СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная Школа-Конференция
Новосибирск, Россия, 18-22 декабря 2016

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

SOBOLEV READINGS

International School-Conference
Novosibirsk, Russia, December 18-22, 2016

ABSTRACTS

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная школа-конференция

Новосибирск, Россия, 18–22 декабря 2016 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Под редакцией
В. Л. Васкевича, Г. В. Демиденко

НОВОСИБИРСК
2016

УДК 517
ББК В16
С545

С545 Соболевские чтения. Международная школа-конференция (Новосибирск, 18–22 декабря 2016 г.): Тез. докладов / под ред. В. Л. Васкевича, Г. В. Демиденко. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. — 194 с.

ISBN 978-5-4437-0597-2

Организаторы

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Organizers

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Novosibirsk State University

ISBN 978-5-4437-0597-2

Программный комитет

Г. В. Демиденко — *председатель*, И. И. Матвеева — *секретарь*,
В. С. Белоносов, О. В. Бесов, А. М. Блохин, В. Л. Васкевич,
С. К. Годунов, П. И. Плотников, Ю. Г. Решетняк, В. Г. Романов,
В. Д. Степанов, А. А. Толстоногов, H. Begehr, E. Feireisl, L. Hatvani,
A. Laptev, R. McOwen

Организационный комитет

Г. В. Демиденко — *сопредседатель*, М. П. Федорук — *сопредседатель*,
Л. Н. Бондарь — *секретарь*, Е. Ю. Балакина, А. А. Бондарь,
М. В. Нещадим, М. А. Скворцова, И. А. Уварова, Т. К. Ыскак,
В. Э. Эйснер

Program Committee

G. V. Demidenko (*Chairman*), I. I. Matveeva (*Secretary*), H. Begehr,
V. S. Belonosov, O. V. Besov, A. M. Blokhin, E. Feireisl, S. K. Godunov,
L. Hatvani, A. Laptev, R. McOwen, P. I. Plotnikov, Yu. G. Reshetnyak,
V. G. Romanov, V. D. Stepanov, A. A. Tolstonogov, V. L. Vaskevich

Organizing Committee

G. V. Demidenko (*Co-Chairman*), M. P. Fedoruk (*Co-Chairman*),
L. N. Bondar (*Secretary*), E. Yu. Balakina, A. A. Bondar, V. E. Eisner,
M. V. Neshchadim, M. A. Skvortsova, I. A. Uvarova, T. K. Yskak

Школу-конференцию поддержали:

Сибирское отделение Российской академии наук

ММЦ

Международный научно-образовательный
математический центр
Новосибирского государственного университета

РФФИ

Российский фонд фундаментальных исследований
(проект № 16-31-10538)

ISAAC

International Society for Analysis,
its Applications and Computation

Sponsors:

Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

IMC

International Scientific-Educational
Mathematical Centre of
Novosibirsk State University

РФФИ

Russian Foundation for Basic Research
(project no. 16-31-10538)

ISAAC

International Society for Analysis,
its Applications and Computation

СОДЕРЖАНИЕ

ЦИКЛЫ ЛЕКЦИЙ
LECTURE COURSES

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
PLENARY LECTURES

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ
SHORT COMMUNICATIONS

ЦИКЛЫ ЛЕКЦИЙ

Тезисы

LECTURE COURSES

Abstracts

Цикл лекций

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Плотников П. И.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
plotnikov@hydro.nsc.ru

Начало локальной математической теории уравнений, описывающих движение вязкой сжимаемой жидкости, было положено во второй половине прошлого века в пионерских работах Серрина, Нишиды, Солонникова и Тани. Первые нелокальные результаты были получены в начале восьмидесятых годов Кажиховым и его учениками. В их работах была построена законченная теория краевых задач в одномерном случае. Вопрос о глобальной разрешимости многомерных задач оставался открытым до середины девяностых годов, когда П. Л. Лионсом было обнаружено свойство слабой непрерывности вязкого потока. Эти результаты были существенно уточнены Файрайзелом, который установил глобальную разрешимость основных краевых задач для уравнений Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости. Настоящий курс посвящен изложению основных аспектов теории Лионса – Файрайзела. Кроме того, в нем будет дан краткий обзор современного состояния теории.

Лекция 1

Тема первой лекции — общая теория уравнений Навье – Стокса сжимаемой жидкости. В этой лекции будут рассмотрены следующие вопросы. Уравнения динамики вязкой сжимаемой жидкости. Уравнения баланса массы, баланса импульса и баланса энергии. Основные краевые задачи для этих уравнений. Первая энергетическая оценка. Теорема Лионса – Ди-Перно о ренормализации. Определение ренормализованного решения. Различные регуляризации уравнений Навье – Стокса сжимаемой жидкости. Проблема компактности.

Лекция 2

Во второй лекции будут рассмотрены основные аспекты теории Лионса – Файрайзела. Тематика этой лекции включает следующие вопросы. Элементарные теоремы о компенсированной компактности. Тождество Лионса. Слабая непрерывность вязкого потока. Метод монотонности. Равностепенная интегрируемость функции давления. Компактность множества ренормализованных решений. Обобщение результатов на случай теплопроводного газа. Вариационные решения.

Лекция 3

Тематика этой лекции включает следующие вопросы. Стационарные задачи. Проблема концентраций. Свертки уравнений Навье – Стокса с потенциалами. Второе интегральное тождество. Теорема вложения Мазьи – Адамса. Весовые оценки давления. Краткий обзор современного состояния теории. Нерешенные задачи.

Цикл лекций

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

Радкевич Е. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; evrad07@gmail.com

Результаты, о которых будет рассказано на первой лекции, получены совместно с Е. А. Лукашевым, Н. Н. Яковлевым (ПАО ТМКБ "СОЮЗ", Лыткарино, Московская область; elukashov@yandex.ru, amntksoyuz@mail.ru) и О. А. Васильевой (Московский государственный строительный университет; vasiljeva.ovas@yandex.ru).

Результаты, составившие содержание второй лекции, получены совместно с В. В. Палиным (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; grey_stranger84@mail.ru).

Лекция 1. О ламинарно-турбулентном переходе и конвективной неустойчивости Релея – Бенара как неравновесных фазовых переходах (в форме Кана – Хилларда)

Наша задача ограничивается рассмотрением разделов физики, связанных с гидродинамической неустойчивостью. Эти вопросы рассматриваются в [3]–[6], актуальны, учитывая тот факт, что до сих пор нет четкого обоснования явлений, связанных с гидродинамической неустойчивостью, и прежде всего — механизма ее зарождения. В этой статье мы продолжим исследования [30]–[38] классических моделей, описывающих начальные стадии неравновесных процессов с избыточной энергией, на примере проблемы ламинарно-турбулентного перехода и конвективной неустойчивости Релея – Бенара. Эти проблемы привлекают физиков уже в течение века. Вопрос в том, например, как системы полностью разупорядоченные в состоянии теплового равновесия, будучи выведенными из состояния теплового равновесия, могут внезапно перейти в высокую степень упорядоченности.

Появление новых математических понятий и приемов исследования позволяет по-новому взглянуть на известные объекты и прояснить неизвестные ранее его стороны. В частности, это относится к турбулентности, для исследования и моделирования которой использовали теорию динамических систем, понятие аттрактора, в особенности, странного аттрактора [47], теории бифуркаций и катастроф, теорию фракталов (для турбулентного горения [48]). Однако, как правило, объектом математического моделирования является развитая и стационарная турбулентность, и для ее описания вводятся исходные понятия: пульсации давления, скорости и др. В тоже время с точки зрения информативности больше дают математические модели зарождения и дальнейшего формирования объекта — процесса, структуры. В отношении турбулентности это отмечалось М. И. Рабиновичем в обзоре [47]. Если в инженерных приложениях математические модели стационарного турбулентного течения дают определенный результат при проведении расчетных исследований, то в случае геофизической гидродинамики используются такие понятия как накачка, энстрофия и др. [1], позволяющие отразить нестационарный характер турбулентного течения. В связи с этим особое значение (и не только из-за прикладной значимости) приобретает моделирование ламинарно-турбулентного перехода, поскольку именно в ходе него формируются различные промежуточные структуры, только впоследствии дающие развитое турбулентное течение [49].

