[1] Adimurthi, A. Sekar. *Role of the fundamental solution in Hardy-Sobolev-type inequalities,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 136 (2006), no. 6, 1111–1130.

[2] L. D'Ambrosio, *Hardy-type inequalities related to degenerate elliptic differential operators,* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 4 (2005), no. 3, 451–486.

[3] V. Fischer, M. Ruzhansky. *Quantization on nilpotent Lie groups,* Progress in Mathematics, 314, Birkhauser, xiii+557, 2016. ISBN: 978-3-319-29557-2.

[4] G. B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups,* Ark. Mat. 13 (1975), no. 2, 161–207.

[5] G. Gaudry, P. Sjögren, *Singular integrals on the complex affine group,* Colloq. Math. 75 (1998), no. 1, 133–148.

[6] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Layer potentials, Green formulae, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups* Adv. Math. 308 (2017), 483–528. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2016.12.013

[7] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Anisotropic L^2-weighted Hardy and L^2-Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities,* Commun. Contemp. Math. , 1750014 (2016) [12 pages] DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S0219199717500146

AMS Mathematics Subject Classification: 35A23, 35H20.

Нелинейный дифференциальный оператор в гессианах и его применения в изучении m-субгармонических функций

А. Садуллаев [1], Б.И. Абдуллаев [2]

[1] *Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*
sadullaev@mail.ru
[2] *Ургенчский госуниверситет, Ургенч, Узбекистан*
abakhrom1968@mail.ru

В теории потенциалов очень важны изучение следующих двух классов функций: класс $m - sh$ функций и класс $m - wsh$ функций, $(1 \le m \le n)$. Для дважды гладких функций $u \in$

$C^2(D)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$ они определяются условиями:

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0 \ \forall \ k = 1, 2, ..., m \qquad (1)$$

и

$$dd^c u \wedge \beta^{n-m} \geq 0, \qquad (2)$$

где $\beta = dd^c|z|^2$.

Нелинейный дифференциальный оператор $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ называется *гессианом порядка* m функции u. Название оператора оправдано тем, что если $\lambda(u) = (\lambda_1(u), ..., \lambda_n(u))-$ вектор собственных значений эрмитовой матрицы $\left(u_{j,\bar{k}}\right)$ (квадратичной формы $dd^c u = \frac{i}{2} \sum\limits_{j,k} u_{j,\bar{k}} dz_j \wedge d\,\bar{z}_k$), то

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = m!\,(n-m)! H_m(u)\,\beta^n, \qquad (3)$$

где $H_m(u) = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_m \leq n} \lambda_{j_1} ... \lambda_{j_m}-$ гессиан порядка m вектора $\lambda(u) \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что при $m = 1$ оператор $dd^c u \wedge \beta^{n-1}$ превращается в оператор Лапласа и мы в качестве $1-sh$ функции получаем обычную субгармоническую функцию, $H_1(u) = \lambda_1 + ... + \lambda_n$.

Класс $m-sh$ функций изучены в работах А. Садуллаева и Б. Абдуллаева [1,2], Z.Blocki [3], S.Dinev, S.Kolodziej [4], H.Ch.Lu [5] и др. $m-wsh$ функции рассмотрены и применены в выпуклой геометрии в серии работ F.R.Harvey and H.B.Jr.Lawson (см. обзор [6]), M.Verbitsky [7] и др.

Также как в классической теории потенциала, для интегрируемых, полунепрерывных сверху функций эти операторы определяются в обобщенном смысле. Одними из основных понятий в теории $m-sh$ и $m-wsh$ функций являются понятие емкости конденсатора и понятие максимальных функций, являющегося аналогом гармоничеких функций в классической теории потенциала.

Теорема 1. *Функция* $u(z) \in m-sh(D)$ *является максимальной тогда и только тогда, когда нелинейный дифференциальный оператор в гессианах* $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$.

Таким образом, оператор в гессианах $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ играет основную роль в изучении класса $m-sh$ функций. На базе этого оператора вводится емкость конденсатора: пусть $K-$ компакт в области $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда величина

$$C_m(K, D) = \int\limits_D (dd^c \omega^*(z, K, D))^m \wedge \beta^{n-m} \tag{4}$$

называется m- *емкостью конденсатора* (K, D). Здесь $\omega^*(z, K, D)$ является $m-sh$ мерой компакта K относительно области D. При помощи емкости $C_m(K, D)$ и ее свойства далее доказываются все основные теоремы класса $m-sh(D)$ такие, как квазинепрерывность $m-sh$ функций, первая и вторая проблемы Лелона и т.п.

Класс $m-wsh$ функций имеет более наглядную геометическую интерпретацию: если $u \in m-wsh(D)$, то сужение $u|_\Pi$ является субгармонической функцией в пересечении $\Pi \bigcap D$ для любой плоскости $\Pi, dim\Pi = n-m+1$. Максимальные $m-wsh$ функции связаны с оператором в гессианах

$$\mathcal{M}_m = \prod_{1 \le j_1 < ... < j_{n-m+1} \le n} \left(\lambda_{j_1} + ... + \lambda_{j_{n-m+1}}\right). \tag{5}$$

В отличие от предидущего случая $m-sh$ функций, этот оператор не является дифференциальным оператором. В связи с этим имеется ряд трудностей в изучении класса $m-wsh$ функций. В частности, следующая проблема, являющейся пока открытым, решение которой имеет важную роль в построении теории потенциала в классе $m-wsh$ функций.

Проблема. Является ли условие $\mathcal{M}_m(u) = 0$ критерием максимальности функции $u \in m - wsh$?

Тем не менее, для $mw-$ выпуклых (регуляных) областей $D \subset \mathbb{C}^n$ имеет место

Теорема 2. *Если $D \subset \mathbb{C}^n-$ строго $mw-$выпуклая область, то в ней разрешима задача Дирихле с любой граничной данной $\varphi \in C(\partial D)$ т.е. $\exists$ максимальная функция $u \in m - wsh(D) \bigcap C(\bar{D})$: $u|_{\partial D} = \varphi$.*

Список литературы

[1] А.Садуллаев, Б.Абдуллаев, *Теория потенциалов в классе субгармонических функций*, Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, Москва, 2012, №279, 166-192.(in Russian).

[2] А.Садуллаев, Б.Абдуллаев, *Емкости и гессианы в классе субгармонических функций*, Доклады Академии Наук Россия, 2013, том 448, № 5, 1-3.(in Russian).

[3] Z.Blocki, *Weak solutions to the complex Hessian equation*, Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 55. V.5, 2005, 1735-1756.

[4] S.Dinev, S.Kolodziej, *A priori estimates for the complex Hessian equation*, Anal. PDE, V. 7. 2014. 227 244.

[5] H.Ch.Lu, *Solutions to degenerate Hessian equations*, Jurnal de Mathematique Pures et Appliques. Volume 100, Issue 6, 2013, 785-805.

[6] F.R.Harvey and H.B.Jr.Lawson, *Plurisubharmonicity in a general geometric context,* Geometry and Analysis 1, 2010, 363-401.

[7] M.Verbitsky, *Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and convexity*, Mathematische Zeitschrift, №4, V.264, 2010, 939-957.

AMS Mathematics Subject Classification: 32U05, 32U15

Hardy-type inequalities in discrete fractional calculus

S. Shaimardan

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail:serikbol-87@yandex.kz

Let $h > 0$ and $\mathbb{T}_a = \{a, a+h, a+2h, \cdots\}$ with $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definition 1. (see [1]) Let $f : \mathbb{T}_a \to \mathbb{R}$. Then the h-derivative of the function $f(x)$ is defined by

$$D_h f(t) := \frac{f(\delta_h(t)) - f(t)}{h}, \quad t \in \mathbb{T}_a, \tag{1}$$

where $\delta_h(t) = t + h$.

Definition 2. (see [1]) Let $f : \mathbb{T}_a \to \mathbb{R}$. Then the h-integral (h-difference sum) is given

$$\int\limits_a^b f(x) d_h x := \sum_{k=a/h}^{b/h-1} f(kh)h = \sum_{k=0}^{\frac{b-a}{h}-1} f(a+kh)h,$$

for $a, b \in \mathbb{T}_a : b > a$.

Let $D_h F(x) = f(x)$. Then $F(x)$ is called an h-antiderivative of $f(x)$ and is denoted by $\int f(x) d_h x$ [2]. If $F(x)$ is an h-antiderivative of $f(x)$, for $a, b \in \mathbb{T}_a : b > a$ we have that

$$\int\limits_a^b f(x) d_h x := F(b) - F(a). \tag{2}$$

Definition 3. (see [1]) Let $t, \alpha \in \mathbb{R}$. Then the h-fractional function is defined by

$$t_h^{(\alpha)} := h^\alpha \frac{\Gamma(\frac{t}{h} + 1)}{\Gamma(\frac{t}{h} + 1 - \alpha)},$$

where Γ is Euler gamma function, $\frac{t}{h} \notin \{-1,-2,-3,\cdots\}$ and we use the convention that division at a pole yields zero. Note that

$$\lim_{h\to 0} t_h^{(\alpha)} = t^\alpha.$$

Our main result reads:

Theorem 1. *Let* $\alpha < \frac{p-1}{p}$ *and* $1 \le p < \infty$*. Then the inequality*

$$\int_0^\infty \left(x_h^{(\alpha-1)} \int_0^{\delta_h(x)} \frac{f(t)d_h t}{t_h^{(\alpha)}} \right)^p d_h x \le$$

$$\left[\frac{p}{p-\alpha p-1}\right]^p \int_0^\infty f^p(x) d_h x, \qquad f \ge 0, \quad (3)$$

holds. Moreover, the constant $\left[\frac{p}{p-\alpha p-1}\right]^p$ *is best possible in (3).*

Theorem 2. *Let* $\alpha < \frac{p-1}{p}$ *and* $0 < p < 1$ *. Then the inequality*

$$\int_0^\infty f^p(x) d_h x \le$$

$$\left[\frac{p-1}{p} - \alpha\right]^p \int_0^\infty \left(x_h^{(\alpha-1)} \int_0^{\delta_h(x)} \frac{f(t)d_h t}{t_h^{(\alpha)}} \right)^p d_h x, \qquad f \ge 0, \quad (4)$$

holds. Moreover, the constant $\left[\frac{p-1}{p} - \alpha\right]^p$ *is best possible in (4).*

References

[1] N.R.O. Bastos, R.A.C. Ferreira, D.F.M. Torres, *Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations,* Discrete Contin. Dyn. Syst. 29 (2011), no.2, 417–437.

[2] P. Cheung, V. Kac, *Quantum calculus*, - Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, MI, USA, 2000.

AMS Mathematics Subject Classification: 26D10, 26D15, 49K05.

Characterization of associate function spaces

V.D. Stepanov

Peoples Friendship University of Russia, Moscow
E-mail: stepanov@mi.ras.ru

This research was carried out at the Peoples' Friendship University of Russia and financially supported by the Russian Science Foundation (Project 16-41-02004)

We analyse the problem of characterization of function spaces associated to a given function spaces. The situation is rather different for an ideal and non-ideal function spaces. We provide several examples of such a characterization including the weighted Sobolev space of the first order on the real line. As an important corollary this characterization provides the principle of duality allowing to reduce, for instance, the weighted inequalities to a more menageable inequalities.

AMS Mathematics Subject Classification: 26D10, 46E30, 46E35

Horizontal functional inequalities on stratified lie groups

D. Suragan

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail:suragan@math.kz

I will talk about our recent results with Michael Ruzhansky which establish versions of horizontal weighted Hardy-Rellich type and Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities on stratified Lie groups and study some of their consequences. Our results reflect on many results previously known in special cases. Moreover, a non-commutative version of the Badiale-Tarantello conjecture (on the best constant of a Hardy type inequality) is provided. If time permits, I will also discuss boundary as well as remainder term improvements of the obtained inequalities. This talk is mainly based on the following series of papers:

References

[1] M. Ruzhansky, D. Suragan, *On horizontal Hardy, Rellich, Caffarelli-Kohn-Nirenberg and p-sub-Laplacian inequalities on stratified groups,* Journal of Differential Equations. 262 (2017), 1799–1821.

[2] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Layer potentials, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups,* Advances in Mathematics. 308 (2017), 483–528.

[3] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Local Hardy and Rellich inequalities for sums of squares of vector fields,* Advances in Differential Equations. to appear, 2017. arXiv:1605.06389

[4] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Anisotropic L^2-weighted Hardy and L^2-Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities,* Commun. Contemp. Math., to appear, 2017. arXiv:1610.07032

AMS Mathematics Subject Classification: 22A30, 43A80

Recovery operator of periodic functions from the spaces SH_p^α, SW_p^α

N.T. Tleukhanova[1], **E.D. Nursultanov**[2]

[1] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: tleukhanova@rambler.ru

[2] *M.V. Lomonosov State University, Astana, Kazakhstan*

Let (X, Y) be pair of functional spaces of 1-periodic functions. Assume that X embedded in $C[0,1]^n$. Our aim is to find the nodes $\{t_k\}_{k=1}^M$ and functions $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^M$, such that the error

$$\delta_M(X,Y) = \sup_{\|f\|_X=1} \|f_\lambda - \sum_{k=1}^M f(t_k)\phi_k(x)\|_Y$$

will be minimal when order M increase.

The problem of recovering of the function from the classes with dominant mixed derivative is considered in many works. In [1] and [2] the order of the error of recovery operators in the power scale is achieved by orthodiameter:

$$d_M^\perp(X,Y) = \inf_{\{g_j\}_{j=1}^M} \sup_{\|f\|_X=1} \|f - \sum_{j=1}^M (f, g_j)g_j\|,$$

where the exact lower bound is taken over all orthogonal systems $\{g_j\}_{j=1}^M$ from $L_\infty[0,1]^n$.

The aim of this talk is to construct a recovery operator for which the error coincides with the order of the corresponding orthodiameter.

For a function $f \in C[0,1]^n$ we define the transform

$$F_m(f;x) = \sum_{\substack{\psi(k)=m \\ k\in\mathbb{N}^n}} \frac{1}{2^{|k|}} \sum_{0\le r<2^k} f(\frac{r}{2^k})\phi_{k,r}(x+\frac{r}{2^k}), \tag{1}$$

$$\phi_{k,r}(x) = \sum_{0\le\nu\le k} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+1)sgn(k_j-\nu_j)} \sum_{\mu\in\rho(\nu)} e^{2\pi i\mu x}. \tag{2}$$

Here $\mu x := \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$, $|k| := k_1 + \ldots + k_n$, $\rho(\nu) = \{\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^n : \left[2^{\nu_j - 2}\right] \leq |\mu_j| < 2^{\nu_j - 1}\}$, $[x]$ is integer part of x, and $\nu \leq \mu$ means that $\nu_j \leq \mu_j$, $j = \overline{1, n}$.

Theorem. *Let $m \geq \psi(1)$, $F_m(f)$ is defined by the relations (1), (2). And let M be the number of nodes in the definition of $F_m(f)$. If $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$, $\alpha_0 > \frac{1}{p}$, then*

$$\sup_{\|f\|_{SW_p^\alpha}=1} \|f - F_m(f)\|_{L_q} \sim d_M^{\perp}(SW_p^\alpha, L_q),$$

$$\sup_{\|f\|_{SH_p^\alpha}=1} \|f - F_m(f)\|_{L_q} \sim d_M^{\perp}(SH_p^\alpha, L_q).$$

The authors were supported by the grants no. 4080/GF, 5540/GF-4, 3311/GF-4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] S.A. Smolyak, *Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions,* Dokl. Akad. Nauk SSSR. 148 (1963), no. 5, 1042–1045 (in Russian).

[2] V.N. Temlyakov, *Approximate recovery of periodic functions of several variables,* Mat. Sb. 128 (1985), no. 2, 256–268 (in Russian).

Scale of basic boundedness characteristics in terms of fairways for the Hardy–Steklov operator in Lebesgue spaces

E.P. Ushakova[1,2]

[1] *Computing Center, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia*

[2] *Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

E-mail: elenau@inbox.ru

For $0 < p < \infty$ and $I := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ let $L^p(I) = L^p(a, b)$ denote the space of all Lebesgue measurable functions f on I such that $\|f\|_{p,I} := \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty$.

Define the Hardy–Steklov operator

$$\mathscr{H} f(x) := w(x) \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(y)v(y) \, dy, \qquad x \in I,$$

with non–negative weights v and w and boundary functions ϕ and ψ on I such that $-\infty \le c \le \phi(x) \le \psi(x) \le d \le \infty$ satisfying the following conditions:

(i) $\phi(x)$, $\psi(x)$ differentiable and strictly increasing on I;
(ii) $\phi(a) = \psi(a) = c$, $\phi(x) < \psi(x)$ for $x \in I$, $\phi(b) = \psi(b) = d$.

Definition. Given boundaries ϕ, ψ satisfying the above conditions, parameters $p' = \frac{p}{p-1}$, q and weights v, w such that $0 < v(y) < \infty$ for a.a. $y \in (c, d)$ and $0 < w(x) < \infty$ a.e. on I, and $v^{p'}, w^q$ are locally integrable on (c, d) and I respectively, we define the fairway functions σ and ρ such that $\phi(x) < \sigma(x) < \psi(x)$, $\psi^{-1}(y) < \rho(y) < \phi^{-1}(y)$ and

$$\int_{\phi(x)}^{\sigma(x)} v^{p'} = \int_{\sigma(x)}^{\psi(x)} v^{p'}, \quad x \in I;$$

$$\int_{\psi^{-1}(y)}^{\rho(y)} w^q = \int_{\rho(y)}^{\phi^{-1}(y)} w^q, \quad y \in (c, d).$$

Here ϕ^{-1} and ψ^{-1} denote the inverses to ϕ and ψ, respectively.

We establish boundedness criteria for $\mathscr{H}$ between $L^p(c,d)$ and $L^q(a,b)$ in terms of fairways σ and ρ for all $1<p<\infty$ and $0<q<\infty$ under assumption that non–negative weights w and v in the definition of $\mathscr{H}$ belong to $L^q_{\text{loc}}(a,b)$ and $L^{p'}_{\text{loc}}(c,d)$.

Theorem [1, 2]. *Let σ^{-1} and ρ^{-1} denote the inverses to σ and ρ, respectively. By ς we denote either σ or ρ. Put $1/r=1/q-1/p$, $V(t)=\int_{\phi(t)}^{\psi(t)}v^{p'}$, $W(t)=\int_{\psi^{-1}(t)}^{\phi^{-1}(t)}w^q$ and*

$$\mathscr{A}_\sigma=\sup_{t\in I}\mathscr{A}_\sigma(t),\quad \mathscr{A}^*_\sigma=\sup_{t\in(c,d)}\mathscr{A}_\sigma(\sigma^{-1}(t)),$$

where $\mathscr{A}_\sigma(t)=\big[W(\sigma(t))\big]^{\frac{1}{q}}\big[V(t)\big]^{\frac{1}{p'}}$;

$$\mathscr{A}_\rho=\sup_{t\in I}\mathscr{A}_\rho(t),\quad \mathscr{A}^*_\rho=\sup_{t\in(c,d)}\mathscr{A}_\rho(\rho(t)),$$

where $\mathscr{A}_\rho(t)=\big[W(\rho^{-1}(t))\big]^{\frac{1}{q}}\big[V(t)\big]^{\frac{1}{p'}}$;

$$\mathbb{A}_\sigma=\sup_{t\in I}\mathbb{A}_\sigma(t),\quad \mathbb{A}^*_\sigma=\sup_{t\in(c,d)}\mathbb{A}_\sigma(\sigma^{-1}(t))$$

with $\mathbb{A}_\sigma(t)=\left(\int_{\sigma^{-1}(\phi(t))}^{\sigma^{-1}(\psi(t))}V^qw^q\right)^{\frac{1}{q}}\big[V(t)\big]^{-\frac{1}{p}}$;

$$\mathbb{A}_\rho=\sup_{t\in I}\mathbb{A}_\rho(\rho^{-1}(t)),\quad \mathbb{A}^*_\rho=\sup_{t\in(c,d)}\mathbb{A}_\rho(t)$$

with $\mathbb{A}_\rho(t)=\left(\int_{\rho^{-1}(\psi^{-1}(t))}^{\rho^{-1}(\psi^{-1}(t))}W^{p'}v^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\big[W(t)\big]^{-\frac{1}{q'}}$;

$$\mathscr{B}^r_\sigma=\int_I\big[W(\sigma(t))\big]^{\frac{r}{p}}\big[V(t)\big]^{\frac{r}{p'}}w^q(t)\,dt,$$

$$(\mathscr{B}^*_\sigma)^r=\int_c^d\big[W(t)\big]^{\frac{r}{q}}\big[V(\sigma^{-1}(t))\big]^{\frac{r}{q'}}v^{p'}(t)\,dt,$$

$$\mathscr{B}_\rho^r = \int_I \big[W(\rho^{-1}(t))\big]^{\frac{r}{p}} \big[V(t)\big]^{\frac{r}{p'}} w^q(t)\,dt,$$

$$(\mathscr{B}_\rho^*)^r = \int_c^d \big[W(t)\big]^{\frac{r}{q}} \big[V(\rho(t))\big]^{\frac{r}{q'}} v^{p'}(t)\,dt;$$

$$\mathbb{B}_\sigma^r = \int_I \bigg[\int_{\sigma^{-1}(\phi(t))}^{\sigma^{-1}(\psi(t))} V^q w^q\bigg]^{\frac{r}{p}} \big[V(t)\big]^{q-\frac{r}{p}} w^q(t)\,dt,$$

$$(\mathbb{B}_\sigma^*)^r = \int_c^d \bigg[\int_{\sigma^{-1}(\phi(\sigma^{-1}(t)))}^{\sigma^{-1}(\psi(\sigma^{-1}(t)))} V^q w^q\bigg]^{\frac{r}{q}} \big[V(\sigma^{-1}(t))\big]^{-\frac{r}{q}} v^{p'}(t)\,dt;$$

$$\mathbb{B}_\rho = \begin{cases} \mathbb{B}_{q>1}, & q>1 \\ \mathbb{B}_{q<1}, & q<1 \end{cases},$$

where

$$\mathbb{B}_{q>1}^r = \int_I \bigg[\int_{\rho^{-1}(\psi^{-1}(\rho^{-1}(t)))}^{\rho^{-1}(\phi^{-1}(\rho^{-1}(t)))} W^{p'} v^{p'}\bigg]^{\frac{r}{p'}} \big[W(\rho^{-1}(t))\big]^{-\frac{r}{p'}} w^q(t)\,dt$$

and

$$\mathbb{B}_{q<1}^r = \int_I \bigg[\int_{\phi(t)}^{\psi(t)} W^{p'} v^{p'}\bigg]^{\frac{r}{p'}} \big[W(\rho^{-1}(t))\big]^{-\frac{r}{p'}} w^q(t)\,dt;$$

$$\mathbb{B}_\rho^* = \begin{cases} \mathbb{B}_{q>1}^{-\,*} + \mathbb{B}_{q>1}^{+\,*}, & q>1 \\ \mathbb{B}_{q>1}^{-\,*} + \mathbb{B}_{q>1}^{+\,*} + \mathbb{B}_{q<1}^{-\,*} + \mathbb{B}_{q<1}^{+\,*}, & q<1 \end{cases}, \quad \textit{where}$$

$$(\mathbb{B}_{q>1}^{-\,*})^r = \int_c^d \bigg[\int_{\rho^{-1}(\psi^{-1}(t))}^{t} W^{p'} v^{p'}\bigg]^{r/q'} \big[W(t)\big]^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt,$$

$$(\mathbb{B}_{q>1}^{+\,*})^r = \int_c^d \bigg[\int_{t}^{\rho^{-1}(\phi^{-1}(t))} W^{p'} v^{p'}\bigg]^{r/q'} \big[W(t)\big]^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt,$$

$$(\mathbb{B}_{q<1}^{-\,*})^r = \int_c^d \bigg[\int_{\phi(\rho(t))}^{t} W^{p'} v^{p'}\bigg]^{r/q'} \big[W(t)\big]^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt,$$

$$(\mathbb{B}_{q<1}^{+\,*})^r = \int_c^d \bigg[\int_{t}^{\psi(\rho(t))} W^{p'} v^{p'}\bigg]^{r/q'} \big[W(t)\big]^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt.$$

If $1 < p \le q < \infty$ *then* $\|\mathscr{H}\|_{L^p(c,d)\to L^q(a,b)} \approx \mathscr{A}_\varsigma \approx \mathscr{A}^*_\varsigma \approx \mathbb{A}_\varsigma \approx \mathbb{A}^*_\varsigma$. *In the case, when* $0 < q < p < \infty$ *and* $p > 1$, *we have* $\|\mathcal{H}\|_{L^p(c,d)\to L^q(a,b)} \approx \mathscr{B}_\varsigma \approx \mathscr{B}^*_\varsigma \approx \mathbb{B}_\varsigma \approx \mathbb{B}^*_\varsigma$.

The research was supported by the Russian Science Foundation (project RSF: 14-11-00443).

References

[1] E.P. Ushakova, *Alternative boundedness characteristics for the Hardy–Steklov operator*, Eurasian Math. J., accepted (2017).

[2] M.G. Nasyrova, E.P. Ushakova, *Hardy-Steklov operators and Sobolev-type embedding inequalities*, Proc. Steklov Inst. Math. 293 (2016) 228.

AMS Mathematics Subject Classification: 47G10, 45P05.

Ограниченность сингулярного оператора в пространствах типа Морри

Д.К. Чигамбаева

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail:d.darbaeva@yandex.kz

Пусть $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ и $0 < p \le \infty$. Множество всех измеримых по Лебегу функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ называется пространством Морри, если конечна следующая величина

$$||f||_{M_p^\lambda} \equiv ||f||_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_t(x))} < \infty.$$

Здесь $B_t(x)$ – шар с центром в точке x и радиусом $t > 0$. Заметим, если $\lambda = 0$, то $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, если $\lambda = \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$, то $M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$, а если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где Θ – множество всех эквивалентных нулю функций на $\mathbb{R}^n$. См. [4].

Пространства Морри были введены Морри [4] в 1938 г. и изучались в следствие вопросов регулярных решений нелинейных эллиптических уравнений и систем. В последние два десятилетия был проявлен большой интерес к изучению общих пространств типа Морри и классических операторов теории функций, действующих в этих пространствах. См. [1].

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$. Определим обобщенные пространства типа Морри $M_{p,q}^{\lambda}(\Omega)$ как множество всех измеримых по Лебегу функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна следующая норма при $q < \infty$

$$||f||_{M_{p,q}^{\lambda}(\Omega)} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\lambda} \sup_{x \in \Omega} \|f\|_{L_p(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

и при $q = \infty$

$$||f||_{M_{p,\infty}^{\lambda}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \sup_{t>0} t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_t(x))}.$$

Заметим, что в случае $p = \infty$ пространство $M_{p,q}^{\lambda}(\Omega) = \Theta$. Также отметим, что введенные пространства совпадают с классическими пространствами Морри в случае $q = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$, т.е.

$$M_{p,\infty}^{\lambda}(\mathbb{R}^n) = M_p^{\lambda}.$$

Если $\Omega = \{x\}$ – одноточечное множество, то

$$M_{p,q}^{\lambda}(\Omega) = LM_{p,q,x}^{\lambda},$$

где $LM_{p,q,x}^{\lambda}$ – локальные пространства типа Морри [2].

В данной работе мы исследуем ограниченность оператора Кальдерона-Зигмунда в пространствах типа Морри. Результат ограниченности различных классов данного оператора из пространства Лебега L_p в L_p при $1 < p < \infty$ был установлен в работе Стейна [6] и др. Что касается ограниченности сингулярного оператора в пространствах Морри, то здесь отметим работы Петре [5]. Дальнейшие результаты обобщений ограниченности сингулярного интегрального оператора для локальных пространств типа Морри были получены в работе Буренкова, Тарарыкова, Гулиева и Сербецци [3] и др.

Определение 1. Пусть $1 \le a < b \le \infty$. Линейный оператор T назовем (a, b) - сингулярным, если

1) оператор T ограничен из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$ для всех $a < p < b$;

2) существует измеримая функция K в $\mathbb{R}^n$, такая что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^n} \tag{1}$$

и для произвольной финитной, локально интегрируемой функции f с компактным носителем имеет место представление

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy \quad \text{почти всюду на} \quad \mathbb{R}^n \backslash supp f. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le a < b \le \infty$ *и оператор* T – (a, b)*-сингулярный. Тогда для* $p \in (a, b)$, $0 < \nu < \frac{n}{p}$, $0 < \tau \le \infty$ *оператор* T *ограничен из* $M^{\nu}_{p,\tau}(\Omega)$ *в* $M^{\nu}_{p,\tau}(\Omega)$.

Список литературы

[1] V.I. Burenkov, *Recent progress in studing the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II.* Eurasian Math. J. 4 (2013), no. 1, 21–45.

[2] V.I. Burenkov, H.V. Guliyev, V.S. Guliyev, *Nessesary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces,* Doklady Ross. Akad. Nauk. Matematika 409 (2006), 443–447.

[3] V.I. Burenkov, V.S. Guliyev, A. Serbetci, T.V. Tararykova, *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces,* Eurasian Math. J. 1 (2010), no. 1, 32–53.

[4] C.B. Morrey, *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166.

[5] J. Peetre, *On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant,* Ann. Mat. Pura ed Appl., 72 (1966), no. 4, 295–304.

[6] E.M. Stein, *Harmonic analysis: Real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1993).

AMS Mathematics Subject Classification: 42B35, 47B38, 47G10.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

DIFFERENTIAL OPERATORS
AND THEIR APPLICATIONS

On nonlocal boundary value problem with integral condition for partial differential equations

G.A. Abdikalikova

K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail:a_a_galiya@mail.ru

The nonlocal boundary value problem for the system of partial differential equations

$$D\Big[\frac{\partial}{\partial x}u\Big] = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + S(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\Big|_{x\in[0,\omega]} + C(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,T)\Big|_{x\in[T,T+\omega]} +$$

$$+\int\limits_0^T K(x,s)\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)ds = d(x), \tag{2}$$

$$u(t,t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

is considered in $\overline{\Omega} = \{(x,t):\ t \le x \le t+\omega,\ 0 \le t \le T\}$, $T > 0$, $\omega > 0$.

Here $D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$; $(n \times n)$ are matrices $A(x,t)$, $S(x,t)$, $K(x,t)$, n is vector-function $f(x,t)$, $(n \times n)$ are matrices $B(x)$, $C(x)$, n is vector-function $d(x)$ and is function $\Psi(t)$ continuous on $\overline{\Omega}$, $[0,\omega]$, $[0,T]$ accordingly.

In the present work are investigated a questions of well-posed solvability to wide extent of the nonlocal boundary value problem (1)-(3).

Used the work's idea [1] introduce new unknown functions [2] $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ and investigation problem is reduced to the equivalent problem for the system of hyperbolic first-order equations. Using method of the characteristic receive in the $\overline{H}$ =

$\{(\xi,\tau):\ 0\le\xi\le\omega,\ 0\le\tau\le T\}$, $T>0$, $\omega>0$

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}+\widetilde{S}(\xi,\tau)\widetilde{u}(\xi,\tau)+\widetilde{f}(\xi,\tau), \tag{4}$$

$$\widetilde{B}(\xi)\widetilde{v}(\xi,0)+\widetilde{C}(\xi)\widetilde{v}(\xi,T)+$$
$$+\int_0^T\widetilde{K}(\xi,\tau)\widetilde{v}(\xi,\tau)d\tau=\widetilde{d}(\xi),\quad \xi\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int_\tau^{\xi+\tau}\widetilde{v}(\zeta,\tau)d\zeta,\quad \tau\in[0,T]. \tag{6}$$

For the finding solution of boundary value problem (4)–(6), an algorithm is offered.

Step 0: in (4) accepting $\widetilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)$, and solved boundary value problem (4)-(5) we shall define initial approach $\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. Using the $\widetilde{v}(\xi,\tau)=\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$ from correlation (6) finding $\widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$.

Step 1: we shall take in right part (4) $\widetilde{u}(\xi,\tau)=\widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$, and solving boundary value problem (4)-(5) we shall define initial approximation $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$. Substituting in (6) the function $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$ found, finding $\widetilde{u}^{(1)}(\xi,\tau)$.

And so on.

On step k: continuing this process we shall get $(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau))$.

On each step of the offered algorithm using the parameterization method [3].

By fixed $\widetilde{u}(\xi,\tau)$, $\quad\xi\in[0,\omega]$ the problem (4)–(5) will be problem for equations

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}+G(\xi,\tau),\quad \tau\in[0,T] \tag{7}$$

with condition (5).

Theorem 1. *Let be boundary value problem (7), (5) for the differential equations of the well-posed solvability. Then following approximate* $(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau))$ *converges to the unique solution of the problem (4)–(6) and nonlocal boundary value problem (1)–(3) there is well-posed solvability to the wide extent.*

If solution built to the wide extent, continuously differentiable with respect to x *and* t*, that function* $u(x,t)$ *has continuous partial derivatives* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $D\left[\frac{\partial}{\partial x}u\right]$ *and satisfies equation (1) for all* $(x,t) \in \overline{\Omega}$ *and conditions (2)-(3) is and classical solution nonlocal boundary value problem (1)-(3).*

Список литературы

[1] A.T. Asanova, D.S. Dzhumabaev, *Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 402 (2013), no. 1, 167–178.

[2] G.A. Abdikalikova, *On solvability of one the nonlocal boundary value problem.* Mathematical journal. 5 (2005), no. 3(17), 5–10 (in Russian).

[3] D.S. Dzhumabaev, *The quality unique solvability linear boundary value problem for ordinary differential equations.* J.Computational Mathematics and Mathematical Physics. 29 (1989), no. 1, 50-66 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 35G45.

Spectral characteristic of one class of degenerate differential operators

Z.T. Abdikalikova

International IT University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: zamir_a_t@mail.ru

Let R be a set of real numbers, $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in R$, $i = 0, 1, ..., n$, n be a natural number, $|\overline{\alpha}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$, $I = (0, 1)$.

Let f: $(0, 1) \to R$. By the set of $\overline{\alpha}$ we define the differential operations $D^i_{\overline{\alpha}}$ and $D^i_{\overline{\alpha}^*}$ of the order i, $i = 0, 1, ...n$, in the following form:

$$D^0_{\overline{\alpha}} f(t) = t^{\alpha_0} f(t), D^i_{\overline{\alpha}} f(t) = t^{\alpha_i} \frac{d}{dt} t^{\alpha_{i-1}} \frac{d}{dt} ... \frac{d}{dt} t^{\alpha_0} f(t), i = 1, 2, ..., n,$$

$$D^0_{\overline{\alpha}^*} f(t) = t^{\alpha_n} f(t), D^i_{\overline{\alpha}^*} f(t) = t^{\alpha_0} \frac{d}{dt} t^{\alpha_1} \frac{d}{dt} ... \frac{d}{dt} t^{\alpha_i} f(t), i = 1, 2, ..., n,$$

where all derivatives are weak derivatives [1].

Using the differential operations $D^n_{\overline{\alpha}}$ and $D^n_{\overline{\alpha}^*}$, we determine the following differential expression:

$$ly = (-1)^n D^n_{\overline{\alpha}^*} D^n_{\overline{\alpha}} y.$$

Moreover, in $L_2(I)$ we determine differential operators A_n, generated by differential expressions ly, by the following form:

$$A_n f = (-1)^n D^n_{\overline{\alpha}^*} D^n_{\overline{\alpha}} f,$$

where

$D(A_n) = \{f | f \in \overline{C}^{\infty}(I), \ \lim_{t\to 1} f^{(k)}(t) = \lim_{t \to 0} f^{(k)}(t) = 0, \ k = 0, 1, ..., n-1\}$ when $|\overline{\alpha}| > n - \frac{1}{2}$,

$D(A_n) = \{f | f \in \overline{C}^{\infty}(I), \ \lim_{t\to 1} f^{(k)}(t) = 0, \ k = 0, 1, ..., n-1; \ \lim_{t \to 0} f^{(i)}(t) = 0, \ i = 0, 1, ..., n-l\}$ when $|\overline{\alpha}| \leq n - \frac{1}{2}$, where $l = [|\overline{\alpha}|] + 1$ ($[a]$-whole part of the number).

We consider questions, when the closures of operators are self-adjoint, positively defined, and with a discrete spectrum.

References

[1] V. I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, Teubner Texts in Mathematics, Teubner Verlag, Stuttgart, 137 (1998), 312 pp.

[2] Z. T. Abdikalikova, R. Oinarov and L.- E. Persson, *Boundedness and Compactness of the Embedding between Spaces with Multiweighted Derivatives when* $1 < q < p < \infty$, Czechoslovak Mathematical Journal, 61, 136 (2011),7-26, 20p.

[3] H. Tribel, *Interpolation Theory. Functional Spaces. Differential Operators*, Moscow, «Mir». 1980.

О математической модели процесса теплообмена вращающегося регенеративного воздухоподогревателя и задаче идентификации

А.А. Азамов[1], М.А. Бекимов[2]

[1] *Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан*
E-mail:abdulla.azamov@gmail.com
[2] *Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан*

Рассматривается математическая модель термодинамического процесса теплообмена во вращающейся регенеративном воздухоподогревателе (ВРВП), основанная на дискретизации как параметров, описывающих сам процесс, так и геометрическую структуру барабана ВРВП [1]. В отличие от других моделей того же процесса, этот модель описывается линейной дискретной системой с мономиальной матрицей, что позволяет эффективно решать задачи качественного поведения и задачи идентификации.

Если температуру в момент времени t в точке (x, y, z), принадлежащей области, занимаемой ВРВП, обозначить

$\Theta(t,x,y,z)$, то величина $\Theta(t,x,y,z)$, полностью охарактеризуют процесс теплообмена в барабане ВРВП, но, выписать динамические уравнения и начально-граничную задачу для $\Theta(t,x,y,z)$, является непростой задачей [2]–[5].

Используя метод усреднения на основе закона Ньютона, выводится система

$$x_1(n+1) = (1-\bar{\alpha}_1 h)x_{2m}(n) + \bar{\beta}_1 h q_1(n),$$
$$x_k(n+1) = (1-\bar{\alpha}_k h)x_{k-1}(n) + \bar{\beta}_k h q_k(n),\ \ k = \ 2,\ 3,\ \ ...,\ 2m, \tag{1}$$

$$u_k(n) = q_k(n)+\bar{\gamma}_k h(x_k(n)-q_k(n)),\ \ k = 1, 2,\ \ldots,\ 2m-1,\ 2m, \tag{2}$$

где x_k, q_k, u_k – величины, соответствующим усредненым величинам температуры твердой части ВРВП, входящих и выходящих газа и воздуха соответственно.

Система (1)–(2) получена в результате довольно сильных упрощающих предположений о процессе теплообмена в ВРВП. Тем не менее, благодаря такому упрощению, она допускает достаточно полный анализ и может служить базовой моделью для описания работы ВРВП.

Введя в рассмотрение векторы $z(n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{2m})^T$, $r(n) = h(\bar{\beta}_1 q_1(n), \bar{\beta}_2 q_2(n), \ldots,\ \bar{\beta}_{2m} q_{2m}(n))^T$ (где T – знак транспортирования, превращающий вектор-строку в вектор-столбец), систему (1) – (2) можно записать в стандартном виде

$$z(n+1) = Az(n) + r(n), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{3}$$

Пусть $\mu = \sqrt[2m]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2m}}$. Предпологается $0 < \mu < 1$. Тогда числа матрицы A лежат внутри единичного круга, и все решения системы (1) – (2) асимптотически устойчивы [1]. Имеет место также

Теорема 1. *а) если последовательность $r(n)$ ограничена (стремится к пределу r_* при $n \to \infty$), то все решения* *также ограничены (соответственно, стремятся к пределу* $(E-A)^{-1}r_*$*);*

b) если последовательность $r(n)$ *периодическая, т.е.* $r(n+T) \equiv r(n)$ *для некоторого целого* T, $T \geq 2$, *то существует единственное периодическое решение (период которого совпадает с* T*);*

c) если средние по Чезаро $R_n = \frac{1}{n}[r(0)+r(1)+\cdots+r(n-1)]$ *имеют предел* R_*, *то для каждого решения* $z(n)$ *средние по Чезаро* $Z_n = \frac{1}{n}[z(1)+z(2)+\cdots+z(n)]$ *также имеют предел (равный* $(E-A)^{-1}R_*$*).*

Пусть $r_n = r = const$. Замена $y_n = z_n - z_0$ приведет (3) к системе

$$y_{n+1} = Ay_n + t, \ \ y_0 = 0,$$

где $t = r - (E-A)z_0$.

Пусть

$$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_{2m}], \quad B = [t - y_2, \ t - y_3, \ ..., \ t - y_{2m+1}].$$

– $(2m \times 2m)$-матрицы. Тогда цепочка равенств $y_1 = t, \ y_2 = Ay_1 + t, \ \ldots, y_{2m} = Ay_{2m-1} + t$ запишется в виде $AY = B$

Теорема 2. *Пусть вектор* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{2m})$ *выбран так, что* $t_k = 1$ *для* $k = 1$ *и* $k = m+1$ *и* $t_k = 0$ *для остальных значений* k. *Тогда если* $\Delta = \alpha_m \ldots \alpha_2\alpha_1 - \alpha_{2m} \ldots \alpha_{m+2}\alpha_{m+1} \neq 0$, *то матрица* Y *обратима.*

Таким образом, теорема 1 даёт решение задачи идентификации: $A = Y^{-1}B$.

Список литературы

[1] A.A. Azamov, M.A. Bekimov *Simplified model of the heat exchange process in rotary regenerative air pre-heater.* Ural Math. Jour. (2016), Vol. 2. no. 2., 27–36.

[2] Chi-Liang Lee *Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system.* Journal of Chinese Institute of Engineers. (2009), Vol. 32, no. 5, 703–710.

[3] V. P. Kovalevskii *Simulation of Heat and Aerodynamic Processes in Regenerators of Continuous and Periodic Operation. I. Nonlinear Mathematical Model and Numerical Algorithm.* Journal of Engineering Physics and Thermophysics. (2004), Vol. 77, no. 6.

[4] H.Y. Wang, L.L. Zaho, Z.G. Xu, W.G. Chun, H.T. Kim *The study on heat transfer model of tri-sectional rotary air preheater based on the semi-analytical method.* Appl. Therm. Eng. (2008) Vol. 28 no. (14-15) 1882–1888.

[5] Ю.А. Кирсанов *Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 240 с.

AMS Mathematics Subject Classification: 65Q10, 65F40, 80A20, 97M50

Параболалық теңдеу үшін кері есептің шешімінің қирауы

С.Е.Айтжанов [1], Г.Р.Ашурова[1], Ғ.Ж.Естаева [2], Д.Е. Серікбол [1]

[1] Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазазстан
[2] Абай атындағы қазақ ылттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазазстан
SerikAitzhanov81@gmail.com

Жану теориясынан келесі сызықты емес параболалық теңдеуге қойылған кері есепті қарастырайық

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{p-2}u) - \Delta(|u|^{p-2}u) + a(x,t,u,\nabla u) = |u|^q u + f(t)\omega(x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0, \tag{3}$$

$$\int_\Omega |u|^{p-2}u \cdot \omega \, dx = 1, \;\; t > 0. \tag{4}$$

Мұндағы $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ шенелген облыс, $\partial\Omega$ шекарасы жатық тегіс, p және q оң тұрақтылар, $q > p - 2$, $p > 2$. Ал $\omega(x)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырады:

$\int_\Omega \omega^2(x)dx = 1$,$\omega \in H^2(\Omega) \bigcap H_1^0(\Omega) \bigcap L_{\frac{p+q}{p-1}}(\Omega)$, $p \geq 2$, $q > p - 2$. (A1)

(1) теңдеуді, (2) бастапқы шартты, (3) шекаралқ шартты және интегралдық қосымша (4) шартты қанағаттандыратын $\{u(x,t),\; f(t)\}$ функцияларын қалпына келтіру есебі, бұл есептің берілгендері келесі келісім шартын қанағаттандыруы тиіс

$$\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 \cdot \omega \, dx = 1,$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \bigcap L_p(\Omega) \bigcap L_{p+q}(\Omega) \int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 \cdot \omega \, dx = 1,$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \bigcap L_p(\Omega) \bigcap L_{p+q}(\Omega)$$

және $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ тұрақтылары үшін

$|a(x,t,u,\nabla u)| \leq M_1|\nabla(|u|^{p-2}u)| + M_2|u|^{p-1}$. (A3)

Теорема 1. (A1)-(A3) шарттары орындалсын және $\|u_0\| > 0$, сонымен бірге u_0 бастапқы функциясы белгілі бір шартты қанағаттандырғанда, (1)-(4) кері есептің шешімі $t_1 \equiv t_1(p,\, q, \alpha,\, u_0,\, \omega) < \infty$ уақытында қирайды

$$\psi(t) = \frac{1}{2(p-1)} \int_0^t \int_\Omega |u|^{2(p-1)} dx d\tau + C_3 \to \infty, \;\; t \to t_1.$$

Әдебиеттер тізімі

[1] A. Eden, V.K. Kalantarov, *On global behavior of solutions to an inverse problem for nonlinear parabolic equations.* J.Math. Anal. Appl. (2005), no. 307. 120–133.

[2] V. K. Kalantarov, O.A. Ladyzhenskaya, *Formation of collapses in quasi-linear of parabolic and hyperbolic types.* Zap.Nauch.Semin. LOMI. (1977), -no. 69. 77–102.

[3] О.А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, Москва, 1973.

AMS Mathematics Subject Classification: 35K60, 35K70, 35R30.

Параболалық теңдеу үшін қойылған кері есептің шешімінің стабилизациясы

С.Е. Айтжанов[1], А.Б. Беимбетова[1], Ғ.Ж. Естаева[2], Д.Е. Серікбаев[1]

[1] *Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан*
E-mail: SerikAitzhanov81@gmail.com
[2]*Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан*

Бұл жұмыста сызықты емес параболалық теңдеуге қойылған кері есептің шешімі $t \to \infty$ оның нормасы нөлге ұмтылатыны зерттелді.

Сызықты емес параболалық теңдеуге қойылған кері есепті қарастырайық:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{p-2}u) - \Delta(|u|^{p-2}u) = |u|^q u + f(t)\omega(x), \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0, \tag{3}$$

$$\int_{\Omega} |u|^{p-2}u \cdot \omega \, dx = \phi(t), \;\; t > 0. \tag{4}$$

Мұндағы $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ шенелген облыс, $\partial\Omega$ шекарасы жатық тегіс, p және q оң тұрақтылар. Ал $\omega(x)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$\int_{\Omega} \omega^2(x) dx = 1,$$

$$\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L_{\frac{p+q}{p-1}}(\Omega), \;\; p \geq 2, \; q > p-2. \tag{5}$$

(1) теңдеуді, (2) бастапқы шартты, (3) шекаралық шартты және интегралдық қосымша (4) шартты қанағаттандыратын $\{u(x,t), \; f(t)\}$ функцияларын қалпына келтіру есебі, бұл есептің берілгендері келесі келісім шартын қанағаттандыруы тиіс

$$\int_{\Omega} |u_0|^{p-2}u_0 \cdot \omega dx = \phi(0), \;\; u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega) \cap L_{p+q}(\Omega). \tag{6}$$

Теорема 1. *(5)-(6) шарттары орындалсын және ϕ, ϕ' функциялары $[0, +\infty)$ аралыгында үзiлiссiз әрi $t \to \infty$ нөлге ұмтылганда, онда*

$$\lim_{t\to\infty} \left[\int_{\Omega} |\nabla(|u|^{p-2}u)|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^{p+q} dx \right] = 0.$$

Әдебиеттер тізімі

[1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики.-М.:Наука, 1973.

[2] A.Eden, V.K.Kalantarov, *On global behavior of solutions to an inverse problem for nonlinear parabolic equations.* J.Math. Anal. Appl. -2005. -Vol.307. 120-133.

[3] V. K.Kalantarov, O.A. Ladyzhenskaya, *Formation of collapses in quasilinear of parabolic and hyperbolic types.* Zap.Nauch.Semin. LOMI.-1977. -Vol. 69. 77-102.

AMS Mathematics Subject Classification: 35K60, 35K70, 35R30.

On solvability of a second-order nonlinear differential equation

R.D. Akhmetkaliyeva

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail:akhmetkaliyeva_ rd@enu.kz

Existence and smoothness of solutions for nonlinear differential equations have been investigated for the Sturm-Liouville equation in unbounded domain in [2,3]. The nonlinear Sturm-Liuville operator

$$Ly = -y'' + q(x, y)y$$

in space $L_1(R)$ was considered in [1].

We consider the following nonlinear differential equation

$$Ly = -y'' + [r(x, y)]y' = f(x), \tag{1}$$

where $x \in R$, r is real-valued function and $f \in L_2(R)$.

Definition 1. A function $y \in L_2(R)$ is called a solution of (1), if there is a sequence of twice continuously differentiable functions $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $\|\theta(y_n - y)\|_2 \to 0$, $\|\theta(Ly_n - f)\|_2 \to 0$ as $n \to \infty$ for any $\theta \in C_0^{\infty}(R)$. Here $\| \cdot \|_2$ is a norm in $L_2(R)$.

Theorem 1. *Let the function r be continuously differentiable with respect to both arguments and for any $A > 0$ satisfy the following conditions*

$$r \geq \delta_0(1 + x^2) \quad (\delta_0 > 0),$$

$$\sup_{|x-\eta|\leq 1} \sup_{|C_1|\leq A, |C_2|\leq A, |C_1-C_2|\leq A} \frac{r(x, C_1)}{r(\eta, C_2)} < \infty.$$

Then there is a solution y of the equation (1) and

$$\|y''\|_2 + \|[r(\cdot, y)]y'\|_2 < \infty.$$

References

[1] È.Z. Grinshpun and M. Otelbaev, *Smoothness of solutions of a nonlinear Sturm-Liouville equation in $L_1(-\infty, +\infty)$*. Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR Ser. Fiz.-Mat. (1984), no. 5, 26-29 (in Russian).

[2] M.B. Muratbekov, *On the smoothness of solutions of degenerate elliptic equations and one-dimensional stationary nonlinear Schrödinger equation.* Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, Almaty, 1981 (in Russian).

[3] M.B. Muratbekov and M. Otelbaev, *On the smoothness of solutions of nonlinear Sturm-Liouville equation.* Abstracts Kazakhstan Interuniversity Conference on Mathematics and Mechanics, Karaganda, (1981), 34–35 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 34G20

Solution of the homogeneous thermal problem with the boundary moving by law of $t = x^2$

D.M. Akhmanova[1], M.I. Ramazanov[1], M.T. Dzhenaliyev[2]

[1] *Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: danna.67@mail.ru, ramamur@mail.ru
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: muvasharkhan@gmail.com

We consider the first boundary value problem of heat conduction in the degenerating domain (domain with a moving boundary; the boundary of the domain is moving with variable speed): In the domain $G = \left\{(x;\ t) : \quad t > 0, \quad 0 < x < \sqrt{t}\right\}$ to find a solution to the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

satisfying the boundary conditions:

$$u(x,\ t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,\ t)\big|_{x=\sqrt{t}} = 0. \tag{2}$$

Such problems in the domain $Q = \{(x;\ t) : \quad t > 0, \quad 0 < x < t\}$ are investigated in work [1].

We denote by $C_\gamma(R_+)$ Banach space of functions $\varphi(t) \in C(R_+)$, with finite norm

$$\|\varphi\|_\gamma = \max|t^\gamma \varphi(t)|, \quad \gamma = \text{const}.$$

The following theorem holds.

Theorem 1. *For all $\lambda \in \Lambda$ there is a number s such that the functions $\varphi(t) = Ct^s$, where $C = const$ in the space $C_{-s}(R_+)$ are eigenfunctions of equation $\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau) = 0$. In the space $C_{-s}(R_+)$ all eigenvalues of equation $\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau) = 0$, are simple.*

From the theorem and remark it follows that for $\lambda = 1$ equation $\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau) = 0$, has eigenfunction $\varphi(t) = C = \text{const}$, and initial equation $\psi(t) - \int\limits_0^t k(t,\, \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau = 0$, has eigenfunction $\psi(t) = \dfrac{C}{\sqrt{t}}$.

References

[1] A.M. Nakhushev, Inverse problems for degenerating equations and Volterra integral equations of the third kind, *Differential Equations*, **10**, No. 1 (1974), 100–101.

AMS Mathematics Subject Classification: 34A55

On degenerate boundary conditions for operator D^3

A.M. Akhtyamov

R.R. Mavlutov institute of mechanics, Ufa, Russia
E-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

Consider the following problem for operator D^4:

$$y'''(x) = \lambda\, y(x) = s^3\, y(x), \qquad x \in [0,1] \tag{1}$$

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{3} a_{jk}\, y^{(k-1)}(0) + \sum_{k=0}^{3} a_{j\,k+n}\, y^{(k-1)}(1) = 0, \tag{2}$$

$$j, k = 1, 2, 3.$$

It is known [1, P. 26] that if the coefficients of an ordinary linear differential equation are continuous on [0,1], then for the spectrum of the problem (1), (2) the following two possibilities occur: 1) there exist at most a countable number of eigenvalues such that do not have limit points in $\mathbb{C}$; 2) every $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue.

The problems with nonseparated boundary conditions for case 1) have been fairly well studied. The degenerate case 2) has been studied little (The boundary conditions are called degenerate if the characteristic determinant of corresponding eigenvalue problem is constant [2, p. 29]). It is well known, perhaps, only an example for differential operator of any even order for which the spectrum fills the entire complex plane [3] (see also [4]). Recently in [5] it is shown that there exist similar differential operators of any odd order. However, in connection with this, another question arises: are there other examples of such operators? For operator D^3 we prove that other examples don't exist.

The common form for degenerate boundary conditions for the operator D^3 is found. It is shown that the matrix for coefficients of degenerate boundary conditions has a two diagonal form. The elements of the first diagonal are units. The elements of the second diagonal are square roots of a number. It is proved that the characteristic determinant is identically equal to zero if and only if the matrix of coefficients of boundary conditions has a two diagonal form. The elements of the first diagonal are units. The elements of the second diagonal are square roots of minus one.

This work was supported by the program «Leading Scientific Schools» (project No. 7461.2016.1) and by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 15-01-01095_a).

References

[1] M.A. Naimark, *Linear Differential Operators.* Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

[2] V.A. Marchenko *Sturm-Liouville Operators and Applications.* Basel; Boston; Shtuttgart, Birkhauser, 1986.

[3] V.A. Sadovnichy, B.E. Kanguzhin, *On the connection between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions.* Dokl. Akad. Nauk SSSR. 267 (1982), no. 2, 310–313 (in Russian).

[4] J. Locker, Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators. Providence: American Mathematical Society, (2008) (Memoirs of the American Mathematical Society; Vol.195, N 911).

[5] A.M. Akhtyamov, *On spectrum for differential operator of odd order.* Mathematical Notes. 101 (2017), no. 5.

AMS Mathematics Subject Classification: 34B05, 58C40.

On a difference scheme for regular heat transfer boundary-value problem

M.E. Akhymbek[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [1]*akhymbek@math.kz*

We study a new method of solving non-local problems for the heat equation with finite difference method.

In $\Omega = \{(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T\}$ we consider a problem of finding a solution $u(x,t)$ of the heat equation

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

satisfying the initial condition

$$u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

and the boundary conditions of the general form

$$\begin{cases} a_1 u_x(0,t) + b_1 u_x(1,t) + a_0 u(0,t) + b_0 u(1,t) = 0, \\ c_1 u_x(0,t) + d_1 u_x(1,t) + c_0 u(0,t) + d_0 u(1,t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

The coefficients $a_k, b_k, c_k, d_k, \quad (k = 1, 2)$ of the boundary conditions are real numbers, and $\phi(x)$, $f(x,t)$ are given functions.

The main important feature of these problems is their non-self-adjointness. This non-self-adjointness causes major difficulties in their analytical and numerical solving. The problems, which boundary conditions do not possess strong regularity, are less studied. One of the first problems of this type known as a problem of Samarskiy-Ionkin was investigated by N.I. Ionkin, A.V. Gulin, A.Yu. Mokin, A. Ashyralyev, M. Ismailov, M. Sadybekov and others.

The scope of study of the report justifies possibility of building a stable difference scheme with weights for abovementioned type of problems. The corresponding difference schemes do not have the property of self-adjoint.

Some Problems of these types was considered in our work [1].

The authors were supported by the grant no. 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] M.E. Akhymbek, M.A. Sadybekov, *On a difference scheme for nonlocal heat transfer boundary-value problem.* AIP Conference Proceedings. 1759 (2016), 020032.

AMS Mathematics Subject Classification: 35P05, 35E20, 39A14, 39A05

Локальные интегральные соотношения коэффициентов безсопряженного дифференциального уравнения

М. Алдай, Д.С. Каратаева, К.Р. Мырзатаева

ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: kalbibi@mail.ru

Теория осцилляции как важная составная часть современной качественной теории дифференциальных уравнений берет начало с работ Штурма, который ввел понятие осцилляторного уравнения как уравнения, любое решение которого имеет бесконечно много нулей, и доказал свои известные теоремы сравнения и разделения нулей.

Для линейного случая А.Кнезер(A.Kneser), У.Лейтон(W.Leighton), М.Морс(M.Morse), А.Уинтнер(A.Wintner), Ф.Хартман(P.Hartman) [1] и другие исследователи получили критерии осцилляции , которые нашли обобщения для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, в частности полулинейных дифференциальных уравнений второго порядка [2,3]

$$\left(\rho(t)\,|y'(t)|^{p-2}\,y'(t)\right)' + \upsilon(t)\,|y(t)|^{p-2}\,y(t) = 0 \qquad (1)$$

$1 < p < \infty, \quad \rho : I \to R, \quad \upsilon : I \to R$ непрерывные функции, причем$\rho(t) > 0$ на I.

Многие результаты даны в терминах уравнения без сопряженных точек, то есть уравнения, любое ненулевое решение которого имеет на заданном интервале не более одного нуля.

В известных работах [4] полученные условия осцилляторности и неосцилляторности уравнения выражаются через глобальные интегральные характеристики коэффициентов ρ и υ.

В данной статье, опираясь на работы Ойнарова Р [5], Ойнарова Р, Мырзатаевой К.Р. [6], получены признаки уравнений без сопряженных точек как полулинейного так и линейного дифференциального уравнения второго порядка в терминах соотношения отрицательной и положительной части функции υ и её локального интегрального поведения.

Введем следующие обозначения

$$\upsilon(t) = \delta(t) - \theta(t), \quad \delta(t) > 0, \quad \theta(t) > 0, \quad \forall t \in I. \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$d^+(t) = \sup \left\{ d > 0 : \left(\int_t^{t+d} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^{t+d} \theta(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\},$$

$[t, t+d] \subset I$,

$$d^-(t) = \sup \left\{ d > 0 : \left(\int_{t-d}^{t} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t-d}^{t} \theta(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\},$$

$[t-d, t] \subset I$.

Положим

$$\Delta^+(t) = [t, t + d^+(t)], \quad \Delta^-(t) = [t - d^-(t), t],$$

$$B_p = \left(p^{q-1}q + 1\right)^{p-1} \times \sup_{a<t<b} \left(\int_{\Delta^-(t)} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{p-1} \int_{\Delta^+(t)} \delta(s)ds.$$

Далее предположим, что $I = [a, b), \quad -\infty < a < b \leq +\infty$, и для любого $t \in (a, b)$

$$\int_t^b \rho^{1-q}(s)ds = \infty, \quad 0 < \int_t^b \theta(s)ds \leq \infty \tag{2}$$

Теорема [6]. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и выполнены условия* (2). *Если* $2B_p < 1$, *то уравнение* (1) *является уравнением без сопряженных точек на интервале* (a, b).

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$*, выполнены условия* (2)*. Если*

$$\sup_{a<t<b}\left[\left(\int_{\Delta^-(t)}\theta(s)ds\right)^{-1}\cdot\left(\int_{\Delta^+(t)}\delta(s)ds\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{1}{2}\min\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

то уравнение (1) *является уравнением без сопряженных точек на*(a, b)*.*

Следствие. *Пусть выполнены условия (2) при* $p = 2$*. Если выполнено условие:*

$$\sup_{a<t<b}\left[\left(\int_{\Delta^-(t)}\theta(s)ds\right)^{-1}\cdot\left(\int_{\Delta^+(t)}\delta(s)ds\right)\right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{4},$$

то уравнение (1) при $p = 2$ *является уравнением без сопряженных точек на* (a, b)*.*

Список литературы

[1] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения.*-М.:Мир, 1970.-720.

[2] A. Elbert, *A half-linear second order differential equation.* Coloq. Math. Soc. Janos Bolyai. -Hungary,-V.30(1979). 158-180.

[3] J.D. Mirzov, *On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems.* J.Math. Anal. Appl.-USA, -V.53(1976). 418-425.

[4] O. Dosly, P. Rehak, *Half linear differential equations.* Amsterdam: North – Holland Math. Stud., 2005-515.

[5] Oinarov R. Reversion of Holder type inequalities for sums of weighted norms and additive weighted estimates of integral operators.//Math.Ineq. and Appl. -USA, 2003. -V.6. №3.-P.421-436.

[6] Ойнаров Р., Мырзатаева К.Р. Неосцилляторность полулинейного дифференциального уравнения второго порядка.//Матем.журнал,- Алматы, 2007. том 7, №2(24), 72-82.

AMS Mathematics Subject Classification: 34C10, 26D10, 26D15.

Транспортные краевые задачи теории упругости при сверхзвуковых нагрузках и их решения

Л.А. Алексеева

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан
e-mail: alexeeva@math.kz

В статье автора [1] были решены транспортные краевые задачи для изотропной упругой среды, ограниченной цилиндрической поверхностью, по которой с постоянной дозвуковой скоростью движется нагрузка, вид которой не меняется с течением времени (*транспортная нагрузка*). Данный класс задач является модельным для динамики подземных сооружений, типа транспортных тоннелей, а также наземного дорожного транспорта, и сводится к решению эллиптических краевых задач для системы уравнений Ламе в подвижной системе координат, связанной с транспортной нагрузкой.

Здесь рассматривается аналогичная задача, но в сверхзвуковом случае, когда скорость нагрузки больше скоростей распространения продольных и поперечных волн в упругой среде. Поставлена соответствующая гиперболическая краевая задача, доказана единственность решения с учетом ударных волн. На основе метода обобщенных функций получено ее обобщенное решение, проведена его регуляризация и дано ее регулярное интегральное представление. Построены сингулярные граничные интегральные уравнения, разрешающие поставленную задачу.

1.Постановка транспортной краевой задачи. Пусть упругая изотропная среда занимает область $D^- \subset R^3$, ограниченную гладкой цилиндрической поверхностью Ляпунова D, образующие которой параллельны оси Z. Множество $S^- \subset R^2$ перпендикулярное сечение D^-, S - его граница: $D^- = S^- \times Z$, $D = S \times Z$, $n(x)$ - единичный вектор внешней нормали к D, $D_+ = S \times Z_+$, $\quad Z_+ = \{z \in R^1 : z \geq 0\}$.

Пусть на D заданы транспортные нагрузки, движущиеся со скоростью c :

$$P(x_1, x_2, x_3 + ct) = P(x, z) = \sigma_{ij} n_i e_j = p_j(x, z) e_j \, \theta(z), \qquad (1)$$

для $x \in S$, $\quad j = 1, 2, 3$. $\theta(z)$ - функция Хевисайда, σ_{ij}- тензор напряжений, $p_j(x, z) \in L_1(D_+)$.

В подвижной системе координат для перемещений $u = u_j(x, z) e_j$ имеем

Транспортные уравнения Ламе

$$\left(\left(M_1^{-2} - M_2^{-2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial' x_j} + \left(M_2^{-2} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x'^2_3} \right) \delta_{ij} \right) u_j + g_i = 0. \quad (2)$$

Здесь $M_j = c/c_j$ - *числа Маха*, c- скорость транспортной нагрузки, c_1, c_2 - скорости распространения упругих волн дилатации и сдвига соответственно, $c_1 > c_2$ (по одноименным индексам в произведениях всюду тензорные свертки).

Рассматривается сверхзвуковой случай: $c > c_1$. При таких скоростях движения система (1) гиперболического типа, допускает разрывные по производным решения [2]. На фронтах ударных волн, распространяющихся со звуковыми скоростями c_1, c_2, напряжения и скорости перемещения среды разрывны. В подвижной системе координат условия на скачки напряжений и пермещений имют вид :

$$h_j [\, \sigma_{ij}]_{F_k} = -\rho \, c \, c_k \; [u_{i,z}]_{F_k} \qquad (3)$$

ρ - плотность среды, $h = h_j^k(x,z)e_j$ - волновой вектор на F_k.

При $z \leq 0$, $x \in S + S^- :\quad u(x,0) = 0$, $u,_z(x,-0) = 0$. При $(x,z) \in D^- + D$,
$\|(x,z)\| \to \infty$: $u_j \to 0, \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad \|\partial_j u\| < O(\|(x,z)\|^{1+\varepsilon}), \quad j = 1, 2, z$.

Построен закон сохранения энергии для этой краевой задачи и на его основе доказана единственность решения с учетом ударных волн [3,4].

2. Решение транспортной краевой задачи. Для решения задачи используется метод обобщенных функций (МОФ), основные идеи которого подробно изложены автором в [5] на примере транспортных краевых задач для волнового уравнения Даламбера. МОФ позволяет записать уравнения (1) в пространстве ОФ с сингулярной массовой силой, содержащей простые и двойные слои, плотности которых определяются граничными значениями напряжений и перемещений. Используя свойства фундаментального решения (1) - тензора Грина U_i^j (см.[2,4]), строится решение краевой задачи в пространстве обобщенных функций. Переход к интегральному представлению решения требует определенной регуляризации полученного обобщенного решения с введением первообразной тензора Грина $W_i^j(x,z)$ по переменной z и порождаемых ими тензоров фундаментальных напряжений T_i^j, H_i^j. На основе регуляризованной формулы в пространстве ОФ построено ее регулярное интегральное представление, которое дает решение краевой задачи, определяющее перемещение среды по граничным значениям скорости перемещений и граничным транспортным нагрузкам (см.[4]). В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При $c > c_1$ решение транспортной краевой задачи имеет регулярное интегральное представление в виде: при*

$(x, z) \in D^-$

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_i(x,z) &= \sum_{k=1}^{2} \int_S \theta(z - m_k r) dS(y) \times \\ &\times \int_0^{z-m_k r} \Big(U_{ik}^j (x-y, z-\tau) p_j(y,\tau) - \\ &- H_{ik}^j(x-y, z-\tau, n(y)) \partial_\tau u_j(y,\tau) \Big) d\tau \end{aligned}$$

Здесь $U_i^j = U_{i1}^j + U_{i2}^j$ *- составляющие, описывающие объемные и сдвиговые деформации упругой среды;* $r = \|x - y\|$, $m_k = \sqrt{M_k^2 - 1}$.

Исследуя асимптотические свойства ядер, построена разрешающая система сингулярных граничных интегральных уравнений для определения неизвестных граничных перемещений среды [4].

Список литературы

[1] Л.А. Алексеева, *Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач эластодинамики в случае дозвуковых бегущих нагрузок.* Дифференциальные уравнения.- 46(2010), №4, 512-519.

[2] Л. А. Алексеева , Г. К. Кайшибаева, *Транспортные решения уравнений Ламе. Ударные упругие волны.* Журнал вычислительной математики и математической физики.- 56(2016), № 7, 155-166.

[3] Л.А. Алексеева. *О единственности решений краевых задач теории упругости при действии сверхзвуковых транспортных нагрузок*, Известия НАН РК. Серия физико-математическая.-14(2014), №4, 150-158.

[4] Л.А. Алексеева, *Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках*, Дифференциальные уравнения. -53 (2017), №3, 304-319.

[5] Л.А. Алексеева, *Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения*, Математический журнал.- 8(2008), №2, 1-19.

AMS Mathematics Subject Classification: 30E25,74J40

Singular integral operator in spaces determined by generalized oscillation

L.R. Aliyeva[1] and R.M. Rzaev[1,2]

[1] *Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan.*
E-mail: rrzaev@rambler.ru
[2] *Azerbaijan State Pedagogical University.*
E-mail: laleliyeva@box.az

Let $\mathbb{R}^n$ be n-dimensional euclidean space of the points $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x-a| \le r\}$ be a closed ball in $\mathbb{R}^n$ of radius $r > 0$ centered at the point $a \in \mathbb{R}^n$, N be a set of all natural numbers, $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, where $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ are non-negative integers. Denote by $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ the totality of all functions local summable in $\mathbb{R}^n$.

For $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ we assume

$$\mathrm{H}_f(\delta) := \sup_{\substack{0<r\le\delta \\ x\in\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{P}_r(x-t)\,|f(t) - P_r f(x)|\,dt \ \ \delta > 0,$$

where $P_r(x) := r^{-n} P\left(\frac{x}{r}\right)$ $(r > 0)$, $P_r f(x) := (P_r * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_r(x-t) f(t)\,dt$.
$\mathrm{H}_f(\delta)$ is said to be a harmonic oscillation modulus (see. [3], [11]). In the paper [11] it is shown that $\mathrm{H}_f(\delta) \approx \mathrm{H}_f^{1,1}(\delta)$ $(\delta > 0)$, where the constants with respect to «$\approx$» are independent of f and δ.

Let $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $\varphi \in \Psi_k$. We will use the following denotation

$$\mathrm{A}_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{H}_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \text{ for } 1 \le \theta < \infty.$$

Let $\varphi \in \Psi_k$, $k \in N$, $1 \le \theta \le \infty$, $\alpha > 0$, $k < \alpha + 1$. Denote by $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ the totality of all functions $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ for which $A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha} < +\infty$. We can verify that $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ is a linear space. As for any polynomial $\pi \in P_{k-1}$ and for arbitrary ball B from $\mathbb{R}^n$ the equality $\Omega_{k,\alpha}(\pi, B) = 0$ is fulfilled, then we identify $f \in HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ with the function $f+\pi$, where $\pi \in P_{k-1}$. Therefore, we can consider the class $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ as a subset in the factor-space $L_{loc}(\mathbb{R}^n)/P_{k-1}$. We introduce the norm in this class by the equality

$$\|f\|_{HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}} := \mathrm{A}_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}.$$

We introduce also the following denotation

$$HO_{\varphi,\theta} := \{f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) : \quad \mathrm{A}_{\varphi,\theta}(f) < +\infty\},$$

$$\|f\|_{HO_{\varphi,\theta}} := A_{\varphi,\theta}(f);$$

$$HO_{\varphi} := \{f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) : \quad \mathrm{A}_{\varphi}(f) < +\infty\},$$

$$\|f\|_{HO_{\varphi}} := A_{\varphi}(f).$$

If we take into account $H_f(\delta) \approx H_f^{1,1}(\delta)$ $(\delta > 0)$, then from definitions we get the following relations

1) $HO_{\varphi,\theta}^{1,1} = HO_{\varphi,\theta}$ and their norms are equivalent;

2) $HO_{\varphi,\infty} = HO_{\varphi}$ and their norms are equivalent.

Consider a singular integral operator:

$$\begin{aligned} A_k f(x) &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \{K_\varepsilon(x-y) \\ &= \left(\sum_{|\nu| \le k-1} \frac{x^\nu}{\nu!} D^\nu \mathrm{K}(-y)\right) X_{\{|t|>1\}}(y)\right\} f(y)\, dy \end{aligned}$$

where

$$K(x) = \omega(x) \cdot |x|^{-n}, \int_{S^{n-1}} \omega(x)\, ds = 0, K_\varepsilon(x) = K(x) \cdot X_{\{|t|>\varepsilon\}}(x),$$

$\omega(x)$ is a homogeneous function of power 0, $X_{\{|t|>\varepsilon\}}$ is a characteristic function of the set $\{t \in \mathbb{R}^n : \ |t| > \varepsilon\}$, S^{n-1} is a unit sphere in the euclidean space $\mathbb{R}^n$; we assume that for $k = 1$ the function $K(x)$ is differentiable and has bounded partial derivatives of first order, and for $k > 1$ the function $K(x)$ is k times continuously differentiable on the sphere S^{n-1}; $\nu = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $v_1, v_2, ..., v_n$ are entire non-negative numbers, $|\nu| = v_1 + v_2 + ... + v_n$, $v! = v_1!v_2!...v_n!$ $k \in N$,

$$D^v f := \frac{\partial^{|v|} f}{\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2} ... \partial x_{1n}^{v_n}}.$$

Theorem 1. *Let $\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha + 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\mu = \min\{\alpha, k\}$, $\varphi \in Z_\mu$. Then the operator A_k boundedly acts in the space $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$.*

References

[1] R.M. Rzaev, L.R. Aliyeva, *On local properties of functions and singular integrals in terms of the mean oscillation*, Cent. Eur. J. Math., 2008, v.6, No4, p.595-609.

[2] R.M. Rzaev, L.R. Aliyeva, *Mean oscillation, Φ-oscillation and harmonic oscillation*, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2010, v.30, No1, p.167-176.

[3] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, New J., 1970.

AMJ Mathematics Subject Classification: 42B20, 42B25, 42B35.

On the solvability of second order multi-point boundary value problem for the Volterra integro-differential equations

E.A. Bakirova [1], A.I. Imanchiev[2]

[1] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*K.Zhubanov Aktobe regional state university, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: bakirova1974@mail.ru;imanchiev_ae@mail.ru

We consider a linear multi-point boundary value problem for the Volterra integro-differential equations of second order

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A_1(t)\frac{dx}{dt} + A_2(t)x$$

$$+\int_0^t K_1(t,s)\frac{dx(s)}{ds}ds + \int_0^t K_2(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in (0,T), \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{m}\Big\{B_{ij}\frac{dx(t_i)}{dt} + C_{ij}x(t_i)\Big\} = d_j, \qquad j = 1,2, \qquad d_1, d_2 \in R, \quad (2)$$

where the functions $A_1(t)$, $A_2(t)$ and $f(t)$ are continuous on $[0,T]$; the functions $K_1(t,s)$ and $K_2(t,s)$ are continuous on $[0,T]\times[0,T]$; B_{ij} and C_{ij} are constants, $i = \overline{0,m}$, $j = 1,2$, $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = T$.

A solution to problem (1), (2) is a function $x(t)$, continuous on $[0,T]$, having the continuous derivatives of first and second order on $[0,T]$, satisfies the Volterra integro-differential equation of second order (1) and multi-point boundary conditions (2).

Multi-point boundary value problems for differential equations of high orders with variable coefficients arise in the mathematical modeling of various processes in physics, chemistry, biology, engineering, ecology, economics, etc. Different types of problems for the ordinary differential equations of high order are considered in the works of many authors, the bibliography and review of investigated methods can be found in [10, 14, 16]. The greatest interest represent the multi-point boundary value problems for second order differential equations with variable coefficients in connection with numerous applications, for example, in the theory of beam bends, in the transport of goods. Theory of Volterra and Fredholm integro-differential equations belongs to the actively developing field of the qualitative theory integral and differential equations. The questions of existence, uniqueness and continuous dependence on the right-hand side, the approximate methods for constructing the solution of boundary value problems for the Volterra and Fredholm integro-differential equations are investigated by many authors, the review and bibliography can be seen in [1-9, 12, 13, 15].

In present communication we investigate of a questions existence and uniqueness solution to problem (1), (2). To reach the goal we use the parameterization method [11]. Method is based on dividing the interval $[0,T]$ into m parts and introducing the additional parameters. Linear two-point boundary value problem for Fredholm integro-differential equations is investigated by the parameterization method and its variants in [4-9].

This research is partially supported by the grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 3362/ГФ4).

References

[1] H. Brunner, *Collocation methods for Volterra integral and related functional equations.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[2] Ya.V. Bykov, *Some problems in the theory of integro-differential equations*, Kirgiz. gos. un-t, Frunze, 1957. (in Russ.)

[3] M.K. Dauylbayev, *Singularly-perturbed integro-differential equations*, Khazakh universiteti, Almaty, 1999. (in Russ.)

[4] D.S. Dzhumabaev, *A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation.* Comput. Math. Math. Phys. 50 (2010), no. 7., 1150–1161.

[5] D.S. Dzhumabaev, *An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integro-differential equation.* Comput. Math. Math. Phys. 53 (2013), no. 6., 736–758.

[6] D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova, *Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations.* Differ. Equ. 49 (2013), no. 9., 1087–1102.

[7] D.S. Dzhumabaev, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integrodifferential equations.* Ukranian Math. J. 66 (2015), no. 8., 1200–1219.

[8] D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova, *On unique solvability of a boundary-value problem for Fredholm intergo-differential equations with degenerate kernel.* Journal of Mathematical Sciences (United States). 220 (2017), no. 4., 440–460.

[9] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations.* J. Comput. Appl. Math. 294 (2016), 342–357.

[10] D.S. Dzhumabaev, A.E. Imanchiev, *Well-posedness of linear multi-point boundary value problem.* Mathematical journal. 5 (2005), No 1, 30–38. (in Russ.)

[11] D.S. Dzhumabayev, *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation.* USSR Comput. Math. Math. Phys. 29 (1989), no. 1., 34–46.

[12] M.I. Imanaliev, *Asymptotic methods in the theory singularly perturbed integro-differential systems*, AN Kirg. SSR, Frunze, 1972. (in Russ.)

[13] S. Iskandarov, *The method of weight and a shearing functions and asymptotic properties of solutions of integro-differential and Volterra integral equations*, Ilim, Bishkek, 2002. (in Russ.)

[14] I.T. Kiguradze, *Boundary value problems for systems of ordinary differential equations*, Sovremennye problemy matematiki. Noveishie dostijeniya, **30**, Nauka, Moscow, 1987. (in Russ.)

[15] V. Lakshmikantham, M. Rama Mohana Rao, *Theory of Integro-Differential Equations.* Gordon and Breach Science Publishers, Lausanne, 1995.

[16] A.M. Samoilenko, V.N. Laptinskii, K.K. Kenzhebayev, *Constructive methods of investigation of periodic and multipoint boundary value problems*, Proceed. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, IM of NASU, Kiev, **29**, 1999. (in Russ.)

AMS Mathematics Subject Classification: 34K06, 35K07, 34K10, 45J05.