Возникновение конвективных течений и их развитие от регулярных форм с последующим переходом к нерегулярным — турбулентным течениям — привлекают внимание тем, что они являются ответственными за эффективность многих технологических процессов тепломассопереноса [3], [4]. Такие технологические процессы являются базовыми в химической, нефтехимической, энергетической, металлургической, пищевой и других отраслях промышленности. Конвективные течения возникают в жидкостях и газах в гравитационном поле при наличии пространственной неоднородности плотности, создаваемой неоднородностями температуры и концентрации компонентов, возникающих в ходе, например, химических реакций или других причин [5]–[7]. С увеличением разности температур покоящаяся жидкость теряет устойчивость, что затем приводит к возникновению конвективного течения. Дальнейшее увеличение разности температур приводит к неустойчивости первичного конвективного течения, а гидродинамический кризис приводит к кризису теплопередачи. Вторичное конвективное течение, формирующееся при этом, далее также может стать неустойчивым, так что в результате последовательности таких кризисов может развиться турбулентное течение [3], [4]. Этим вопросам посвящена обширная литература, в частности, монографии [2]–[14].

Постоянный интерес к подобного рода задачам, в частности, к задаче о неустойчивости Релея – Бенара, поддерживается из-за новых практических приложений. Так, в [14], [15] отмечается, что за пределами “чистой” гидродинамики формирование структур, близких к пространственно-периодическим, наблюдается при росте кристаллов, распространении фронтов затвердевания, электрохимических неустойчивостях нематических жидких кристаллов, химических реакционно-диффузионных процессах, автокаталитических реакциях, изгибе тонких пластин и оболочек и многом другом. Кроме того, считается, что гидродинамический подход, базирующийся на модели Буссинеска, неприменим в условиях малой гравитации [16]–[19]. Развитие многих приложений требует более тонкого теоретического анализа, в частности, установления критериев различения термогравитационной неустойчивости Релея – Бенара [14], [15] и термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони [20]. Так в [3], анализируя экспериментальные результаты, авторы пришли к заключению, что в тонких слоях вертикальный перепад температуры мал, и поэтому релеевская неустойчивость не реализуется, а реализуется неустойчивость Марангони. В слоях больших толщин вклад неустойчивости Марангони мал, а неустойчивость развивается по механизму Релея. Конкуренция двух механизмов наблюдается на масштабе промежуточных толщин. В то же время практические приложения демонстрируют значительное усложнение “классических” задач. Так, например, для динамики сезонной циркуляции в водоемах представляет интерес задача Релея – Бенара при аномальной зависимости плотности воды от температуры [21]. Развитие нанотехнологий приводит к постановке задач о поведении тонких пленок, когда подогрев снизу приводит к их разрыву и формированию чередующихся “сухих” и “несухих” областей или капель, соединенных ультратонкими пленками [22]–[25]. Кроме того, сформулирован ряд задач, в которых данный тип задач о неустойчивости слоя жидкости встроен в более общую задачу тепломассопереноса, например, при испарении легкой фракции из многокомпонентной смеси, в результате чего происходит изменение температуры и концентрации вблизи поверхности [7], [26]. К подобного рода задачам в усложненной постановке может быть отнесена задача об устойчивости слоя бинарного электролита между двумя ионообменными мембранами при прохождении электрического тока [27]. Усложнение практических задач, в которые в качестве отдельного блока могут входить задачи о неустойчивости жидкости и развитии конвекции, с одной стороны, а также развитие методов моделирования и выполнения вычислительных экспериментов с использованием высокоэффективных численных методов и быстродействующих компьютеров, требуют разработки обобщенного подхода к моделированию и интерпретации результатов вычислительных и натурных экспериментов. Попытки разработки подобного обобщенного подхода предпринимались ранее, например, путем отнесения большого числа кооперативных явлений, демонстрирующих неустойчивости, к фазовым переходам [1]. В свою очередь фазовые переходы в различных системах могут быть рассмотрены с единых позиций в рамках термодинамики (термодинамики неравновесных фазовых переходов) [28]–[30]. Подход, развиваемый в работах [28]–[30], базируется на том представлении, что любая система может быть охарактеризована как в устойчивом, так и в неустойчивом состояниях термодинамическим потенциалом Гинзбурга – Ландау, имеющим форму свободной энергии Гиббса – Гельмгольца. В данной работе ставится задача распространить этот подход на задачу Релея – Бенара. В этом случае система в виде слоя жидкости, подогреваемого снизу, рассматривается первоначально как неустойчивая в термодинамическом отношении, т. е. обладающая избыточной энергией — потенциальной энергией в поле тяготения, которая может трансформироваться в гидродинамическую составляющую конвективного течения. Следует отметить, что подобного типа “термодинамическая” постановка задачи Релея – Бенара была сформулирована в [34]. Однако развиваемый в [28]–[30] подход имеет принципиальные отличия от “энтропийного” подхода, представленного в [34], поскольку в качестве главной характеристики поведения системы используется свободная энергия (энтропия входит одним из членов в уравнение Гиббса – Гельмгольца и является важной, но не единственной термодинамической величиной, определяющей поведение и динамику системы). Кроме того, развиваемый в [28]–[30] подход включает в себя термодинамический формализм теории неравновесных процессов Кана – Хилларда [35]–[44], развитый затем в работах [45], [46].

В докладе приводится реконструкция начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода и конвективной неустойчивости Релея – Бенара как неравновесных фазовых переходов, механизмом которых является спинодальный распад (диффузионное расслоение).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
3. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
5. *Брацун Д. А.* Динамика многофазных многокомпонентных жидкостей с элементами внешнего управления // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2010.
6. *Зюзгин А. В.* Экспериментальное исследование тепловой конвекции в переменных силовых полях // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2011.
7. *Прокудина Л. А.* Неустойчивость физико-химических систем при фазовых переходах и нарушении пространственной симметрии // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Челябинск: Южно-Уральский гос. ун-т, 1999.
8. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
9. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
10. *Джозеф Д.* Устойчивость движения жидкости. М.: Мир, 1981.
11. *Шлихтинг Г.* Возникновение турбулентности. М.: ИЛ, 1962.
12. *Шкадов В. Я.* Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: МГУ, 1973 (Науч. труды Ин-та механики МГУ, № 25).
13. *Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.* Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
14. *Гетлинг А. В.* Конвекция Рэлея – Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
15. *Гетлинг А. В.* Формирование пространственных структур конвекции Рэлея – Бенара // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161, № 9. С. 1–80.
16. *Самойлова А. Е.* Конвективная устойчивость горизонтальных слоев жидкости с деформируемой границей раздела // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2015.
17. *Андреев В. К., Бекежанова В. Б.* Устойчивость неизотермических жидкостей. Красноярск: СФУ, 2010.
18. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.
19. *Пухначев В. В.* Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.

20. *Зейтунян Р. Х.* Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168, № 3. С. 259–286.
21. *Ермоленко А. Н.* Задача Рэлея – Бенара для аномальной жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48, № 2. С. 27–38.
22. *Krishnamoorthy S., Ramaswamy B., Joo S. W.* Spontaneous rupture of thin liquid films due to thermocapillarity: A full-scale direct numerical simulation // Phys. Fluids. 1995. V. 7, No. 9. P. 2291–2293.
23. *Vanhook S. J., Schatz M. F., Swift J. B., McCormick W. D., Swinney H. L.* Long-wavelength surface–tension–driven Bénard convection: experiment and theory // J. Fluid Mech. 1997. V. 345. P. 45–78.
24. *Oron A.* Three-dimensional nonlinear dynamics of thin liquid films // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85, No. 10. P. 2108–2111.
25. *Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G.* Long-scale evolution of thin liquid films // Rev. Mod. Phys. 1997. V. 69, No. 3. P. 931–980.
26. *Бармакова Т. В., Уварова Л. А., Бармакова Н. М.* Динамика термокапиллярной неустойчивости в процессе неизотермического испарения многокомпонентных жидких смесей // Складнi системи i процеси (Сложные системы и процессы). 2012. № 2. С. 33–39.
27. *Бограчев Д. А., Преображенский А. А., Давыдов А. Д.* Неустойчивость Рэлея – Бенара в плоском слое раствора электролита между двумя горизонтальными ионоселективными мембранами // Журн. физ. химии. 2008. Т. 82, № 11. С. 2154–2159.
28. *Яковлев Н. Н., Лукашев Е. А., Радкевич Е. В.* Проблемы реконструкции процесса направленной кристаллизации // ДАН. 2008. Т. 421, № 5. С. 625–629.
29. *Яковлев Н. Н., Лукашев Е. А., Радкевич Е. В.* Исследование процесса направленной кристаллизации методом математической реконструкции // ДАН. 2012. Т. 445, № 4. С. 398–401.
30. *Лукашев Е. А., Яковлев Н. Н., Радкевич Е. В., Васильева О. А.* О проблемах ламинарно-турбулентного перехода // ДАН. 2016. Т. 471, № 3. С. 270–274.
31. *Lukashev E. A., Yakovlev N. N., Radkevich E. V., Palin V. V.* On the possibility of the Cahn–Hilliard approach extension to the solution of gas dynamics problems (inner turbulence) // 40th International Conference "Applications of Mathematics in Engineering and Economics" (AMEE'14). AIP Conference Proceedings. 2014. V. 1631. P. 197–208.
32. *Яковлев Н. Н., Лукашев Е. А., Радкевич Е. В.* О визуализации начальной стадии кристаллизации бинарных сплавов // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2014. Т. 11, № 2. С. 5–36.

33. *Лукашев Е. А., Яковлев Н. Н., Радкевич Е. В., Васильева О. А.* О распространении теории неравновесных фазовых переходов на ламинарно-турбулентный переход // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2016. Т. 14, № 1. С. 5–40.
34. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
35. *Cahn J. W., Hillard J. E.* Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. V. 28, No. 2. P. 258–267.
36. *Cahn J. W.* Free energy of a nonuniform system. II. Thermodynamic basis // J. Chem. Phys. 1959. V. 30, No. 5. P. 1121–1124.
37. *Cahn J. W., Hillard J. E.* Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid // J. Chem. Phys. 1959. V. 31, No. 3. P. 688–699.
38. *Cahn J. W.* On spinodal decomposition // Acta Metallurgica. 1961. V. 9, No. 9. P. 795–801.
39. *Cahn J. W.* On spinodal decomposition in cubic crystals // Acta Metallurgica. 1962. V. 10, No. 3. P. 179–183.
40. *Cahn J. W.* Coherent fluctuations and nucleation in isotropic solids // Acta Metallurgica. 1962. V. 10, No. 10. P. 907–913.
41. *Cahn J. W.* Magnetic aging of spinodal alloys // J. Appl. Phys. 1963. V. 34, No. 12. P. 3581–3586.
42. *Cahn J. W.* Phase separation by spinodal decomposition in isotropic systems // J. Chem. Phys. 1965. V. 42, No. 1. P. 93–99.
43. *Cahn J. W.* Spinodal decomposition // Trans. Met. Soc. AIME. 1968. V. 242, No. 2. P. 166–180.
44. *Hoffman D. W., Cahn J. W.* A vector thermodynamics for anisotropic surfaces. I. Fundamentals and applications to plane surface junctions // Surface Science. 1972. V. 31. P. 368–388.
45. *Omel'yanov G. A., Danilov V. G., Radkevich E. V.* Asymptotic solution of the conserved phase field system in the fast relaxation case // Eur. J. Appl. Math. 1998. V. 9, No. 1. P. 1–21.
46. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // Eur. J. Appl. Math. 1999. V. 10, No. 1. P. 55–77.
47. *Рабинович М. И.* Стохастические автоколебания и турбулентность // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125, № 1. С. 123–168.
48. *Сабденов К. О.* Фрактальная теория перехода медленного горения в детонацию в газах // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 6. С. 106–112.
49. *Лапин Ю. В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982.

Лекция 2. Нестандартная гидродинамика (рождение двухскоростного режима) и неустойчивость Марангони

На предыдущей лекции мы рассмотрели две классические гидродинамические неустойчивости: Рейнольдса (ламинарно-турбулентный переход) и конвективную неустойчивость Релея – Бенара. В ближайшее время мы закончим реконструкцию еще одной из базовых гидродинамических неустойчивостей — капиллярной неустойчивости Марангони (тейлоровская неустойчивость по сути аналог неустойчивости Релея – Бенара в поле сил Кориолиса). Возникает ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ОБЩНОСТЬ построения реконструкции всех этих неустойчивостей: 1) многообразие равновесия в фазовом пространстве, определяющее уравнения состояния; 2) наличие двух энтропий (макро и микро). Дальше нужен выход на физиков: как, каким усреднением (может атомистическим подходом [23]) получить построенные феноменологические модели реконструкции начальных стадий гидродинамических неустойчивостей.

Существующие формы моделирования турбулентности отражают две крайности — волновую (вибрационная газовая динамика, см., например, [1]) и, наиболее распространенную, диффузионную (статистическая) теорию турбулентности [18]–[21]. Современные подходы к теоретическому описанию начальной стадии внутренней турбулентности дают результаты, плохо согласуемые с экспериментом. Нашей задачей было построение реконструкции начальной стадии турбулентности, промежуточную для этих двух крайностей, согласующую волновой и диффузионный характер турбулентности. В [9], [10] на первом шаге был построен математический объект, реконструирующий основные неустойчивости процесса и стабилизирующий их обратные связи. Грубо говоря, была построена аналоговая машина для воспроизводства базовых свойств турбулентности. Ее создание потребовало согласования микро и макро масштабов, волнового и диффузионного процессов. В частности, удалось построить математическую реконструкцию начального этапа внутренней турбулентности и ПРЕЖДЕ ВСЕГО — зарождение двухскоростного режима и перемежаемости. Была предложена возможная гипотеза, объясняющая их зарождение — катастрофа Римана – Гюгонио и неравновесный фазовый переход, механизмом которого является диффузионное расслоение. В [13] отмечается, что на начальной стадии турбулентности образуются два типа возмущения с разными скоростями перемещения по газу (звуковые — со скоростью звука и энтропийно-вихревые — со скоростью потока газа), что позволяет выдвинуть гипотезу существования на мезоструктурном уровне двухскоростной гидродинамики, когда разные части газа (инертная часть и флуктуации уплотнений) обладают разными скоростями относительно неподвижного газа, разными коэффициентами переноса, если рассматривать поток этих флуктуаций, обусловленный градиентом их плотностей. Как видим, эти факты дают экспериментальное обоснование пункта 1). Как отмечается Г. Николис, И. Пригожиным, возникновение двухскоростного потока (двух типов возмущений с разными скоростями перемещения по газу) можно назвать катастрофой Римана – Гюгонио ([14], с. 189).