О разрешимости дифференциального уравнения с неограниченным коэффициентом сноса

Д.Р. Бейсенова

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
dana_68_11@mail.ru

В работе исследуется уравнение

$$ly = -y'' + r(x)y' + q(x)\bar{y}' + s(x)y + p(x)\bar{y} = f, \qquad (1)$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$, $y = y_1 + iy_2$, $\bar{y} = y_1 - iy_2$.

Пусть $\|g\|_{2,(a,\,b)}$ - норма в $L_2(a,b)$. Для заданных непрерывных функций g и $h \neq 0$ обозначим

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{2,(0,\,t)} \left\|h^{-1}\right\|_{2,(\,t,\,+\infty)} \quad (t > 0),$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{2,(\tau,\,0)} \left\|h^{-1}\right\|_{2,(-\infty,\,\tau)} \quad (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h} = \max\left((\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau)) \right).$$

Функцию $y \in L_2$ назовем решением уравнения (1), если существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций такая, что $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|ly_n - f\|_2 \to 0$ при $n \to +\infty$.

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть r и q - непрерывно дифференцируемые, а s и p непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:*
а) $\sqrt{|Re\, r|} - \omega(|Im\, r| + |q|) \geq 1 \ \ (1 < \omega < 2)$,
б) $\gamma_{1+|s|+|p|, \sqrt{|Re\, r|}} < \infty$.
Тогда уравнение (1) для каждого $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеет, притом единственное решение.

Уравнение (1) в случае $s = p = 0$ рассмотрен в [1], а когда $q = p = 0$ и r, s действительнозначные - в [2].

Список литературы

[1] K.N. Ospanov, R.D. Akhmetkaliyeva, *Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation.* Elec. J. Qual. Th. Dif. Eq. 66 (2012).

[2] K. Ospanov, *L_1-maximal regularity for quasilinear second order differential equation with damped term.* Elec. J. Qual. Th. Dif. Eq. 39 (2015).

AMS Mathematics Subject Classification: 34A34.

Robin boundary value problem for Poisson equation

H. Begehr[1], S. Burgumbayeva[2], B. Shupeyeva[3]

[1]*Free University Berlin, Berlin, Germany*
E-mail: begehrh@zedat.fu-berlin.de
[2]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: saulenai@yandex.ru
[3]*Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
E-mail: bibinur.shupeyeva@nu.edu.kz

The two basic boundary value problems for the Poisson equation are the Dirichlet and the Neumann problems. Their related fundamental solutions are the harmonic Green $G_1(z,\zeta)$ and Neumann $N_1(z,\zeta)$ functions. A linear combination of these two boundary value problems is the Robin problem. The related fundamental solution, the Robin function $R_{1;\alpha,\beta}(\zeta,z)$, can be chosen as an interpolation between the Green and the Neumann functions. For plane domains this was done in [1] with complex notation. While the Dirichlet problem is unconditionally solvable this is in general not the case for the other ones. In explicit form, however, this was shown only for the unit disc. In [2] the solvability condition is given for any admissible plane domain D.

Robin Problem Find a solution to the Poisson equation $w_{z\bar{z}} = f \quad in \quad D, \quad f \in L_p(D;\mathbb{C}), \quad 2 < p$ satisfying $\alpha w + \beta \partial_\nu w = \gamma \ \ on \ \ \partial D, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ 0 < \alpha^2 + \beta^2, \ \ \gamma \in C(\partial D;\mathbb{C})$.

Theorem 1. *For $\beta \neq 0$, the Robin problem is solvable if and only if for $z \in \partial D$*

$$\frac{\alpha}{4\pi\beta}\int_{\partial D}\gamma(\zeta)R_{1;\alpha,\beta}(\zeta,z)ds_\zeta - \frac{\alpha}{4\pi}\int\limits_{\partial D}\sigma(\zeta)w(\zeta)ds_\zeta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\gamma(\zeta)\{\partial_{\nu_z}R_{1;\alpha,\beta}(\zeta,z)+\partial_{\nu_\zeta}G_1(z,\zeta)\}ds_\zeta = \frac{\sigma\beta}{\pi}\int_D f(\zeta)d\xi d\eta,$$

σ a certain density function on ∂D, the solution being then

$$w(z) = \frac{1}{4\pi\beta}\int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta)R_{1;\alpha,\beta}(z,\zeta)ds_\zeta - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D}\sigma(\zeta)w(\zeta)ds_\zeta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{D} f(\zeta)R_{1;\alpha,\beta}(z,\zeta)d\xi d\eta.$$

Theorem 2. *If $\alpha \neq 0$ the Robin problem is solvable if and only if on ∂D*

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\gamma(\zeta)\{\partial_{\nu_\zeta}[R_{1;\alpha,\beta}(z,\zeta) - G_1(z,\zeta)] + \frac{\beta}{\alpha}\partial_{\nu_z}R_{1;\alpha,\beta}(z,\zeta)\}ds_\zeta +$$

$$+\frac{\beta}{4\pi\alpha}\int_{\partial D}\sigma(\zeta)\partial_\nu w(\zeta)ds = \frac{\sigma\beta}{\pi}\int_D f(\zeta)d\xi d\eta.$$

Then the solution is

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi\alpha}\int_{\partial D}\gamma(\zeta)\partial_{\nu_\zeta}R_{1;\alpha,\beta}(z,\zeta)ds_\zeta +$$

$$+\frac{\beta}{4\pi\alpha}\int_{\partial D}\sigma(\zeta)\partial_\nu w(\zeta)ds - \frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)R_{1;\alpha,\beta}(z,\zeta)d\xi d\eta.$$

Remark. In case of $\beta = 0$ there is no solvability condition, as then $R_{1;\alpha,0} = G_1$!

References

[1] H. Begehr, T. Vaitekhovich, *Modified harmonic Robin functions.* Complex Var. Ell. Eqs. 58 (2013), 483–496.

[2] H. Begehr, S. Burgumbayeva, B. Shupeyeva, *Remark on Robin problem for Poisson equation.* Complex Var. Ell. Eqs., DOI 10.1080/17476933.2017.1305592.

AMS Mathematics Subject Classification: 31A30, 35J25.

Построение фрактального изображения на основе дифференциальных уравнений

М.А. Бектемесов

[1] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail:maktagali@mail.ru

Физические объекты и математические структуры могут быть представлены в виде чисел и символов в компьютере, а для манипулирования с ними в соответствии с алгоритмом можно написать программу.

Так исследуя свойства корректности эволюционных задач, автор обнаружил фрактальные свойства относительной погрешности различных конечно-разностных схем решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \lambda t, & t \in (0, T) \\ u(0) = 1, & \lambda = x + iy, \end{cases}$$

При рассмотрении связей фракталов с корректностью задач математической физики было выявлено, что при определенном цифровом кодировании картина распределения относительной погрешности удивительно точно совпадает с цветовой радугой, порождаемой поверхностью CD компакт-диска. В данной работе мы приводим результаты математического и компьютерного анализа указанных явлений.

По традиции все научные законы описываются в терминах определенного множества математических функций и конструкций, и своим развитием они обязаны как математической простате, так и способности служить моделью для основных характеристик изучаемого явления природы. Научный закон, определенный при помощи алгоритма, может, однако, принимать любую непротиворечивую форму. Поэтому изучение многих сложных систем, которые не поддавались исследованию традиционными математическими методами, стало возможным с использованием вычислительных моделей и появлением мощных компьютеров.

Математическое понятие фрактала выделяет объекты, обладающие структурами различных масштабов, как больших, так и малых, и, таким образом, отражая иерархический принцип организации. В основе этого понятия содержится одна важная идеализация действительности: фрактальные объекты самоподобны, т.е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их через микроскоп с любым увеличением [1,2].

Во многих случаях математические эксперименты, выполняемые на компьютере, могут подсказать новые идеи, которые затем доказываются традиционными математическими методами.

Так с помощью сравнительно несложной программы были получены цветные картинки области устойчивости разностной задачи Коши в терминах оператора перехода в комплексной плоскости [3-6].

Компьютер можно превратить в своеобразный микроскоп и наблюдать с его помощью за поведением границы областей. Теоретически можно «разглядывать» любую часть множества при любом увеличении. Изучение полученной конфигурации приводит к предположению, что она является фракталью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания».

Список литературы

[1] Мандельброт Б. *Фрактальная геометрия природы.* Москва- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 с.

[2] Пайтген Х.О., Рихтер П.Х.*Красота фракталов. Образы комплексных систем.* М.:Мир, 1993,176 с.

[3] Бектемесов М.А.*О фрактальном множестве и области устойчивости разностной задачи Коши в терминах оператора перехода в комплексной плоскости.* Материалы школы-семинара по математике и механике, посвященная 60-летию член-корр. НАН РК Касымова К.А., 27 октября.- Алматы, 1995.

[4] Самарский А.А.*Теория разностных схем.* – М: Наука, 1977.

[5] Бухгейм А.Л.*Введение в теорию обратных задач.* Новосибирск: Наука. Сиб. Отд-ние, 1988.- 184 с.

[6] Бектемесов М.А. *Условия устойчивости в терминах оператора перехода.* Вестник КазГУ. Серия мат.,мех., инф.- 1995.- №2.

One nonlocal boundary problem for the Laplace operator

G.A. Besbaev[1,2], I. Orazov[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [1]*besbaev@math.kz*
[2]*Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan*
E-mail: [2]*orazov@math.kz*

We investigate a nonlocal boundary problem for the Laplace equation in a half-disk, with opposite flows at the part of the boundary. Our goal is to find a function $u(r,\theta) \in C^0(\overline{D}) \cap C^2(D)$ satisfying in D the equation

$$\Delta u = 0 \qquad (1)$$

with the boundary conditions

$$u(1,\theta) = f(\theta),\ 0 \le \theta \le \pi, \tag{2}$$

$$u(r,0) = 0, r \in [0,1], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = -\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) + \alpha u(r,\pi), \quad r \in (0,1) \tag{4}$$

where $D = \{(r,\theta): \quad 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$; $\alpha < 0$; $f(\theta) \in C^2[0,\pi]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -f'(\pi) + \alpha f(\pi)$.

The difference of this problem is the impossibility of direct applying the Fourier method (separation of variables). Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis. A special system of functions based on these eigenfunctions is constructed. This system has already formed the basis. This fact is used for solving the nonlocal boundary problem. The goal of the work is to prove the well-posedness of the formulated problem. The existence and the uniqueness of classical solution of the problem are proved.

Here we state our main result.

Theorem 1. *If $f(\theta) \in C^2[0,\pi]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -f'(\pi) + \alpha f(\pi)$, then there exists a unique classical solution $u(r,\theta) \in C^0(\overline{D}) \cap C^2(D)$ of problem (1)-(4)*

Some Problems of these types was considered in our works [1, 2].

The authors were supported by the grant no. 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] G.A. Besbaev, I. Orazov, M.A. Sadybekov, *A nonlocal boundary problem for the Laplace operator in a half disk*. Electr. J. of Diff. Eq. (2014), no. 203., 1–5.

[2] I. Orazov, G.A. Besbaev, *On solvability of one nonlocal boundary problem for the Laplace operator with opposite flows at the part of the boundary.* AIP Conference Proceedings. 1759 (2016), 020021.

AMS Mathematics Subject Classification: 35J25, 35P10, 33C10, 34B30

Вложение пространств функций положительной гладкости на нерегулярных областях

О.В. Бесов

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия.
E-mail: besov@mi.ras.ru

Будут приведены теоремы вложения пространств Соболева $W_p^s((\mathbb{R}^n)$ и пространств функций положительной гладкости в пространство локально суммируемых функций нулевой гладкости типа пространств Лизоркина и аналогичное свойство пространства потенциалов. Теорема вложения распространяется на случай вложения пространств функций, определённых на нерегулярных областях n-мерного евклидова пространства. Определения пространств функций положительной и нулевой гладкости и формулировки теорем зависят от геометрических параметров области определения функций.

Об одном неравенстве типа харди с тремя мерами

Ш. Билал [1], С. Шалгинбаева[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский Университет международных отношений и мировых языков, Алматы, Казахстан*
E-mail:bilal44@mail.ru

В данной работе рассматривается интегральный оператор типа Харди с тремя мерами, действующий из L_q в L_p. Изучается весовое $L_q - L_p$ неравенство с этим оператором. Проводится детальное изучение весового неравенства типа Харди при $0 < p, q < +\infty$ в пространстве Лебега с произвольными мерами. Получены необходимые и достаточные условия на весовые функции для выполнения изучаемого неравенства.

Постановка задачи. Обозначим через $\mathcal{B} := \mathcal{B}(X)$ σ- алгебру борелевских подмножеств множества X. Символ $\mathcal{M} := \mathcal{M}(X)$ обозначим σ - алгебру подмножеств множества X, содержащую $\mathcal{B}$. Через $\{\mathcal{M}\}^+$ обозначим класс всех $\mathcal{M}$ - измеримых функций $f : X \to [0, +\infty) \bigcup \{+\infty\}$.

Необходимо провести доказательство критерия выполнения неравенства Харди вида:

$$\Big(\int\limits_{[a,b]} v(x) (\int\limits_{[a,x]} f u dx)^q d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{q}} \le C \Big(\int\limits_{[a,b]} f^p w dv \Big)^{\frac{1}{p}}, \ \ \forall f \in \{\mathcal{M}_\lambda\}^+,$$

где $1 < p < +\infty$, $0 < q < +\infty$; μ, λ, v -σ - конечная мера на $[a, b]$, λ, v - определены на $\sigma-$ алгебре $\mathcal{M}_\lambda; u, w \in \{\mathcal{M}_\lambda\}^+$.

Данная задача рассматривается в различных вариациях. В общей постановке, т.е. при $0 < p, q < +\infty$. эта задача рассмотрена в работах Степанова В.Д. [1]. В нашем случае $p < +\infty$, $q = +\infty$.

Итак, нами рассматривается неравенство:

$$\sup_{x\in[a,b]} v(x)^{\frac{1}{q}} \int\limits_{[a,x]} fudx \leq C\Big(\int\limits_{[a,b]} f^p d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f \in \{\mathcal{M}_\lambda\}^+. \qquad (1)$$

Необходимо получить необходимое и достаточное условие его выполнения.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p$, $q = +\infty$, μ *и* λ *суть* σ *- конечная мера на* $[a, b]$; $u \in \{\mathcal{M}\}^+_\lambda$, $v \in \{\mathcal{M}\}^+_\mu$. *Неравенство*

$$\|v \int\limits_{[a,x]} fudx\|_{q,[a,b]} \leq C\|f\|_{p,[a,b]},$$

или то же самое (1) выполнено тогда и только тогда, когда

$$A < +\infty, \ \text{где } A := \sup_{t\in[a,b]} A(t) = \sup_{t\in[a,b]} v(t)^{\frac{1}{q}} \Big(\int\limits_{[a,t]} u^{p'} dt\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Более того, для наименьшей константы в неравенстве (1) справедливо $C \approx A$.

Список литературы

Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова*Интегральные операторы Харди- Стеклова. МН им. В.А. Стеклова РАН. Москва, 2016.*

Дифференцируемые гомеоморфизмы уравнения Бельтрами и аналитические свойства решений

Н.К. Блиев

Институт Математики и Математического Моделирования
Казахстан, Алматы
E-mail: bliyev.nazarbay@mail.ru

Эллиптическая система вещественных дифференциальных уравнений Бельтрами на плоскости в комплексной записи имеет вид:

$$\partial_{\bar{z}} W - q(z)\partial_z W = 0. \tag{1}$$

Из условия эллиптичности системы следует, что

$$|q(z)| \leq q_0 < 1, \qquad (q_0 = const). \tag{2}$$

Используем терминологию [1]. Для уравнения (1) – (2) при $q(z)$ принадлежащей пространству Бесова $B^r_{p,1}, 2 < p < \infty, r = 2/p$, доказаны существование непрерывно дифференцируемы локальных, глобальных и полных гомеоморфизмов, принадлежащих $B^{1+r}_{p,1}$ в любой ограниченной части комплексной плоскости E. Заметим, что E имеет место вложение $B^r_{p,1}(E) \hookrightarrow C(E)), B^{1+r}_{p,1}(E) \hookrightarrow \acute{C}(E))$ при $1 < p < \infty, r = 2/p$. Эти результаты связаны с теорией квазиконформных отображений. Следующие результаты позволяют изучить аналитические свойства обобщенных решений уравнения (1) – (2).

Теорема 1. *Пусть* $q(z) \in B^r_{p,1}(E)(G_0)$, $2 < p < \infty$, $r = 2/p$, *в некоторой окрестности* $G_0(\partial G_0 \in C^1_\nu$, $2/p < \nu \leq 1)$ *произвольно фиксированной точки* $z_0 \in E$. $W_0(z)$ *– локальный гомеоморфизм уравнения (1) – (2) соответствующий окрестности* $\acute{G}_0 \hookrightarrow G_0$. *Тогда любое обобщенное речение* $W(z)$ *уравнения Бельтрами в* $\acute{G}_0$ *имеет вид:*

$$W(z) = F(W_0(z)),$$

где $F(W)$ *– произвольная голоморфная функция комплексного аргумента* W *области* $W_0(\acute{G}_0)$.

Теорема 2. *(Принцип аргумента). Пусть* $q(z) \in B^r_{p,1}(E) 2 < p < \infty, r = 2/p$, *и* $W(z)$ *– решение уравнения (1) в области, которое удовлетворяет условиям: 1)* $W(z) \in C((\bar{G}))$, *2)* $W(z) \neq 0$ *на границе ? области* G. *Тогда* $W(z)$ *может иметь внутри* G *лишь конечное число нулей, которое определяется по формуле*

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma arg W(z),$$

Список литературы

[1] *Обобшенные аналитические фкуции.* М.: Наука, 1988. -512с.

Метод Ричардсона в методе фиктивных областей для вязкоупругой среды Кельвина

М.М. Букенов [1], Д.Н. Азимова [1]

Евразийский Национальный Университет им. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: Bukenov_M_M@mail.ru, Arfidea@mail.ru

Рассмотрим динамическую задачу для среды Кельвина — Фойгта в цилиндре $Q = \{D \times [0 \leqslant t \leqslant t_1]\}$, $D \subset R^3$, с границей γ. Как показано в работе [1], постановку этой задачи в напряжениях можно сформировать следующим образом:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial t^2} + CRR^* \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + BR^* \bar{\sigma} = B\bar{f} + CR \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1}$$

$$\bar{\sigma}(x, 0) = \bar{p}(x), \ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t}(x, 0) = \bar{q}(x) \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(x,t) n_k = 0,\ x \in \gamma \tag{3}$$

Все термины взяты из [1]

В работе [5] показано стационирование решения задачи (1)-(3), при $t \to \infty$, т.е. решение задачи ведет себя , как решение параболического уравнения.

В соответствии [3],[4] применим метод фиктивных областей, следуя [2] к задаче (1)-(3), постановка вспомогательной задачи, следует из [2].

Введем обозначения

$$D_{0\mathrm{T}} = D_0 \times [0, t_1], \qquad D_T = D \times [0, t_1]$$

Теорема 1. *Пусть* $f^\alpha \in L_2(0, t_1; L_2(D_0))$, $p \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)$, $q \in L_2(D_0)$, $\sigma^\alpha \in W_2^{1,1}(D_{0T})$, *тогда существует единственное обобщенное решение задачи (4)-(6).*

Теорема 2. *Пусть* $\sigma^\alpha \in W_2^{1,1}(D_{0T}),\ f^\alpha \in L_2(0, t_1; L_2(D))$ *тогда справедлива оценка*

$$\|\sigma^\alpha - \sigma\|^2_{W^{1,1}_{2(D_T)}} \leqslant C\alpha^2 \tag{4}$$

Далее применим экстраполяцию Ричардсона по малому параметру α для вспомогательной задачи.

Верно вспомогательное утверждение

Лемма 1. *Для решения вспомогательной задачи [2] с правой частью* $f^\alpha \in L_2(0, t_1;\ L_2(D_0))$ *справедливо разложение*

$$\sigma^\alpha = \sigma + \sum_{k=1}^{N} \alpha^k \sigma_k + \alpha^{N+1} W^\alpha \tag{5}$$

где N- целое положительное число, $\sigma-$решение исходной задачи (1)-(3), а функции σ_k, W^α таковы, что

$$\|\sigma_k\|_{W^{1,1}_{2(D_{0T})}} + \|W^\alpha\|_{W^{1,1}_{2(D_{0T})}} \leqslant c \leqslant \infty \tag{6}$$

Далее верна

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для решения задачи σ, (1)-(3) и для функции V такой, что*

$$V = \sum_{k=1}^{N+1} \beta_k \sigma^{\alpha_k},$$

где

$$\beta_k = \frac{(-1)^{N-k+1} \cdot k^{N+1}}{k!(N-k+1)!}$$

$\sigma^{\alpha k}-$решение (4)-(6), соответствующее параметру $\alpha_k = \frac{\alpha}{k}$ справедлива оценка

$$\|\sigma - V\|_{W^{1,1}_{2(D_{0T})} \leqslant C \cdot \alpha^{N+1}} \cdot$$

С постоянной C, не зависящей от α. Полученные результаты справедливы и для несжимаемой вязкоупругой среды, поскольку полученные оценки имеют место.

Список литературы

[1] M.M. Bukenov, *Dynamic Problem formulation of linear viscoelasticity in tension speed.* Siberian journal of computational mathematics, Siberian department, Novosibirsk, 2005, no 4., 289-295 (in Russian)

[2] M.M. Bukenov, *Fictitious domain method for Kelvin medium.* Mathematical problems of geophysics: Modeling, researches and interpretation, Novosibirsk,1985, 94-102 (in Russian)

[3] A.N. Konovalov, *Fictitious domain method in problems torsion probems.* Numerical methods of mechanics continuum mechanics, Novosibirsk, 1972, Volume 4, no.2., 109-116 (in Russian)

[4] A.N. Konovalov, *On one option of fictitious domain method.* From book "Some problems of calculus and applied mathematics", Novosibirsk, 1975, 191-199 (in Russian)

[5] I.V. Pacuk, *Stacization of dynamic processes in viscoelastic enviroments.* Dissertation of the candidate of physical and mathematical science, Novosibirsk, 1982 (in Russian)

AMS Mathematics Subject Classification: 65F10

Об одной многопараметрической обратной спектральной задаче для бигармонического оператора

Н.Ф. Валеев[1], Э.А. Назирова[2]

[1] *Институт математики УНЦ РАН с ВЦ, Уфа, Россия*
E-mail:valeevnf@mail.ru
[2] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$– односвязная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $M_k = M_k(x_k, y_k) \in \Omega$ $k = 1, ..m$- произвольные точки.

На $D = \{u \in W_2^2(\Omega) | \frac{du}{dn}|_\Gamma = u|_\Gamma = 0\}$ определим замкнутую квадратичную форму:

$$Q[u,u] = \int\int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dxdy$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} p_j |u(x_j, y_j)|^2, \qquad (1)$$

где $p_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,m}$.

Квадратичная форма $Q[u,u]$ определяет в пространстве $W_2^2(\Omega)$ самосопряженный оператор $L(\overrightarrow{p})$, где $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, .., p_m)$ с областью определения D_L.

При этом оператор $L(\overrightarrow{p})$ допускает следующее представление:

$$L(\overrightarrow{p}) = \Delta^2 u + \sum_{k=1}^{m} p_k \delta(M - M_k) u. \tag{2}$$

Здесь $\delta(M - M_k)$ –операторы, порожденные квадратичными формами

$$Q_k[u,u] = \frac{1}{2}|u(M_k)|^2, \quad k = \overline{1,m}.$$

Положим $L = L_0 + L_1, \quad L_0 u = \Delta^2 u, \quad L_1 u = \sum_{k=1}^{m} p_k \delta(M - M_k) u$, $G_0(x, y, x', y', \lambda) = G_0(M, M', \lambda)$– ядро резольвенты $R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}$.

Тогда

$$R_0(\lambda) L_1 u(M) = \sum_{k=1}^{m} p_k G_0(M, M_k, \lambda) u(M_k)$$

–конечномерный оператор. Поскольку $R(\lambda) = (L_0 + L_1 - \lambda I)^{-1} = R_0(I + RL_1)^{-1}$, то оператор $R(\lambda)$ – компактный самосопряженный при $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^m$ оператор, что влечет за собой дискретность спектра и полуограниченность оператора $L(\overrightarrow{p})$. Теперь рассмотрим следующую обратную спектральную задачу:

Задача. *Требуется подобрать такие значения вектора* $\overrightarrow{p}$*, чтобы ровно* m *собственных значений оператора* $L(\overrightarrow{p})$ *были равны наперед заданным числам:* $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*$.

Теорема. *Обратная спектральная задача имеет изолированные решения для* $\forall \overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, ..\lambda_m) \in \mathbb{C}^m / \{S\}$*, где* $\{S\}$ *- множество меры ноль в* $\mathbb{C}^m$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-01-01095

Список литературы

[1] В.А. Садовничий Н.Ф. Валеев, Я.Т. Султанаев *Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения* ДАН, 2009. Т. 426. № 4. 457-460.

AMS Mathematics Subject Classification: 47F05, 47B39

Моделирование собственных форм балки эйлера-бернулли с точечными линейными осцилляторами

Д.Н. Валеева, И.Р. Сиргалин

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия*
E-mail: dilaravn@mail.ru, irnazar13@mail.ru

Рассматривается квадратичная форма:

$$Q[y,y] = \int_0^l ((y''(x))^2 + q(x)y^2(x))dx + \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{2}|y(x_j)|^2 \qquad (1)$$

заданная в пространстве $W_2^2(0,l)$ с областью определения $D_Q = \{y(x) \in W_2^2(0,l) | y(0) = 0,$
$y(l) = 0, y''(0) = y''(l) = 0\}$.

Данная квадратичная форма порождает самосопряженный дифференциальный оператор L, который будем записывать в виде (см. [1]-[3]):

$$Ly = y^{(4)} + q(x)y + \sum_{j=1}^{m} k_j \delta(x - x_j)y \tag{2}$$

Мы показываем, что спектр оператора L при всех $\vec{k} = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbb{C}^m$ дискретный.

Основной целью работы является вывод и обоснование новой схемы применения метода конечных элементов с базисом из кусочно-линейных функций. Традиционный подход применения МКЭ предполагает использования кусочно-полиномиальных функций.

В работе предлагается преобразование уравнения $Ly = \lambda y$ к системе уравнений относительно векторной функции $\vec{\nu} = (y(x), y''(x))$, а затем построения для полученной системы новой квадратичной формы $Q_1(\vec{\nu}, \vec{\nu})$ от $\vec{\nu}$ и $\vec{\nu'}$. Далее собственные значения и собственные формы оператора (2) находятся как минимум функционала квадратичной формы $Q_1(\vec{\nu}, \vec{\nu})$.

На основе описанного подхода нами разработан программный комплекс, позволяющий исследовать с высокой точностью и надежностью поведение собственных значений и собственных функций в зависимости от x_j и k_j. Программное обеспечение может быть использовано при исследовании резонансных явлений, а также для исследования обратных спектральных задач (см. [2],[4]).

Список литературы

[1] С.Д. Алгазин, *Численное исследование свободных колебаний стержня с осцилляторами.* Прикладная механика и техническая физика, 2006.

[2] А.О. Витульян, *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.* -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[3] Б.Е. Кангужин, *Идентификация сосредоточенной массы и жесткости пружины на стержне.* Электронный журнал «Техническая акустика», №9, 2015.

[4] Н.Ф. Морозов, *Исследование колебания призматического стержня под действием поперечной нагрузки,* 1965.

Аналог теоремы келдыша для несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля с нерегулярной функцией распределения спектра

Л.Г. Валиуллина

Башкирский государственный университете, Уфа, Россия
E-mail: l.matem2012@yandex.ru

Из теоремы Келдыша [4] следует, что если T_0 — положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p < \infty$, то любое T_0-компактное возмущение V сохраняет локализацию спектра, то есть при любом $\varepsilon > 0$ спектр оператора $T = T_0 + V$ вне угла $\{|\arg\lambda| < \varepsilon\}$ конечен. Если функция распределения спектра $N(T_0, r)$ удовлетворяет тауберову условию

$$\frac{N(T_0, s)}{N(T_0, r)} < \left(\frac{s}{r}\right)^{\gamma}, \ s > r \geq R, \tag{1}$$

при некоторых $\gamma > 0$ и $R > 0$, то справедлива формула

$$N(T, r) \sim N(T_0, r), \ r \to +\infty. \tag{2}$$

Предположим теперь, что T не является близким самосопряженному, то есть не представляется в виде $T = T_0 + V$, где $T_0 = T_0^*$ и $VT_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. Как показывают многочисленные примеры [3], такие операторы, как правило, спектрально неустойчивы: спектр может сильно меняться под действием малых возмущений. Ясно, что для таких операторов теорема Келдыша не работает.

Рассмотрим оператор

$$D(T_0) = \{y \in L^2(0,+\infty): \ y' \in AC[0,+\infty), \tag{3}$$

$$-y'' + e^{i\theta}q(x)y \in L^2(0,+\infty), \ y(0) = 0\}, \tag{4}$$

$$T_0 y = -y'' + e^{i\theta}q(x)y, \tag{5}$$

где $0 \leq \theta < \pi$, функция q локально суммируема на $[0,+\infty)$ и

$$\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty.$$

В работе [3] при $q(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$, показано, что $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ – собственные числа оператора T_0, пронумерованные в порядке возрастания модулей, лежат на луче $\arg z = 2\theta/(2+\alpha)$ и имеют асимптотику

$$\lambda_n = r_n e^{2\theta i/(2+\alpha)}, \tag{6}$$

$$r_n \sim \left(\frac{\pi}{\int_0^1 \sqrt{1-t^{\alpha}}dt}\right)^{2\alpha/(2+\alpha)} \cdot n^{2\alpha/(2+\alpha)}, \ n \to \infty. \tag{7}$$

Там же найден класс возмущений V, при которых сохраняется асимптотика спектра. Методика этой работы в существенном использует тот факт, что резольвента оператора T_0 принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$, $p > (2+\alpha)/2\alpha$. В предлагаемой работе показано, что результаты работы [3] остаются справедливыми и в случае медленно растущих потенциалов, допускающих аналитическое продолжение в угол $U = \{z : -\theta/2 < \arg z < 0\}$ (теорема 2). Используя теорему 2, получен класс возмущений, сохраняющих асимптотику спектра оператора T_0 с потенциалом $q(x) = \ln x$.

Теорема 1. *Пусть существует функция $\tilde{q}$, аналитичная в угле $U = \{z : -\theta/2 < \arg z < 0\}$, обладающая следующими свойствами:*

1) *в каждой конечной точке* ζ *границы области* U *существует конечный предел* $\widetilde{q}(\zeta)$, *причем* $\tilde{q}(x) = q(x)$ *при* $x \geq 0$;

2) *существуют положительные* a_1, a_2, σ, *такие, что при каждом* $\alpha \in [-\theta/2; 0]$ *и* $r > 0$

   (а) $a_1 q(r) \leq \left|\tilde{q}\left(re^{i\alpha}\right)\right| \leq a_2 q(r)$,

   (б) $\left|\arg\left(\tilde{q}\left(re^{-\frac{i\theta}{2}}\right)\right) + \frac{\theta}{2} + 2\alpha\right| \leq \pi/2 - \sigma$;

3) $q(re^{-\frac{i\theta}{2}}) \sim p(r)$, $r \to +\infty$, *где функция* $p \in L^1_{\mathrm{loc}}[0, +\infty)$ – *вещественна и* $p(r) \to +\infty$. *Тогда спектр оператора* T_0 *локализуется около луча* $\arg\lambda = \theta$.

Легко проверить, что функция $q(x) = \underbrace{\ln \ldots \ln}_{n}(x + c)$, где $c \gg 1$, удовлетворяет всем условиям теоремы. В частности, при $q(x) = \ln x$ спектр T_0 лежит на луче $\{\lambda = \left(t - \frac{i\theta}{2}\right)e^{i\theta},\ t > 0\}$ и $\lambda_n \sim e^{i\theta}\ln n,\ n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 2 и пусть* V *— оператор умножения на функцию* $V(z)$, *которая*

1) *аналитична в угле* $U = \{z : -\theta/2 < \arg z < 0\}$ *и имеет непрерывное продолжение в любой конечной точке границы* U;

2) $V\left(re^{i\alpha}\right) = o\left(\tilde{q}(re^{i\alpha})\right)$, $r \to +\infty$, *равномерно по* $\alpha \in [-\theta/2, 0]$.

Тогда оператор $T = T_0 + V$ *имеет дискретный спектр, локализованный около луча* $\arg\alpha = \theta$. *При выполнении дополнительного требования*

$$N(L + W, r) \sim N(L, r), r \to +\infty,$$

где W – *оператор умножения на функцию* $W(r) = e^{-i\theta}V\left(re^{-i\theta/2}\right)$, *имеет место формула* (1).

Список литературы

[1] Х.К. Ишкин. *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом.* Дифф. уравнения. Т. 45. no 4. 2009. С. 480–495.

[2] М.В. Келдыш. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений.* Докл. АН СССР. Т.77, no 1. 1951. С. 11–14.

[3] L.N. Trefethen. *Pseudospectra of linear operators* SIAM Review. V.39. 1997

Интегродифференциальное уравнение колебания плоского элемента, находящегося под поверхностью деформируемой среды,с учетом влияния температуры

Б.Д. Джанмолдаев, К.Т. Аленов

КГУ им. Коркыт ата, Кызылорда, Казакстан)
E-mail: alen80k@mail.ru

Рассмотрим безграничную в плане пластинку толщиной $2h$, находящейся под поверхностью полубесконечной среды на глубине $(h_0 - h_1)$. Плоскость (XY) поместим в средней плоскости пластинки $z = 0$. Ось OZ направим в сторону внешней поверхности верхнего слоя.

Для общности материалы верхнего слоя и основания будем считать различными. Обозначим параметры пластинки индексом «1», верхнего слоя индексом «2», основания индексом «3». [4]

Рассматривая задачу в трехмерной линейной постановке, уравнения движения слоя пластинки и основания с учетом вязкости и температуры в потенциалах и $\vec{\psi}$ продольных и поперечных волн запишем в виде:

$$N_j(\Delta\Phi_j) = \rho_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} + \alpha_{0_j} n_j('' _j)$$

$$Mj(\Delta\vec{\psi}_j) = \rho_j \frac{\partial^2 \vec{\psi}_j}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\Delta T_j - \frac{1}{c_{0j}^2} \cdot \frac{\partial T_j}{\partial t} - \frac{1}{c_{1j}^2} \cdot \frac{\partial T_j}{\partial t} = P_j(\frac{\partial}{\partial t}) K_j \cdot (\Delta\Phi_j - \alpha_{0j} T_j); j = 1,3$$

где операторы N_j;K_j равны $N_j = Lj + 2M_j$; $\quad K_j = L_j + \frac{2}{3} M_j$ а Δ-трехмерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial E^2} + \frac{\partial^2}{\partial C^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L_j,M_j- вязкоупругие операторы

$$Lj(\zeta) = \lambda_j \left[\zeta(t) - \int\limits_0^\infty f_{1j}(t-\xi)\xi(\xi)\partial\xi \right]; \tag{2}$$

$$Mj(\zeta) = \mu_j \left[\zeta(t) - \int\limits_0^\infty f_{2j}(t-\xi)\xi(\xi)d\xi \right];$$

$f_{lj}^{(t)}$- ядра операторов (l=1,2), λ_j, μ_j, α_{0j}- постоянные материалов.

$$P_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \eta_0 \frac{\partial}{\partial_t} + \eta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \tag{3}$$

Где η_0, η_1 - коэффициенты связности.

Предпологая материалы слоя, пластинки и основания вязкоупругими и изотропными, зависимости напряжение $\sigma_{ij}^{(j)}$от деформации $\varepsilon_i^{(j)}$с учетом влияния температуры Tj запишем в виде операторных соотношений больцмановского типа

$$\sigma_{ij}^{(j)} = L_j(\varepsilon_{ii}^{(j)}) + 2M_j(\varepsilon_{ii}^{(j)}) - \alpha_{0j} K_j(T_j) \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}^{(j)} = M_j(\varepsilon_{ii}^{(j)}); (i \neq K)(i, k = x, y, z)$$

Будем считать, что колебания пластинки под поверхностью могут быть вызваны как внешними усилиями на внешней поверхности $z = h_0$, так и возмущениями распространияющимися со стороны основания. Кроме того, будем считать, что по границам контакта $z = h_1$ и $z = h_1$пластинки с верхним слоем и основанием, эти контакты идеальные, т.е. отсутствует трение. Тогда будем иметь следующие граничные условия: на внешней стороне $(z = h_0)$

$$\sigma^{(2)} = F_z^{(2)}(x, y, t), \sigma_{ij}^{(j)} = F_{jz}^{(2)}(x, y, t)(j = x, y) \tag{5}$$

И одним из трех условий для$_2$

$$T_2 = F_0(x, y, t); \frac{\partial T_2}{\partial z} = F_1(x, y, t) \tag{6}$$

$$h_0^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial z} = [T_2 - F_2(x, y, t)]$$

На границе контакта верхний слой – пластинка $z = h_1$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}; \quad \sigma_{jz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{jz}^{(2)} = 0, w^{(1)} = w^{(2)} \ \ (j = \, ,) \tag{7}$$

и для температуры $_j, (j = 1.2)$

$$T_1 = T_2; \ \ \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

$$h_0^{(1)} \frac{\partial T_2}{\partial z} - T_1 = h_0^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial z} - T_2$$

На границе пластинка – основание $z = -h_1$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1)} \ &= \sigma_{zz}^{(3)} + F_{3z}^{(3)}(E, C, t), \sigma_{jz}^{1} = 0; \\ \sigma_{ij}^{(3)} \ &+ F_{jz}^{(3)}(x, y, t) = 0 : w^{(1)} = w^{(3)} + F_0^{(3)}(x, y, t)(j = \, ,) \end{aligned} \tag{8}$$

и для температуры $_j$ (j=1.3)

$$T_1 = T_3; \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_3}{\partial z};$$

$$h_0^{(1)}\frac{\partial T_1}{\partial z} - T_1 = h_0^{(3)}\frac{\partial T_3}{\partial z} - T_3$$

где функции $F_{3z}^{(3)}(x,y,t)$; $F_{jz}^{(3)}(x,y,t)$; $F_0^{(3)}(x,y,t)$ описывают напряжения и смещения в падающей волне снизу, т.е. со стороны основания, что может быть вызвано, в частности, землетрясением или взрывом, $h_0^{(j)}$- коэффициенты теплопроводности.

Кроме того, должны выполняться условия затухания на бесконечности, т.е. при $z \to -\infty$

$$^{(3)} = 0, \psi_1^{(3)} = \psi_2^{(3)} = \psi_3^{(3)} = 0 \tag{9}$$

Начальные условия нулевые

$$^{(j)} = \frac{\partial^{(l)}}{\partial t} = \frac{\partial \psi^{(e)}}{\partial t} = \vec{\psi} = T_j = \frac{\partial T_j}{\partial t} = 0 j = 1,\bar{3}; \text{при} t = 0 \tag{10}$$

Таким образом, краевая задача колебания пластинки, находящейся под поверхностью с учетом влияния температуры, сводится к решению интегродифферен-циальных уравнений (1.1.) при граничных и начальных условиях (1.5-1.10).

В дальнейшем рассмотрим случай колебания пластинки находящейся под поверхностью без учета температуры и колебания плоского элемента лежащего на деформируемом основании с учетом температуры.