Трудности расчетов таких процессов заключаются в том, что моделирование проводится одновременно на нескольких масштабных уровнях. К настоящему времени в экспериментальных исследованиях изучены многие детали начальной стадии процесса внутренней турбулентности, но общего теоретического представления об этом процессе пока не существует. Модель, используемая в данной работе, основана на многоскоростной системе уравнений Эйлера, распространение возмущений в которой приводит к катастрофе Римана – Гюгонио, являющейся причиной возникновения двухскоростного режима. Для описания образования флуктуаций плотности, приводящих к перемежаемости, используется модифицированное уравнение Кана – Хилларда (накачка, в терминологии Хакена, флуктуаций плотности). Разномасштабность требует значительных вычислительных ресурсов. Двумерные расчеты основаны на явных и явно-итерационных алгоритмах, эффективно реализованных на многопроцессорной вычислительной системе. В данной работе представлена попытка обобщения термодинамической теории Кана – Хилларда на более широкий класс объектов по сравнению с тем, для которого она первоначально создавалась — описание процесса спинодального распада сплава [11], [12]. Мезоструктурный масштаб представляет интерес не только для материаловедения. Характерный масштаб турбулентности (пульсации давления, завихренность по Тейлору и Томсону, моли Прандтля) также относится к этому структурному, но динамически подвижному уровню. К объектам этого же масштаба следует отнести характерные размеры фронта ударной волны и элементов ее структуры: скачков уплотнения, ударных, энтропийных и релаксационных слоев.

Как мы отмечали выше, существующие формы моделирования турбулентности отражают две крайности: волновую (вибрационная гидродинамика) и, наиболее распространенную, диффузионную (статистическая) теорию турбулентности. Наша задача — построить реконструкцию начальной стадии турбулентности, промежуточную для этих двух крайностей, согласующую волновой и диффузионный характер турбулентности, и дать возможное объяснение зарождения двухскоростного режима и перемежаемости. Для реконструкции зарождения двухскоростного режима как базу макро уровня (для описания волновых свойств процесса) мы используем классическую модель механики сплошных сред — регуляризацию вязкостью одной из хорошо известных форм системы Эйлера (см. (1)) для смеси [15], [16], когда задана концентрация примеси. Таким образом, для описания визуализации в гиперзвуковом потоке газа начальной стадии образования флуктуации плотности концентрации **c** с разными скоростями, соответственно скорости газа и флуктуаций плотности (вихрей), мы используем три уравнения макро уровня: уравнения двухскоростной системы Эйлера — уравнение неразрывности для суммарной плотности и средней скорости и уравнения для импульсов газа и вихрей. Стандартно, введя механизмом, действующим в зоне ударной волны, вязкость, получим уравнения

$$\begin{gathered}\partial_t\varrho+\partial_x(\varrho U)=\varepsilon\partial_x^2\varrho,\\ \partial_t(\varrho U)+\partial_x(\varrho U^2+2P(c,\varrho))=\varepsilon\partial_x^2 U,\\ \partial_t((1-c)\varrho u_1)+\partial_x((1-c)\varrho u_1^2+P(c,\varrho))=\varepsilon\partial_x^2 u_1,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\varrho_2 = c\varrho$ и u_2 — плотность и скорость флуктуаций, $\varrho_1 = (1-c)\varrho$ и u_1 — плотность и скорость инертной части газа, $P(c,\varrho)$ — давление и $U = cu_2+(1-c)u_1$ — среднерасходная скорость. Для описания производства флуктуаций плотности также, как в [17], использовали механизм диффузионного расслоения. Мы применим расширение [23], [24], [17] подхода Кана и Хилларда [11], [12] на решение задач газовой динамики. Четвертое уравнение реконструкции — уравнение мезо-уровня накачки (в терминах Хакена [27]) флуктуаций плотности:

$$\partial_t c+U\partial_x c-\partial_x(c(U-u_2))=K(c,T).\tag{2}$$

Явление диффузионного расслоения в зоне ударной волны моделируется при помощи производства флуктуаций плотности в уравнении (2) в форме "обобщенного химического потенциала" (уравнения Кана – Хилларда [11], [12]), где $K(c,T)$ (см. [23]) — производство флуктуаций:

$$K(c,T) = \partial_x\Big(\frac{D}{T}\partial_x\mu\Big),$$

T — температура. Здесь D — коэффициент макро диффузии, обобщенный химический потенциал

$$\mu = \ {}'_c(c,T) - \varepsilon^2\partial_x^2 c.$$

При этом коэффициент диффузии как производная химического потенциала по составу может в определенном интервале составов принимать отрицательные значения (“отрицательная” или “восходящая” диффузия). Потенциал Ван-дер-Ваальса $\ {}'_c(c,T) = 4(c-c^+)(c-c_{cr})(c-c^-)$, $c^\pm$ и c_{cr} — заданные параметры, зависящие от температуры так, что $c^\pm, c_{cr} \in (0,1)$, с симметричным потенциалом $\ (c) = (c-c^+)^2(c-c^+)^2$, когда $2c_{cr} = c^+ + c^-$. В дальнейшем, для простоты, мы рассмотрим изотермический случай, когда $T = \mathrm{const}$, и случай $T = P/\kappa\varrho$ — температура совершенного газа.

Наличие диффузионного расслоения особенно наглядно демонстрируется в приближении сильного разбавления [26], когда в смеси в большом количестве находится инертное вещество. Это приближение с хорошей точностью пригодно при анализе процессов горения углеводородных горючих в воздухе, когда содержание азота в смеси достаточно велико (порядка 80 процентов). В [25] доказано наличие диффузионного расслоения в сферически симметричном случае.

Предложенная гипотеза механизма, действующего в зоне ударной волны, опирается на предположение, что существенную роль в формировании флуктуаций плотности играют диффузионное расслоение и возникновение двухскоростного режима (катастрофа Римана – Гюгонио). Реконструкция этих базовых свойств потока, диффузионной и волновой характеристик потока и их согласование станет предметом наших исследований. Как мы покажем на лекции, возникновение двухскоростного режима (катастрофа Римана – Гюгонио) связано с потерей строгой гиперболичности многоскоростной системы Эйлера (нарушение условия Лакса – Филлипса классической гидродинамики), в то время как эффект рождения перемежаемости связан с предположением о существенной роли в формировании флуктуаций плотности диффузионного расслоения (диффузионная природа процесса). Последнее вводится кинетическим уравнением производства флуктуаций плотности.

Потенциал определяется спинодалями $c^{\pm}(T)$, существование которых следует из утверждения Пригожина, что возникновение двухскоростного потока можно интерпретировать, как: "переходы при множественных стационарных состояниях по закону "все или ничего" и теория катастроф" и определяются экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раушенбах Б. В.* Вибрационное горение. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.
2. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. (Пер. с англ.: *Evans L. C.* Partial differential equations. Grad. Stud. Math., vol. 19. Providence: Amer. Math. Soc., 1998.)
3. *Lukashev E. A., Palin V. V., Radkevich E. V., Yakovlev N. N.* Nonclassical regularization of the multicomponent Euler system // J. Math. Sci. (New York). 2014. V. 196, No. 3. P. 322–345.
4. *Филлипов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
5. *Плисс В. А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1958.
6. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965.
7. *Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.* Турбулентность и горения. М.: Наука, 1986.
8. *Гольдштейн С. (ред.).* Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. М.: ИЛ, 1948.
9. *Лукашев Е. А., Палин В. В., Радкевич Е. В., Яковлев Н. Н.* О неклассической регуляризации многокомпонентной системы Эйлера // Проблемы мат. анализа. 2013. Вып. 73. С. 67–86.
10. *Радкевич Е. В.* О природе бифуркаций однофронтовых решений усеченной системы Эйлера // Проблемы мат. анализа. 2013. Вып. 73. С. 125–139.
11. *Cahn J. W., Hillard J. E.* Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. V. 28, No. 2. P. 258–267.
12. *Cahn J. W., Hillard J. E.* Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid // J. Chem. Phys. 1959. V. 31, No. 3. P. 688–699.
13. *Брэдшоу П.* Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974.
14. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979.

15. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 184–195.
16. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М: Наука, 1987.
17. *Яковлев Н. Н., Лукашев Е. А., Радкевич Е. В.* О визуализации начальной стадии кристаллизации бинарных сплавов // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2014. Т. 11, № 2. С. 5–36.
18. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
19. *Prandtl L.* Bericht über Untersuchungen zur augebildeten Turbulenz // Z. Angew. Math. Mech. 1925. V. 5, No. 2. C. 136–139.
20. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
21. *Клаузер Ф.* Турбулентный пограничный слой // Проблемы механики, вып. 2. М.: ИЛ, 1959. С. 297–340.
22. *Скрипов В. П., Скрипов А. В.* Спинодальный распад (фазовый переход с участием неустойчивых состояний) // Успехи физ. наук. 1979. Т. 128, № 2. С. 193–231.
23. *Dreyer W., Wagner B.* Sharp-interface model for eutectic alloys. Part I. Concentration dependent surface tension // Preprint, 2003.
24. *Радкевич Е. В.* Математические вопросы неравновесных процессов. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007 (Белая серия в математике и физике, т. 4).
25. *Кузнецов В. Р.* // Материалы IV Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву. М.: Наука, 1977.
26. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
27. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.

Цикл лекций

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Скубачевский А. Л.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
skub@lector.ru

Лекция 1. Разрешимость и гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений

Интерес к исследованию эллиптических функционально-дифференциальных уравнений связан с их приложениями к многим важным задачам физики и механики, а также приложениями к другим разделам математики. Кроме того, эллиптические функционально-дифференциальные уравнения обладают рядом принципиально новых свойств. Например, символ сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения может менять знак, а гладкость обобщенных решений краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений может нарушаться внутри области и сохраняется лишь в некоторых подобластях. В лекции будут получены необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности дифференциально-разностных уравнений в алгебраической форме, а также изложены спектральные свойства соответствующих операторов. Будет доказано, что гладкость обобщенных решений краевых задач для таких уравнений сохраняется лишь в некоторых подобластях, а также будут получены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости решений на границе соседних подобластей.

Лекция 2. Приложения к теории нелокальных эллиптических задач и к проблеме Като о корне квадратном из оператора

В 1969 году А. В. Бицадзе и А. А. Самарский рассмотрели задачу о нахождении решения эллиптического уравнения 2-го порядка в прямоугольной области, удовлетворяющего нелокальным краевым условиям, связывающим значения искомой функции на некоторых частях границы со значениями на сдвигах этих частей внутрь области. В общем случае задача о разрешимости эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями была сформулирована как нерешенная проблема. В лекции будет установлена связь между нелокальными эллиптическими задачами и краевыми задачами для эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Этот результат позволит применить теоремы о разрешимости и спектральных свойствах сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов к исследованию разрешимости и спектральных свойств нелокальных эллиптических задач.

Одной из известных нерешенных проблем функционального анализа является проблема Като о корне квадратном из регулярно аккретивного оператора, сформулированная им в 1961 году: "Верно ли, что область определения корня квадратного из этого оператора равна области определения корня квадратного из сопряженного оператора?" Ж.-Л. Лионсом было доказано, что гипотеза Като справедлива для сильно эллиптических дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами. В дальнейшем P. Auscher, S. Hofman, A. McIntosh, P. Tchamitchian доказали, что гипотеза Като выполняется для сильно эллиптических дифференциальных операторов с измеримыми ограниченными коэффициентами. В лекции будет показано, что гипотезе Като удовлетворяют сильно эллиптические функционально-дифференциальные операторы.

Лекция 3.
Приложения к исследованию упругих деформаций многослойных пластин и оболочек, а также к теории нелинейных лазерных систем с обратной связью

В лекции будут рассматриваться приложения теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений к задачам об упругих деформациях многослойных пластин и оболочек, а также к возникновению автоколебаний в нелинейных лазерных системах.

Упругие деформации трехслойной пластины с гофрированным заполнителем и условиями жесткого закрепления по краям пластины описываются системой 4-х дифференциально-разностных уравнений, содержащих сдвиги аргумента как в старших производных, так и в младших членах. Будут изложены результаты об однозначной разрешимости

1-й краевой задачи для этой системы, вещественности, положительности и дискретности спектра соответствующего оператора, а также сходимости метода Ритца.

В исследовании задачи о бифуркациях Андронова – Хопфа периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения, описывающего автоколебания в нелинейных лазерных системах с обратной связью, возникает задача о существовании ортонормированного базиса, состоящего из собственных функций эллиптического функционально-дифференциального оператора, который является линеаризацией эллиптической части рассматриваемого параболического уравнения. Будут получены необходимые и достаточные условия существования указанного ортонормированного базиса.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Тезисы

PLENARY LECTURES

Abstracts

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ПОДХОД К АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Белоносов В. С.[1,2], **Санков И. И.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* bvs@math.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* sii200192@gmail.com

Фундаментальную роль в теории возмущений играют методы асимптотических разложений по степеням малого параметра, объединенные идеей о представлении нестационарного процесса как композиции плавных эволюционных изменений и малых быстрых осцилляций. К ним относятся метод нормальных форм, метод усреднения и некоторые другие. Эти методы приводят к дифференциальным уравнениям, приближенно описывающим интересующие нас особенности точных решений. Вообще говоря, эти особенности тоже зависят от параметра. При его уменьшении они могут "выходить" за пределы областей, в которых установлены оценки погрешностей приближений, приводя к потере эффективности асимптотических методов.

Данную проблему можно преодолеть, если так модифицировать соответствующий метод, чтобы фазовый портрет усредненного уравнения не зависел от малого параметра, но по-прежнему отражал особенности точных решений. В общем виде эта задача является достаточно сложной. Однако ее удается решить для имеющих большое прикладное значение уравнений Матьё – Хилла $u''(t) = -Au(t) + \varepsilon F(\omega t, u)$, где $A > 0$, ε — малый параметр, $F(t, u)$ — многочлен по переменной u с почти периодическими по t коэффициентами. Если перейти к новой переменной $v = \varepsilon^\alpha u$, а затем методом Крылова – Боголюбова построить разложение второго порядка по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, то при подходящем выборе α фазовый портрет усредненной системы действительно не будет зависеть от ε. В настоящем докладе подведены итоги этого исследования.

НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ В ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

Блиев Н. К.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан;
bliyev.nazarbay@mail.ru

Эллиптическая система вещественных дифференциальных уравнений Бельтрами на плоскости в комплексной записи имеет вид:

$$\partial_z W - q(z)\partial_z W = 0. \tag{1}$$

Из условия эллиптичности системы следует, что

$$|q(z)| \leq q_0 < 1 \quad (q_0 = \mathrm{const}). \tag{2}$$

Под *обобщенным решением* уравнения (1) в области G комплексной плоскости E точек $z = x + iy$ понимается функция $W(z)$, допускающая обобщенные производные $\partial_z W$ и $\partial_z W$ из $L_p(G)$, $p \geq 1$, и удовлетворяющая (1) почти всюду в G. Обобщенное решение, гомеоморфно отображающее ограниченную область (малую окрестность, всю плоскость), называется *гомеоморфизмом уравнения Бельтрами.*

Всюду в дальнейшем считаем, что измеримая в G функция $q(z)$ удовлетворяет условию (2). Кроме того, $q(z)$ принадлежит некоторым пространствам Бесова, которые будут указаны ниже.

Приведем формулировки следующих используемых в дальнейшем результатов автора из работы [1].