Список литературы

[1] И.Г. Филиппов, В.Г. Чебан, *Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней.* – Кишинев: Штиинца, 1988,-190 с.

[2] И.Г. Филиппов, Ш.К. Халикулов, *Теории колебаний изотропной вязкоупругой пластинки с учетом температуры.* М:1986. Деп. Во ВНИИКСе №6194.

[3] Б.Д.Джанмулдаев, *Математические методы при исследовании колебаний плоских элементов конструкций, взаимодействующих с деформируемой средой.* – Кызылорда, 2002 г.

[4] О.А. Егорычев, И.Г. Филиппов, *Математические методы при исследовании колебаний плоских элементов строительных конструкций.* – Труды Российско-Польского семинара “Теоретические основы строительства”, - Варшава, 1995, с. 49-50.

AMS Mathematics Subject Classification: 42A10, 42A32.

О существовании нетривиального решения одной однородной нелинейной граничной задачи

М.Т. Дженалиев[1], М.И. Рамазанов[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: muvasharkhan@gmail.com
[2] *Институт прикладной математики, Караганда, Казахстан*
E-mail: ramamur@mail.ru

В работе в бесконечной угловой области $G = \{x, t|\, 0 < x < t,\ t > 0\}$ обсуждаются вопросы существования нетривиального решения для следующей граничной задачи

$$\begin{cases} w_t(x,t) = w_{xx}(x,t) + w_x^2(x,t), \ \ \{x,t\} \in G, \\ w(x,t)|_{x=0} = w(x,t)|_{x=t} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

С помощью преобразования

$$w(x,t) = \ln u(x,t) \tag{2}$$

граничная задача (1) сводится к линейной граничной задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & \{x,t\} \in G, \\ u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=t} = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Решение задачи (3) ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя [1]:

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right\}\,\nu(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\}\,\varphi(\tau)\,d\tau. \quad (4)$$

Известно [1], что функция (4) удовлетворяет уравнению (3) при любых $\nu(t)$ и $\varphi(t)$. Используя граничные условия из (3) и свойства тепловых потенциалов, имеем следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) \;-\; \int\limits_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\,\tau = f(t),\ \ t>0, \quad (5)$$

$$\nu(t) \;=\; 2+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\ \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4(t-\tau)}\right\}\,\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (6)$$

где

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4}\right\}\right\},$$

$$f(t)=-2\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right). \quad (7)$$

Теорема 1. [2] *Общее решение уравнения (5) имеет вид*

$$\varphi(t)=C\cdot\varphi_0(t)+\varphi_1(t),\ \ C=const, \quad (8)$$

где

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{t}{4}\right\}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right], \quad (9)$$

$$\varphi_1(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

$$R(t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{4}\right) + \frac{1}{4}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t-\tau}}{2}\right)\right] +$$

$$+\frac{t}{\sqrt{\pi}\ (t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \exp\left\{-n^2 \frac{t\,\tau}{t-\tau}\right\} \exp\left(-\frac{t-\tau}{4}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-n^2 \frac{\tau\, t}{t-\tau}\right\} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{\pi}\, n \cdot \exp\left\{-\tau\, n^2\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{n\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right] \exp\left(-\frac{t-\tau}{4}\right) +$$

$$+\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\tau}^{t} \frac{n\,\tau_1}{(\tau_1-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{n^2 \tau_1\, \tau}{\tau_1-\tau}\right\} \exp\left(-\frac{\tau_1-\tau}{4}\right)\, d\tau_1$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\tau}^{t} \frac{1}{\sqrt{\tau_1-\tau}} \exp\left\{-\frac{n^2 \tau\, \tau_1}{\tau_1-\tau}\right\} \exp\left(-\frac{\tau_1-\tau}{4}\right)\, d\tau_1$$

$$+ + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \exp\left\{-\tau\, n^2\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{t} \operatorname{erfc}\left(\frac{n\tau}{\sqrt{\tau_1-\tau}}\right) \exp\left(-\frac{\tau_1-\tau}{4}\right)\, d\tau_1, \tag{11}$$

$\varphi_0(t)$ *и* $\varphi_1(t)$ *— соответственно решение однородного (при* $f(t) \equiv 0$*) и частное решение неоднородного интегрального уравнения (5).*

Теорема 2. *Граничная задача (1) имеет семейство нетривиальных решений, которое находится с помощью формул (4), (6)–(11) и обращения формулы (2).*

Работа выполнена по грантам 0085/ПЦФ-14, 0823/ГФ4 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список литературы

[1] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский *Уравнения математической физики.* Наука, Москва, 1972.

[2] М.М. Амангалиева, М.Т. Дженалиев, М.Т. Космакова, М.И. Рамазанов, *Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области.* Сиб. мат. журнал. 56 (2015), no. 6., 1234–1248.

AMS Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 35Q35.

On two-point boundary value problem for the Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels

D.S. Dzhumabaev [1,2], A.T. Assanova[1]

[1] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *International information technology university, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: dzhumabaev@list.ru; assanova@math.kz

We consider the linear two-point boundary value problem for system of Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in (0,T), \ dx \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \quad (2)$$

where the $(n \times n)$ matrix $A(t)$ is continuous on $[0, T]$, the $(n \times n)$ matrix $K(t, s)$ has the form $K(t, s) = \frac{1}{(t-s)^{\delta}} H(t, s)$, and the $(n \times n)$ matrix $H(t, s)$ is continuous on $[0, T] \times [0, T]$, $0 < \delta < 1$, the n vector $f(t)$ is continuous on $[0, T]$.

A solution to problem (1), (2) is a continuous on $[0, T]$ and continuously differentiable on $(0, T)$ vector function $x(t)$ satisfying the Fredholm integro-differential equation (1) and boundary condition (2).

Integro-differential equations and different problems for them are used as mathematical models of various physical processes [1]. Linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations are investigated in [2-7] for the cases of smooth kernels. Two-point boundary value problems for linear Fredholm integro-differential equations with weakly singular or other non-smooth kernels are studied by the Galerkin and collocation methods in [9-12].

In present report, based on the parameterization method [8] we investigate the existence and uniqueness of solution to problem (1), (2). Dividing the interval $[0, T]$ into N parts, we introduce additional parameters. While applying the method to problem (1), (2), an intermediate problem, special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with parameters, arises. Note, the problem is always uniquely solvable for sufficiently small partition step. This property of intermediate problem in [2] allowed us to establish the necessary and sufficient conditions for solvability and unique solvability of problem (1), (2) in the case of smooth kernels. In [3-6], the smallness of interval's partition step is also required for solving the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. In [7], the arbitrary partitions of interval are considered.

Hereby we expand the results of paper [2] to the linear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels. Algorithms of parameterization method are based on the smallness of interval's partition and solving the system of algebraic equations with respect to the additional parameters introduced. If a fundamental matrix of differential part of Eq.(1) is known and the erasing definite integrals can be evaluated, then the algorithm gives a solution to the linear two-point boundary value problem for the Fredholm integro-differential equations in the explicit form.

Let a number $h_0 > 0$ exist and satisfy the inequality $\beta T h_0^{1-\delta} e^{\alpha h_0} < 1$, where
$\beta = \max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} ||H(t,s)||$, $\alpha = \max\limits_{t\in[0,T]} ||A(t)||$. Then for any $h \in (0, h_0] : Nh = T$, the special Cauchy problem is uniquely solvable. The solvability conditions for linear two-point boundary value problem (1), (2) are established in the term of solvability of the system of algebraic equations mentioned above.

This research is financially supported by the grants from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0822/ГФ4 and Grant No. 3362/ГФ4).

References

[1] H. Brunner, *Collocation methods for Volterra integral and related functional equations.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[2] D.S. Dzhumabaev, *A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation.* Comput. Math. Math. Phys. 50 (2010), no. 7., 1150–1161.

[3] D.S. Dzhumabaev, *An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integro-differential equation.* Comput. Math. Math. Phys. 53 (2013), no. 6., 736–758.

[4] D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova, *Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations.* Differ. Equ. 49 (2013), no. 9., 1087–1102.

[5] D.S. Dzhumabaev, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integrodifferential equations.* Ukranian Math. J. 66 (2015), no. 8., 1200–1219.

[6] D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova, *On unique solvability of a boundary-value problem for Fredholm intergo-differential equations with degenerate kernel.* Journal of Mathematical Sciences (United States). 220 (2017), no. 4., 440–460.

[7] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations.* J. Comput. Appl. Math. 294 (2016), 342–357.

[8] D.S. Dzhumabayev, *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation.* USSR Comput. Math. Math. Phys. 29 (1989), no. 1., 34–46.

[9] I. Parts, A. Pedas, E. Tamme, *Piecewise polynomial collocation for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels.* SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005), no. 5., 1897–1911.

[10] A. Pedas, E. Tamme, *Spline collocation method for integro-differential equations with weakly singular kernels.* J. Comput. Appl. Math. 197 (2006), 253–269.

[11] A. Pedas, E. Tamme, *Discrete Galerkin method for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels.* J. Comput. Appl. Math. 213 (2008), 111–126.

[12] A. Pedas, E. Tamme, *A discrete collocation method for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels.* Appl. Numer. Math. 61 (2011), 738–751.

AMS Mathematics Subject Classification: 34K05, 34K10, 45J05, 45L05.

Об одной единственности решения осесимметричной задачи Франкля для полупространства

А.А. Елеуов[1], Р. Елеуова[1], Н.Н. Тунгатаров[1]

[1] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: eleuov@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\tilde{u}_{xx} + \frac{1}{x}\tilde{u}_x + \operatorname{sgn} y \, \tilde{u}_{yy} = 0, \tag{1}$$

которое является пространственным уравнением Лаврентьева-Бицадзе в случае осевой симметрии.

Пусть D – правая полуплоскость $z = x + iy$, D^+ – первая четверть плоскости, D^- – четвертая четверть плоскости. Требуется найти в области D решение $\tilde{u}(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$, отражающееся в нуль на бесконечности, за исключением быть могут точки $(0, 0)$, и удовлетворяющее граничным условиям

$$\tilde{u}\,(0,\, y) - \tilde{u}\,(0,\, -y) = \frac{\pi}{2} f\,(y) \quad (-\infty < y < \infty)\,; \tag{2}$$

$$\tilde{u}_x\,(0,\, y) = 0 \quad (-\infty < y < \infty)\,, \tag{3}$$

где $f(y)$ – заданная нечетная функция из $C^2(-\infty; \infty)$, причем при $y \to \infty$

$$f(y) = O\left(y^{-\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0).$$

Для решения рассматриваемой задачи применяется методика, основанная на интегральных представлениях решения уравнения (1) в областях его эллиптичности и гиперболичности.

Список литературы

[1] A.V. Bitsadze, *Some classes of partial differential equations.* Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).

[2] G.N. Polozhii, *Theory and application of p-analytic and (p,q)-analytic functions.* Naukovo Dumka, Kiev, 1973 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35M30.

On a Green's function of a heat problem with a periodic boundary condition

N.E. Erzhanov[1,2]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Regional Social and Innovative University, Shymkent, Kazakhstan*
E-mail: [1] *erzhanov@math.kz*

We investigate a non-local initial-boundary value problem for a non-homogeneous one-dimensional heat equation.

The domain under consideration is a rectangle:

$$\Omega = \{0 < x < 1,\, 0 < t < T\}$$

. A non-local periodic boundary condition with respect to a spatial variable x is put.

We consider a heat equation

$$u_t - u_{xx} = f(x,t)$$

with initial condition

$$u(x,0) = \tau(x),\ \ 0 \le x \le 1,$$

and homogeneous periodic boundary conditions ($k = 1$ or $k = 2$)

$$u_x(0,t) = (-1)^k u_x(1,t), \quad u(0,t) = (-1)^k u(1,t), \ \ 0 \le t \le T.$$

These problems are well-researched, their solution (in classical and generalized sense) exists, is unique and can be constructed by the method of separation of variables. It is well-known that a solution of problem can be constructed in the form of convergent orthonormal series according to eigenfunctions of a spectral problem for an operator of multiple differentiation with periodic boundary conditions. Therefore Green's function can be also written in the form of an infinite series with respect to trigonometric functions (Fourier series).

The solution can be represented with the help of the Green's function in the form

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G(x,\xi,t-s) f(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G(x,\xi,t)\tau(\xi) d\xi.$$

For classical first and second initial-boundary value problems there also exists a second representation of the Green's function by Jacobi function. In this report we find the representation of the Green's function of the non-local initial-boundary value problem with periodic boundary conditions in the form of series according to exponents.

Some Problems of these types was considered in our work [1].

The authors were supported by the grant no. 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] N.E. Erzhanov, *Green's function of a heat problem with a periodic boundary condition.* AIP Conference Proceedings. 1759 (2016), 020112.

AMS Mathematics Subject Classification: 35P05, 35C15, 35E15, 35K05

Үшінші ретті сызықты дифференциалдық операторлдың бөліктену шарттары

Ж.Б. Ескабылова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
E-mail: juli_e92@mail.ru

$C_0^{(3)}(R)$ Үш рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған келесі

$$L_0 y := -y''' + r(x)y'' \tag{1}$$

сызықты дифференциалдық өрнегін қарастырайық. Мұндағы $x \in (-\infty, +\infty)$, r - нақты мәнді функция. Осы L_0 - ді $L_2(R)$ кеңістігіндегі тұйықталуын L деп белгілейік. Егер әрбір $y \in D(L)$ үшін

$$\|y''\|_2 + \|ry'\|_2 \le c\left(\|Ly\|_2 + \|y\|_2\right)$$

теңсіздігі орындалатын болса, онда L операторы $L_2(R)$ кеңістігінде бөліктенеді деп аталады. Бұл жерде $\|\cdot\|_2$ - $L_2(R)$-ді нормасы.

Үшінші ретті дифференциалдық операторларды зерттеуге ақпаратты сақтап қалуға қабілетті ортада өтетін процестерді зерттеу есептері, сол сияқты жиектік қабат теориясының модельдік есептері алып келеді [1]. Үшінші ретті сызықты дифференциалдық операторлардың ішіндегі терең зерттелген түрі -

$$ly := -y''' + q(x)y.$$

([2] мақаласын және ондағы сілтемелерді қара). Бұл жерде $q(x) \geq 1$ деп есептеледі. (1) теңдігімен анықталған L операторының қасиеттері l операторынан мүлдем бөлек. Мысалы, $D(L)$ анықталу облысы $L_2(R)$-ге енуі үшін r коэффициентіне қосымша шарттар қою керек. Мынадай белгілеулер енгізейік:

$$\gamma_{p,v} = \max\left\{\sup_{x>0}\left(\|p\|_{L_2(0,\,x)}\left\|t\,v^{-1}(t)\right\|_{L_2(\,x,\,+\infty)}\right),\right.$$

$$\left.\sup_{\tau<0}\left(\|p\|_{L_2(\tau,\,0)}\left\|t\,v^{-1}(t)\right\|_{L_2(\,-\infty,\,\tau)}\right)\right\},$$

$$\gamma'_{p,v} = \min\left\{\sup_{x>0}\left(\|p\|_{L_2(0,\,x)}\left\|(t-x)\ v^{-1}(t)\right\|_{L_2(\,x,\,+\infty)}\right),\right.$$

$$\left.\sup_{\tau<0}\left(\|p\|_{L_2(\tau,\,0)}\left\|(t-x)\ v^{-1}(t)\right\|_{L_2(\,-\infty,\,\tau)}\right)\right\}.$$

Мұндағы p және v - $\gamma_{p,\,v}$, $\gamma'_{p,\,v}$ шамалары мағыналы болатындай үзіліссіз функциялар. Баяндамада келесі тұжырым талқыланады.

Теорема 1. *Айталық r екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция болып, келесі*

$$r \geq 1, \gamma_{1,\sqrt{r}} < \infty, \gamma'_{1,\sqrt{r}} < \infty,$$

және

$$C^{-1} \leq \frac{r\,(x)}{r\,(\eta)} \leq C, |x-\eta| \leq 1, C > 1,$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $y \in L_2$ үшін

$$\|y'''\|_2 + \|ry''\|_2 + \|y\|_2 \leq C_L\,\|Ly\|_2$$

бағалауы орындалады, басқаша айтқанда, L операторы $L_2(R)$ кеңістігінде бөліктенеді.

Пайдаланылған әдебиеттер

[1] Бубнов Б.А. Характеристические задачи для одного уравнения третьего порядка. Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Сборник статей. –Новосибирск, 1980. 44-50.

[2] Айткожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б., Оспанов К.Н. О разрешимости одного класса нелинейных сингулярных уравнений третьего порядка. Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – 2005. - № 6 (46). 10-15.

AMS Mathematics Subject Classification: 34A55, 34B05, 58C40.

Асимптотика спектра неполуограниченного дифференциального оператора четвертого порядка с колеблющимся коэффициентом

А. Ескермесулы[1], Я.Т. Султанаев[2]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева*
E-mail: aleke1410@gmail.com
[2] *Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы*
E-mail: sultanaevyt@gmail.com

Данная работа посвящена изучению асимптотического поведения спектра неполуограниченного дифференциального оператора L_0, порожденного в $L_2(-\infty,+\infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = y^{(4)} + q_1(x)y, \quad x \in (-\infty,+\infty). \tag{1}$$

В монографии [1] были получены асимптотические формулы для функции $N(\lambda)$ – функции распределения собственных значений самосопряженных расширений минимального дифференциального оператора L_0, порожденного в $L_2(-\infty,+\infty)$ дифференциальным выражением вида (1) в случае, когда $q_1(x)$ – "регулярная" в смысле Титчмарша-Левитана функция. Под регулярностью функции $q_1(x)$ понимается следующее:

- функция $q_1(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой;

- $q_1'(x)$, $q_1''(x)$ не меняют знак для достаточно больших x, $|x| > R$, $R > 0$;
- $q_1(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$;
- $q_1'(x) = o(q_1^{\gamma}(x)), \ \ |x| \to +\infty, \ \ 0 < \gamma < \frac{5}{4}$.

Целью нашей работы является получение асимптотических формул для функции $N(\lambda)$ в случае, когда функция $q_1(x)$ не удовлетворяет условиям регулярности типа Титчмарша-Левитана и является колеблющейся функцией. Примером таких нерегулярных функций являются, например, функции вида

$$q_1(x) = q(x) + h(x),$$

где $q(x)$ – "регулярная" , а $h(x)$ содержит осцилляцию

$$h(x) = \sum a_k(x) \cdot S_k\left(\varphi_k(x)\right),$$

где $S_k(t)$ – периодические функции, а $a_k(x)$, $\varphi_k(x)$ – достаточно гладкие монотонные функции.

Асимптотические (как по x, так и по λ) формулы для фундаментальной системы решения (далее ФСР) уравнений вида

$$-y'' + (q(x) + h(x))y = \lambda y$$

с подобными потенциалами изучались в работах [4], [3]. В работе [1] был предложен новый метод построения таких асимптотических при $x \to +\infty$ формул, для уравнения четвертого порядка. Оказалось, что данный метод позволяет также получить асимптотические формулы для ФСР уравнения (1) при $\Gamma \ni \lambda \to \infty$, где

$$\Gamma = \{\lambda : \sigma + i\tau;\ \sigma > 0,\ \xi \le \tau \le \sigma^{\gamma},\ \xi > 0,\ 0 < \gamma < 1\},$$

равномерные по $x \in (-\infty, +\infty)$. При этом на функцию $q_1(x)$ налагаются более жесткие условия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01095 А), а также при поддержке Комитета Науки Министерства Образования и Науки Республики Казахстан (грант № 5499/ГФ4) по приоритетному направлению "Интеллектуальный потенциал страны".

Список литературы

[1] Н.Ф. Валеев, А. Ескермесулы, Э.А. Назирова *Об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами.* Математический журнал ИМММ КН РК, 2016, Т. 16, № 1, 58-76.

[2] А.Г. Костюченко, И.С. Саргсян *Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).* М.: Наука, 1979, 400.

[3] Х.Х Муртазин, Я.Т. Султанаев *К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля.* Математические заметки, 1980, т. 28:4, 545-553

[4] Я.Т. Султанаев *Об индексах дефекта и спектре одномерных сингулярных дифференциальных операторов в вырожденном случае.* ДАН СССР, 1985, Т. 284, № 3, 551–555.

AMS Mathematics Subject Classification: 39A11, 39A13, 39A70.

Dynamic analysis of queueing models

G. Gupur

College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, P.R.China
E-mail: genigupur@vip.163.com

On the basis of our research work, we introduce the dynamics for queueing models that are described by infinitely many partial differential equations with integral boundary conditions. Firstly, we state our motivation, next we provide the main tools in functional analysis, then we state the idea to obtain the well-posedness of queueing models. After that, we introduce the asymptotic behavior of time-dependent solutions of queueing models. In addition, we discuss structure of time-dependent solutions of queueing models. We conclude this talk with some open problems.

Why a Fredholm integral equation of the first kind is an ill-posed problem?

Alemdar Hasanoğlu Hasanov

Izmir University, Izmir, Turkey
E-mail: alemdar.hasanoglu@gmail.com

Abstract. We study a relationship between two mathematical models of the simplest physical phenomenon, governed by differential and integral operators. Comparing these two problems, we will try to answer the question: which problem is the direct (i.e. original) problem, and which problem is the inverse problem? This will answer to the question why a Fredholm integral equation of the first kind is an ill-posed problem?

1. Consider the problem of solving the Fredholm integral equation of the first kind [1]

$$\begin{aligned} (Au) &:= \int_0^1 K(x,y)u(y)dy = F(x), \quad \text{where} \\ K(x,y) &= \begin{cases} (1-x)y, & 0 \le y \le x, \\ x(1-y), & x \le y \le 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

It is easy to verify that

$$\int_0^1 K(x,y)\sin(n\pi y)\,dy = \frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi x), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

which means that the numbers $\{(n\pi)^{-2}\}_{n=1}^{\infty}$ are eigenvalues of the integral operator $A : C[0,1] \mapsto C[0,1]$ defined by (1), and $\{\sqrt{2}\sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ are the orthonormal eigenfunctions. Using this we can define the Fourier Sine series representation for the kernel $K(x,y)$:

$$K(x,y) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{(n\pi)^2}. \tag{3}$$

To solve now the Fredholm integral equation (1) we use the Fourier Sine series $F(x) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x)$, $u(x) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x)$ for the functions $F(x)$ and $u(x)$, where F_n and u_n are the Fourier coefficients. Substituting these in (1) and using (2) we deduce that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n\pi)^2}\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x).$$

This implies that $u_n = (n\pi)^2 F_n, \quad n = 1,2,\ldots$. This relationship can be treated as an *input-output relationship* for problem (1). Thus, the Fourier series solution of the Fredholm integral equation with the kernel given by (1) is the function

$$u(x) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2 F_n \sin(n\pi x), \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

if the series converges in the considered solution set $C[0,1]$. However, there are very simple cases where this fails to happen, even in $L^2[0,1]$. Indeed, let $F(x) \equiv 1$, $x \in [0,1]$. Calculating the Fourier coefficients F_n we get: $F_n = \sqrt{2}\,[1-(-1)^n]/(n\pi)$, $n = 1,2,3,\dots$. This means the series (4) fails to converge.

This analysis shows *problem* (1) *may not have a solution for each function* $F \in C[0,1]$.

2. To understand the reason of this phenomenon, we interchange roles of $u(x)$ and $F(x)$ in problem (1), *assuming now that* $F(x)$ *is the unknown function and* $u(x)$ *is the given one.* Differentiating the left hand side of (1) and taking into account the form of the kernel we get the formal differential problem with respect to the unknown function $F(x)$:

$$\begin{cases} -F''(x) = u(x),\ x \in (0,1), \\ F(0) = F(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Evidently, $K(x,y)$ is the Green's function for the operator $-d^2/dx^2$ under the boundary conditions (5).

Let us compare now problems (1) and (5), taking into account the swapping of the functions $u(x)$ and $F(x)$. It follows from the above considerations that, these problems can be defined as *inverse to each other*, as stated in [2]. Then, it is natural to ask the question: which problem is the direct (i.e. original) problem, and which problem is the inverse problem? To answer this question, we need to go back to the physical model of the problem. The boundary value problem (5) is the simplest mathematical model of deflection of a string, occupying the interval $[0,1]$. The Dirichlet conditions in (5) mean that the string is clamped at its end points. In this model, the function $u(x)$, as a given right hand side of the differential equation (5), represents a given pressure, and the function $F(x)$, as a solution of the boundary value problem (5), represents the corresponding deflection. The unique (classical) solution of the two-point boundary value problem

(5) is the function

$$F(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)dy, \quad x \in [0,1], \tag{6}$$

where the kernel $K(x, y)$ is the Green's function defined in (1). Hence *each pressure* $u \in C[0, 1]$, *defines uniquely the deflection function* $F \in C^2[0, 1]$, $F(0) = F(1) = 0$. In other words, the boundary value problem (5) is a *well-posed problem*, with the unique solution (6). On the other hand, as we have seen above, the integral equation (1) may not have a solution for each continuous function $f(x)$ (deflection). *The physical interpretation is clear: each (admissible) pressure generates a unique deflection, but an arbitrary function cannot be regarded as a deflection.* Applied to the integral equation (1) this means that to be a possible defection $F(x)$ needs, at least, to satisfy the boundary conditions $F(0) = F(1) = 0$ and to have continuous second derivative. This is a reason, in the language of the physical model, why a Fredholm integral equation of the first kind is an ill-posed problem.

3. The lemma below explains the above conclusion, in terms of compact operators. It simply asserts that *any neighborhood of an arbitrary element* $F \in \mathcal{R}(A)$ *from the range of a linear compact operator* A *might not have a preimage in* H.

Lemma 1. *Let* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \mapsto \tilde{H}$ *be a compact operator between two infinite-dimensional Hilbert spaces* H *and* $\tilde{H}$, *with bounded domain* $\mathcal{D}(A)$. *Assume that* $f \in \mathcal{R}(A)$ *is an arbitrary element from the range* $\mathcal{R}(A) \subset \tilde{H}$ *of the operator* A. *Then for any* $\varepsilon > 0$ *there exists an element* $f_0 \in V_\varepsilon(f) := \{g \in \tilde{H} \ : \|g - f\|_{\tilde{H}} \le \varepsilon\}$ *such that* $f_0 \notin \mathcal{R}(A)$.

References

[1] Alemdar Hasanov and Vladimir Romanov, *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*, Springer, 2017 (in press)

[2] J.B. Keller, Inverse Problem. *Amer. Math. Monthly.*, 83: 107-118, 1976.

Ішкі суперпозиция операторы қатысатын сызықты емес интегралдық теңдеу

А. Ибатов[1], М. Қаразым[2]

[1]*Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан*
E-mail: zhanat.ibatov@mail.ru
[2]*Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан*
E-mail: mukhtarkarazym@gmail.com

$$
\begin{gathered}
x(t) = \int\limits_a^b \mathrm{K}(\mathrm{t}, \mathrm{s}, \mathrm{x}(\mathrm{h}_1(\mathrm{s}), ..., \mathrm{x}(\mathrm{h}_\mathrm{m}(\mathrm{s}))\, \mathrm{d}s \equiv (Tx)(t),\ t \in [a, b] \\
x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ егер } \xi \notin [a, b]
\end{gathered}
\tag{1}
$$

интегралдық тендеуі көптеген [1-4] авторлардың ғылыми еңбектерінде зерттелген. Аргументі кешігетін дифференциалдық тендеулер теориясының көптеген мәселелері осы сияқты теңдеулерге келтіріледі [5].

Көрсетілген авторлардың зерттеулерін жалғастыра отырып, біз (1) теңдеуді келесі шарттар:

а) функция $K : [a, b] \times [a, b] \times R^m \mapsto R$ Каратеодори шартын қанағаттандырады, яғни барлық дерлік $t, s \in [a, b]$ үшін қалған аргументтер жиынтығы бойынша үзіліссіз және бірінші, екінші аргументтер жиынтығы бойынша өлшемді барлық мүмкін болатын қалған аргументтер мәндері үшін;

b) $h_i\ : [a,b] \mapsto R,\ i = 1,...,m$ $[a,b]$ кесіндісінде өлшемді функциялар және $mese = 0$ болғанда $mes\{s \in [a,b]\ :\ h_i(s) \in e\} = 0$ шарты орындалатын $\forall e \subset [a,b]$ жиыны үшін $mesh_i^{-1}([a,b]) > 0$ орындалатын жағдайларда қарастырамыз.

Ілгеріде біз $\varphi(\xi) = 0$ деп ұйғарамыз, бұл ұйғарым талдау шеңберін тарылтпайды [5].

T операторын нормасы $\|u\|_p = (\int\limits_a^b |\mathrm{u(s)}|^{\mathrm{p}}\mathrm{ds})^{\frac{1}{p}}$ арқылы анықталатын L_p, $1 < p < \infty$ кеңістігінде қарастырамыз. L_p^m деп нормасы $\|u\|_{L_p^m} = \max\limits_{1\leq i\leq m} \|u_i\|_p$ және әрбір компоненті L_p кеңістігінде жататын $u(s) = \{u_1(s),...,u_m(s)\}$ вектор-функциялар кеңістігін белгілейміз.

L_p кеңістігінде жататын және $[a,b]$ кесіндісінің барлық жерде дерлік (1) теңдеуді қанағаттандыратын x функциясын (1) интегралдық теңдеудің шешімі деп атаймыз.

$[a,b]$ кесіндісінің σ-алгебра құрайтын ішкі жиындарынан құралатын жиынды

$$\mu_i(e) \overset{def}{=} mes\{s \in [a,b] : h_i(s) \in e\}$$

және

$$\frac{d\mu_i}{dm}(s) \overset{def}{=} \lim_{mese\mapsto 0} \frac{\mu(e)}{mese}$$

функцияларын анықтаймыз. Мұндагы e - s нүктесін қамтитын $[a,b]$ кесіндісінде жататын кесінді, ал $\frac{d\mu_i}{dm}$, $i = 1,...,m$ қосындыланатын функциялар ([6], 234 б.).

$$u_h(s) = \begin{cases} u(h(s)), & \text{егер } h(s) \in [a,b] \\ 0, & \text{егер } h(s) \notin [a,b] \end{cases}$$

деп алып, әсерлері сәйкесінше

$$(H_i u)(s) \overset{def}{=} u_{h_i}(s)$$

$$(Hu)(s) \overset{def}{=} \{(H_1 u)(s),...,(H_m u)(s)\}$$

$$(Ku)(t) \overset{def}{=} \int\limits_a^b \mathrm{K(t, s, u(s))ds}$$

арқылы анықталатын ішкі суперпозиция H_i, H операторларын және сызықты емес K интегралдық операторын анықтаймыз. Айта кететін жайт, H_i, $i = 1, ..., m$ және H операторлары сызықты, оң және L_p кеңістігін L_p кеңістігіне бейнелейтін бейнелеулер.

Енді (1) интегралдық теңдеуін

$$x = KHx \equiv Tx, \; x \in L_p$$

операторлық теңдеу түрінде жазуға болады.

$S = \{x \in L_p \; : \; |x(t)| \leq z(t) \in L_p\}$ деп L_p кеңістігінің тұйық, дөңес, шенелген ішкі жиынын белгілейік.

Лемма 1. *Егер $H : L_p \mapsto L_p^m$ бейнелейтін сызықты оператор және*

$$|K(t, s, u_1, ..., u_m)| \leq \omega(t, s, |u_1|, ..., |u_m|)$$
$$z(t) \geq \int\limits_a^b \omega(t, s, z_{h_1}(s), ..., z_{h_m}(s))ds$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын $t, s \in [a, b]$, $|u_i| < \infty$ облысынан α_i аргументтері бойынша кемімейтін $\omega(t, s, \alpha_1, ..., \alpha_m)$ және теріс емес $z \in L_p$ функциялары табылатын болса, онда T операторы S жиынын S жиынына бейнелейді.

Теорема 1. *Егер*

1) $\sup\limits_{u \in R^n} vraisup \frac{\|K(\cdot,s,u)\|_{L^n_{p_1}}}{\|u\|^p_{L_p}+a(s)} < \infty$ $(1 \leq p_1 < p < \infty)$ *орындалатын L_1 кеңістігінде жататын оң $a(s)$ функциясы табылатын болса;*

2) $\lim\limits_{\|u-v\|_{R^m} \to 0} vrai \sup\limits_{s \in [a,b]} \|K(\cdot, s, u) - K(\cdot, s, v)\|_{L^n_{p_1}} = 0$ *теңдігі R^m кеңістігінде жатқан кез келген v үшін орындалатын болса;*

3) $\lim\limits_{\delta\mapsto 0}\sup\limits_{u\in R^m} vrai \sup\limits_{s\in[a,b]} \frac{\|K(\cdot+\delta,s,u)-K(\cdot,s,u)\|_{L^n_{p_1}}}{\|u\|^p_{L_p}+a(s)} = 0$*;*

4) $\frac{d\mu_i}{dm} \in L_{\frac{p}{p-p_1}}$, $i = 1,...,m$ *жататын болса, онда* $T : L_p \mapsto L_p$ *толығымен үзіліссіз оператор болады.*

Теорема 2. *Егер лемма мен 1-теореманың шарттары орындалса, онда* (1) *теңдеудің* L_p *кеңістігінде жататын* $|x(t)| \leq z(t)$ *теңсіздігін қанағаттандыратын кем дегенде бір шешімі бар болады.*

Әдебиеттер тізімі

[1] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., Чигирев А.И., *Дифференц. уравнения*, 1970, т.6, №2.

[2] Азбелев Н.В., Цалюк З.В. Докл. АНСССР 1964, т.156 ,№2.

[3] Шрагин И.В., *Дифференц. уравнения* , 1975, т.11, №11.

[4] Ибатов А., *Корректные краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений* , Дис. канд. физ-мат. наук, Алма-Ата, 1986, 118 с.

[5] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., *Дифференц. уравнения* , 1978, т.14, №5.

[6] Данфорд Н., Шварц Дж.Т., *Линейные операторы. Общая теория* М: ИЛ, 1962.

AMS Mathematics Subject Classification : 45G10

Характеристический определитель спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа

Н.С. Иманбаев

Институт математики и математического моделирования, Алматы,
Южно-Казахстанский государственный педагогический институт,
Шымкент, Казахстан
E-mail:imanbaevnur@mail.ru

В настоящей заметке рассмотрим спектральную задачу с интегральным возмущением одного из краевых условий типа I [1]:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u(0) + u(1) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u'(0) + u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x)\, dx, \; p(x) \in L_1(0,1). \tag{3}$$

Несамосопряженным возмущением самосопряженной антипериодической задачи будет нагруженный дифференциальный уравнения второго порядка следующего вида [2]:

$$\begin{array}{l} {L_1}^*(v) \equiv -v''(x) + p(x)\, v'(1) = \overline{\lambda} v(x), \\ V_1(v) \equiv v(0) + v(1) = 0, \;\; V_2(v) \equiv v'(0) + v'(1) = 0 \end{array} \tag{4}$$

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(2(k-1)\pi)\, x + b_k sin(2(k-1)\pi)\, x\right] \tag{5}$$

Теорема 1. *Характеристический определитель антипериодической спектральной задачи с возмущенными* *краевыми условиями (1) - (3) представим в виде*

$$\Delta_1(\lambda) = 2\left(1+\cos\sqrt{\lambda}\right) - 2\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda-((2k-1)\pi)^2},$$

где $\Delta_0(\lambda) = 2\left(1+\cos\sqrt{\lambda}\right)-$ *характеристический определитель невозмущенной антипериодической задачи,* b_k- *коэффициенты разложения (5) функции* $p(x)$ *в тригонометрический ряд Фурье.*

Авторы были поддержаны грантом 0825/ГФ4 МОН РК.

Список литературы

[1] А.С. Макин, *О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля.* ДАН.РАН. 406(2006), no. 1., 21–24.

[2] N.S. Imanbaev, M.A. Sadybekov,*On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition.* Eurasian Mathematical Journal. 4(2013), no. 3., 53–62.

AMS Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J08, 35J25, 35P05.

A periodic problem with nonlocal perturbation of boundary conditions

N.S. Imanbaev[1,2], M.A. Sadybekov[1]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan*

E-mail: [1]*sadybekov@math.kz,* [2]*imanbaev@math.kz*

It is well-known that a system of eigenfunctions of the operator, given by a formally self-adjoint differential expression with arbitrary self-adjoint boundary conditions providing a discrete spectrum, forms an orthonormal basis of the space L_2. The problem of preserving the basis properties with a (weak, in a sense) perturbation of the initial operator was investigated in many works.

The present work is the continuation of authors' researchers on stability (instability) of basis property of root vectors of a differential operator with nonlocal perturbation of one of boundary conditions. In this paper a spectral problem for a multiple differentiation operator with an integral perturbation of boundary conditions of one type, which are regular, but not strongly regular, is considered. The present paper is devoted to the spectral problem

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \ 0 < x < 1,$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) + \alpha u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx,$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = 0,$$

which $p(x) \in L_2(0,1)$, and $\alpha \neq 0$ is an arbitrary complex number.

For this type of the boundary conditions it is known that the unperturbed problem has an asymptotically simple spectrum, and its system of normalized eigenfunctions creates the Riesz basis.

We construct the characteristic determinant of the spectral problem with an integral perturbation of the boundary conditions. It is shown that the Riesz basis property of a system of eigen- and adjoint functions is stable with respect to integral perturbations of the boundary condition.

The main result of the work is the following theorem.

Theorem 1. *For any function $p(x) \in L_2(0,1)$, the system of eigen- and adjoint functions of problem (1)–(3) forms the Riesz basis $L_2(0,1)$.*

The results of the present paper, unlike [1], demonstrate the stability of basis properties of the root functions under integral perturbation of the boundary conditions of one type of problems that are regular, but not strongly regular.

Some Problems of these types was considered in our works [1, 2] and was published in extended abstracts of the Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Almaty, Kazakhstan (September 07-10, 2016) [3].

The authors were supported by the grant no. 0825/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] N.S. Imanbaev, M.A. Sadybekov, *On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition.* Differential Equations. 48 (2012), no. 6., 896–900.

[2] M.A. Sadybekov, N.S. Imanbaev, *Regular differential operator with a perturbed boundary condition.* Math. Notes. 101 (2017), no. 5., 768–778.

[3] N.S. Imanbaev, M.A. Sadybekov, *Stability of basis property of a periodic problem with nonlocal perturbation of boundary conditions.* AIP Conference Proceedings. 1759 (2016), 020080.

AMS Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J08, 35J25, 35P05

III-posed model of oscillations of a flat plate

U.A. Iskakova[1]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [1]*iskakova@math.kz*

We consider a model case of stationary vibrations of a thin flat plate, one side of which is embedded, the opposite side is free, and the sides are freely leaned. In mathematical modeling, there is a local boundary value problem for the biharmonic equation in a rectangular domain. Boundary conditions are given on all boundary of the domain.

Problem C. *Find in* $D = \{(x,y) : 0 < x < \pi, 0 < y < l\}$ *a solution to the biharmonic equation*

$$\triangle^2 u \equiv u_{xxxx}(x,y) + 2u_{xxyy}(x,y) + u_{yyyy}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D \quad (1)$$

satisfying boundary conditions in the first spatial variable x*:*

$$u|_{x=0} = 0,\ \triangle u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=\pi} = 0,\ \triangle u|_{x=\pi} = 0; \quad 0 \le y \le l; \quad (2)$$

and boundary conditions in the second spatial variable y*:*

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le \pi; \quad (3)$$

$$\triangle u|_{y=l} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial \triangle u}{\partial y}\Big|_{y=l} = \psi_2(x),\ \ 0 \le x \le \pi. \quad (4)$$

We show that the considered problem is self-adjoint. Herewith, the problem is ill-posed. We show that the stability of solution to the problem is disturbed. Necessary and sufficient conditions of existence of the problem solution are found. Spaces of the ill-posedness of the considered problem are constructed.

Some Problems of these types was considered in our works [1-3].

The authors were supported by the grant no. 0820/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] U.A. Iskakova, *On a model of oscillations of a thin flat plate with a variety of mounts on opposite sides.* Bulletin of the South Ural State Univ. Series-Math. Mod. Progr. and Computer Software. 9 (2016), no. 2., 110–116.

[2] T.Sh. Kal'menov, M.A. Sadybekov, U.A. Iskakova, *On a criterion for the solvability of one ill-posed problem for the biharmonic equation.* Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 24 (2016), no. 6., 777–783.

[3] U.A. Iskakova, *On an ill-posed model of oscillations of a flat plate with a variety of mounts on opposite sides.* AIP Conference Proceedings. 1759 (2016), 020107.

AMS Mathematics Subject Classification: 35C15, 35J05, 35J08

О влиянии интегральных возмущений на ограниченность решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка на полуоси

С. Искандаров

Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики, Бишкек, Кыргызстан
E-mail: mrmacintosh@list.ru

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение; ДУ - дифференциальное уравнение.

Лемма *Установить достаточные условия ограниченности на полуинтервале J всех решений следующего линейного ИДУ третьего порядка вида:*

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau)$$

$$+Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)]\, d\tau = f\,(t)\,, \quad t \geq t_0 \qquad (1)$$

в случае, когда соответствующее ДУ третьего порядка

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f\,(t)\,, \quad t \geq t_0 \qquad (1_0)$$

может иметь неограниченные на J решения.

Для решения вышеприведенной задачи развивается нестандартный метод сведения к системе автора (2006), метод срезывающих функций автора (2002), метод интегральных неравенств Ю.А.Ведь, З.Пахырова (1973) и применяется лемма 3.3 автора (2002) об интегральном неравенстве первого рода.

Ниже приведем краткое содержание работы. Сначала аналогично автору (2006) в ИДУ (1) сделаем замену:

$$x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t),\ x'(t)=-\lambda^2 x(t)+W(t)y(t), \qquad (2)$$

где $0\neq\lambda$ - некоторый вспомогательный параметр, $0<W(t)$ - некоторая весовая функция; $y(t)$ - новая неизвестная функция. Тогда ИДУ третьего порядка (1) сводится к следующей эквивалентной системе из ДУ первого порядка (2) для неизвестной $x(t)$ и из ИДУ второго порядка для неизвестной $y(t)$:

$$\begin{cases} x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \\ y''(t)+b_2(t)y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+ \\ +\int\limits_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)y'(\tau)\right]d\tau= \\ =F(t),\ t\geq t_0, \end{cases}$$

где

$b_2(t)\equiv a_2(t)+2W'(t)\left(W(t)\right)^{-1}-\lambda^2,\ \ b_1(t)\equiv a_1(t)-\lambda^2 a_2(t)+\lambda^4+a_2(t)W'(t)\left(W(t)\right)^{-1}+$
$+\left[W'(t)-\lambda^2 W(t)\right]'\left(W(t)\right)^{-1}$,
$b_0(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[a_0(t)-\lambda^2 a_1(t)+\lambda^4 a_2(t)-\lambda^6\right]$,
$P_0(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-\lambda^2 Q_1(t,\tau)+\lambda^4 Q_2(t,\tau)\right]$,
$P_1(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_1(t,\tau)W(\tau)+Q_2(t,\tau)\left(W'(\tau)-\lambda^2 W(\tau)\right)\right]$,
$K(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau)$, $\ F(t)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}f(t)$.

Введем предположения и обозначения аналогично автору (2002):

$$K\left(t,\tau\right)=\sum_{i=0}^{n}K_i\left(t,\tau\right),\ \ F\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n}F_i\left(t\right), \qquad (K),(F)$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1...n)$ - некоторые срезывающие функции,
$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$, $E_i(t) \equiv F_i(t)\,(\psi_i(t))^{-1}$,

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) \ \ (i = 1...n), \tag{R}$$

$c_i(t)$ $(i = 1...n)$ - некоторые функции. В частности, доказана

Теорема 1. *Пусть 1)* $\lambda \neq 0$, $W(t) > 0$; *выполняются условия (K), (F), (R);*
2) $A_i(t) \geq 0$, $B_i(t) \geq 0$, $B_i'(t) \leq 0$, $R_{i\tau}'(t,\tau) \geq 0$, *существуют функции* $A_i^*(t) \geq 0$, $R_i^*(t) \geq 0$ *такие, что* $A_i'(t) \leq A_i^*(t)A_i(t)$, $\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$, $R_{it\tau}''(t,\tau) \leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$ $(i = 1..n;\ k = 0,1)$. *Тогда для любого решения* $(x(t),\ y(t))$ *системы (3) выполняется энергетическая оценка:* $(x(t))^2 + 2\lambda^2 \int\limits_{t_0}^{t} (x(s))^2\,ds + (y'(t))^2 +$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \Big[A_i(t)\,(X_i(t,t_0))^2 + \int\limits_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)\,(X_i(t,\tau))^2\,d\tau\big] \leq \{\sqrt{c_*}+$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} F_*(s)\exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{s} V(\eta)d\eta)ds\}^2 \exp(\int\limits_{t_0}^{t} V(s)ds) \equiv M(t,c_*), \tag{4}$$

где $F_*(t) \equiv |F_0(t)| + W(t)\,|y(t_0)| + |b_1(t)y(t_0)| + |y(t_0)| \int\limits_{t_0}^{t} |P_1(t,\tau)|\,d\tau$,

$V(t) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} [A_i^*(t) + R_i^*(t)] + 2\{W(t)\,|t-t_0| + |b_2(t)| + |b_1(t)|\,|t-t_0| +$
$|b_0(t)| +$
$+\int\limits_{t_0}^{t} [|P_0(t,\tau)| + |P_1(t,\tau)|\,|\tau - t_0| + |K_0(t,\tau)|]\,d\tau\}$.

Пусть, еще 3) $A_j(t) > 0$, $\psi_j(t) > 0$, $\psi_j'(t) \geq 0$ $(1 \leq j \leq n)$, $q(t,c_*) \geq 0$, $q'(t,c_*) \geq 0$,
$q'(t,c_*)(\psi_j(t))^{-1} \in L^1(J,R_+)$, *где* $q(t,c_*) \equiv (A_j(t))^{-\frac{1}{2}}(M(t,c_*))^{\frac{1}{2}}$. *Тогда* $y(t) = O(1)$.

Следствие 1. *Если выполняются все условия теоремы 1 и* $W(t) = O(1)$ *(соответственно* $W(t) \to 0,\ t \to \infty$*), то любое решение ИДУ (1)* $x(t) = O(1)$ *(соответственно* $x(t) \to 0,\ t \to \infty$*).*

Справедливость этого следствия вытекает на основе интегрального представления $x(t)$ из замены (2) для любого $x(t_0)$.
Приводятся иллюстративные примеры.

О классах возмущений, сохраняющих асимптотику спектра операторов, не близких к нормальным

Х.К. Ишкин

Башкирский государственный университете, Уфа, Россия
E-mail: Ishkin62mail.ru

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространств, T_0 – плотно определенный в $\mathcal{H}$ оператор с дискретным спектром. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные числа T_0, пронумерованные в порядке неубывания модулей с учетом их алгебраических кратностей. Без ограничения общности будем считать, что 0 не является собственным значением T_0, то есть оператор T_0^{-1} компактен. Тогда в полярном разложении $T_0 = U|T_0|$, $|T_0| = \sqrt{T_0^* T_0}$, оператор U унитарен, s-числа оператора T_0^{-1} имеют вид $s_j(T_0^{-1}) = s_j^{-1}|T_0|)$, где $\{s_j(|T_0|)\}_{j=1}^{\infty}$ – пронумерованные в порядке неубывания собственные числа оператора $|T_0|$.

Из теоремы М.В. Келдыша [4] (см. также [2, гл. V, §§ 10,11]) следует, что если $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p < \infty$, то любое T_0-компактное возмущение V сохраняет локализацию спектра, то есть при любом $\varepsilon > 0$ спектр оператора $T = T_0 + V$ вне угла

$\{|\arg\lambda| < \varepsilon\}$ конечен. Если функция распределения спектра $N(T_0, r)$ удовлетворяет тауберовым условиям $\frac{N(T_0,s)}{N(T_0,r)} < \left(\frac{s}{r}\right)^{\gamma}$, $s > r \geq R$, при некоторых $\gamma > 0$ и $R > 0$, то справедлива формула

$$N(T, r) \sim N(T_0, r),\ r \to +\infty.$$

Впоследствии теорема Келдыша обобщалась в различных направлениях (см. [1, 2, 6] и имеющиеся там ссылки).

Одно из таких направлений – расширение классов операторов T_0, для которых сохраняется утверждение теоремы Келдыша. Так, в работе [5] было показано, что если T_0 – нормальный оператор с дискретным спектром, лежащим на лучах $\gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \varphi_k\}(k = \overline{1, m})$ с соответствующими функциями распределения $N_0(\gamma_k, r)$, удовлетворяющими условиям

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to +0, \\ r \to +\infty}} \frac{N_0(\gamma_k, r(1+\varepsilon))}{N_0(\gamma_k, r)} = 1 \ (k = \overline{1, m}),$$

то при любом T_0-компактном V спектр оператора $T = T_0 + V$ локализуется около лучей γ_k $(k = \overline{1, m})$ и $N(\gamma_k, r) \sim N_0(\gamma_k, r)$, $k = \overline{1, m}$, где $N(\gamma_k, r)$ – число собственных чисел оператора T в секторе $\{\lambda : |\lambda| < r,\ |\arg\lambda - \varphi_k| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ – достаточно мал.

Если оператор T_0 не близок к самосопряженному или нормальному (то есть не представляется в виде $T_0 = H + V$, где H самосопряжен или нормален, V – H-компактен), то спектр T_0 может сильно меняться под действием малых возмущений (см. [7] и имеющиеся там ссылки). Нами получен класс возмущений, сохраняющих асимптотику спектра произвольного оператора плотно определенного оператора с резольвентой из класса Неймана–Шаттена.

Будем говорить, что спектр T_0 **локализован около луча** $\arg\lambda = \alpha_0$ тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0$ $N(T_0, r) \sim$

$N(T_0, \alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon, r), \quad r \to +\infty$, где $N(T, \eta, \zeta, r)$ и $N(T, r)$ – число собственных значений оператора T соответственно в секторе $\{\eta < \arg\lambda < \zeta,\ |\lambda| < r\}$ и круге $\{|\lambda| < r\}$.

Теорема 1. *Пусть оператор T_0 удовлетворяет следующим условиям:*

1_T) $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p (p > 0)$ *и спектр оператора* T_0 *локализован около луча* $\arg\lambda = 0$,

2_T) *спектр* T_0 *на луче* $(-\infty, 0)$ *конечен и* $\|(T_0 + r)^{-1}\| = O\left(r^{-1}\right),\ r \to +\infty$;

3_T) $N(T_0, r)$ *удовлетворяет условию* $\varliminf\limits_{r\to\infty} N(T_0, r)/N(|T_0|, r) > 0$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если

1_V) *оператор* V *ограничен относительно* T_0 *и его* T_0*-грань равна 0,*

2_V) *спектр оператора* $T = T_0 + V$ *локализован около некоторого луча* $\arg\lambda = \beta$,

то $\beta = 0$;

2. Если выполнено дополнительное к 1_T) – 3_T) *условие*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0,\\ r\to+\infty}} \frac{N(T_0, r(1+\varepsilon))}{N(T_0, r)} = 1,$$

то

$$N(T, r) \sim N(T_0, r),\ r \to +\infty.$$

Список литературы

[1] М.С. Агранович. *Спектральные свойства задач дифракции*, Дополнение к кн.: Н. Н. Войтович, В. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *Обобщенный*

метод собственных колебаний в теории дифракции. Наука, Москва, 1977. 289–416.

[2] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* Наука, Москва, 1965.

[3] Х.К. Ишкин, *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом.* Дифф. уравнения. 45 (2009), no 4, 480–495.

[4] М.В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений.* Докл. АН СССР. 77(1951), no 1, 11–14.

[5] А.С. Маркус, В.И. Мацаев, *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* Тр. ММО. 45 (1982), 133–181.

[6] А.А. Шкаликов, *Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром.* Успехи мат. наук. 71 (2016), no 5(431), 113–174.

[7] E.B. Davies, *Non-self-adjoint differential operators.* Bull. London Math. Soc. 34 (2002), no. 5., 513–532.

AMS Mathematics Subject Classification: 34B24, 34B40, 34L20, 34L40, 34M60, 47A10, 47A75, 47B10, 47B38, 47B44, 47E99

Об одном алгоритме нахождения решения линейной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Ж.М. Кадирбаева

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: apelman86pm@mail.ru

Рассматривается краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t) \lim_{t \to \theta_j + 0} x(t) + f(t),$$

$$B_i \lim_{t \to \theta_i - 0} x(t) - C_i \lim_{t \to \theta_i + 0} x(t) = \varphi_i, \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}^n, \qquad i = \overline{1,m}, \quad (2)$$

где $(n \times n)$-матрицы $A_j(t)$, $j = \overline{0,m}$, и n-вектор-функция $f(t)$ кусочно-непрерывны на $[0,T]$, с возможными разрывами первого рода в точках $t = \theta_i$, $i = \overline{1,m}$. B_i, C_i, $i = \overline{1,m}$ - постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

Решением задачи (1), (2) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t)$, которая удовлетворяет нагруженному дифференциальному уравнению (1) на $[0,T]$, кроме точек $t = \theta_i$, $i = \overline{1,m}$, и условиям импульсных воздействий в фиксированные моменты времени (2).

В последние годы нагруженные дифференциальные уравнения находят многочисленные применения в задачах практики. Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1, 2, 4, 5, 6] и получены условия их разрешимости различными методами. В работах [2, 4] линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений решалась методом параметризации [3]. На его основе были установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости указанной задачи.

Математическое моделирование эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями, длительностью которых можно пренебречь, приводит к необходимости исследования дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Различные задачи для таких уравнений, методы их решения и другие вопросы теории импульсных систем рассмотрены многими авторами, обзор и библиографию работ можно посмотреть в [7]. Известно, что наличие импульса существенно влияет на свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящем сообщении исследуются вопросы разрешимости линейной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1), (2). Для нахождения условий разрешимости и построения алгоритмов нахождения приближенных решений задачи (1), (2) используется метод параметризации [3]. Предлагаются алгоритмы нахождения решения и устанавливаются условия однозначной разрешимости в терминах исходных данных.

Результаты поддержаны грантовым финансированием Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант 0822/ГФ4.

Список литературы

[1] K.R. Aida-zade, V.M. Abdullaev, *On a numerical solution of loaded differential equations.* Journal of computational mathematics and mathematical physics. 44 (2004), no 9, 1585–1595.

[2] Э.А. Бакирова, *О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений.* Известия НАН РК. Сер.физ-матем. (2005), no 1, 96–102.

[3] Д.С. Джумабаев, *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.* Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 29 (1989), no 1, 50–66.

[4] Ж.М. Кадирбаева, *Об однозначной и корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений.* Математический журнал. 9 (2009), no 4, 63–71.

[5] А.М. Нахушев, *Уравнения математической биологии.* Высшая школа, Москва, 1995.

[6] А.М. Нахушев, *Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их прилождения к прогнозу почвенной влаги.* Дифференц. уравнения. 15 (1979), no 1, 96–105.

[7] А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, *Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.* Украинский математический журнал. 34 (1980), no 1, 66–73.

AMS Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B37.

Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений первого порядка с осциллирующей матрицей

А.А. Кадырбердина

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия
E-mail: Aliya-k95@mail.ru

Рассмотрим систему

$$\frac{dy_j}{dx} = \omega_j(x)y_j + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x)y_k, j = 1, 2...n. \qquad (1)$$

Известно [1], что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

1. *Функции* $\omega_j(x)$ *суммируемы в каждом конечном интервале* $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$.
2. *Функции* $c_{jk}(x)$ *суммируемы в интервале* $[0, \infty]$.
3. $\omega_j(x) \equiv 0$ *при некотором* i.
4. *При* x, *достаточно большом* $(x > x_0)$, *функции* $\Re\omega_j(x)$, $j \neq i$, *не меняют знак.*

Тогда система (1) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\lim y_j(x) = \begin{cases} 1, & j{=}i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Нашей целью исследования является доказательство аналога теоремы 1 для функций $c_{jk}(x) = c_{ij} \sin e^x$, где $c_{ij} = const$. Заметим, что $\int\limits_{x_0}^{\infty} |\sin e^x| dx = \infty$, то есть условие 2 не выполняется.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Решения системы*

$$z' = Az + C \sin e^x z, \tag{2}$$

где A *— произвольная матрица,* C *— постоянная матрица, при* $x \to \infty$ *ведут себя так же, как и решения системы* $z' = Az$.

Список литературы

[1] M.A. Neimark, *Linear Differential Operators.* Nauk, Moscow, 1969.

Вариационный метод исследования термо-физического состояния теплоизолированного стержня переменного сечения

М.Н. Калимолдаев, А. Кудайкулов, А.А. Ташев

Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК
E-mail: mnk@ipic.kz

Формулировка проблемы

Рассмотрим горизонтальный стержень переменного поперечного сечения. Ось Ox направим слева в право по оси стержня. Предположим, что поперечное сечение стержня является круг. Радиус поперечного сечения стержня меняется линейно по его длине, т.е. $r(x) = ax + b$, $0 \leq x \leq l$. где l *[см]* – длина стержня. $a, b = const$. Радиус площадь поперечного сечения левого конца обозначим через b*[см]*, т.е. $r(x = 0) = a \cdot 0 + b = b$*[см]*. Тогда радиус поперечного сечения правого конца будет равно $r(x = l) = a \cdot l + b[A <^2]$. Площадь поперечного сечения стержня по ее длине меняется по квадратичному закону, т.е. $F(x) = \pi r^2 = \pi(ax + b)^2$, $0 \leq x \leq l$. Далее, предположим, что боковая поверхность исследуемого стержня является теплоизолированной. На площадь поперечного сечения левого конца подведен тепловой поток $q[\frac{B}{c<^2}]$ с постоянной интенсивностью, в то время как через площадь поперечного сечения правого конца происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. При этом температура окружающей среды постоянно, т.е. $T_{oc}\left[{}^0C\right] = const$. Коэффициент теплообмена между материалом стержня и окружающей среды $h[\frac{B}{A<^{2.0!}}]$. Теплофизическое свойства материала стержня характеризуется коэффициентом теплопроводности $k_{xx}[\frac{B}{A<^{.0!}}]$. При таких воздействиях требуется определить закон распределения температуры по длине исследуемого стержня переменного сечения. Расчетная схема рассматриваемой задачи приводится на рисунке 1.

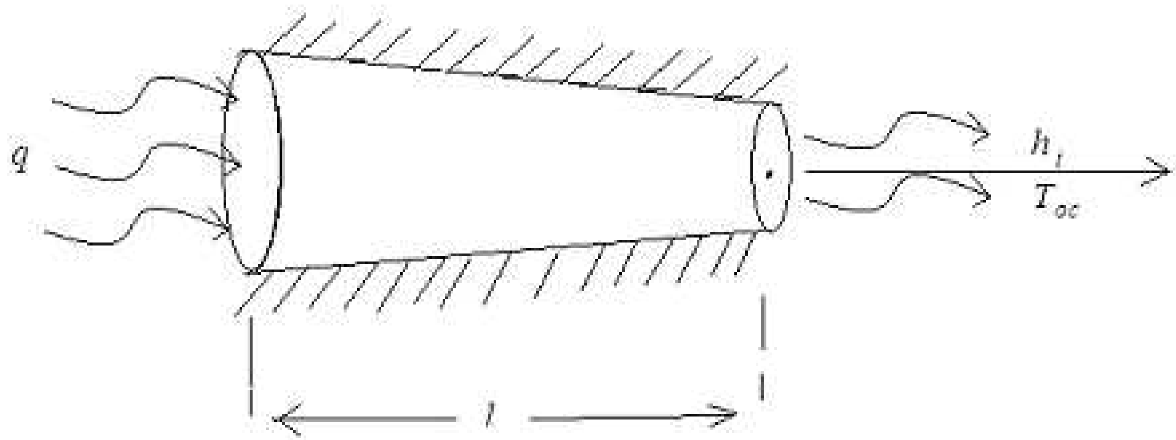

Рисунок – 1. Расчетная схема задачи.

Закон распределения температуры по длине исследуемого стержня определяется следующим образом:

$$T\left(x,l,h,k_{xx},T_{oc},q,a,b\right) = \frac{2x^2-3lx+l^2}{l^2}T_i+\frac{4lx-4x^2}{l^2}T_j + +\frac{2x^2-lx}{l^2}T_k, 0\le x\le l \qquad (1)$$

где $a_1=(3al+14b)$; $a_2=(al+4b)$; $a_3=(al+2b)$; $a_4=3al+4b$;

$$a_5=(11al+14b)+\frac{6l\left(al+b\right)h}{k_{xx}};b_1=\frac{6lbq}{k_{xx}};b_2=\frac{6l\left(al+b\right)h\cdot T_{oc}}{k_{xx}};$$

$$T_k=\frac{C_1b_4-b_3C_3}{C_1C_4-C_2C_3};T_j=-\frac{C_2}{C_1}T_k+\frac{b_3}{C_1};T_i=\frac{4a_2}{a_1}T_j-\frac{a_3}{a_1}T_k+\frac{b_1}{a_1};(2)$$

$$C_1=\frac{4\left(a_1a_3-a_2^2\right)}{a_1};C_2=\frac{a_2a_3-a_1a_4}{a_1};C_3=\frac{4\left(a_2a_3-a_1a_4\right)}{a_1};$$

$$C_4=\frac{a_1a_5-a_3^2}{a_1};b_3=\frac{a_2b_1}{a_1};b_4=\frac{a_1b_2-b_1a_3}{a_1};$$

Список литературы

[1] Harr M.E. *GraundWater and Seepage, McGraw-Hill*, N.Y., 1962

[2] Fung Y.C. *Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, N.J., 19654

[3] Krieth F. *Principles of Heat Transfer, 3-rd ed. Index Educational Publishers*, N.Y., 1977

[4] Huebner K.H. *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, N.Y., 1975

[5] Harry J. *Segerlind Applied Finite Element Analysis*, N.Y., 1976

[6] Visser W. *Finite Element Method for Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations*, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology Wrights Patterson Air Force base, Dayton, Ohio, 1965

[7] Conte S.D. *Elementary Numerical Analysis* McGray-Hill, N.Y. 1965

AMS Mathematics Subject Classification: 35Q70, 35Q74, 35Q79.

Граничные условия для двумерных гиперболических уравнений

Т.Ш. Кальменов, Г.А. Бесбаев, А.В. Роговой

Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: kamenov@math.kz

В полосе $\Omega = \{0 \leq x \leq 1,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2\}$
определим потенциала Коши по формуле

$$u = L_K^{-1} f = \int_\Omega \varepsilon(x_1, x_2, \xi_1 - \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \tag{1}$$

где $\varepsilon(x_1, x_2, \xi_1 - \xi_2)$–фундаментальное решение уравнения

$$L\varepsilon = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1^2} + a_1(x_1, x_2)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}\varepsilon$$

$$+a(x_1, x_2) = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$$

При этом $u = L_K^{-1}$ удовлетворяет начальному условию Коши

$$u = L_K f \mid_{x_2=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_2} \mid_{x_2=0} = \frac{\partial L_K^{-1} f}{\partial x_2 = 0} = 0$$

и уравнению

$$Lu = f \tag{24}$$

В настоящей работе пользуясь функцией Римана уравнения (2) найдены боковые граничные условия т.е. условия на $x_1 = 0, x_2 = 0$. потенциалы Коши задаваемый формулой (1).

Теорема 1. *Для любой $f \in C^1(\overline{\Omega})$ потенциал Коши $u = L_N^{-1} f$ уравнение (1) удовлетворяет однородному начальному условию*

$$u|_{\xi=\eta} = 0, \ \ (\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}) u|_{\eta=\xi} = 0$$

и боковым граничным условием

$$N^{-}[u]|_{A_0 A} = N(u)|_{\eta=-\xi}$$

$$= \int_0^{\xi} [u \frac{\partial R}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta_1} R + bRu + aRu] d\xi_1 \mid_{\eta=-\xi, \, \eta_1=-\xi_1} = 0$$

$$N^{+}[u]|_{B_0 B} = N(u)|_{\eta=1-\xi}$$

$$= \int_{1-\xi}^{\frac{1}{2}} [R \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial R}{\partial \eta_1} u + aR + bRu - aRu] d\eta_1 \mid_{\eta=1-\xi, \eta_1=1-\xi_1} = 0 \tag{12}$$

где интегрирования функции $R(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)$, $u(\xi_1, \eta_1)$ проводится вдоль прямым $A_0 A : \eta_1 = -\xi_1$, $B_0 B : \eta_1 = 1 - \xi_1$.

Список литературы

[1] T. Sh. Kal'menov and D. Suragan, *Determination of the structure of the spectrum of regular boundary value problems for differential equations by V.A. Il'in's method of anti-a priori estimates*, Dok. Math., 80 (2008), pp. 913–915.

[2] T. Sh. Kalmenov and D. Suragan, *Initial-boundary value problems for the wave equation*, EJDE, 2014.

8

Representation of the resolvent of the differential operator on the graph

B.E. Kanguzhin, M. Konyrkulzhayeva, L.K. Zhapsarbayeva

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail:kanguzhin53@gmail.com

This work is devoted to study the resolvents of linear differential operators on graphs. A resolvent formula generated by the boundary value problem for a second-order differential equation on a graph is derived.

For the treatment of the differential operators on the manifolds of the network type, we refer to the works [6, 7, 4]. Among the last studies on inverse problems on the graphs, we emphasize the papers [1, 2, 3, 5] and the references therein.

In this work we give the statement of a boundary value problem for second order ordinary differential equations on the graph. The well-posedness of the given problem is established. We present the formula of the resolvent of operator corresponding to the boundary value problem for a second-order differential equation on the graph.

We note that the presented result is relatively new to the literature.

This publication is supported by the target program 0757 / GF4 from Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

References

[1] M.I. Belishev, *Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC methods.* Inverse problems. 35 (2004), no. 10., 4069–4088.

[2] R. Carlson, *Inverse eigenvalue problems on directed graphs.* Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 101–121.

[3] P. Kurasov, F. Stenberg, *On the inverse scattering problem on branching graphs.* J. Phys. A. Math. Gen. 20 (2002), 647–672.

[4] O.M. Penkin, *Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks.* J. Math. Sci. (N. Y.) 119 (2004), no. 6, 836—867.

[5] V. Pivovarchik, *Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a simple graph.* SIAM J. Math. Anal. 32 (2000), no. 4, 801-–19

[6] Yu.V. Pokornyi,I.G. Karelina, *On the Green's Function of the Dirichlet Problem on a Graph.* Dokl. AN. 318 (1991), no. 3., 542–544 (in Russian).

[7] Yu.V. Pokornyi,O.M. Penkin, V.L. Priadiev, *Differential equations on the geometrical graphs.* Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 34B45, 34A55, 34B05.

The solution of problems with free boundaries by the method of special functions

S.N. Kharin

Kazakh-British Technical University Almaty, Kazakhstan
E-mail: staskharin@yahoo.com

1. Introduction

Free boundary problems for the heat equation have many applications in diverse areas. The standard analytical method for their solution based on the reduction of a problem to integral equations is very complicated for applications. Numerical methods are not effective for the problems with many numbers of parameters which have to be analyzed to estimate their interaction. Thus the development of relatively simple and effective for applications methods of solution of free boundary problems is very important. The main idea of the method presented in this paper is based on the construction of linear combinations of special functions with undetermined coefficients which satisfy the heat equation a priori, and coefficients should be chosen to satisfy the boundary conditions. The two-face Stefan problem with boundary flux condition has been considered and solved using the integral error functions in [1]. Similar solution for the spherical heat equation is presented in [2].

2. The Stefan problem for the generalized heat equation

The heat transfer in a domain with variable cross section occurring mainly in one certain direction can be described by the equation

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\nu}{x} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \qquad \nu \geq 0, \qquad i = 1, 2 \tag{1}$$

with the boundary and initial conditions:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = f(t) \tag{2}$$

$$u_2(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

the conditions of conjugations of temperature and heat flux on a free boundary

$$u_1(\alpha(t), t) = u_2(\alpha(t), t) = U_m \tag{4}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1(\alpha(t), t)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2(\alpha(t), t)}{\partial x} + \rho L \frac{d\alpha}{dt} \tag{5}$$

$$\alpha(0) = 0$$

and zero conditions at infinity

$$u_2(\infty, t) = 0. \tag{6}$$

The solution of this problem can be found in the form

$$\begin{gathered} u_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(2a_1\sqrt{t}\right)^{2n+1} \times \\ \times \left[\left(\frac{z^2}{4a_1^2 t}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Phi\left(\frac{-\nu-2n}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_1^2 t}\right) - \right. \\ \left. - \Phi\left(-\frac{2n+1}{2}, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a_1^2 t}\right)\right] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(2a_1\sqrt{t}\right)^{n} \left[\left(\frac{z^2}{4a_1^2 t}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Phi\left(\frac{-\nu-n}{2}, \frac{3-\nu}{2} - \frac{z^2}{4a_1^2 t}\right) + \right. \\ \left. + \Phi\left(-n, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a_1^2 t}\right)\right] \end{gathered} \tag{7}$$

$$u_2(x,t) = U_m + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(2a_2\sqrt{t}\right)^n \times$$
$$\times \left[\left(\frac{z^2}{4a_2^2 t}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Phi\left(\frac{-\nu-n}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_2^2 t}\right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^n \Phi\left(-n, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a_2^2 t}\right)\right] +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(2a_2\sqrt{t}\right)^n \Phi\left(-n, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a_2^2 t}\right) \tag{8}$$

$$\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^{n/2} \tag{9}$$

Here $\Phi(\alpha, (\nu+1)/2; x)$ is the degenerate hyper geometric function. At $\nu = 0$ it transforms into the integral error function $\Phi(\alpha, \beta; x) = i^{2\alpha} \operatorname{erfc} x$, at $\nu = 1$ (cylindrical case) it is the Laguerre polynomial $\Phi(-n, 1; -x^2) = \frac{n!}{(2n)!} L_n(-x^2)$.

Unknown coefficients are determined by the similar way like in [1].

3. The Verigin problem for piezoconductivity equation

If a gallery has a variable cross section $S(z) = Az^{\nu/2}$, then the system of equations describing the pressure field at the injection of the hydraulic solution can be written in the form [1]:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z}\frac{\partial p_1}{\partial z}\partial\right), \qquad 0 < z < \alpha(t) \tag{10}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = a_2^2 \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z}\frac{\partial p_2}{\partial z}\right), \qquad \alpha(t) < z < \infty \tag{11}$$

For each liquid we should write the Darcy Law

$$u_i = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial z}, \qquad i = 1, 2$$

where u_1, u_2 are the rates of filtration of water and oil correspondingly, k_1, k_2 are filtration coefficients. The boundary condition on

$z = 0$ is

$$p_1(0,t) = P_1 \tag{12}$$

On the boundary $x = \alpha(t)$ the condition of continuity of the pressure and the fluxes should be fulfilled:

$$z = \alpha(t): \qquad p_1 = p_2, \qquad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial z} \tag{13}$$

If the residual oil saturation is equal to 0, then the condition of the material balance should be fulfilled on this boundary:

$$z = \alpha(t): \qquad m\frac{d\alpha}{dt} = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial z} \tag{14}$$

Finally at the initial time

$$p_2(z,0) = P_0, \qquad \alpha(0) = 0 \tag{15}$$

The solution of this problem can be found in the form

$$p_1(z,t) = P_1 + B_1 \left(\frac{z}{2a_1\sqrt{t}}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_1^2 t}\right), \tag{16}$$

$$p_2(z,t) = P_0 + B_2 \left[\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{z}{2a_2\sqrt{t}}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_2^2 t}\right)\right] \tag{17}$$

$$\alpha(t) = \alpha\sqrt{t}, \qquad \alpha = const. \tag{18}$$

References

[1] S.N. Kharin, *The analytical solution of the two-face Stefan problem with boundary flux condition.*, Mathematical Journal, V. 14, no 1 (51), 2014, 55 - 76

[2] S.N.Kharin, M.M.Sarsengeldin, H.Nouri, *Analytical solution of two phase spherical Stefan problem by heat polynomials and integral error functions.* AIP Conference Proceedings 1759, 020031 (2016); doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4959645

AMS Mathematics Subject Classification: 35K35, 35R35, 58J35

Численное решение задачи продолжения для уравнения Гельмгольца методом С.К. Годунова

С.Е. Касенов[1], Д.Б. Нурсеитов[2], А.Н. Алимова[3], А.М. Тлеулесова[1]

[1] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail:Syrym.Kassenov@kaznu.kz

[2] *Национальная научная лаборатория коллективного пользования информационных и космических технологий Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан*

В работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения Гельмгольца в области $\Omega = (0, l) \times (0, \pi)$:

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u_x(0, y) = 0, \qquad y \in [0, \pi], \tag{2}$$

$$u(0, y) = f(y), \qquad y \in [0, \pi], \tag{3}$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \qquad x \in [0, l], \tag{4}$$

где k – заданная константа. Требуется найти функцию $u(x, y)$ в области Ω по данным $f(y)$[1].

Для численного решения задачи продолжения рассматривается метод регуляризации С.К. Годунова. Исходная задача записывается в дискретной постановке и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений методом регуляризации С.К. Годунова.

Дискретизация исходной задачи

Построим в области Ω сетку ω_h с шагом $h_x = l/N_x$, $h_y = \pi/N_y$, где N_x, N_y — положительные целые числа, тогда получим $\omega_h = \left\{x = ih_x, y = jh_y; i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}\right\}$.

Тогда исходную задачу запишем в конечно-разностном виде:

$$au_{i-1,j} + bu_{i,j-1} + cu_{i,j} + bu_{i,j+1} + au_{i+1,j} = 0, \tag{5}$$

$$u_{1,j} = f_j, \tag{6}$$

$$u_{0,j} = f_j, \tag{7}$$

$$u_{i,1} - u_{i,0} = u_{i,N_y} - u_{i,N_y-1} = 0. \tag{8}$$

здесь $a = \dfrac{1}{h_x^2}$, $b = \dfrac{1}{h_y^2}$, $c = k^2 - 2a - 2b$. Сведем систему разностных уравнений задачи (5)–(8) к системе линейных алгебраических уравнений [2].

$$AX = B, \tag{9}$$

где A – матрица $(N_x + 1)(N_y + 1)$, B – вектор данных исходной задачи, граничных и дополнительного условий, X – неизвестный вектор, вида:

$$X = \big(u_{0,0}, u_{0,1}, u_{0,2}, \ldots, u_{0,N_y}, u_{1,0}, u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{1,N_y}, \\ \ldots, u_{N_x,0}, u_{N_x,1}, u_{N_x,2}, \ldots, u_{N_x,N_y}\big).$$

При возникновении малых сингулярных чисел, во избежании накопления погрешности, необходимо предусмотреть операцию «зануления» малых сингулярных чисел, которую можно интерпретировать как специальную процедуру регуляризации.

Предположим, что о решении X существует дополнительная информация, которая может быть представлена также в виде линейной (не обязательно квадратной) системы:

$$DX = C,$$

причем вектор C может быть даже не известен. Необходимо только, чтобы его норма была ограничена. Выберем число α таким образом, чтобы величины $\alpha\|C\|$ и $\|\Delta f\|$ были сравнимы: $\alpha\|C\| \approx \|\Delta f\|$.

Рассмотрим составную систему:

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)\,A \\ \alpha D \end{bmatrix} \tilde{X} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\,f \\ \alpha C \end{bmatrix},$$

где $\alpha-$параметр регуляризации. И теперь возмутим у нее правую часть:

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)\,A \\ \alpha D \end{bmatrix} \tilde{X} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\,(f+\Delta f) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем в общем виде:

$$R\tilde{X} = G.$$

Проанализировав эти системы, можно сделать следующие выводы:

Во-первых, обусловленность составной матрицы не меньше обусловленности исходной матрицы A (в случае невырожденной матрицы D):

$$\mu(A) \geq \mu(R).$$

Во-вторых, погрешность правой части составной системы имеет тот же порядок, что и погрешность правой части исходной системы. Следовательно, расширив систему, мы не вносим в нее дополнительных погрешностей. Таким образом, привлечение дополнительной информации позволяет улучшить устойчивость системы.

Как уже было сказано, метод С.К. Годунова не использует перехода к нормальной системе уравнений, что позволяет избавиться от недостатков, связанных с этим. Однако проблема выбора оптимального параметра регуляризации, при заданном уровне погрешности, остается. Кроме того, большое значение имеет степень достоверности используемой априорной информации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания».

Список литературы

[1] С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Нурсеитова,*Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы.* —Алматы: Международный фонд обратных задач, 2006. — 425 с.

[2] Самарский А.А., Гулин А.В *Численные методы.* —М.: Наука, 1989. 432

On the dimension of the kernel of the Laplace and the bi-Laplac operators in an unbounded domain

B.D. Koshanov[1], M.D. Koshanova[2]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
koshanov@list.ru
[2] *Ahmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan*
maira_koshanova@mail.ru

As is known, many stationary physical processes, such as the potential distribution of the electrostatic field are described by the Poisson equation. In studies of thin plates oscillation occurs biharmonic equation.

Are interesting from the point of view of applications, the study of the behavior of solutions of the Poisson equation and the biharmonic

equation in an unbounded domain. Here there is a need to introduce additional conditions at infinity, uniquely determine the solution of the equations. Such requirements conditions Sommerfeld radiation type [6], they can be physically interpreted. Correct boundary value problems for the Laplace equation in unbounded domains have long been known. In [4] and [5] studied the issue for some classes of partial differential equations. A broad review of the literature available on the study of boundary value problems for the Poisson equation and the biharmonic equation in bounded domains. In [1,3] has been constructed explicitly a new representation of the Green's function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a multidimensional ball. Availability of conditions of solvability of boundary value problems for polyharmonic equation in a ball is studied in [2].
This work is devoted to the study of solutions of the equation of Poisson and inhomogeneous biharmonic equation in an unbounded domain. The results of this work associated with the introduction of the weight space, which can be perceived as a certain integral condition at infinity. Calculated the dimension of the weight spaces of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation and the biharmonic equation.
This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 3492/GF4).

References

[1] T.Sh. Kal'menov, B.D. Koshanov, *Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball.* Sib. Math. Journal. 49 (2008), no. 3., 423–428.

[2] B.E. Kanguzhin, B.D. Koshanov, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for polyharmonic equation.* Ufa Math. Journal. (2010), no. 2., 41–52.