Теорема 1. *Пусть $q(z) \in B^r_{p,1}(G_0)$, $2 < p < \infty$, $r = \frac{2}{p}$, в некоторой окрестности G_0 с границей из $\mathbb{C}^1_\nu$, $\frac{2}{p} < \nu \leq 1$, произвольной фиксированной точки $z_0 \in E$. Тогда в малой окрестности G'_0, $G'_0 \subset G_0$, точки z_0 существует локальный непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм $W_0(z)$ уравнения (1), принадлежащий $B^{1+r}_{p,1}(G'_0)$ ($B^{1+r}_{p,1}(G'_0) \hookrightarrow \mathbb{C}'(\overline{G'_0})$).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 на $q(z)$, $W_0(z)$ — гомеоморфизм уравнения (1), соответствующий окрестности $G'_0 \subset G_0$ точки z_0. Тогда любое обобщенное решение $W(z)$ уравнения (1) в G'_0 имеет вид:*

$$W(z) = \quad (W_0(z)),$$

следовательно, оно принадлежит $B^{1+r}_{p,1}(G'_0)$. Здесь $\quad(W)$ — произвольная голоморфная функция комплексного аргумента в области $W_0(G'_0)$.

С помощью указанных теорем получены следующие результаты.

Теорема 3. *Пусть $q(z) \in B^r_{p,1}(E)$, $1 < p < \infty$, $r = \frac{2}{p}$. Тогда в любой области G, компактно расположенной в E ($\overline{G} \subset E$), существует непрерывно дифференцируемый глобальный гомеоморфизм уравнения (1), который принадлежит $B^{1+r}_{p,1}$ в любой ограниченной части E.*

Теорема 4. *Пусть $q(z) \in B^r_{p,1}(E)$, $2 < p < \infty$, $r = \frac{2}{p}$, и $q(z) \equiv 0$ вне некоторого фиксированного круга K с центром в начале координат. Тогда уравнение (1) имеет полный непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм, отображающий плоскость z на плоскость W, вида*

$$W(z) = z - \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} dK_\zeta,$$

где $\omega(z) \in B^r_{p,1}(E)$ — решение сингулярного интегрального уравнения

$$\omega - q(z)\prod\omega = q(z).$$

Здесь $\prod\omega = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dK_\zeta$ существует в смысле главного значения Коши.

Теорема 5 (принцип аргумента). *Пусть $q(z) \in B^r_{p,1}(E)$, $2 < p < \infty$, $r = \frac{2}{p}$, и $W(z)$ — решение уравнения (1) в G, которое удовлетворяет условиям: 1) $W(z) \in \mathbb{C}(\overline{G})$, 2) $W(z) \neq 0$ на границе $\quad$ области G. Тогда $W(z)$ может иметь внутри G лишь конечное число нулей, которое определяется по формуле*

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta \quad \arg W(z),$$

причем каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блиев Н. К.* Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. Алма-Ата: Наука, 1985. (Англ. перевод: *Bliev N. K.* Generalized analytic functions in fractional spaces. Harlow: Longman, 1997.)

СФЕРИЧЕСКИЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Васкевич В. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; vask@math.nsc.ru

В докладе рассматриваются последовательности кубатурных формул на единичной сфере многомерного евклидова пространства [1, 2]. Множества узлов рассматриваемых кубатурных формул последовательно вкладываются друг в друга, образуя в пределе плотное на исходной сфере подмножество. В качестве области действия кубатурных формул, т. е. в качестве класса подынтегральных функций, выступают сферические пространства Соболева [2]. Допускается, что эти пространства могут иметь дробную гладкость. Доказано, что среди всевозможных сферических кубатурных формул с заданной совокупностью узлов существует и единственна формула с наименьшей нормой функционала погрешности — оптимальная [1]. Установлено, что веса оптимальной кубатурной формулы являются решением специальной невырожденной системы линейных уравнений. Доказано, что при неограниченном возрастании числа узлов нормы функционалов погрешности оптимальных кубатурных формул стремятся к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.
2. *Васкевич В. Л.* Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1245–1262.

О ПОНЯТИИ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ

Годунов С. К.[1], **Ключинский Д. В.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* godunov@math.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* dmitriy_klyuchinskiy@mail.ru

В докладе будут приведены примеры разностных моделей, по которым проводились расчёты разрывных решений (ударных волн и задач о распадах разрывов при столкновениях таких волн). Были замечены некоторые особенности в результатах численных расчётов, которые, повидимому, придётся учитывать в формулировке понятия обобщённого решения.

Постановки задач были предложены первым автором, тогда как второй проводил многочисленные расчёты в течение полутора лет, и именно он обратил внимание на возникающие особенности в результатах расчётов.

Мы благодарны И. М. Куликову и А. Н. Кудрявцеву за участие в дискуссиях по поводу некоторых утверждений последнего в его докторской диссертации, которые и привели к разработке использовавшейся разностной схемы. Нам также было важно участие С. В. Фортовой и В. В. Шепелева, которые повторили основные наши расчёты и подтвердили их правильность.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕПЛОВОГО И ВОЛНОВОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Кальменов Т. Ш.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан; kalmenov@math.kz

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых нас интересует описание физического процесса только на отдельном (от всего процесса) его участке. При этом поведение процесса на границе рассматриваемого участка заранее не может быть задано. Таким образом, мы приходим к задаче об определении таких краевых условий, которые бы вместе с заданными начальными условиями однозначно восстанавливали бы наше (заранее заданное) решение.

В нашей работе [1] построены краевые условия для объемного гармонического потенциала, которые описывают хорошо известный в теоретической физике эффект “прозрачных краевых условий”, пропускающих уходящие волны и отражающих приходящие волны [2]. Наличие таких краевых условий объемного потенциала позволяет свести задачу с условиями излучения типа Зоммерфельда в бесконечной области к задаче в ограниченной области и эффективно применять численные методы [3]. Это краевое условие было успешно применено для вычисления в явном виде собственных значений и собственных функций объемного гармонического потенциала в шаре [1, 2].

В докладе рассматриваются вопросы построения краевых условий для теплового и волнового потенциалов. Будут продемонстрированы краевые условия как для объемных, так и для поверхностных потенциалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала // ДАН. 2009. Т. 428, № 1. С. 16–19.
2. *Kal’menov T. Sh., Suragan D.* A boundary condition and spectral problems for the Newton potential // Operator Theory: Advances and Applications, vol. 216. Basel: Birkhäuser, 2011. P. 187–210.
3. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 6. С. 1063–1068.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

Кангужин Б. Е.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; kanbalta@mail.ru, kanguzhin53@gmail.com

Задача Штурма – Лиувилля на компактном графе возникает при расчете электронных колебаний сложной молекулы в рамках модели свободных электронов [1]. В работе [2] изучена задача рассеяния на компактном графе, полученном присоединением бесконечных лучей.

В предполагаемом докладе изучается аналитическая природа резольвенты дифференциального оператора на компактном графе. Приведена формула резольвенты и выяснены положения ее полюсов.

В заключительной части доклада доказано сверточное представление резольвенты. В случае отрезка сверточное представление резольвенты можно найти в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов Б. С., Фаддеев М. Д.* Модель свободных электронов и задача рассеяния // Теор. и мат. физика. 1983. Т. 55, № 2. С. 257–268.
2. *Герасименко Н. И., Павлов Б. С.* Задача рассеяния на компактных графах // Теор. и мат. физика. 1988. Т. 74, № 3. С. 345–359.
3. *Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е.* Свертка, преобразование Фурье и пространства Соболева порождаемые нелокальной задачей Ионкина // Уфимск. мат. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 80–92.

УСТРАНЕНИЕ МНИМЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

Пухначев В. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
pukhnachev@gmail.com

Рассмотрено три примера краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений, решения которых (вопреки ожиданиям) оказываются регулярными вблизи линии вырождения.