[3] B.D. Koshanov, M.D. Koshanova, *On the representation of the Green function of the Dirichlet Problem and their properties for the polyharmonic equations.* AIP Conference Proceedings. 1676 (2015), 020020, DOI: http://dx.doi.org/10.1063/1.4930446

[4] V.A. Kondrat'ev, O.A. Oleinik, *Periodic solutions of second order parabolic equation in the outer regions.* Vestnik MGU, Ser.1, mat., mech. (1985), no. 4., 38–47.

[5] L.D. Kudryavtsev, *Solution of the first boundary value problem for self-adjoint and elliptic equations in the case of unbounded domains.* Izvestie AN USSR, Ser. Mat. 31 (1967), no. 5., 354–366.

[6] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii, *Equations of mathematical physics.* Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 31A10, 31A30, 35J67.

Об осцилляторности одного неоднородного уравнения Штурма-Лиувилля

Б.С. Кошкарова, Л.К. Кусаинова

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: b-koshkarova@yandex.kz

В работе рассматривается уравнение

$$(\rho(t)y')' + q(t)y = f(t), \quad x \geq a, \tag{1}$$

где $\rho > 0$, $\rho \in C^1(I)$, $q = v - u$, $v \geq 0$, $u \geq 0$ и u, v, $f \in C(I)$, $I = [a, \infty)$.

Через $C^m(I)$ $(m = 0, 1, ...)$ обозначается класс функций, определенных в I и имеющих в I производные до порядка m включительно.

Целью работы является получение условий на правую часть f в (1), при которых каждое решение уравнения (1) является осцилляторным на $+\infty$, т.е. имеющим в I последовательность нулей $x_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пусть $r(\cdot) \geq 1$ непрерывная в I функция.

Введем функцию

$$s(x) = \sup\{h > o : \Phi(x,h) \leq 1\},$$

где

$$\Phi(x,h) = \sup_{x \leq t \leq x+h} \int\limits_t^{x+h} (r(\zeta) + u(\zeta))\, d\zeta \cdot \int\limits_x^t \frac{d\zeta}{\rho(\zeta)}.$$

Заметим, что $\Phi(x,h)$ как функция от $h > 0$ монотонно не убывает. Поскольку

$$\lim_{h \to 0+} \Phi(x,h) = 0,$$

то $s(x) > 0$ в I. С другой стороны, из предельного равенства

$$\lim_{h \to \infty} h \int\limits_{x+h/2}^{x+h} r(\zeta) d\zeta \cdot \int\limits_x^{x+h} \frac{d\zeta}{\rho(\zeta)} = +\infty$$

следует, что $s(x) < \infty$, $x \in I$. Положим

$$\Delta(x) = [x, x + 8\pi^2 s(x)], \;\; \widetilde{\rho}(x) = 2 \max_{t \in \Delta(x)} \rho(t).$$

Теорема 1. *Если существует последовательность отрезков*

$$\Delta_k = \Delta(x_k), \;\; x_k \to \infty, \;\; x_{k+1} > x_k + 8\pi^2 s(x_k),$$

на которых

$$v(t) \geq s^{-2}(x) - r(t), \;\; (t \in \Delta_k), \tag{2}$$

то уравнение

$$(\rho(t) y')' + q(t) y = 0 \tag{3}$$

осцилляторно.

Теорема 2. *Пусть существует последовательность отрезков* $\{\Delta_k\}_{k\geq 1}$*, на каждом из которых выполнено условие (2). Если* Δ_k *содержит такие подпоследовательности* $\{\Delta_k^+,\ k \in K\}$ *и* $\{\Delta_j^-,\ j \in J\}$*, что*

$$f(t) \geq 0 \ \textit{для всех}\ t \in \Delta_k^+ \ (k \in K),$$

$$f(t) \leq 0 \ \textit{для всех}\ t \in \Delta_j^- \ (k \in J)$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Пример. Уравнение

$$y'' + \frac{1}{4t^2}y = 0$$

неосцилляторно по признаку Кнезера.

Возьмем $r(t) = 1$, $u(t) = 0$ $(t \in I)$. Тогда на паре (x, h), $x \geq T$, $h > 0$,

$$\Phi(x, h) = 4 \max_{0\leq t\leq h} t(h - t) = h^2,$$

откуда следует: $s(x) = 1$, $\Delta(x) = [x, x + 8\pi^2]$.

Пусть f непрерывная в I функция, удовлетворяющая условию: существует такая последовательность точек $x_k \to \infty$, что $\Delta_k = [x_k, x_k + 8\pi^2]$ попарно не пересекаются, а $f(t) \geq 0$, если $t \in \Delta_{2k-1}$, $f(t) \leq 0$, если $t \in \Delta_{2k}$, $k \geq 1$. Тогда уравнение

$$y'' + \frac{1}{4t^2}y = f(t)$$

осцилляторно.

Отметим, что в работе [1] в отличие от данной работы были получены априорные лакунарные условия осцилляторности неоднородного уравнения (1).

Список литературы

[1] M.A. El-Sayed, *An oscillation criterion for a forced second-order linear differential equation.* Proceedings of the Amer. Math. Soc. Vol. 118 (1993), no. 3, 813–817.

AMS Mathematics Subject Classification: 34C10

Критерий базисности систем корневых функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией

Л.В. Крицков[1], А.М. Сарсенби[2]

[1] *МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *ЮКГУ им. М. Ауэзова, Шымкент,*
Казахстан ИМММ КН МОН РК, Алматы , Казахстан
E-mail: abzhahan@mail.ru

Рассматривается оператор L, порождаемый операцией вида

$Lu \equiv -u''(x) + \alpha u''(-x) + q(x)\,u(x) + q_\nu(x)\,u(v(x))\,, \quad -1 < x < 1,$ (1)

на некоторой плотной в $L_2(-1,1)$ области определения $D(L)$. Операция (1) содержит в своей главной части преобразование аргумента $v_0(x) = -x$, являющееся инволюцией отрезка $[-1,1]$, а также некоторую инволюцию $\nu(x)$ в младшем слагаемом. Параметр α в операторе (1) принадлежит промежутку $(-1,1)$ коэффициенты $q(x)$ и $q_\nu(x)$ -произвольные суммируемые на отрезке $[-1,1]$ функции. Инволюция $\nu(x)$ считается абсолютно непрерывной функцией, производная которой существенно ограничена на отрезке $[-1,1]$. Будем лишь предполагать, что область $D(L)$ содержит только функций, абсолютно непрерывные вместе со своими первыми производными на промежутке $(-1,1)$, а корневые функций оператора L рассматривать как регулярные решения соответствующих уравнений со спектральным параметром [1]. Таким образом, для каждого собственного значения

$$\lambda \in C$$

определяется цепочка корневых с функций $u_k(x;\lambda), k \geq 0$, удовлетворяющих соотношениям

$Lu_k(x,\lambda) = \lambda u_k(x,\lambda) + (\mathrm{sgn}k)\, u_{k-1}(x,\lambda)$,

причем $u_0(x;\lambda) \equiv 0$ на $(-1,1)$. Любое счетное множество $\Lambda = \{\lambda\} \subset C$ определяет систему корневых функций

$U = \{u_k(x,\lambda),\, k = 0,...,m(\lambda),\, \lambda \in \Lambda\}$;

здесь целое неотрицательное число $m(\lambda)$ назовем рангом соответствующей собственной функции $u_0(x;\lambda)$. Пусть система U удовлетворяет следующим условиям А: A_1) система U полна и минимальна в $L_2(-1,1)$; A_2) биортогонально сопряженная к U система V состоит из понимаемых в указанном выше смысле корневых функций $v_1(x;\lambda*)$, $l = \overline{0, m(\lambda*)},\ \lambda* \in \bar{\Lambda}$, $m(\lambda*) = m(\lambda)$, формально сопряженной к (1) операции

$L^*v = -v''(x) + \alpha v''(-x) + \bar{q}(x)\, v(x) - \nu'(x)\, \bar{q}_\nu(\nu(x))\, v(\nu(x))$ (2)

A_3) ранги собственных функций равномерно ограничены: $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda) < \infty$

и выполнено условие принадлежности собственных значений карлемановской параболе:

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \left| \mathrm{Im}\sqrt{\lambda} < \infty \right|;$$

A_4) имеет место равномерная оценка "суммы единиц"

$$\sup_{\beta \geq 1} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \left|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} - \beta\right| \leq 1}} 1 < \infty$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия A_1)-A_4) и инволюция $v(x)$ в (1)- произвольная абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на отрезке $[-1,1]$. Тогда каждая из систем U и V корневых функций операторов, (1) и (3) соответственно образует безусловный базис в $L_2(-1,1)$ в том и только в том случае, когда справедлива равномерная оценка произведения норм*

$$\|u_k(\cdot;\lambda)\|_2 \|v_{m(\lambda)-k}(\cdot;\lambda)\|_2 \leq M$$

для всех $k = \overline{0, m(\lambda)}$ и $\lambda \in \Lambda$.

Отметим, что условие A_2) заведомо выполнено, если оператор L порождается операцией (1) с краевыми условиями общего вида. Проверка условий A_3) и A_4) становится тривиальной, если известна асимптотика спектра. Полнота системы корневых функций (а следовательно, минимальность биортогонально сопряженной системы) может быть установлена с помощью оценок резольвенты и известных теорем о полноте [2].

Исследования поддержаны грантом 0971/ГФ4 КН МОН РК

Список литературы

[1] В.А. Ильин, Л.В. Крицков, *Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряжённым дифференциальным операторам.* Функц. анализ. Итоги науки и техники. Соврем. математика и её приложения. Тем. обз. Т. 96. 2006. 190-231.

[2] М.В, Келдыш *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов* . Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 4 (160). 15-41.

AMS Mathematics Subject Classification: 34K08, 34L10, 46B15.

Функция грина многопериодической задачи для линейной системы с оператором дифференцирования по главной диагонали

А.А. Кульжумиева[1], Ж.А. Сартабанов[2]

[1] *Западно-Казахстанский государственный университет им. М.Утемисова, Уральск, Казахстан*
E-mail: aiman-80@mail.ru
[2] *Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

Оператор D_e дифференцирования функции $x(\tau, t)$ по независимым переменным $t_0 = \tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $t_j \in R^m$, $j = \overline{1, m}$ по направлению векторного поля $\frac{dt}{d\tau} = e$ с m-вектором $e = (1, ..., 1)$, по другому, называют оператором дифференцирования по главной диагонали пространства независимых переменных, где $t = (t_1, ..., t_m) \in R^m$.

На основе векторного поля имеем соотношение $t = \sigma + e\tau$ с произвольным постоянным вектором $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_m) \in R \times ... \times R = R^m$.

Рассмотрим задачу для линейной системы уравнений

$$D_e x = P(\tau, t)x + f(\tau, t) \tag{1}$$

с условием

$$x(\tau + \theta, t + q\omega) = x(\tau, t), \quad q \in Z^m, \quad (\tau, t) \in R \times R^m, \tag{1_*}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ – искомое решение, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ – вектор-период, $\omega_0 = \theta$, ω_1, ..., ω_m – рационально несоизмеримые положительные постоянные, $P(\tau, t)$ – матричная, а $f(\tau, t)$ – векторная функции, обладающие свойством:

$$P(\tau + \theta, t + q\omega) = P(\tau, t) \in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R \times R^m), \quad q \in Z^m, \tag{2}$$

$$f(\tau + \theta, t + q\omega) = f(\tau, t) \in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R \times R^m), \quad q \in Z^m. \tag{3}$$

Решение $x(\tau, t, \sigma, c)$ системы (1) с произвольными постоянными векторами $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_m)$ и $c = (c_1, ..., c_n)$ называется ее полным интегралом [1].

Общее решение системы (1) определяется из полного интеграла методом вариации произвольных постоянных.

Рассматриваемую задачу назовем многопериодической задачей для линейной системы (1) с условием многопериодичности интеграла (1_*).

Основной вопрос заключается в построении функции Грина для интегрального представления решения задачи (1)-(1_*).

В связи с этим при условии (2) рассмотрим линейную однородную систему

$$D_e x = P(\tau, t)x. \tag{4}$$

Известно [2], что матрицант $X(\tau, t, \sigma)$ системы (4) обладает свойством ω-периодичности по t, σ и справедливо соотношение

$$X(\tau + \theta, t, \sigma) = X(\tau, t, \sigma)X(\theta, \sigma, \sigma). \tag{5}$$

На основе (5), легко показать, что условием отсутствия нетривиального (θ, ω)-периодического интеграла системы (4) является выполнение условия

$$det\, [E - X(\theta, \sigma, \sigma)] \neq 0, \quad \sigma \in R^m. \tag{6}$$

Путь переменной s от τ до некоторой постоянной точки $\alpha \in R$ по числовой оси обозначим через I_α^-, а от α до $\tau + \theta$ – через I_α^+, причем $s \neq \alpha$. В частности, α может принять значение $\alpha = 0$.

Матрицу $G_\alpha(s, \tau, t, \sigma)$ назовем функцией Грина задачи (1)-(1_*), если она удовлетворяет условиям:

1)$D_e G_\alpha(s, \tau, t, \sigma) = P(\tau, t)G_\alpha(s, \tau, t, \sigma), \quad s \neq \alpha$;

2)$G_\alpha(\tau + \theta, \tau, t, \sigma) - G_\alpha(\tau, \tau, t, \sigma) = E$;

3)$G_\alpha(s + \theta, \tau + \theta, t + p\omega, \sigma) = G_\alpha(s, \tau, t, \sigma), \quad p \in Z^m$

для всех $(\tau, t) \in R \times R^m$, $\sigma \in R^m$, $s \in I_\alpha^- \cup I_\alpha^+ = I_\alpha$.

Обосновано, что матрица Грина $G_\alpha(s, \tau, t, \sigma)$ поставленной задачи имеет вид

$$G_\alpha(s, \tau, t, \sigma) = X(\tau, t, \sigma) \times$$

$$\times X(\theta, \sigma, \sigma) \left[E - X(\theta, \sigma, \sigma)\right]^{-1} X_\alpha^{-1}(s, t - e\tau + es, \sigma), \qquad (7)$$

где $X_\alpha^{-1}(s, t - e\tau + es, \sigma)$ – матрица образованная из матрицы $X^{-1}(s, t - e\tau + es, \sigma)$ при $s \in I_\alpha^-$ без изменения, а при $s \in I_\alpha^+$ с изменениями τ на θ.

На основе (7) нетрудно убедиться, что

$$|G_\alpha(s, \tau, t, \sigma)| \leq \Delta e^{\delta|\tau - s|}, \qquad (8)$$

где $\delta = \|P\|$, $\Delta = \|G_\alpha^*\|$, $G_\alpha^* = G_\alpha(\tau \neq 0, \tau, t, \sigma)$, $\|*\|$ – максимальное значение евклидовой матричной нормы $|*|$.

Исследование завешается интегральным представлением

$$x(\tau, t, \sigma) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta} G_\alpha(s, \tau, t, \sigma) f_\alpha(s, \tau - e\tau + es) ds \qquad (9)$$

интеграла $x(\tau, t, \sigma)$ через функцию Грина(7) при условиях (2), (3) и (6) с оценкой $|x(\tau, t, \sigma)| \leq \frac{\Delta}{\delta}\left(e^{\delta\theta} - 1\right)\|f\|$, где функция $f_\alpha(s, \tau - e\tau + es)$ получена из функции $f(s, \tau - e\tau + es)$ по методике построения матрицы $X_\alpha(s, \tau - e\tau + es)$ при $s \in I_\alpha$.

В заключение, обращаем внимание на общность постановки задачи (1)-(1_*) с условием (6) и на своеобразность определения и построения функции Грина в виде (7) со свойствами 1)-3) и оценкой (8).

Список литературы

[1] П.С. Назимов, *Об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными. Физико-математическое наследие.* ЛЕКАНД, Москва, 2016.

[2] А.А. Кульжумиева, Ж.А. Сартабанов, *Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем.* РИЦ ЗКГУ, Уральск, 2013.

AMS Mathematics Subject Classification: 35B10.

О существовании резольвенты и спектральных свойствах оператора шрёдингера с отрицательным параметром

М.Б. Муратбеков [1], М.М. Муратбеков [2]

[1] *Таразский государственный педагогический институт,Тараз, Казакстан*
musahan_m@mail.ru
[2]*Казахский университет экономики,*
финансов и международной торговли, Астана, Казакстан
mmuratbekov@list.ru

В настоящей работе в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ изучается оператор Шрёдингера с отрицательным параметром

$$-\triangle + \left(-t^2 + ita(x) + c(x)\right), \tag{1}$$

где $-\infty < t < \infty$, $i^2 = -1$.

Как известно, при $t = 0$ спектральные свойства оператора Шрёдингера $\triangle + c(x)$ сильно зависят от поведения $c(x)$ на бесконечности. В этом случае спектральные характеристически оператора Шрёдингера достаточно хорошо изучены в работах А.М.Молчанова, Т.Като, М.Рида и Б.Саймона, М.Ш.Бирмана, Б.С.Павлова, В.Г.Мазьи, М.Отелбаева, К.Х.Бойматова и др.

Вопросы о дискретности спектра и об оценках аппроксимационных чисел (s-чисел) оператора Шрёдингера

$$-\triangle + q_1(x) + iq_2(x), (q_1(x) \geq 0, q_2(x) \geq 0)$$

изучены в работах В.Б.Лидского, М.Отелбаева, Т.Като и др.

В данной работе для оператора (1) будут исследованы такие вопросы, как:

(1) существование резольвенты; 2) дискретность спектра.

Обзор литературы показывает, что эти вопросы для оператора Шрёдингера с отрицательным параметром недостаточно изучены.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $a(x)$ и $c(x)$ удовлетворяют условию:

$i)$ $|a(x)| \geq \delta_0 > 0, c(x) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда оператор $L_t+\lambda E$ при $\lambda \geq 0$ непрерывно обратим.*

Как известно, вопрос о дискретности спектра в случае $2 \leq n$ тесно связан с понятием емкости. Избегая усложнения формулировок и определений, мы не рассматриваем этот случай.

Рассмотрим оператор

$$Lu = (-\triangle)^l u + \left(-t^2 + ita(x) + c(x)\right) u \tag{2}$$

в $L_2(\mathbb{R}^n), l > 0$- целое, $u \in D(l)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие $i)$ и пусть $2l > n$. Тогда спектр оператора (2) дискретен, если и только если для любого куба Q_d величина $\int\limits_{Q_d} c(t)dt$ стремится $k+\infty$, когда куб Q_d уходит в бесконечность сохраняя длину ребра.*

Замечание. Такая теорема верна при $2l > n$, но здесь необходимо использовать понятие емкости.

В частности, в одномерном случае оператор (1) примет вид

$$L_t u = -u'' + \left(-t^2 + ita(x) + c(x)\right) u, u \in D(l).$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда оператор $L_t+\lambda E$ при $\lambda \geq 0$ непрерывно обратим.*

Теорема 4. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда резольвента* *оператора L_t компактна тогда и только тогда, когда для любого $w > 0$*

$$\lim_{|y|\to\infty} \int\limits_{y}^{y+w} c(t)dt = \infty.$$

Пусть, помимо условия $i)$, выполнено следующее условие:

$ii)$ $\mu_0 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \frac{c(y)}{c(t)} < \infty, \mu_1 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \frac{a(y)}{a(t)} < \infty.$

Тогда справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнены условия $i) - ii)$. Тогда резольвента оператора L_t компактна тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{|y|\to\infty} c(y) = \infty.$$

Пусть A–линейный вполне непрерывный оператор и пусть $|A| = \sqrt{A^*A}.$

Собственные числа оператора $|A|$ называют s-числами оператора A (собственными числами по Шмидту оператора A).

Ненулевые s-числа будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности, так что

$$s_j(A) = \lambda_j(|A|), j = 1, 2, ...$$

Ненулевые s-числа оператора L_t^{-1} будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности, так что

$$s_k(l_t^{-1}) = \lambda_k(|l_t^{-1}|), k = 1, 2, ...$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия $i)-ii)$. Тогда справедлива оценка*

$$c^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}} mes\left(y \in \mathbb{R} : Q_t(y) \le c^{-1}\lambda^{-1}\right) \le N(\lambda) \le c\lambda^{-1} mes(y \in \mathbb{R} : K_t^{\frac{1}{2}}(y) \le c\lambda^{-1}),$$

где $Q_t(y) = |t^2 + ita(y) + c(y)|, K_t(y) = |ta(y) + c(y)|$, *постоянное* $c > 0$ *не зависит от* $Q_t(y), K_t(y)$ *и* λ.

Пример. Пусть $a(y) = |y| + 1, c(y) = |y| + 1$. Через $s_{k,t}$ $(k = 1, 2...)$ обозначим сингулярные числа оператора L_t^{-1}. Нетрудно убедиться, что выполняются все условия теоремы 6. Следовательно, согласно теореме 6, имеем

$$c^{-1}\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \leq s_{k,0} \leq c\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}, k = 1, 2...,$$

$$c^{-1}\frac{1}{(|t|+1)^{\frac{4}{3}}\, k^{\frac{4}{3}}} \leq s_{k,t} \leq c\frac{1}{(|t|+1)^{\frac{1}{3}}\, k^{\frac{1}{3}}}, k = 1, 2....$$

Результаты, полученные в данной работе, можно использовать при исследовании вопросов существования резольвенты, дискретности спектра, а также коэрцитивных оценок дифференциальных операторов гиперболического типа в случае наличия вырождения или в случае неограниченных областей.

Оценка условной устойчивости решения для двумерного гиперболического уравнения

А.Т. Нурсеитова

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail:altynna@mail.ru

Для некоторого $\Omega \times (0, T)$, где $T > 0$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in (0, h), y \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n\}$ рассматривается задача для гиперболического уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + L(y)u, \qquad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$
$$u(x,y,0) = u(x,y,T) = 0, \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$
$$u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad x \in [0,h], \quad t \in [0,T], \tag{3}$$
$$u(0,y,t) = f(y,t), \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$
$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Будем полагать, что $\mathcal{D}$ – связная ограниченная область с липшицевой границей, а оператор $L(y)$ обладает следующими свойствами:

$$C_1 \sum_{j=1}^{n} \nu_j^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)\nu_i\nu_j \quad \text{для любых} \quad \nu_i \in \mathbb{R},$$
$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i,j = \overline{1,n},$$
$$0 \le c(y) \le C_2,$$
$$a_{ij} \in C^1(\bar{\mathcal{D}}), \quad c \in C(\bar{\mathcal{D}}).$$

Задачу (1)–(5) рассматриваем как обратную к следующей *прямой задаче*

$$u_{xx} = Au, \qquad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{6}$$
$$u(x,y,0) = u(x,y,T) = 0, \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$
$$u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad x \in [0,h], \quad t \in [0,T], \tag{8}$$
$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T], \tag{9}$$
$$u(h,y,t) = q(y,t), \qquad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

В *прямой задаче* (6)–(10) требуется определить функцию $u \in L_2(\Omega \times (0,T))$ по заданным функциям $q, g \in L_2(\mathcal{D} \times (0,T))$.

В *обратной задаче* (1)–(5) требуется определить функцию $q \in L_2(\mathcal{D} \times (0,T))$ из (6)–(10) по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(0,y,t) = f(y,t), \quad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad t \in [0,T].$$

Получена оценка условной устойчивости обобщенного решения рассматриваемой задачи.

Работа выполнена при поддержке гранта 1746/ГФ4 «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания» .

Список литературы

[1] S.I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed problems.* Siberian Scientific Press, Novosibirsk, 2008, 460 (in Russian).

[2] M.M. Lavrent'ev, L.Ya. Savel'ev, *Operator theory and ill-posed problems.* Mathematics Institute Press, 2010 (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 34L53

Nonlocal inverse problem of mathematical modeling

I. Orazov[1,2], A.Kh. Makhatova[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,*
Almaty, Kazakhstan
E-mail: orazov@math.kz
[2] *Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan*
E-mail: [2]max_40@mail.ru

We consider problems simulating the determination of target components and density of sources from given values of the initial and final states. The mathematical statement of these problems leads to the inverse problem for the diffusion equation, where it is required to find not only a solution of the problem, but also its unknown time-dependent diffusivity.

The processes of the extraction from the solid polydisperse porous materials are widely distributed in the food, chemical, pharmaceutical and medical industries. Herewith the increased requirements are presented to the quality of the extract. To effectively carry out the process of extraction from solid polydisperse porous materials it is necessary to use machines and processes which allow providing the optimal values of the hydrodynamic and physical and chemical parameters, in particular, the contact surfaces between the phases, the difference in the concentration of the target component in the raw material and the extractant, duration of extraction.

A specific feature of the considered problems is that the system of eigenfunctions of the multiple differentiation operator subject to boundary conditions of the initial problem does not have the basis property. We prove the unique existence of a generalized solution to the mentioned problem.

Some Problems of these types was considered in our works [1, 2].

The authors were supported by the grant no. 0820/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] N.E. Erzhanov, I. Orazov, *On one mathematical model of the extraction process of polydisperse porous material.* Bulletin of the South Ural State Univ. Series-Math. Mod. Progr. and Computer Software. 9 (2016), no. 2., 5–15.

[2] I. Orazov, S.Zh. Ayaz, *Construction of mathematical models of extraction processes with nonlocal conditions by a spatial variable.* AIP Conference Proceedings. 1759 (2016), 020079.

AMS Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K20, 35P10

Спектральные свойства разностного оператора первого порядка

К.Н. Оспанов

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
kordan.ospanov@gmail.com

В докладе рассматривается следующий минимальный замкнутый в пространстве l_2 оператор

$$Ly = -\Delta y + Qy,$$

где $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta y = \{\Delta y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{y_{j+1} - y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, а $Q = (q_{i,j})_{i,\,j=-\infty}^{+\infty}$ – действительная матрица.

Обсуждаются условия дискретности спектра оператора L, а также оценки сингулярных чисел $s_k\left(L^{-1}\right)$ $(k = 1,\ 2,\ ...\ )$.

Через $(\cdot\ ,\ \cdot)$ и $\|\ \cdot\ \|_2$ обозначим, соответственно, скалярное произведение и норму в l_2.

Теорема. Пусть матрица Q такая, что $(Qw, w) \geq \|w\|_2^2, \quad \forall w \in D(Q) = \{w \in l_2 : Qw \in l_2\}$, и

a) для каждого фиксированного $j \in \mathbf{Z}$ ряд $\widehat{Q}_j = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} q_{i,j}^2$ сходится;

b) имеет место неравенство

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{Q}_j v_j^2\right)^{1/2} \leq C_0\|Qv\|_2 \ \ \forall v = \{v_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in D(Q).$$

Тогда обратный к L оператор L^{-1} вполне непрерывен в l_2 тогда и только тогда, когда

$$\varliminf_{|j|\to+\infty} \widehat{Q}_j = +\infty, \tag{1}$$

а для s - чисел (при выполнении условия (1)) имеют место оценки

$$\sqrt{3}B_{24n} \leq s_n\left(L^{-1}\right) \leq\ 4\sqrt{3}\,B_{[n/4]} \ \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ ...\ ).$$

Здесь $\{B_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\left\{\left(\widehat{Q}_j\right)^{-1/2}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$.

Исследование оператора L мотивируется, в частности, применениями в стохастических процессах и стохастических дифференциальных уравнениях [1].

Работа поддержана проектом 5132/GF4 Комитета науки Министерста образования и науки Республики Казахстан и научным фондом Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева.

Список литературы

[1] J. Pruss, A. Rhandi, and R. Schnaubelt, *The domain of elliptic operators on $L_p(R^d)$ with unbounded drift coefficients.* Houston J. Math. 32 (2006), 563–576.

[2] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Rockner and S.V. Shaposhnikov, *Fokker-Planck- Kolmogorov equations.* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.

AMS Mathematics Subject Classification: 47B39.

Однозначная разрешимость одной задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка

M.N. Ospanov

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

E-mail: myrzan66@mail.ru

На $\Omega = [0, \omega] \times [0,\, T]$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$u_{xtt} = a_0(x,\, t)u_{xt} \,+\, a_1(x,\, t)u_x +$$

$$a_2(x,\,t)u_{tt}\,+\,a_3(x,\,t)u_t\,+\,a_4(x,t)u+\,f(x,\,t),\tag{1}$$

$$u(0,\,t)\,=\,\varphi(t),\;t\in[0,T],\tag{2}$$

$$u(x,\,0)=u(x,T)\,,x\,\in[0,\,\omega],\tag{3}$$

$$u_t(x,\,0)\,=\,u_t(x,\,T),x\,\in\,[0,\,\omega].\tag{4}$$

Будем считать, что $a_i(x,t)\,(i\,=\,\overline{0,4})\,,f(x,t)$ непрерывные на Ω функции, $\varphi(t)-$ дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,\,T]$ функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0)=\varphi(T),\;\dot\varphi(0)=\dot\varphi(T),\;\ddot\varphi(0)=\ddot\varphi(T)$.

Уравнение (1) является псевдопараболическим. К локальным и нелокальным краевым задачам для (1) сводится ряд прикладных задач физики, механики и биологии. Например, в [1] указаны примеры практического применения результатов исследований краевых задач для псевдопараболических уравнений при изучении процессов влагопереноса в пористых средах и в задачах математической биологии.

Пусть $C(\Omega,\,R^n)-$ пространство непрерывных на Ω функции с нормой $\|u(x,\cdot)\|\;=\;\max\limits_{t\in[0,\,T]}|u(x,t)|$. Решением задачи (1)-(4) назовем функцию $u(x,t)\,\in\,C(\Omega,\,R^n)$, имеющую непрерывные на Ω частные производные $u_{xtt}(x,t),\;u_{xt}(x,t),\;u_x(x,t),\;u_{tt}(x,t),$ $u_t(x,t),$ и удовлетворяющей уравнению (1) и условиям (2)-(4).

Аналогичная задача для уравнения (1) в случае $a_2(x,t)\,=\,0$ была исследована в [2].

В настоящей работе методом параметризации [3] доказывается

Теорема. Пусть $a_1(x,\,t)\,\geq\,\alpha\,>\,0$, тогда задача (1)-(4) имеет единственное решение $u(x,\,t)$ и справедлива следующая оценка:

$$\max\,\{\|u(x,\cdot)\|\,,\,\|u_x(x,\cdot)\|\,,\,\|u_t(x,\cdot)\|\,,\,\|u_{tt}(x,\cdot)\|\,,\|u_{xt}(x,\cdot)\|\}\leq c,$$

где c зависит только от исходных данных.

Работа частично поддержана проектом 5234/ГФ4 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список литературы

[1] Нахушев А.М., *Уравнения математической биологии.* М.:Физматлит, 2008.

[2] Оспанов М.Н., *Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка.* Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. -2004, №3. 103–107.

[3] Джумабаев Д.С., *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.* Ж. вычисл. мат. и мат. физ. -1989. -Т.29, no. 1. 50–66.

AMS Mathematics Subject Classification: 35G16, 35K70.

Decomposition of integro-differential operators

I.N. Parasidis[1], E. Providas[2]

[1] *TEI of Thessaly, Larissa, Greece*
E-mail: paras@teilar.gr
[2] *TEI of Thessaly, Larissa, Greece*

Integro-differential operator equations are used to model many problems in science, enginering and economics. These equations are usually complicated and finding the exact solution of the corresponding boundary value problems is a difficult task. In some cases the initial problem can be transformed to a simpler one involving workable operators and the solution can be found exactly. Altrnatively, numerical methods can be used to obtain an approximate solution.

In the present paper we deal with the exact solution of a boundary value problem $\mathbf{B}_1 x = f$ where the operator $\mathbf{B}_1$ can be decomposed in a product of two quadratic operators, i.e. $\mathbf{B}_1 = B_G^2 B_{G_0}^2$ with B_G and B_{G_0} being two linear operators of a special form. This work is a generalization of [1], [2].

We prove a main theorem which provides the exact solution of an integro-differential equation by decomposing the operator involved.

Finally, an example is solved to demostrate the ability of the method proposed.

Theorem 1. *Let H be a Hilbert space and $\widehat{A}_0, \widehat{A} : H \to H$ be correct operators and the operator $\mathbf{B}_1 : H \to H$ be defined by*

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 x =& \widehat{A}^2 \widehat{A}_0^2 x \\ & - V\langle \widehat{A}_0 x, \Phi^t \rangle_{H^m} - Y\langle \widehat{A}_0^2 x, \Phi^t \rangle_{H^m} - S\langle \widehat{A}\widehat{A}_0^2 x, F^t \rangle_{H^m} \\ & - G\langle \widehat{A}^2 \widehat{A}_0^2 x, F^t \rangle_{H^m} = f, \quad D(\mathbf{B}_1) = D(\widehat{A}^2 \widehat{A}_0^2), \end{aligned} \tag{1}$$

where the vectors $V, Y, S, \Phi, F \in H^m$, $G \in D(\widehat{A})^m$. The following are true:

(i) If

$$\det L = \det \left[I_m - \overline{\langle F^t, G \rangle}_{H^m} \right] \neq 0, \tag{2}$$

$$G_0 = \widehat{A}^{-2} Y + p_1 \overline{\langle F^t, Y \rangle}_{H^m} + p_2 \overline{\langle F^t, \widehat{A}^{-1} Y \rangle}_{H^m}, \tag{3}$$

$$S = \widehat{A} G - G \overline{\langle F^t, \widehat{A} G \rangle}_{H^m}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & \widehat{A}^{-2} V + p_1 \overline{\langle F^t, V \rangle}_{H^m} + p_2 \overline{\langle F^t, \widehat{A}^{-1} V \rangle}_{H^m} \\ & = \widehat{A}_0 G_0 - G_0 \overline{\langle \Phi^t, \widehat{A}_0 G_0 \rangle}_{H^m}, \end{aligned} \tag{5}$$

where $p_1 = \widehat{A}^{-1} p_2 + p_2 \overline{\langle F^t, p_2 \rangle}_{H^m}$, $\quad p_2 = (\widehat{A}^{-1} G) L^{-1}$ then the operator $\mathbf{B}_1$ has the unique decomposition $\mathbf{B}_1 = B_G^2 B_{G_0}^2$ where

$$\begin{aligned} B_{G_0} x =& \widehat{A}_0 x - G_0 \langle \widehat{A}_0 x, \Phi^t \rangle_{H^m} = f, \quad D(B_{G_0}) = D(\widehat{A}_0), \\ B_G x =& \widehat{A} x - G \langle \widehat{A} x, F^t \rangle_{H^m} = f, \qquad D(B_G) = D(\widehat{A}) \end{aligned}$$

(ii) If in addition the components of the vector $\widetilde{\Phi} = (\widehat{A}_0^{-1^*} \Phi, \Phi)$ are linearly independent on H then the decomposition $\mathbf{B}_1 = B_G^2 B_{G_0}^2$ is unique if and only if (2)-(5) hold true.

(iii) If $\mathbf{B}_1$ has a unique decomposition, then $\mathbf{B}_1$ is correct if and only if

$$\det L_0 = det\big[I_m - \overline{\langle \Phi^t, G_0\rangle}_{H^m}\big] \neq 0.$$

(iv) If $\mathbf{B}_1$ has a unique decomposition and $\mathbf{B}_1$ is correct then the problem (1) has a unique solution

$$\begin{aligned} x = \mathbf{B}_1^{-1} f = (\widehat{A}_0^{-2}\widehat{A}^{-2}) f + B_{G_0}^{-2} p_1 \langle f, F^t\rangle_{H^m} + B_{G_0}^{-2} p_2 \langle \widehat{A}^{-1} f, F^t\rangle_{H^m} \\ + p_1^0 \langle \widehat{A}^{-2} f, \Phi^t\rangle_{H^m} + p_2^0 \langle \widehat{A}_0^{-1}\widehat{A}^{-2} f, \Phi^t\rangle_{H^m}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} B_{G_0}^{-2} f =& \widehat{A}_0^{-2} f + p_1^0 \overline{\langle \Phi^t, f\rangle}_{H^m} + p_2^0 \overline{\langle \Phi^t, \widehat{A}_0^{-1} f\rangle}_{H^m} \quad \forall f \in H, \\ p_1^0 =& \widehat{A}_0^{-1} p_2^0 + p_2^0 \overline{\langle \Phi^t, p_2^0\rangle}_{H^m}, \quad p_2^0 = (\widehat{A}_0^{-1} G_0) L_0^{-1}. \end{aligned}$$

Example 1: Let the operator $\mathbf{B}_1 : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ be defined by

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 u =& u^{(4)} - (5-2t)\int_0^1 x^2\, u'(x)dx - (6t-3)\int_0^1 x^2\, u''(x)dx \\ & -12\int_0^1 x\, u'''(x)dx - (2t+1)\int_0^1 x\, u^{(4)}(x)dx = 2-3t, \\ & D(\mathbf{B}_1) = \{u \in W_2^4(0,1) : u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Then:
(i) $\mathbf{B}_1$ can be decomposed as a product of two operators and is correct.
(ii) The unique solution is given by

$$u(t) = -\frac{t^2(12271t^3 - 46530t^2 + 63410t - 33760)}{531448}.$$

References

[1] R.O. Oinarov, I.N. Parasidis, *Correct extensions of operators with finite defect in Banach spaces.* Izv. Akad. Kaz. SSR. 5 (1988), 42–46.

[2] I.N. Parasidis, E. Providas, P.C. Tsekrekos, *Factorization of linear operators and some eigenvalue problems of special operators.*, Vestn. Bashkir. Univ. Russia. 17 (2012), no. 2., 830–839.

AMS Mathematics Subject Classification: 45J05, 45K05.

Inverse problem for diffusion operator

V.A. Sadovnichy[1], Ya.T. Sultanaev[2], A.M. Akhtyamov[2]

[1]*MSU, Moscow, Russia*
E-mail: rector@msu.ru
[2]*R.R. Mavlutov institute of mechanics, Ufa, Russia*
E-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

This work is developing the ideas of papers [1, 2].

Let L denote the Sturm-Liouville problem

$$ly = -y'' + 2\,\lambda\, p(x) + q(x)\, y = \lambda^2\, y, \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}\, y(0) + a_{i2}\, y'(0) + a_{i3}\, y(\pi) + a_{i4}\, y'(\pi) = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{2}$$

where $p(x) \in W_2^1(0,\pi)$, $p(x) = p(\pi - x)$; $q(x) \in L_2(0,\pi)$ is a real function such that $q(x) = q(\pi - x)$ and the a_{ij} with $i = 1$, 2 and $j = 1$, 2, 3, 4 are complex constants.

For the inverse problem of reconstructing L in which all coefficients a_{ij} with $i = 1, 2$ and $j = 1, 2, 3, 4$ are unknown, no uniqueness theorems have been proved.

The uniqueness theorems for an inverse nonselfadjoint Sturm-Liouville problem L with symmetric potential and general boundary conditions are proved. The spectral data used for unique reconstruction of Sturm-Liouville problems are a spectrum and six eigenvalues. The uniqueness theorems for an inverse selfadjoint Sturm-Liouville problem with symmetric potential and nonseparated boundary conditions are also proved. These theorems use a spectrum and two (or three) eigenvalues for unique reconstruction of Sturm-Liouville problems. The theorems generalise G. Borg and N. Levinson's classical results to the case of Sturm-Liouville problem with general boundary conditions. Schemes for unique reconstruction of Sturm-Liouville problems with symmetric potential and general boundary conditions are given.

This work was supported by the program «Leading Scientific Schools» (project No. 7461.2016.1) and by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 15-01-01095_a).