Первый пример связан с уравнением Стокса

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -r\omega, \tag{1}$$

которое связывает функцию тока ψ осесимметричного течения несжимаемой сплошной среды с его завихренностью ω (здесь r и z — цилиндрические координаты). Уравнение (1) вырождается на линии $r = 0$. Получены коэрцитивные оценки в весовых классах Соболева решения задачи Дирихле для уравнения (1). Способ получения оценок основан на дифференциальной подстановке, преобразующей это уравнение в уравнение Лапласа, и последующем переходе от цилиндрических координат к декартовым координатам в трехмерном пространстве [1]. Эти оценки необходимы для доказательства разрешимости осесимметричной задачи протекания для уравнений Навье – Стокса в переменных "вихрь – функция тока" [2].

Второй пример в идейном плане близок к первому, однако теперь вырождающееся уравнение является квазилинейным и, более того, интегродифференциальным [3]. Рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{uu_r}{r}\int\limits_0^r \frac{s ds}{u(s,t)}\right), \quad 0 < r < 1, \quad t > 0; \tag{2}$$

$$u(r,0) = u_0(r), \quad 0 \le r \le 1; \quad u_r(1,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

Решение этой задачи описывает истечение осесимметричной струи вязкой несжимаемой жидкости в приближении пограничного слоя. Теорема существования и единственности решения задачи (2), (3) в весовых классах Гёльдера доказана в работе [3]. Существенными моментами доказательства являются регуляризация уравнения (2) путем превращения его в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(u)u_r}{r} \int\limits_0^r \frac{sds}{(u(s,t))} \right)$$

и последующая трактовка этого уравнения как уравнения для функции $v(x_1, x_2, t) = u(|x|, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{(v)\nabla v}{2\pi|x|^2} \iint\limits_{|y|<|x|} \frac{dy_1 dy_2}{(v(y_1, y_2, t))} \right).$$

Здесь функция $(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям: $= u$, если $0 < 3m/4 \leq u \leq 5M/4$, $= m/2$, если $u \leq m/2$, $= 3M/2$, если $u \geq 3M/2$; $m > 0$ и M — наименьшее и наибольшее значения функции u_0 на отрезке $[0, 1]$; $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Третий пример посвящен исследованию стационарного течения водного раствора полимера вблизи критической точки [4], [5]. Требуется найти решение $q(y)$ краевой задачи

$$(q')^2 - qq'' = 1 + q''' + \delta(q'q''' - qq^{(iv)}), \quad y > 0; \tag{4}$$

$$q(0) = q'(0) = 0; \quad q' \to 1, \quad y \to \infty. \tag{5}$$

Параметр $\delta > 0$ пропорционален коэффициенту релаксационной вязкости. В наиболее интересном случае малых δ решение задачи (4), (5) может быть построено в виде ряда по целым положительным степеням δ, хотя этот множитель является коэффициентом при старшей производной. Причина отсутствия пограничного слоя вблизи точки $y = 0$ состоит в вырождении уравнения (4) в этой точке в силу первого условия (5). Для обоснования асимптотического разложения используется метод Ньютона – Канторовича. В качестве начального приближения берется решение задачи (4), (5) в случае $\delta = 0$. Это хорошо изученное решение Хименца (1911) в динамике вязкой несжимаемой жидкости.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 16-01-00127) и грантом Президента РФ (проект НШ-8146.2016.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пухначев В. В.* Задача Дирихле для уравнения Стокса // Мат. заметки. 2017 (в печати).
2. *Алексеев Г. В., Пухначев В. В.* Осесимметричная задача протекания для уравнений Навье – Стокса в переменных завихренность – функция тока // ДАН. 2012. Т. 445, № 4. С. 402–406.
3. *Белоносов В. С., Пухначев В. В.* Уравнения пограничного слоя в задаче истечения осесимметричной струи // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 362. С. 48–63.
4. *Божков Ю. Д., Пухначев В. В.* Групповой анализ уравнений движения водных растворов полимеров // ДАН. 2015. Т. 460, № 5. С. 536–539.
5. *Bozhkov Yu. D., Pukhnachev V. V., Pukhnacheva T. P.* Mathematical models of polymer solutions motion and their symmetries // AIP Conf. Proc. 2015. V. 1684, Article ID 020001.

РЕШЕТЧАТЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рамазанов М. Д.

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия; ramazanovmd@yandex.ru

Предлагается алгоритм вычисления коэффициентов решетчатой кубатурной формулы на интегрантах из пространства $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|f \,|\, W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)\| = \left(\int \left|\widetilde{f}(\xi)\mu(2\pi i\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}$, $\widetilde{f}(\xi) = \int f(x)\exp(2\pi i x\xi)dx$, с естественным ограничением $\int |\mu(2\pi i\xi)|^{-2}\,d\xi < \infty$, обеспечивающим вложение $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ в пространство непрерывных функций.

Теорема 1. *Для приближения интеграла* $I_\varphi f = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)f(x)dx$ *(с весовой функцией* φ*) кубатурной формулой* $K_h f = h^n \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(h)f(hk)$ *с минимальной* $[W_2^{\mu}]^*$*-нормой функционала погрешности* $l_\varphi^\Omega : f \to I_\varphi f - K_h f$ *[1] необходимо и достаточно задать оптимальные коэффициенты равенствами* $c_k^{\mathrm{opt}}(h) = C^{\mathrm{opt}}(x,h)\big|_{x=hk}$, $k\in\mathbb{Z}^n$, *с*

$$C^{\mathrm{opt}}(x,h) = \int\limits_Q \exp(2\pi i\tau x/h)h^{-n}$$

$$\times\left(\sum_{t\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{\varphi}\left(\frac{t+\tau}{h}\right)\Big/\left|\mu\left(2\pi i\frac{t+\tau}{h}\right)\right|^2\right)\Big/\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}1\Big/\left|\mu\left(2\pi i\frac{s+\tau}{h}\right)\right|^2\right)d\tau,$$

где Q *— единичный куб* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^n$.

Ограничимся частным случаем изотропного пространства $\mu(2\pi i\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$ и $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$ — характеристической функции ограниченной области интегрирования Ω.

Теорема 2. *Асимптотически оптимально* [2] *ненасыщаемая* [3] *кубатурная формула может быть задана коэффициентами, где* $C^{as}(x,h) = 0$ *при* $\mathrm{dist}(x,\Omega) \ge h^\alpha$, $C^{as}(x,h) = 1$ *при* $\mathrm{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \ge h^\alpha$ *и* $C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi|\le 1/h^{1-\beta}} \widetilde{\chi}_\Omega(\xi)\exp(2\pi i x\xi)d\xi$ *при* $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \le h^\alpha$ *с любыми параметрами, подчиненными условию* $0<\alpha<1/2<\beta<1$.

Даются приложения общей теории решетчатых кубатурных формул и теорем 1 и 2 к проблемам: численного решения интегральных уравнений, алгоритма Бубнова – Галеркина численного решения первой краевой задачи для эллиптических уравнений, вычисления $\arg \operatorname{glob} \min_x f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \leq 10$.

Обсуждается проблема постановки численных экспериментов по найденным алгоритмам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рамазанов М. Д.* Решетчатые кубатурные формулы на изотропных пространствах. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2014.
2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

О СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Решетняк Ю. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; `Reshetnyak@math.nsc.ru`

В докладе мы даем обзор некоторых результатов из теории соболевских пространств. Основы этой теории были заложены в классических работах С. Л. Соболева (см. [1, 2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН, 2003.
2. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. II. Функциональный анализ. Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Академическое изд-во "Гео", 2006.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА И ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Романов В. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; romanov@math.nsc.ru

Рассматриваются уравнение Шредингера:

$$-\Delta u + (q(x) - k^2)u = \delta(x - y) \tag{1}$$

и обобщенное уравнение Гельмгольца:

$$-\Delta u - k^2 n(x)u = \delta(x - y) \tag{2}$$

с обычными условиями излучения на бесконечности. Здесь $x \in \mathbb{R}^3$, $k > 0$ — волновое число, $\delta(x - y)$ — дельта-функция Дирака, $y \in \mathbb{R}^3$ — параметр задачи. Предполагается, что носитель функций $q(x)$, $n(x) - 1$ заключен внутри шара $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$, границей которого является сфера S радиуса R.