References

[1] V.A. Sadovnichii, Ya.T. Sultanaev, A.M. Akhtyamov, *General Inverse Sturm-Liouville Problem with Symmetric Potential.* Azerbaijan Journal of Mathematics. 5 (2015), no. 2, 96–108.

[2] A.M. Akhtyamov, V.A. Sadovnichii, Ya.T. Sultanaev, *Generalizations of Borg's uniqueness theorem to the case of nonseparated boundary conditions.* Eurasian mathematical journal. 3 (2012), no. 4, 10–22.

AMS Mathematics Subject Classification: 34A55, 34B05, 58C40.

On a generalised Samarskii–Ionkin type problem for the Poisson equation

M.A. Sadybekov[1], **N.A. Yessirkegenov**[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: sadybekov@math.kz
[2]*Imperial College London, London, UK*
E-mail: n.yessirkegenov15@imperial.ac.uk

We consider a generalised form of the Samarskii-Ionkin type boundary value problem for the Poisson equation in the disk and show its well-posedness.

Let $\Omega = \{z = (x, y) = x + iy \in C : |z| < 1\}$ be a unit disk, $r = |z|$ and $\varphi = \arctan(y/x)$. Consider the following problem $(S - I)_\alpha$.

Problem $(S - I)_\alpha$**.** *Find a solution of the Poisson equation*

$$-\Delta u = f(z), \quad |z| < 1 \tag{1}$$

satisfying the following boundary conditions

$$u(1, \varphi) - \alpha u(1, 2\pi - \varphi) = \tau(\varphi), \; 0 \leq \varphi \leq \pi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) - \frac{\partial u}{\partial r}(1, 2\pi - \varphi) = \nu(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \tag{3}$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) + \frac{\partial u}{\partial r}(1, 2\pi - \varphi) = \nu(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \tag{4}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(z) \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, $\tau(\varphi) \in C^{1+\gamma}[0, \pi]$ and $\nu(\varphi) \in C^\gamma[0, \pi]$, $0 < \gamma < 1$.

It is obvious that necessary conditions for the solution existence of the problem (1)-(3) from the class $C^1(\overline{\Omega})$ is fulfilled by the following conditions:

$$\nu(0) = \nu(\pi) = 0.$$

The antiperiodic boundary value problem (1)-(3) for $\alpha = -1$ and the periodic boundary value problem (1),(2),(4) for $\alpha = 1$ were studied in [1] and [2]. When $\alpha = 0$, these problems were investigated in [3] and [4].

The possibility of separation of variables is justified. We obtain an explicit form of the Green function for this problem and an integral representation of the solution.

Some Problems of these types was considered in our work and was published in extended abstracts of the Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Almaty, Kazakhstan (September 07-10, 2016) [4].

The authors were supported by the grant no. 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov, *On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball.* Eurasian Mathematical Journal. 3 (2012), no. 1., 143–146.

[2] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov, *On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk.* Differential Equations. 50 (2014), no. 2., 268–273.

[3] M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, N.A. Yessirkegenov, *On an analog of Samarskii-Ionkin type boundary value problem for the Poisson equation in the disk.* AIP Conference Proceedings. 1676 (2015), 020035.

[4] M.A. Sadybekov, N.A. Yessirkegenov, *Spectral properties of a Laplace operator with Samarskii-Ionkin type boundary conditions in a disk.* AIP Conference Proceedings. 1759 (2016), 020139.

AMS Mathematics Subject Classification: 35C15, 35J05, 35J08

Полнота и базисность собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией

А.А. Сарсенби

Южно-Казахстанский государственный университет им М. Ауэзова, Шымкент, Институт Математики и математического моделирования, Алматы
E-mail: abdisalam@mail.ru

Спектральная задача

$-u''(-x) = \lambda u(x),\ -1 < x < 1,\ u(-1) = 0,\ \ u'(-1) = u'(1),$ (1)

является несамосопряженной, обладает неортогональной системой собственных функций. Все собственные значения однократны. Собственные функции выписываются в явном виде

$$u_0(x) = x + 1, \quad u_{k1}(x) = \sin k\pi x,$$
$$u_{k2}(x) = (-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x, \quad k = 1,\ 2, ...$$

.

Отметим, что спектральная задача (1) не укладывается в теорию, разработанную в работах [1, 2]. Свойства собственных функций спектральной задачи (1) характеризуются следующими утверждениями.

Теорема 1. Система собственных функций спектральной задачи (1) образует полную и минимальную систему в пространстве $L_2(-1,1)$

Теорема 2. Система собственных функций спектральной задачи (1) образует базис Рисса в пространстве $L_2(-1,1)$

Исследования поддержаны грантом 5414/ГФ4 КН МОН РК

Список литературы

[1] Sadybekov M.A. and Sarsenbi A.M. , *Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution* Differential Equations. - 2012. - V. 48, №8. P. 1112-1118.

[2] Sarsenbi A.M. , *Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator* // Differential Equations. - 2010. - V. 46, №4. P. 509-514.

AMS Mathematics Subject Classification: 34K08, 34L10, 46B15

Многопериодические решения линейных систем уравнений с оператором дифференцирования в силу гамильтоновых систем

Ж.А. Сартабанов, К.К.Кенжебаев

Актюбинский региональный государственный университет им.К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан

e-mail: sartabanov42@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$D_H x = P(\tau, \xi, \eta)x + f(\tau, \xi, \eta) \tag{1}$$

относительно n-вектор функции $x = x(\tau, \xi, \eta, \varepsilon)$ переменных $\tau \in (-\infty, +\infty) = R, \xi \in R, \eta \in (a, b) = I$ и параметра ε из δ-окрестности O_δ точки $\varepsilon = 0$, где $a, b, \delta > 0$-постоянные, D_H-оператор дифференцирования вида

$$D_H = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

в силу системы

$$\acute{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \acute{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} \qquad (2)$$

с гамильтонианом $H = H(\tau, \xi, \eta, \varepsilon)$, $P = P(\tau, \xi, \eta)$ – n – матричная функция, $f = f(\tau, \xi, \eta)$ – n –векторная функция.

Предположим выполненными условия:

$$H(\tau+2\pi, \xi+2k\pi, \eta, \varepsilon) = H(\tau, \xi, \eta, \varepsilon) \in BA(\Pi_\rho \times \Pi_\rho \times I_\triangle \times O_\delta), \quad (3)$$

$$P(\tau + 2\pi, \xi + 2k\pi, \eta) = P(\tau, \xi, \eta) \in BA(\Pi_\rho \times \Pi_\rho \times I_\triangle \times O_\delta), \quad (4)$$

$$f(\tau + 2\pi, \xi + 2k\pi, \eta) = f(\tau, \xi, \eta) \in BA(\Pi_\rho \times \Pi_\rho \times I_\triangle \times O_\delta), \quad (5)$$

где $k \in Z$ –множество целых чисел, $\Pi_\rho = \{z : |ImZ| < \rho\}, \rho = const > 0$, $I_\triangle$ –окрестность промежутка I в комплексной плоскости с шириной $\triangle = const > 0$, BA –класс вещественно-аналитических функций.

Условия (3)-(5) гарантируют разрешимость начальной задачи для системы (1) с условием вида

$$x|_{\tau=\tau_0} = u(\xi, \eta) = u(\xi + 2\pi, \eta) \in C^{(1,1)}_{\xi,\eta}(R \times I), \qquad (1_0)$$

где $\tau_0 \in R, C^{(1,1)}_{\xi,\eta}(R \times I)$ –непрерывно дифференцируемых функций по аргументам в указанных областях, соответствующих порядков гладкости

Мы ограничимся рассмотрением множества решений задач вида (1)-(1_0).

Основная задача заключается в установлении условий существования $(2\pi, 2\pi)$ периодических по (τ, ξ) решения системы (1) и построении его интегрального представления, а также в исследовании квазипериодичности его вдоль характеристики оператора D_H.

Для решения этой задачи определим решение

$$\xi = h(\tau, s, p, q, \varepsilon), \eta = g(\tau, s, p, q, \varepsilon) \qquad (6)$$

гамильтоновой системы (2) с начальными данными $(p,q) \in R \times I$ при $\tau = s \in R$.

Предположим, что матрицант $X = X(\tau,\xi,\eta,\varepsilon)$, определенный интегральным уравнением

$$X(\tau,\xi,\eta,\varepsilon) = E + \int_0^\tau P(\sigma, h(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon))$$
$$X(\sigma, h(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon)g(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon),\varepsilon)d\sigma \tag{7}$$

с единичной матрицией E, удовлетворяет условию

$$det[X(2\pi,\xi,\eta,\varepsilon) - E] \neq 0, \forall(\xi,\eta) \in \Pi_\rho \times I_\triangle, \varepsilon \in O_\sigma. \tag{8}$$

В частности, условие (8)имеет место, если выполнено условие

$$|X(\tau,\xi,\eta,\varepsilon)X^{-1}(s, h(s,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(s,\tau,\xi,\eta,\varepsilon),\varepsilon)|$$
$$\leq \Gamma e^{-\gamma(\tau - s)}, \tau > s \tag{9}$$

с постоянными $\gamma > 0$ и $\Gamma \geq 1$.

При исследовании периодических решений системы (1) важные место занимает система гомологических уравнений [4]

$$U(\xi,\eta) - U(\xi - \varphi(\xi,\eta,\varepsilon), \eta - \psi(\xi,\eta,\varepsilon))$$
$$\int_{-2\pi}^0 X^{-1}(\sigma, h(\sigma,0,\xi,\eta,\varepsilon)$$
$$g(\sigma,0,\xi,\eta,\varepsilon),\varepsilon) f(\sigma, h(\sigma,0,\xi,\eta,\varepsilon), g(\sigma,0,\xi,\eta,\varepsilon)d\sigma, \tag{10}$$

где $\varphi(\xi,\eta,\varepsilon) = \xi - h(-2\pi,0,\xi,\eta,\varepsilon), \psi(\xi,\eta,\varepsilon) = \eta - g(-2\pi,0,\xi,\eta,\varepsilon)$.

Предположим, что система (10) имеет 2π-периодическое по ξ вещественно - аналитическое по $(\xi,\eta) \in \Pi_\rho \times I_\triangle$ решение $u^*(\xi,\eta,\varepsilon)$ при достаточно малых значениях $|\varepsilon| > 0$.

$$u^*(\xi + 2\pi,\eta,\varepsilon) = u^*(\xi,\eta,\varepsilon) \in BA(\Pi_\rho \times \Pi_\rho \times I_\triangle \times O_\delta) \tag{11}$$

Тогда в силу условий (8), (10) и (11) имеем $(2\pi, 2\pi)$-периодическое по (τ, ξ) решение системы (1) вида

$$x^*(\tau,\xi,\eta,\varepsilon) = X(\tau,\xi,\eta,\varepsilon[X^{-1}(2\pi, h(0,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(0,\tau,\xi,\xi,\eta,\eta,\varepsilon),\varepsilon) - E]^{-1}$$

$$[\int_{\tau}^{\tau+2\pi} X^{-1}(\sigma, h(\sigma,\tau,\xi,\eta), g(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon),\varepsilon) f(\sigma, h(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon))d\sigma$$

$$-u^*(h(-2\pi,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(-2\pi,\tau,\xi,\eta,\varepsilon)) + u^*(h(0,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(0,\tau,\xi,\eta,\varepsilon))] \quad (12)$$

В случае выполнения условия (9) $(2\pi, 2\pi)$-периодическое по (τ, ξ) решение системы (1) можно представить в виде

$$x_*(\tau,\xi,\eta,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\tau} X(\tau,\xi,\eta,\varepsilon) X^{-1}(\sigma, h(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon),\varepsilon)$$

$$f(\sigma, h(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon), g(\sigma,\tau,\xi,\eta,\varepsilon))d\sigma \quad (13)$$

Теорема 1. *При выполнении условий (3)-(5), (8), (10) и (11) система (1) для малых значений* $|\varepsilon| > 0$ *имеет единственное* $(2\pi, 2\pi)$*-периодическое решение* $x^*(\tau,\xi,\eta,\varepsilon)$*, которое интегрально представимо в виде (12).*

Теорема 2. *При выполнении условий (3)-(5) и (9) система (1) для любых значений* $\varepsilon \in O_\delta$ *имеет* $(2\pi, 2\pi)$*-периодическое по* (τ, ξ) *решение* $x_*(\tau,\xi,\eta,\varepsilon)$*, которое интегрально представимо в виде (13).*

Известно [1-3], что при условиях

$$H(\tau,\xi,\eta,0) = H^0(\eta), \frac{d^2 H^0}{d\eta^2} \neq 0 \quad (14)$$

для достаточно малых значений $|\varepsilon| > 0$ характеристическая система (6) допускает квазипериодическое по τ решение $(\xi, \eta) = (\xi^*(\tau), \eta^*(\tau))$ с частным базисом $(1, \nu)$, где частота ν удовлетворяет условию сильной рациональной несоизмеримости вида

$$|\nu k - l| \geq c_0 |k|^{-\mu}, c = const \geq 0, \mu = const \geq 2; k, l \in N \qquad (15)$$

Рассматривая систему (1) вдоль $(\xi, \eta) = (\xi^*(\tau), \eta^*(\tau))$ имеем квазипериодическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{d\tau} = P^*(\tau, \nu\tau)y + f^*(\tau, \nu\tau) \qquad (1^*)$$

для который справдливы:

Следствие 1. *При условиях теоремы 1 с дополнительными требованиями (14) и (15) система* (1^*) *для достаточно малых значений* $|\varepsilon| > 0$ *допускает единственное квазипериодическое решение* $y^*(\tau) = x^*(\tau, \xi^*(\tau), \eta^*(\tau), \varepsilon)$ *с частотным базисом* $(1, \nu)$.

Следствие 2. *При условиях теоремы 2 с дополнительными требованиями (14) и (15) система* (1^*) *для достаточно малых значении* $|\varepsilon| > 0$ *допускает единственное квазипериодическое решение* $y_*(\tau) = x_*(\tau, \xi^*(\tau), \eta^*(\tau), \varepsilon)$ *с частотным базисом* $(1, \nu)$.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Малые знаменатели. II. Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменение функции Гамильтона. УМН. 18(1963) №6, 21-86.

[2] Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. ДАН, 98(1954), №4, 527-530.

[3] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. - 168 с.

[4] Сартабанов Ж.А. Об одном способе изучения периодических решений систем уравнений в частных производных специального вида. Известия АН Каз ССР, серия физ.-мат. №1, 1989. 42-49.

Оценки решений одной задачи возникающей электродинамики в магнитной гидродинамике

Ш.С. Сахаев

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: sakhaev_sh@mail.ru

Рассмотрим следующую переопределенную неоднородную начально-краевую задачу (электродинамики): система

$$b\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \Delta \vec{H}(x,t) = rot\vec{j}(x,t),\ div\vec{H} = 0 \tag{1}$$

с условиями

$$\vec{H}_n\Big|_S = 0, rot_\tau \vec{H}\Big|_S = \vec{j}_\tau(x,t)\Big|_S, \vec{H}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{H}_0(x), \tag{2}$$

а также вспомогательную задачу для однородной системы

$$b\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \Delta \vec{H}(x,t) = 0,\ \ div\vec{H} = 0 \tag{3}$$

условиями

$$\vec{H}_\tau\Big|_S = \vec{\psi}_\tau\Big|_S, \vec{H}(x,t)\Big|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

В работе [1] показано,что при любом векторе $\vec{\psi}(x,t)$ с $\psi_n|_S = 0$ удовлетворяющий условию Гельдера по обоим аргументам задача (3)-(4) имеет единственное классическое решение, представимое в виде потенциала

$$\begin{aligned} &\vec{H}(x,t) = rot\vec{A}(x,t), \\ &\vec{A}(x,t) = \textstyle\int_0^t d\tau \int_S \Gamma(x-\eta, t-\tau)\vec{\lambda}(\eta,\tau)dS, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Gamma(x,t) = \begin{cases} -\frac{b}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{b|x|^2}{4t}\right\},\ t>0 \\ 0,\ \ t<0 \end{cases}$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности,а $\vec{\lambda}(\eta, t)$-вектор определяемый из системы интегральных уравнений – Вольтерровско-Фредгольмского типа (такого же как при решении начально-краевых задач для одного уравнения теплопроводности с правой частью $\vec{\omega} = \left[\vec{\psi} \times \vec{n}\right]$.) Соотношения (1) представляются из себя линеаризованные уравнения Максвелла (с исключенными токами смещения) и стандартные условия на границе для магнитного поля. Для решения линеаризованных задач были получены в [2] оценки в $W_p^{2,1}(Q_T^1)$ при $p > 1$ с нормой Соболева. В настоящей работе она распространяется на пространства $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$-Гельдера.

Теорема 1. *Если* $S \in C^{(3+\alpha)}, 0 < \alpha < 1$. *То при любых* $\vec{g} = rot\vec{j}(x,t) \in J^{\alpha}(Q_T), \vec{H}_0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \bigcap \overset{0}{J}{}^{\alpha}(\Omega), \vec{j}_\tau \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$, *удовлетворяющих условию согласования*

$$rot_\tau \vec{H}_0(x)\Big|_{x\in S} = \vec{j}_\tau\Big|_{t=0,x\in S}$$

задача (1)–(2) *имеет единственное решение* $\vec{H}(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ *и*

$$\left|\vec{H}\right|_{Q_T}^{(2+\alpha)} \leq C\left[\left|\vec{H}_0\right|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + \left|rot\vec{j}\right|_{Q_T}^{(\alpha)} + \left|\vec{j}_\tau\right|_{S_T}^{(1+\alpha)}\right]. \qquad (6)$$

Список литературы

[1] Сахаев. Ш, *Оценка решения одной переопределенный параболической начально-краевой задача*, труды МИАНСССР, т. 127(1975)

[2] Солонников В.А. L_p *Оценки решения линейной задача, возникающей в магинитной гидродинамике*, журнал "Алгебра и анализ", т. 23(2011), № 1.

Задача о воздействии подвижных нагрузок на поверхность слоистой пластинки

А.Ж.Сейтмуратов, А.Н.Сагинбаев

Кызылординский государственный университет им.Коркыт Ата
E-mail:angisin_@mail.ru

Среди различных периодических и непериодических движений деформируемых сред важное значение имеют плоские волны простого гармонического типа, распространяющиеся по поверхности тела или полуплоскости, влияние которых ограничивается окрестностью этой поверхности. Поэтому рассмотрим задачу о распространении волны Релея.

Предположим, что в среде распространяется плоская гармоническая волна, т.е. потенциалы φ и ψ предоставим в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x,z,t) &= \Phi_0(z)\exp\left[i(pt-qx)\right]; \\ \psi(x,z,t) &= \Psi_0(z)\exp\left[i(pt-qx)\right], \end{aligned} \tag{1}$$

а Φ_0 и Ψ_0 удовлетворяет уравнениям

$$\Phi_0'' - \left(q^2 - \frac{p^2}{a^2}\right)\Phi_0 = 0; \quad \Psi_0'' - \left(q^2 - \frac{p^2}{b^2}\right)\Psi_0 = 0. \tag{2}$$

Рассматривая колебания, затухающие с глубиной $z \to -\infty$, должно выполняться условие

$$q^2 - \frac{p^2}{a^2} > 0; q^2 - \frac{p^2}{b^2} > 0; \tag{3}$$

Но так как скорости a и b удовлетворяют неравенству $a > b$, то достаточно выполнения вместо условий (3) одного условия

$$\frac{p}{q} < b \tag{4}$$

Следовательно, решения уравнений (2), затухающие на бесконечности $z \to -\infty$, имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= A \exp\left(\sqrt{q^2 - \tfrac{p^2}{a^2}} \cdot z\right); \\ \Psi_0(z) &= B \exp\left(\sqrt{q^2 - \tfrac{p^2}{b^2}} \cdot z\right), \end{aligned} \tag{5}$$

а для потенциалов φ и ψ получаем выражения

$$\begin{aligned} \varphi &= A \exp\left[i(pt - qx) + \sqrt{q^2 - \tfrac{p^2}{a^2}} z\right]; \\ \psi &= B \exp\left[i(pt - qx) + \sqrt{q^2 - \tfrac{p^2}{b^2}} z\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где A и B произвольные постоянные интегрирования.

Подставляя решения (5) в граничные условия , получим

$$\begin{aligned} A\left[2 - \left(\tfrac{p}{qb}\right)^2\right] \quad & +2iB\sqrt{1 - \left(\tfrac{p}{qb}\right)^2} = 0; \\ -2iA\sqrt{1 - \left(\tfrac{p}{qa}\right)^2} \; & +B\left[2 - \left(\tfrac{p}{qb}\right)^2\right] = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Для того, чтобы решение задачи было не нулевое, необходимо, чтобы определитель системы (7) был отличен от нуля, т.е. чтобы выполнялось соотношение

$$\left[2 - \left(\frac{p}{qb}\right)^2\right]^2 - 4\sqrt{1 - \left(\frac{p}{qb}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\frac{p}{qa}\right)^2} = 0. \tag{8}$$

Отношение (p/q) называется скоростью распространения поверхностной волны Релея. Обозначив $\xi = \left(\frac{p}{qb}\right)^2$ и введя коэффициент Пуассона ν, из соотношения (8) получим уравнение для безразмерной скорости поверхностной волны Релея $\sqrt{\xi}$:

$$\xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi\frac{2 - \nu}{1 - \nu} - 8\frac{1}{1 - \nu} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет единственный действительный положительный корень [1, 190-193].

Если через z_1 и z_2 обозначить глубину проникновения, на которой амплитуда напряжений падает в e раз за счет продольной и поперечной волны, соответственно, то для них получим выражения

$$z_1 = -\frac{l}{2\pi\sqrt{1-a^{-2}b^2\xi}}; z_2 = -\frac{l}{2\pi\sqrt{1-\xi}},$$

при этом $l = \frac{1}{q}$ - длина волны. Например, при $\nu = 0,5$ имеем

$$z_1 = -\frac{l}{2\pi}; z_2 \cong -\frac{l\sqrt{10}}{2\pi}.$$

Пусть по поверхности $z = 0$ распространяется с постоянной скоростью D нормальная и касательная нагрузка интенсивности $-F_1(x+Dt)$ и $-F_2(x+Dt)$, т.е. при $z = 0$ имеем граничные условия

$$\sigma_{zz} = -F_1(x+Dt); \sigma_{xz} = -F_2(x+Dt). \tag{10}$$

Начальные условия на такой задаче отсутствуют. [2, 47-50].

Введем подвижные координаты

$$x' = x + Dt; y' = y,$$

причем штрихи в дальнейшем для простоты будем опускать. Тогда для потенциалов φ и ψ получаем уравнения

$$\begin{gathered}\alpha^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0; \beta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0;\\ \alpha^2 = (D/a)^2 - 1; \beta^2 = (D/b)^2 - 1.\end{gathered} \tag{11}$$

Общие решения уравнений (11) находятся методом Даламбера и имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi(x,z) &= \varphi_1(x+\alpha z) + \varphi_2(x-\alpha z);\\ \psi(x,z) &= \psi_1(x+\beta z) + \psi_2(x-\beta z).\end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя решения уравнений для потенциалов в слое и полуплоскости в граничные условия , получим систему функциональных уравнений, которую, используя в выражениях для перемещений u_j, w_j и напряжений σ_{ij} получим решение задачи.

Список литературы

[1] И.Г. Филиппов, В.Г. Чебан, *Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней.* – Кишинев: Штиинца, 1988,-190-193

[2] A.Zh. Seitmuratov, U.D. Umbetov, Aitimova, *Boundary Value Problems in the Theory Of Oscillations of Rectangular Plates Interacting with a Deformable Medium*, World Applied Sciences Journal 31(5):705-710,2014, ISSN 1818-4952. EISSV:1991-6424. ISI & SCOPUS IF=0,234 ,Pakistan 2014

О существовании устойчивого периодического решения нелинейной дифференциальной системы

Ж. Сулейменов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: zh_suleimenov@mail.ru

Рассматривается нелинейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{1}$$

где $x = \text{colon}(x_1, ..., x_n)$, $A(t) \in C(\mathrm{R})$, $f(t,x) \in C^{(0;1)}_{t,x}(D)$, $D \subset \mathrm{R}^{n+1}$, $A(t+\omega) = A(t)$, $f(t+\omega, x) = f(t,x)$.

Ищется периодическое решение $x(t)$ системы (1)

$$x(0) - x(\omega) = 0. \tag{2}$$

Рассматриваем (1), (2) как краевую задачу с периодическим краевым условием (2).

Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы

$$\tfrac{dy}{dt} = A(t)y.$$

С помощью матрицы Коши $\mathcal{K}(t,s) = Y(t)Y(s)$, $t,s \in [0;\omega]$ и граничной матрицы $\Phi(t)$, удовлетворяющей условию $\Phi(0) - \Phi(\omega) = E$, строится матрица Грина

$$G(t,s) = \begin{cases} -Y(t)(Y(0) - Y(\omega))^{-1}\mathcal{K}(\omega,s), \ \forall t \in [0;s) \\ -Y(t)(Y(0) - Y(\omega))^{-1}\mathcal{K}(\omega,s) + \mathcal{K}(t,s), \ \forall t \in [s;\omega]. \end{cases}$$

Решение задачи (1), (2) записывается в виде

$$\varphi(t) = \int\limits_0^\omega G(t,s) f(s,\varphi(s))\,ds.$$

Оно ω-периодично. Если в системе (1) сделать замену $x = \varphi(t) + y$, то она переходит в систему, имеющую нулевое решение

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t,y), \ g(t,0) = 0, \tag{3}$$

где $g(t,y) \in C_{t,y}^{(0;1)}(D_0)$: $D_0 = \{(t,y) \in \mathrm{R}^{n+1}\colon t \in \mathrm{R}, \ \|y\| \le h\}$.

Полагаем, что мультипликаторы линейной периодической системы $\frac{dy}{dt} = B(t)y$ лежат строго внутри единичного круга, а нелинейная вектор-функция удовлетворяет условию

$$\|g(t,y)\| \le \gamma(\|y\|) \cdot \|y\|, \ \ \gamma(\|y\|) \rightrightarrows 0, \text{ при } \|y\| \to 0.$$

Тогда нулевое решение системы (3), а, следовательно, решение $x = \varphi(t)$ системы (1) будет устойчиво.

Список литературы

[1] Ж. Сулейменов, *Решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных систем.* Вестник НАН РК. Алматы (2011), № 2.

Решение систем айнса с конечной иррегулярной особой точкой

Ж.Н Тасмамбетов

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: tasmam@rambler.ru

Постановка задачи. Исследуется система Айнса с иррегулярной особенностью:

$$\begin{cases} p^{(0)}Z_{xx} + p^{(1)}q^{(4)}Z_{xy} + p^{(2)}Z_x + q^{(5)}Z_y + p^{(3)}Z = 0, \\ q^{(0)}Z_{yy} + q^{(1)}p^{(4)}Z_{xy} + p^{(5)}Z_x + q^{(2)}Z_y + q^{(3)}Z = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты $p^{(i)} = p^{(i)}(x)$ и $q^{(i)} = q^{(i)}(y)$ $(i = \overline{0,5})$ многочлены вида

$$p^{(i)}(x) = \sum_{j=\pi_i}^{\sigma_i} p_{ij} \cdot x^j, \qquad q^{(i)}(y) = \sum_{j=\varsigma_i}^{\zeta_i} q_{ij} \cdot x^j, \tag{2}$$

$(\pi_i, \sigma_i, \varsigma_i, \zeta_i\ (i = \overline{0,5})$– некоторые числа).

Допустим, что система совместна и выполняется условие интегрируемости

$$p^{(0)} \cdot q^{(0)} - p^{(1)} \cdot q^{(4)} \cdot q^{(1)}) \cdot p^{(4)} \neq 0, \tag{3}$$

обеспечивающее существование четырех линейно-независимых нормальных и нормально-регулярных решений.

Э.Айнс установил, что особые кривые системы (1) с многочленными коэффициентами вида определяются коэффициентами при вторых частных производных [1, с. 230]. Однако, он не приводит классификацию особых кривых. Регулярность и иррегулярность особых кривых систем вида (1) установлена нами с помощью понятия подранга [2, с.74] и антиподранга. Если подранг $k_j \leq -1$ $(j = 1, 2)$ то особенность (∞, ∞) – регулярная, а если $k_j > -1$ то особенность (∞, ∞) – иррегулярная. Аналогично, если антиподранг $\chi_j > -1$ $(j = 1, 2)$, то особенность $(0, 0)$ – регулярная, а при $\chi_j < -1$ особенность $(0, 0)$ является иррегулярной.

Системы вида (1)-(2) можно разбить на такие классы, для которых:

I. $p > 0, m \neq 0$; II. $p \neq 0, m > 0$; III. $p \neq 0, m \neq 0$; IV. $p > 0, m > 0$.

До сих пор, мы занимались изучением систем двух классов I и III, поскольку, они часто встречаются при изучении специальных функций и ортогональных многочленов двух переменных.

Целью данной работы является изучение особенностей построения нормальных

$$Z(x,y) = \exp Q\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu},$$

$$A_{0,0} \neq 0, \tag{4}$$

и нормально-регулярных решений

$$Z(x,y) = \exp Q\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu},$$

$$B_{0,0} \neq 0, \tag{5}$$

где

$$Q\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\frac{\beta_{m-1,0}}{x}+\frac{\beta_{0,m-1}}{y}+...+\frac{\beta_{1,0}}{m\cdot x^m}+\frac{\beta_{0,1}}{m\cdot y^m} \qquad (6)$$

- многочлен двух переменных степени m с неопределенными параметрами $\beta_{1,0}$, $\beta_{0,1}$, $\beta_{1,1}$, ..., $\beta_{0,m-1}$, $\beta_{m-1,0}$ системы (1) с коэффициентами вида (2), когда ранг $p\neq 0$, а антиранг $m>0$, то есть когда изучаемая система относится к классу II.

Когда $p>0$, $m\neq 0$, возможно и применение преобразования вида

$$Z(x,y)=U(x,y)\cdot Q\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right). \qquad (7)$$

Неопределенные параметры в многочлене (6) определяются из вспомогательной системы, полученной преобразованием (7), приравнивая к нулю коэффициенты при m наинизших степенях независимых переменных x и y. Далее должны определяться неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,...)$ в обобщенных степенных рядах (4) и (5).

Для их определения должны выполняться необходимые условия существования нормальных и нормально-регулярных решений.

Теорема 1. *Для того, чтобы вспомогательная система, полученная с помощью преобразования (7) из системы Айнса (1)-(2), имела хотя бы одно решение вида (4) и (5), необходимо, чтобы имели место равенства*

$$b^{(j)}_{k+1,0}=0,\;\; b^{(j)}_{0,k+1}=0,...,b^{(j)}_{1,1}=0,$$
$$b^{(j)}_{1,0}=0,\;\; b^{(j)}_{0,0}=0,\;\; (j=1,2) \qquad (8)$$

Эти системы называются, характеристическими и общее количество их зависит от значения ранга $p=k+1$.

Второе необходимое условие связано с определением неизвестных постоянных ρ и σ в решениях (4) и (5).

Теорема 2. *Для того, чтобы вспомогательная система имела решения вида (5), необходимо, чтобы пара* (ρ, σ) *была корнем системы определяющих уравнений* $f_{00}^{(0)} = 0$ *относительно особенности* $(0,0)$, *где* $f_{00}^{(j)}(\rho, \sigma)$ $(j = 1,2)$ *есть коэффициенты при наименьших степенях системы характеристических функций, полученных из вспомогательной системы путем подстановки вместо* $U(x,y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma}$.

Теорема 3. *Для вспомогательной системы, полученной из системы Айнса (1)-(2) с помощью преобразования (7) необходимым и достаточным условием существования иррегулярного решения в виде (5) является выполнение условия: вблизи особенности* $(0,0)$ *антиранг* $\chi < -1$ *по обеим переменным* x *и* y *одновременно.*

Если $k_j \leq -1$ $(j = 1,2)$ то в решений (4) $Q\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \equiv 0$ аналогично, если $\chi_j \geq -1$ $(j = 1,2)$ то в решений $Q\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \equiv 0$.

В изученной нами системе (∞, ∞) – регулярная особенность, а $(0,0)$ – иррегулярная особенность. Таким образом, понятия подранга k и антиподранга χ позволило нам классифицировать особенности системы Айнса (1)-(2). Для неё справедливы теоремы 1-3. Преимуществом этого метода является то, что по виду коэффициентов исходной системы можно заранее установить вид и построить решения вида (4) и (5).

Список литературы

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие Трансцендентные функции. ч. I. Гипергеометрическая функция. функция Лежандра.* Наука, Москва, 1965.

[2] Ж.Н. Тасмамбетов, *Построние нормальных и нормалдно-регулярных решений специальных систем дифференциальных в частых*

производных второго порядка. IP Zhanadilova S.T., Aktobe,2015(in Kazakhstan)

Построение решений специального алгебраического уравнения матье

Ж.Н. Тасмамбетов[1], М.Ж. Талипова[2], Р.У. Жахина[3]

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан

E-mail: tasmam@rambler.ru, mira_talipova@mail.ru, riscul_75@mail.ru

Постановка задачи. Рассматривается специальное алгебраическое уравнение [1,285] Матье

$$\left(\xi^2 - k^2\right)\frac{d^2u}{d\xi^2} + \xi\frac{du}{d\xi} + \left(\xi^2 - M^2\right)u = 0 \tag{1}$$

где $M^2 \equiv a + \frac{1}{2}k^2$, полученная с помощью замены $k \cdot \sin z = \xi$ из уравнение Матье

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(a + \frac{1}{2}\cdot k^2 \cdot \cos 2z\right)u = 0. \tag{2}$$

Целью работы является изучить возможности построения регулярных и иррегулярных решений в окрестности различных особых точек методом Фробениуса-Латышевой [2].

Используя понятием ранга

$$p = 1 + k, k = \max_{1\le s\le n}\frac{\beta_s - \beta_0}{s} \tag{3}$$

введенного А.Пуанкаре и антиранга

$$m = -1 - \lambda, \lambda = \min_{1\le \alpha\le n}\frac{\pi_\alpha - \pi_0}{\alpha} \tag{4}$$

введенное Л.Томе устанавливаем [2], что ранг $p = 1 > 0$ и антиранг $m \leq 0$.

Согласно теории К.Латышевой это показывает, что для уравнения (1) $\xi = \infty$ – особая иррегулярная, точки $\xi_1 = -k$ и $\xi_2 = k$ особые регулярные, а $\xi = 0$ является обыкновенной точкой.

Справедливо теорема.

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет регулярные решения в виде рядов*

$$u = \xi^{\rho} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \xi^i, (a_0 \neq 0) \tag{5}$$

$(\rho, a_i(i = 0, 1, 2, ...))$ – *неизвестные постоянные сходящихся в окрестности конечной особой точки в том и только в том случае, когда антиранг уравнения (1) равен нулю.*

Обычно понятие антиранга связывает с конечной особой точкой$\xi = 0$.

В данном случае, преобразование $\xi^2 = x$ приводит уравнение (1) к виду

$$x\left(x - k^2\right) \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \left(x - \frac{k^2}{2}\right) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{4}\left(u - M^2\right)u = 0. \tag{6}$$

Уравнение (5) имеет особые точки $x = 0$, $x = k^2$ и $x = \infty$. Поэтому, в окрестности особой точки $x = 0$ решения построим в виде ряда (5). Определяющее уравнение

$$f_0(\rho) = 2k^2 \cdot \rho \cdot (-2\rho + 1) = 0$$

имеет корней $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \dfrac{1}{2}$, а в (4) антиподранг $\lambda \geq -1$.

Тогда, решения соответствующие показателю $\rho_1 = 0$:

$$u_1(x) = 1 - \frac{M^2}{2! \cdot k^2} \cdot x + \frac{M^2(4 - M^2) + 2k^2}{4! \cdot k^2} \cdot x^2 + \ldots, \tag{7}$$

а показателю $\rho_2 = \dfrac{1}{2}$:

$$u_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1^2 - M^2}{3! \cdot k^2} \cdot x \right.$$

$$\left. + \frac{(1^2 - M^2)(5^2 - M^2) + 6k^2}{5! \cdot k^2} \cdot x^2 + \dots \right] \tag{8}$$

являются сходящимися в окрестности особой точки $x = 0$ на основании следствия теоремы 1.

Следствие. *Для того, чтобы уравнение (6) имело два регулярные решений в окрестности $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы антиподранг уравнения $\lambda \geq -1$.*

Учитывая преобразование $\xi^2 = x$ решения (7) и (8) получим в виде

$$u_1(\xi) = 1 - \frac{M^2}{2! \cdot k^2} \cdot \xi^2 + \frac{M^2(4 - M^2) + 2k^2}{4! \cdot k^2} \cdot \xi^4 + \dots, \tag{9}$$

$$u_2(\xi) = \xi \cdot \left[1 + \frac{1^2 - M^2}{3! \cdot k^2} \cdot \xi^2 \right.$$

$$\left. + \frac{(1^2 - M^2)(5^2 - M^2) + 6k^2}{5! \cdot k^2} \cdot \xi^4 + \dots \right], \tag{10}$$

где $M^2 = \dfrac{1}{2} \cdot k^2 + a.$

Итак, мы получили две линейно независимые частные решения уравнения (1) вблизи обыкновенной точки $\xi = 0$. Это показывает, что основное уравнение Матье (2) имеет линейно независимые частные решения

$$u_1(z) = 1 - \frac{M^2}{2! \cdot k^2} (k \cdot \sin z)^2 + \frac{M^2(4 - M^2) + 2k^2}{4! \cdot k^2} (k \cdot \sin z)^4 + \dots,$$

$$u_2(z) = k \cdot \sin z \cdot \left[1 + \frac{1^2 - M^2}{3! \cdot k^2} (k \cdot \sin z)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{(1^2 - M^2)(5^2 - M^2) + 6k^2}{5! \cdot k^2} (k \cdot \sin z)^4 + \dots \right]$$

$M^2 = \dfrac{1}{2} \cdot k^2 + a$. Аналогично можно построить решения в окрестности других особых точек.

Действительно, поскольку, ранг уравнения (1) $p = 1$, то другое преобразование

$$u = exp(\alpha_0 \cdot \xi) \cdot y$$

позволяет нам получить асимптотическое представление решений уравнения Матье в виде нормальных рядов

$$u_1(\xi) = e^{i\xi} \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{C_1}{\xi} + \frac{C_2}{\xi^2} + \dots\right), \tag{11}$$

$$u_2(\xi) = e^{-i\xi} \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{C_1}{\xi} + \frac{C_2}{\xi^2} + \dots\right), \tag{12}$$

где

$$C_1 = -\frac{1}{2} i \left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right)$$

$$C_2 = -\frac{1}{8} i \left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right) \cdot \left(\frac{9}{4} - M^2 + k^2\right) + \frac{1}{4} \cdot k^2, \dots$$

Эти решения в точности совпадает с решениями полученнными в книге Уиттекера [1,285] другим путем.

Таким образом, применение метода Фробениуса-Латышевой позволила нам досконально исследовать существования различных решений в окрестностях особых точек. Решения (11) и (12) являются формальными решениями уравнения (1).

Список литературы

[1] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. *Курс современного анализа. Трансцендентные функции.* М.: ГИфМЛ, 1963Б т. II, 515.

[2] К.Я. Латышева, Н.И. Терешенко, Г.С. Орел *Нормально-ренулярные решения и их приложения.* -Киев: Вищ. школа, 1974, 136.

Дискретизация двумерного уравнения гельфанда- левитана

Л.Н. Темирбекова [2], М.А. Бектемесов [1]

[1] *КазНУ им.аль-Фараби, город Алматы, Казахстан*
E-mail: Laura-Nurlan@mail.ru
[2] *КазНПУ им.Абая, город Алматы, Казахстан*

С подробной библиографией работ по двумерным коэффициентным обратным задачам для уравнения гиперболического типа можно ознакомиться в монографиях В.Г. Романова [5] и С.И. Кабанихина [2,3]. А.С. Благовещенский в своей работе [1] дает доказательство фундаментальных результатов М.Г. Крейна по теории краевых обратных задач для уравнения струны. Статья А.С. Благовещенского и М.И. Белишева [1] посвящена некоторым аспектам теории многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, описывающих, главным образом, волновые процессы. В данной работе излагаются некоторые результаты, связанные с применением многомерных аналогов уравнения Гельфанда-Левитана (интегральных, сокращенно МАУГЛИ) и М.Г. Крейна к обратным начально-краевым задачам теории распространения волн. Статья С.И. Кабанихина [2,3] посвящена линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. С.И. Кабанихиным и Г.Б. Бакановым [4] был исследован дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения.

Рассмотрим последовательность прямых задач

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)} &= u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x,y)u^{(k)}, \\ & x>0, y \in (-\pi,\pi), t \in R, k \in Z, \end{aligned} \tag{1}$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \ \ u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \tag{2}$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}. \tag{3}$$

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)-(3)

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t), y \in (-\pi,\pi), t>0, k \in Z, \tag{4}$$

где R - множество вещественных чисел, Z - множество всех целых числе, δ - дельта-функция Дирака, k - некоторое фиксированное целое число, $h(y) = e^{iky}$. Необходимое условие существования решения $f^{(k)}(y,0) = 0$. Для решения обратной задачи (1)-(4) используется следующее интегральное уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[f^{(k)}(y,t+x) + f^{(k)}(y,t-x)] \\ &\qquad + \int_{-x}^{x} \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,s)ds = 0, \ \ x>|t|, \end{aligned} \tag{5}$$

при каждом фиксированном $x>0$ соотношение (5) является системой интегральных уравнений первого рода относительно $\widetilde{\omega}(x,y,t)$, $t \in (-x,x)$. Уравнение (5) является многомерным аналогом уравнения Гельфанда-Левитана. Найдя решение уравнения (5) мы можем определить $q(x,y)$

$$\widetilde{\omega}^m(x,y,x-0) = \frac{e^{iky}}{4}\int_0^x q(\xi,y)d\xi, x>0.$$

В уравнений Гельфанда-Левитана (5) интеграл заменим суммой и при $t = t_j, j = -N, -N+1, ..., 0, ...N-1, N$ получим систему, состоящую из $(2N+1)$ уравнений с $M \times (2N+1)$ неизвестными $\widetilde{\omega}(x, y, s_i), m = 1, 2, ..., M; i = -N, -N+1, ...N-1, N;$

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=-N}^{N} f_m^{(k)}(t_j - s_i)\widetilde{\omega}(x, y, s_i)\tau$$

$$= -\frac{1}{2}[f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x)] \quad (6)$$

Уравнение (6) в матричной форме можно записать в следующем виде

$$\sum_{m=1}^{M} F_m \overrightarrow{\omega}^{(m)} = \overrightarrow{f}^{(k)}$$

где $F_m = f_m^{(k)}(t_j - s_i)_{i=\overline{-N,N};j=\overline{-N,N}}$, матрица размерности $(2N+1) \times (2N+1)$. Искомые векторы

$$\overrightarrow{\omega}^{(m)} = \{\widetilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i)\}_{i=\overline{-N,N}}, m = 1, 2, ..., M.$$

Правая часть

$$\overrightarrow{f}^{(k)} = \{-0.5(f^{(k)}(y, t_j + x) + f(y, t_j - x))\}_{j=\overline{-N,N}}.$$

Работа выполнена по проекту 1746/ГФ4 «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания»

Список литературы

[1] A.S. Blagovestchenskii, *The local method of solution of the non-stationary inverse problem for an inhomogeneous.* Trudy Mat. Inst. Steklov, V.115, 1971, pp.28-38 (in Russian).

[2] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems.*, Siberian Scientific publishers,Novosibirsk, 2009, 457 p. (in Russian).

[3] S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev, M.A. Shishlenin,*Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems.*, 2004, VSP/BRILL, the Netherlands, 179 p.

[4] S.I. Kabanikhin,G.B. Bakanov,*A discrete analogue of the Gelfand-Levitan method in a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation.* Siberian Math.Jour., V.40, N.2, 1999, pp.262-280.

[5] V.G. Romanov,*Inverse Problems of Mathematical Physics.*, Nauka, Moscow, 1984, 263 p. (in Russian).

AMS Mathematics Subject Classification: 65M32

Об обратной стохастической задаче построения силовой функции

М.И. Тлеубергенов[1], Д.Т. Ажымбаев[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: marat207@mail.ru
[2]*Актюбинский региональный государственный университет, Актобе, Казахстан*

По заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \quad \lambda \in R^m \quad x \in R^n, \quad \lambda \in C^{22}_{xt} \tag{1}$$

требуется построить обобщенную силовую функцию $U = U\left(x, \dot{x}, t\right)$ так, чтобы заданное множество $\Lambda\left(t\right)$ было интегральным многообразием стохастического уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \sigma^{'}_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}_j, \left(\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}\right), \tag{2}$$

Здесь $\{\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega)\}$ - системы случайных процессов с независимыми приращениями [1,4]. Ранее в [6] рассматривались задачи построения уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения (1) в классе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в [5] обобщаются на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито в предположении, что 1) случайные возмущения из класса винеровских процессов; 2) заданное интегральное многообразие зависит как от обобщенных координат, так и обобщенных скоростей.

В данной работе строится силовая функция в предположении, что, во-первых, случайные возмущения из более общего класса чем класс винеровских процессов, а именно из класса случайных процессов с независимыми приращениями; и, во-вторых, заданное интегральное многообразие зависит лишь от обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей.

Для решения поставленной задачи на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина [2] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [4] строится уравнение Ито $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (1) являлось интегральным многообразием построенного уравнения.

Далее, на втором этапе по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой структуры. И на третьем этапе в предположении, что обобщенный лагранжиан имеет вид

$$L = T\left(x,\dot{x},t\right) + U\left(x,\dot{x},t\right), \quad \text{где} \quad T = a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \ \left(i,j=\overline{1,n}\right), \quad (3)$$

искомую силовую функцию определим в виде $U\left(x,\dot{x},t\right) = L\left(x,\dot{x},t\right) - a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$.

Введем матрицу h_ν^k и рассмотрим задачу непрямого представления уравнения лагранжевой структуры $h_\nu^k\left(\ddot{x}_k - f_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j\right) \equiv \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_\nu}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j$.

С использованием обозначений работ [3-5] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Для непрямого построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры* (2) *по заданному множеству* (1) *с обобщенным лагранжианом вида* (3) *так, чтобы множество* (1) *было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно, чтобы обобщенная силовая функция* $U = U(x, \dot{x}, t)$ *удовлетворяла условиям* (4)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} = h_\nu^k - a_{\nu k};$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} + h_v^k f_k, \tag{4}$$

а вектор - функция f *и матрица* σ*- соответственно условиям* (5), (6)

$$f = k\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ \left(A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\right), \tag{5}$$

$$\sigma_i = s_i\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ B_i, i = \overline{1, r}, \tag{6}$$

где $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})^T$*- i-ый столбец матрицы* $\sigma = (\sigma_{\nu j}),\left(\nu = \overline{1, n},\ \ j = \overline{1, r}\right)$; $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})^T$*- i-ый столбец матрицы* $B = (B_{\mu j})$, $\left(\mu = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, r}\right)$, $s_i, k-$ *произвольные скалярные величины,*

$$\tilde{S}_{1\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj},$$

$$\tilde{S}_{2\nu} = \int \{ \frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu} \} dy,$$

$$S_{3\nu} = \int [\frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu}] \dot{P}^0(t, dy).$$

Таким образом, в обратной стохастической задаче построена силовая функция по заданным свойствам движения, которые зависят лишь от обобщенных координат и не зависят от обобщенных скоростей.

Эта работа была поддержана Грантом № 3357/ГФ4 Республики Казахстан.

Список литературы

[1] И.И. Гихман, А.В. Скороход. *Стохастические дифференциальные уравнения.* Наукова,Киев, 1968.

[2] Н.П. Еругин. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую.* Прикладная математика и механика. 10 (1952), вып. 6. 659-670.

[3] И.А. Мухаметзянов, Р.Г. Мухарлямов. *Уравнения программных движений.* Изд-во РУДН, Москва, 1986.

[4] В.И. Пугачев, И.Н. Синицын. *Стохастические дифференциальные системы Анализ и фильтрация.* Наука, Москва, 1990.

[5] М.И. Тлеубергенов. *Обраные задачи стохастических дифференциальных систем*: автореф. д. ф. -м. н.: 01. 01. 02.

[6] Б.М. Туладхар. *Построениеураынений в форме Лагаранжа, Гамилтона и Биркгофа по заданным свойствам двжения:* автореф. к. ф. -м. н.: 01. 02. 01.

AMS Mathematics Subject Classification: 26A33, 34A08, 33E12, 35K90

О разрешимости линейной краевой задачи с импульсным воздействием

А.Б. Тлеулесова

Евразийский национальный университет, Астана, Казахстан
agila72@mail.ru

На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная краевая задача с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0,T]/\left\{\theta_1,\ \theta_2,\ ...,\theta_m\right\},$$

$$\theta_i \in (0,T), \quad i = \overline{1,\ m}, \quad x \in R^m, \tag{1}$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

$$B_i x(\theta_i - 0) + C_i x(\theta_i + 0) = p_i, \quad p_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где матрица $A(t)$, вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B_i, C_i $(\overline{1,m})$ – постоянные матрицы. Пусть $\|x(t)\| = \max\limits_j |x_j(t)|$, $|A(t)| = \max\limits_j \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j(t)| \le \alpha$. Через $\tilde{C}([0,T],R^n)$ обозначим пространство кусочно-непрерывных на $[0,T]$ функций $x : [0,T] \to R^n$с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \sup\limits_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} \|x(t)\|$, где $\theta_0 = 0, \theta_{m+1} = T$.

Краевые задачи исследовались многими авторами [1]-[3]. Рассматриваемую задачу исследуем методом параметризации [1].

Обозначим через λ_r значение функций $x_r(t)$ в точке $t = t_{r-1}$,$r = \overline{1,N}$, и на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$ произведем замену $u_r = x_r(t) - \lambda_r$. Тогда задача (1)-(3) сведется к эквивалентной краевой задаче с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}, \tag{4}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \tag{5}$$

$$B_0\lambda_1 + C_0 \lim_{t \to T-0} u_N(t) + C\lambda_N = d, \tag{6}$$

$$B_i \lim_{t \to \theta_i - 0} u_{k_i - 1}(t) + B_i\lambda_{k_i - 1} - C_i\lambda_{k_i} = p_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{7}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to t_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{\{1, N-1\}} \setminus \{k_1, k_2, ..., k_m\}. \tag{8}$$

Задача (4)-(8) от задачи (1)-(3) отличается тем, что здесь появились начальные условия (5) в точках $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1, N}$, которые позволяют опеделить $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{t_r - 1}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{t_r - 1}^{t} f(\tau)d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставив сооответствующую правую часть (9) и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, ...$) раз получим представление функции $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u_r, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r),$$

$$r = \overline{1,\ N}. \tag{10}$$

Из (10) находим предел $\lim\limits_{t \to t_r - 0} u_r(t)$, и соответствующие правые части подставляя (6)-(8) получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda \in R^{nN}$

$$Q_{\nu,r}\lambda = -F_{\nu,r} - G_{\nu,r}. \tag{11}$$

Таким образом, для нахождения пары $(\lambda, u[t])$–решения задачи (4)-(8) имеем замкнутую систему уравнений (9), (11). Если известен параметр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)'$, то из (9) найдем систему решений задачи Коши–$u[t]$. Так как неизвестными являются и λ и $u[t]$, то для нахождения решения задачи (4)-(8) применяется метод последовательных приближений. Пара $(\lambda, u[t])$ решение задачи (4)-(8), находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, ...$ определяемый по следующему алгоритму.

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранных $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $..., h_{m+1} > 0 :$ $N_1 h_1 = \theta_1$, $N_2 h_2 = \theta_2 - \theta_1, ...,$ $N_{m+1} h_{m+1} = T - \theta_m$, $\nu \in N$, матрица $Q_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1}) :$ $R^{nN} \to R^{nN}$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}{,}\lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_N^{(0)})' \in R^{nN}$ определяем из уравнения

$$Q_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1})\lambda = -F_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1}),$$

где $\lambda^{(0)} = [Q_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1})]^{-1} F_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1})$.

б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ и решая задачи Коши (4), (5) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ на интервалах $[t_{r-1}, t_r)$ находим функции $u^{(0)}(t), r = \overline{1,\ N}$.

1-шаг. а) В правой части (9) вместо u подставляя $u^{(0)}(t) = (u_1^{(0)}(t),\ u_2^{(0)}(t), ..., u_N^{(0)}(t))'$ первое приближение по параметру $\lambda^{(1)}$ определяем из уравнения

$$Q_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1})\lambda = -F_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1}) \\ - G_\nu(u^{(0)},\ h_1{,}h_2, ..., h_{m+1}).$$

Ввиду обратимости матрицы $Q_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1})$ получим

$$\lambda^{(1)} = [Q_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1})]^{-1} \\ [F_\nu(h_1{,}h_2, ..., h_{m+1}) + G_\nu(u^{(0)},\ h_1{,}h_2, ..., h_{m+1})].$$

б) Используя $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},...,\lambda_N^{(1)})' \in R^{nN}$ и решая задачу Коши (4), (5) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ на интервалах $[t_{r-1}, t_r)$, находим функции $u^{(1)}(t), r = \overline{1, N}$ и т.д.

Продолжая процесс на k-ом шаге получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t)),\ r = \overline{1, N},\ k = 1, 2, ...$

Следующее теорема устанавливает однозначную разрешимость рассматриваемой задачи

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 [3, c.97]. Тогда краевая задача с импульсным воздействием (1)-(3) имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценки*

$$\|x^*\| \leq L_\nu(h_1,h_2,...,h_{m+1})max(\|d\|, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i\|, \|f\|_1). \tag{12}$$

Список литературы

[1] Д.С. Джумабаев. *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения* ж.вычисл.матем и матем физ.-1989.-Т29, № 1. 50-66.

[2] А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк.*Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием* Киев: Вища школа, 1987.-285.

[3] А.Б. Тлеулесова. *Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием*// Матем.журнал. - Алматы, - 2004.Т.-4, 93-102.

AMS Mathematics Subject Classification: 34A55, 34B05, 58C40.

Lyapunov and Hartman-Wintner type inequalities for a nonlinear fractional differential equation with dirichlet conditions

B.T. Torebek

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail:torebek@math.kz

In this paper we succeeded to generalize Lyapunov [1] and Hartman-Wintner [2] inequalities for the nonlinear fractional boundary value problem

$$\begin{cases} D_a^{\alpha,\mu}u(t) + q(t)f(u) = 0, \; a < t < b, \\ \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ is a concave and nondecreasing function and $D_a^{\alpha,\gamma}$, $1 < \alpha \le \gamma < 2$ is a generalized Hilfer fractional derivative

$$D_a^{\alpha,\gamma}u(t) = I_a^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}I_a^{m-\gamma}u(t).$$

Here $I_a^{\mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_a^t (t-s)^{\mu-1} f(s)ds$ is a Riemann–Liouville fractional integral of order $0 < \mu \in \mathbb{R}$.

We firstly derive the corresponding Green's function; consequently problem (1) is reduced to a equivalent Fredholm integral equation of the second kind. Using the Krasnoselskii fixed point theorem, the existence and multiplicity of positive solutions of problem (1) are obtained. Assuming that $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is continuous, concave and nondecreasing, we generalize Lyapunov's and Hartman-Wintner's type inequalities (see. [3]).

References

[1] A. M. Liapounoff, *Probléme général de la stabilité du mouvement.* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. 9(1907), 203–474.

[2] P. Hartman, A. Wintner, *On an oscillation criterion of Lyapunov.* American Journal of Mathematics. 73(1951), 885–890.

[3] M. Kirane, B.T. Torebek, *Lyapunov and Hartman-Wintner type inequalities for a nonlinear fractional boundary value problem with generalized Hilfer derivative.* Arxiv. (2017). https://arxiv.org/abs/1604.00671

AMS Mathematics Subject Classification: 26D10, 47J20, 26A33.

Решение задачи Римана-Гильберта для голоморфного вектора методом Булигана-Жиро

Ж.А. Токибетов, Р.А. Болтирекова

[1] *Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан*

E-mail: mukanov.askhat@gmail.com

Рассматривается задача о нахождении регулярного в области D с гладкой границей Γ решения $s,\ u,\ v,\ w$ системы

$$u_x+v_x+w_y=0, s_x-v_z+w_y=0, s_y+w_z-w_x=0, s_z-u_y+v_x=0 \quad (1)$$

удовлетворяющее на границе Γ условиям

$$a_js+b_ju+c_jv+d_jw=h_j, j=1,2, \quad (2)$$

где a_j, b_j, c_j, d_j, h_j – заданные непрерывные по Гельдеру на Γ функции.

Эту задачу сведем к интегральному уравнению Фредгольма при помощи метода Булигана – Жиро. Для этого подставляя представление решений системы (1) через производные двух гармонических функций σ и w:

$$U = (A,\ \nabla\sigma) - (B, \nabla w), s = (B,\ \nabla\sigma) + (C, \nabla w), \tag{3}$$

$$V = (D,\ \nabla\sigma) + (E, \nabla w), w = (F,\ \nabla\sigma) + (G, \nabla w)$$

$(A = (\alpha_1, \beta_1, -\beta_2),\ B = (\alpha_2, \beta_2, \beta_1),\ C = (-\alpha_1, \beta_1, -\beta_2),$ $D = (-\beta_1, \alpha_1, \alpha_2),\ E = (\beta_2, -\alpha_2, -\alpha_1),\ F = (\beta_2, -\alpha_2, \alpha_1),\ G = (\beta_1, \alpha_1, -\alpha_2),\ \alpha = \alpha_{1+}i\alpha_2,\ \beta = \beta_{1+}i\beta_2$ произвольные комплексные числа). На граничное условие (2), задача сводится к задаче о наклонной производной для пары гармонических функций $(R_j\ \nabla\sigma) + (S_j, \nabla w) = h_j,\ j = 1, 2$ (4)
Здесь $R_j =\ a_jB + b_jA + c_jD + d_jF,\ S_j =\ a_jC - b_jB + c_jD + d_jG$

Теперь мы рассмотрим задачу (4) для системы (1) только в том случае когда область D самая простая {z> 0} , а коэффициенты постоянные. Дальше по методу Булигана – Жиро решение будем искать в виде

$$\omega(x) = \int_\Gamma [M_1(x,\ p)\,\mu_1(p) + M_2(x,\ p)\,\mu_2(p)]\,d_p\Gamma$$

$$\sigma(x) = \int_\Gamma [N_1(x,\ p)\,\mu_1(p) + N_2(x,\ p)\,\mu_2(p)]\,d_p\Gamma \tag{4}$$

где $X = (x, y, z)$ – *точка полупространства* $D,\ P = (\xi, \eta, \zeta)$ *точка плоскости* $\Gamma \equiv \{z = 0\}$
$M_k,\ N_k,\ k = 1, 2,$ *определяются из соотношений*

$$(R_j\ \nabla\mathrm{M}_k) + (S_j, \nabla N_k) = \delta_{jk}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) j, k = 1, 2 \tag{5}$$

Отсюда при $k = 2,\ j = 1$ следует взять $M_1 = (\ S_2, \nabla\ \Omega)$, $N_1 = -(\ R_2, \nabla\ \Omega)$, а при k = 1, j = 2 имеем $M_2 = (\ S_1, \nabla\ \Omega)$, $N_1 = -(\ R_1, \nabla\ \Omega)$, *и* для определения гармонической функции Ω

получим уравнение $L_3K_3\ \Omega_{zz} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$, если $L_1K_1 = L_1K_2 + K_1L_2 = L_1K_3 - K_1L_3 = L_2K_3 + K_2L_3 = L_2\quad K = 0$ *и* $L_3K_3 \neq 0$, *где* $K_1 = -\alpha_1 a_2 - \alpha_1 b_2 + \beta_2 c_2 + \alpha_2\beta_1\quad K_2 = -\beta_1 a_2 - \beta_2 b_2 - \beta_2 c_2 - \alpha_2 c_2 + \alpha_1 d_2$, $K_3 = -\beta_2 a_2 - \beta_1 b_2 - \alpha_1 c_2 - \alpha_2 d_2$, $L_1 = \alpha_2 a_1 + \alpha_1 b_1 - \beta_1 c_1 + \beta_2 d_1$ $L_2 = a_1\beta_2 + b_1\beta_1 + c_1\alpha_1 - d_1\alpha_2$, $L_2 = a_1\beta_1 - b_1\beta_2 + c_1\alpha_2 - d_1\alpha_1$

Clarkson inequalities on $L_p(\widehat{G})$ space associated with compact Lie group

K.S. Tulenov[1], M.E. Akhymbek[2], A.A. Kassymov[3]

[1,2,3] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail:tulenov@math.kz[1], akhymbek@math.kz[2], kassymov@math.kz[3]

In this present paper we prove Clarkson inequalities for $L_p(\widehat{G})$ space which was introduced in [1, 2] by Ruzhansky and Turunen, i.e. we obtain following results:

Theorem 1. *(Clarkson inequality) Let* $2 \le p \le \infty$. *Then for any* $H_1,\ H_2 \in L_p(\widehat{G})$, *we have*

$$\left[\|\frac{H_1 + H_2}{2}\|^p_{L_p(\widehat{G})} + \|\frac{H_1 - H_2}{2}\|^p_{L_p(\widehat{G})}\right]^{1/p} \le \left[\frac{1}{2}(\|H_1\|^p_{L_p(\widehat{G})} + \|H_2\|^p_{L_p(\widehat{G})})\right]^{1/p}.$$

Theorem 2. *(Clarkson type inequality) Let* $1 < p, p' < \infty$ *with* $1/p + 1/p' = 1$. *Then for any* $H_1,\ H_2 \in L_p(\widehat{G})$ *we get following inequalties:*

(i) If $1 < p \le 2$, *then*

$$\left[\|\frac{H_1+H_2}{2}\|^{p'}_{L_p(\widehat{G})} + \|\frac{H_1-H_2}{2}\|^{p'}_{L_p(\widehat{G})}\right]^{1/p'} \le \left[\frac{1}{2}(\|H_1\|^p_{L_p(\widehat{G})} + \|H_2\|^p_{L_p(\widehat{G})})\right]^{1/p};$$

(ii) If $2 \le p < \infty$, *then*

$$\left[\|\frac{H_1+H_2}{2}\|^{p}_{L_p(\widehat{G})} + \|\frac{H_1-H_2}{2}\|^{p}_{L_p(\widehat{G})}\right]^{1/p} \le \left[\frac{1}{2}(\|H_1\|^{p'}_{L_p(\widehat{G})} + \|H_2\|^{p'}_{L_p(\widehat{G})})\right]^{1/p'}.$$

We also present another proof of reflexivity of this space for $1 < p < \infty$.

Theorem 3. *(Reflexivity) Let* $1 < p < \infty$. *Then* $L_p(\widehat{G})$ *is reflexive Banach space.*

Acknowledgements The work was supported by the target program 0085/PTSF-14 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

Список литературы

[1] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Pseudo-Differential Operators and Symmetries.* Birkhauser, Basel, 2010.

[2] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Global quantization of pseudo-differential operators on compact Lie groups, SU(2) and 3-sphere, and homogeneous spaces.* Int. Math. Res. Notices. 11 (2013), 2439–2496.

AMS Mathematics Subject Classification: 43A80, 43A85, 43A90.

Об одном методе решения интегро-дифференциальных уравнений

Б.Х. Турметов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Университет Ахмеда Ясави,Туркестан, Казахстан
E-mail:turmetovbh@mail.ru

В настоящей заметке рассматривается метод построения решения интегро - дифференциальных уравнений дробного порядка.

Для любого $\delta > 0$ обозначим

$$I^{\delta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)^{-\delta-1}y(\tau)d\tau, D^{\delta}y(t) = \frac{d^{[\delta]+1}}{dt^{[\delta]+1}}I^{1-\{\delta\}}y(t).$$

Пусть $\alpha \geq 0, \lambda_k \neq 0, \nu_k \geq 0, \alpha + \nu_1 + ... + \nu_k \neq 0$. Рассмотрим следующее уравнение

$$D^{\alpha}y\left(t\right) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j I^{\nu_j}y\left(t\right) + f\left(t\right), 0 < t \leq d < \infty. \qquad (1)$$

В работе [2] явный вид решения уравнения (1) было построено для случая $\alpha = 0$, а в работе [1] рассмотрен случай, когда $\alpha > 0, j = 1, \nu_1 > 0$. В дальнейшем уравнения типа (1) изучены в работах различных авторов. Результаты этих работ подробно описаны в монографии [3].

В настоящей работе мы предлагаем новый метод построения решения уравнения типа (1).Этот метод основан на построении нормированных систем относительно интегральных и дифференциальных операторов дробного порядка [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (№0819/GF4).

Список литературы

[1] B.N. Al-Saqabi,Vu Kim Tuan,*Solution of a fractional differential equation.* Integral Transform. Spec. Funct. 4 (1996),no.4., 321–326.

[2] R. Gorenflo, Y. Luchko, *Operationl method for solving generalized abel integral equation of second kind* . Integral Transform. Spec. Funct. 5(1997), no. 1-2., 47–58.

[3] A.A. Kilbas , H.M. Srivastava , J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier. North-Holland. Mathematics studies,2006.

[4] Б.Х. Турметов, *Нормированные системы и их применение к построению решений дифференциальных уравнений дробного порядка.* Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика."Механика. Физика". 8 (2016), no.1., 28–33.

AMS Mathematics Subject Classification: 26A33, 34A08, 33E12, 35K90

Instability of a program manifold of controllable systems

S.S. Zhumatov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

Consider a material system that has an $(n-s)$-dimensional integral manifold $\Omega\,(t)\,\equiv\,\omega(t,x)\,=\,0$, whose motion is described by the ordinary differential equations [1]:

$$\dot{x} = f\,(t,x) - B\xi, \quad \xi = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T\omega, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \quad (1)$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object,$f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence and uniqueness of a solution $x(t) = 0$, $B \in R^{n\times r}$, $P \in R^{s\times r}$ are constant matrices, $\omega \in R^s (s \leq n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a vector-function of control on deviation from the given program manifold, satisfying to conditions of local quadratic relations

$$\varphi(0) = 0 \ \wedge \ \varphi^T\theta(\sigma - K^{-1}\varphi) > 0, \quad \forall\, \sigma \neq 0, \tag{2}$$
$$\theta = diag\left\|\theta_1, \ldots, \theta_r\right\|, \quad K = K^T > 0.$$

Taking into account that $\Omega(t)$ is the integral manifold for the system (1)-(2), we have

$$\dot{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + Hf\,(t,x) = F(t,x,\omega),$$

where $H = \frac{\partial\omega}{\partial x}$ is the Jacobi matrix and $F(t,x,0) \equiv 0$ is a certain s-dimensional Erugin vector function [2].

Assuming that the Erugin function $F(t,x,\omega) = -A\omega, -A \in R^{s\times s}$ is Hurwitz matrix and differentiating the manifold $\Omega(t)$ with respect to time t along the solutions of system (1)- (2), we get

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \xi = \varphi\left(\sigma\right), \quad \sigma = P^T\omega, \tag{3}$$

$$\varphi(0) = 0 \ \wedge \ \varphi^T\theta(\sigma - K^{-1}\varphi) > 0, \quad \forall\, \sigma \neq 0, \tag{4}$$
$$\theta = diag\left\|\theta_1, \ldots, \theta_r\right\|, \quad K = K^T > 0.$$

We solve general inverse problem of dynamics: the corresponding system of differential equations is but as well as the instability is investigated. This inverse problem is very important for a variety of mathematical models mechanics.

A great number of works is devoted to the construction of the systems of equations on the given program manifold, possessing properties of stability, optimality and establishment of estimations of indexes' quality of transient in the neighborhood of a program manifold and to solving of various inverse problems of dynamics (see [1], [3]-[6]). The detailed reviews of these works were shown in [3], [5], [6].

Statment of the problem: to get the condition of instability of a program manifold $\Omega(t)$ of the basic control systems in relation to the given vector-function ω.

Definition 1. A program manifold $\Omega(t)$ is called instable on the whole in relation to vector-function ω, if in phase space there is an unlimited open domain Ξ , including a neighborhood of the given program manifold and possessing the property, that all solutions in relation to a vector-function ω beginning in this domain, unlimited as $t \to \infty$.

Definition 2. A program manifold $\Omega(t)$ is called absolutely instable in relation to a vector-function ω, if it is instable on the whole at all functions $\varphi(\sigma)$ satisfying to the conditions (4).

The frequency conditions of instability are received in [7] for non-linear control systems with respect to zero position of equilibrium. In this paper the conditions of instability of the basic control systems are investigated in the neighborhood of a program manifold.

The following theorem is valid (see [1, p. 84].

Theorem 1. *If for the system (3) it is found a positive function $V(t,\omega)$ admitting a positive upper limit in the domain Ξ derivative which is*

$$\dot{V}(t,\omega) \geq \gamma > 0 \quad \forall\, \omega \in \Xi \wedge t \in I$$

then the program manifold $\Omega(t)$ is instable as a whole with respect to vector-function ω.

Theorem 2. *Suppose that there exist matrices*

$$L = L^T > 0,\ \beta = diag\,(\beta_1, \ldots, \beta_r) > 0$$

and non-linear function $\varphi(\sigma)$ satisfies the conditions (4).

Then, for the absolute instability of the program manifold $\Omega\,(t)$ with respect to the vector function ω it is sufficient performing of the following conditions

$$l_1(\|\omega\|^2 \leq V \leq l_2(\|\omega\|^2, \tag{5}$$

$$g_1(\|\omega\|^2 \leq \dot{V} \leq g_2(\|\omega\|^2, \tag{6}$$

where l_1, l_2, g_1, g_2 are positive constants.

References

[1] B.G. Maigarin,*The stability and quality of process of non-linear systems of automatic control.* Nauka, Alma-Ata, (1980)(in Russian).

[2] N.P. Erugin, *Construction all the set of systems of differential equations, possessing by given integral curve.* Prikl. Mat. Mex. 10 (1952), no. 6., 659–670.

[3] A.S. Galiullin, I.A. Mukhametzyanov, R.G. Mukharlyamov, *Revues of investigating on analytic construction of program motion;s systems.* Vestnik RUDN. (1994), no. 1.,5=-21.

[4] R.G. Mukharlyamov, *Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Contraints.* Journal of Computer and Systems Sciences International. 54 (2015). No.1., 13–26.

[5] J. Llibre, R. Ramirez, *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications.* Springer International Publishing Switzerland. (2016).

[6] S.S. Zhumatov, *Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold.* Nelineinye kolebania. Kiev, 28 (2016), No. 3., 367-375.

[7] V.A. Yakubovich, *Absolute instability of nonlinear control systems. I. General frequency criteria.* Avtomatika Telemekh. (1970), No. 12., 5–12.

AMS Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C15, 34K29.

Determinant representation of one-fold darboux transformation for the nonlocal nonlinear Schrödinger and Maxwell-Bloch equation

K. Yesmakhnova[1], **S. Tapeyeva**[2], **S. Ybyraiymova**[2]

[1] *Euration National University, Astana, Kazakhstan*
kryesmakhanova@gmail.com:
[2] *Al - Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

A nonlocal nonlinear Schrödinger equation of the type

$$iq_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q(x,t)q^*(-x,t)q(x,t) = 0 \tag{1}$$

was studied by Ablowitz and Musslimani in [1]. This equation comes from symmetry reduction of AKNS system [1-4].

In the work, we consider a generalization of nonlocal nonlinear Schrödinger equation (1), namely the (1+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger and Maxwell-Bloch equation, which reads as

$$iq_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q(x,t)q^*(-x,t)q(x,t) - 2p(x,t) = 0, \tag{2}$$

$$p_x(x,t) = 2[q(x,t)\eta(x,t) - i\omega p(x,t)], \tag{3}$$

$$\eta_x(x,t) = q(x,t)p^*(-x,t) - p(x,t)q^*(-x,t), \tag{4}$$

where $q,\ q^*,\ p,\ p^*$ are complex functions, η is real function and ω is complex constant. Functions of the real variables x and t. Subscripts x,t denote partial derivatives with respect to the variables. This equation (1) is integrable by the Inverse Scattering Method [1-4].

This system (2)-(4) is derived from the integrability condition (Lax representation) of the following linear problem

$$\Psi_x = A\Psi, \quad \Psi_t = B\Psi, \tag{5}$$

where $\Psi(x,t,\lambda) = (\psi_1(x,t,\lambda), \psi_2(x,t,\lambda))^T$ and A, B are matrices 2×2 have the form

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0, \quad B = \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0 + \frac{1}{\lambda-\omega}B_{-1}. \tag{6}$$

The determinant representation of the one-fold Darboux transformation of the system (2)-(4) assumes the form

$$T_1(\lambda,\lambda_1,\lambda_2) = \lambda I - M = \lambda I + t_0^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix}(T_1)_{11} & (T_1)_{12}\\ (T_1)_{21} & (T_1)_{22}\end{pmatrix}, \tag{7}$$

where

$$t_0^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}\Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{1,1}\\ \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{1,2}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\Psi_{1,1} & \lambda_1\Psi_{1,1}\\ \Psi_{1,2} & \lambda_2\Psi_{1,2}\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}\Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{2,1}\\ \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{2,2}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\Psi_{1,1} & \lambda_1\Psi_{2,1}\\ \Psi_{1,2} & \lambda_2\Psi_{2,2}\end{vmatrix}\end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix}\Psi_{1,1} & \Psi_{1,2}\\ \Psi_{2,1} & \Psi_{2,2}\end{vmatrix}. \tag{8}$$

$$(T_1)_{11} = \begin{vmatrix}1 & 0 & \lambda\\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{1,1}\\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{1,2}\end{vmatrix}, \quad (T_1)_{12} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{1,1}\\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{1,2}\end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$(T_1)_{21} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{2,1}\\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{2,2}\end{vmatrix}, \quad (T_1)_{22} = \begin{vmatrix}0 & 1 & \lambda\\ \Psi_{1,1} & \Psi_{2,1} & \lambda_1\Psi_{2,1}\\ \Psi_{1,2} & \Psi_{2,2} & \lambda_2\Psi_{2,2}\end{vmatrix}. \tag{10}$$

Moreover, T_1 satisfies the following equations

$$T_{1x} + T_1 A = A^{[1]}T_1, \quad T_{1t} + T_1 B = B^{[1]}T_1. \tag{11}$$

$$A_0^{[1]} = A_0 + \left[\sigma_3, t_0^{[1]}\right], \quad B_{-1}^{[1]} = (\omega I + t_0^{[1]})B_{-1}(\omega I + t_0^{[1]})^{-1}. \tag{12}$$

Then the different solutions of the system (2)-(4) are constructed from (11)-(12).

The author Yesmakhanova K. was supported by the grant no. 0888/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equation. *Physical Review Letters*, **110** (2013), no. 6., 064105.

[2] Gadzhimuradov T. A., Agalarov A. M. Towards a gauge-equivalent magnetic structure of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation *Physical Review A*, **93** (2016), 062124.

[3] Gadzhimuradov T. A., Agalarov A. M. Gauge equavalenence of nonlocal NLSE and PT-symmetric Heisenberg ferromagnetic equation, **https://www.researchgate.net/publication/305721244**.

[4] Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu. Nonlocal nonlinear Schrödinger equation and its discrete version: Soliton solutions and gauge equivalence. *Journal of Mathematical Physics*. **57** (2016), 083507; doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4960818.

AMS Mathematics Subject Classification: 34A55, 34B05, 58C40.

Обоснование квадратурного метода для одного класса поверхностных сингулярных инегральных уравнений

Э.Г. Халилов

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
Баку, Азербайджан
E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3-$ограниченная область с дважды непрерывно - дифференцируемой границей S. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гельмгольца с импедансным условием: найти дважды непрерывно - дифференцируемую на $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$ и непрерывную на S функцию u, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию

$$\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial \vec{n}\left(x\right)} + \lambda\left(x\right)\, u\left(x\right) = f\,\left(x\right) \text{ на } S,$$

где $k-$ волновое число, причем $Im\, k \geq 0$, $\vec{n}\left(x\right)-$единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$, а λ и $f-$ заданные непрерывные функции на S, причем $Im\,\left(\bar{k}\,\lambda\left(x\right)\right) \geq 0$, $x \in S$. В работе [1] показано, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u\left(x\right) = \int_S \left\{ \Phi_k\left(x,y\right) + i\,\eta\, \frac{\partial \Phi_k\left(x,y\right)}{\partial \vec{n}\,\left(y\right)} \right\} \varphi\left(y\right)\, dS_y,\ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D},$$

где $\eta \neq 0-$произвольное вещественное число, причем $\eta\ Rek \geq 0$, является решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием, если плотность φ есть решение однозначно разрешимого сингулярного интегрального уравнения

$$\left(1 - \,i\,\eta\,\lambda\right)\varphi - \left(\tilde{K} + i\,\eta\,T + i\,\eta\,\lambda\,K + \lambda\,F\right)\varphi = -2\,f, \qquad (1)$$

где $\Phi_k(x,y) = e^{ik|x-y|}/(4\pi|x-y|)$, $x,y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, $-$фундаментальное решение уравнения Гельмгольца,

$$(\tilde{K}\varphi)(x) = 2\int_S \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(x)}\varphi(y)\,dS_y,$$

$$(T\varphi)(x) = 2\frac{\partial}{\partial\vec{n}(x)}\int_S \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\varphi(y)\,dS_y,$$

$$(K\varphi)(x) = 2\int_S \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\varphi(y)\,dS_y,$$

$$(F\varphi)(x) = 2\int_S \Phi_k(x,y)\,\varphi(y)\,dS_y,\ x \in S.$$

В данной работе поверхность S разбивается на элементарные части $S = \bigcup\limits_{l=1}^{N} S_l^N$ и в опорных точках $x_l \in S_l^N$ $(l = \overline{1,N})$ уравнение (1) аппроксимируется единственно разрешимой системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений $\varphi(x_l)$, $l = \overline{1,N}$. Доказывается, что решение системы алгебраических уравнений сходится к точному решению уравнения (1) в точках x_l, $l = \overline{1,N}$, и оценивается скорость сходимости. Кроме того, построена последовательность, сходяшийся к точному решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием, и дана оценка погрешности.

Список литературы

[1] Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния* - М.: Мир, 1987-311

AMJ Mathematics Subject Classification: 45E05; 31B10