Пусть $k_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Рассматриваются две обратные задачи (см. [1, 2]).

Задача 1. Найти $q(x)$ внутри B, если задан модуль решения уравнения (1) для всех $(x, y) \in S \times S$ и всех $k \geq k_0$.

Задача 2. Найти $n(x)$ внутри B, если задан модуль решения уравнения (2) для всех $(x, y) \in S \times S$ и всех $k \geq k_0$.

Основной результат исследования этих задач: 1) решение задачи 1 сведено к задаче томографии об определении $q(x)$ по всевозможным прямым, 2) решение задачи 2 сведено к обратной кинематической задаче об определении $n(x)$ внутри B по временам пробега волн между точками x и y, принадлежащими S.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00208 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* The first solution of a long standing problem: Reconstruction formula for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the Schrödinger equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, No. 4. P. 415–428.
3. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* Reconstruction procedures for two inverse scattering problems without the phase information // SIAM J. Appl. Math. 2016. V. 76, No. 1. P. 178–196.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ШАРЕ

Садыбеков М. А.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан; sadybekov@math.kz

Краевые задачи Дирихле и Неймана являются основными задачами теории гармонических функций. В одномерном случае или при рассмотрении задачи в многомерном параллелепипеде к основным задачам относят также и периодические краевые задачи. Ранее в нашей работе [1] для случая круга $\Omega = \{z = x + iy : |z| < 1\}$ были сформулированы аналоги периодической ($k = 0$) и антипериодической ($k = 1$) задач для уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$u\,(z) - (-1)^k\, u\,(z^*) = \tau\,(z)\,,\ \frac{\partial u}{\partial r}\,(z) + (-1)^k\,\frac{\partial u}{\partial r}\,(z^*) = \nu\,(z)\,,\ |z| = 1,\ y > 0.$$

Были рассмотрены два варианта, когда $z^* = x - iy$ или $z^* = -x - iy$.

В настоящем докладе мы построим аналоги краевой задачи Самарского – Ионкина для уравнения Лапласа в шаре $|x| < 1$ из $\mathbb{R}^n$:

$$u\,(x) - \alpha u\,(x^*) = \tau\,(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\,(x) + (-1)^k\,\frac{\partial u}{\partial r}\,(x^*) = \nu\,(x)\,, \quad |x| = 1,\ x_1 > 0.$$

Будут рассмотрены вопросы корректности задач, гладкости их решений, сформулированы спектральные задачи. Покажем методику построения собственных значений и собственных функций задачи.

При построении решения задач существенно используется явный вид функции Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в многомерном шаре, построенный в нашей работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садыбеков М. А., Турметов Б. Х.* Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 2. С. 264–268.
2. *Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B. Kh.* Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Var. Elliptic Equ. 2016. V. 61, No. 1. P. 104–123.

ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Хлуднев А. М.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
khlud@hydro.nsc.ru

Рассматриваются задачи равновесия упругих тел, содержащих тонкие включения различной природы при наличии отслоений. Наличие отслоения означает существование трещины между включением и упругим телом. Для описания упругих включений используются модели упругих балок Бернулли – Эйлера и Тимошенко. Обсуждаются предельные переходы по параметрам жесткости тонких включений и формулируются предельные задачи. Предельные модели соответствуют жестким и полужестким включениям, а также включениям с нулевой жесткостью.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-10000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khludnev A. M., Negri M.* Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, No. 5. P. 341–354.
2. *Khludnev A. M., Leugering G. R.* Delaminated thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Complex Syst. 2014. V. 2, No. 1. P. 1–21.
3. *Itou Kh., Khludnev A. M., Leugering G. R.* Timoshenko thin inclusions in an elastic body with possible delamination // Dokl. Phys. 2014. V. 59, No. 9. P. 401–404.
4. *Khludnev A. M., Leugering G. R.* On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, No. 5. P. 495–511.

СТЕКЛОВСКИЕ ДЗЕТА-ИНВАРИАНТЫ И ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Шарафутдинов В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; sharafut@list.ru

Действительное λ называется стекловским собственным числом ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если краевая задача

$$\Delta\, u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

имеет нетривиальное решение. Совокупность всех таких чисел $\mathrm{Sp}(\Omega) = \{0 = \lambda_0(\Omega) < \lambda_1(\Omega) \le \lambda_2(\Omega) \le \dots\}$, где каждое собственное число повторяется соответственно его кратности, называется *стекловским спектром области.* Насколько однозначно область определяется своим стекловским спектром? Этот вопрос исследуется, начиная с середины прошлого века, но все еще далек от своего решения.

Стекловская дзета-функция области определяется для $\mathrm{Re}\, s > 1$ равенством

$$\zeta_\Omega(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\lambda_n(\Omega)\big)^{-s}.$$

Она продолжается до мероморфной в комплексной плоскости функции с единственным простым полюсом в точке $s = 1$. Величины $Z_k(\Omega) = \zeta_\Omega(-2k)$ $(k = 1, 2, \dots)$ называются *стекловскими дзета-инвариантами области.* В отличие от стекловских собственных чисел, дзета-инварианты легко вычисляются с помощью компьютера [1].

Мы получаем некоторую оценку снизу для $Z_k(\Omega)$ и с ее помощью доказываем теорему компактности: семейство всех гладких ограниченных односвязных плоских областей с совпадающими стекловскими спектрами компактно в C^∞-топологии. Ранее подобный результат был известен по отношению к соболевской H^s-топологии для $s < 5/2$ [2].

Результаты получены совместно с Alexandre Jollivet.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малькович Е. Г, Шарафутдинов В. А.* Дзета-инварианты стекловского спектра плоской области // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 853–877.
2. *Edward J.* Pre-compactness of isospectral sets for the Neumann operator on planar domains // Commun. Partial Differ. Equations. 1993. V. 18, No. 7–8. P. 1249–1270.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Шафаревич А. И.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; shafarev@yahoo.com

Описаны асимптотические решения задачи Коши для линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики с начальными условиями, локализованными в малой окрестности точки, кривой, или двумерной поверхности. Обсуждается эффект смены кратности характеристик. Показано, что влияние этого эффекта определяется структурой множества точек касания внешнего магнитного поля начальной поверхности или кривой. Описан асимптотический носитель старшей части асимптотики.

CHARACTERIZATIONS FOR THE INTEGRAL OPERATORS OF HARMONIC ANALYSIS IN GENERALIZED ORLICZ–MORREY SPACES ON CARNOT GROUPS

Guliyev V. S.

Institute of Mathematics and Mechanics NASA, Baku, Azerbaijan;
Ahi Evran University, Kirsehir, Turkey; `vagif@guliyev.com`

Let $\mathbb{G}$ be a Carnot group (nilpotent stratified Lie group), $\varphi(x,r)$ be a positive measurable function on $\mathbb{G}\times(0,\infty)$ and Φ be any Young function. We denote by $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ the generalized Orlicz–Morrey space, the space of all functions $f\in L_{\rm loc}(\mathbb{G})$ for which

$$\|f\|_{M^{\Phi,\varphi}}=\sup_{x\in\mathbb{G},r>0}\varphi(x,r)^{-1}\,\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,r))}<\infty,$$

where $B(x,r)$ denote the $\mathbb{G}$-ball centered at x of radius r. For $\varphi(t)=\Phi^{-1}(t^{-n})$ the space $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})=L^{\Phi}(\mathbb{G})$ is the Orlicz space, for $\Phi(t)=t^p$ the space $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})\equiv M^{p,\varphi}(\mathbb{G})$ is the generalized Morrey space on Carnot group $\mathbb{G}$.

A survey will be given of recent results in which necessary and sufficient conditions on the functions Φ, Ψ, φ_1 and φ_2 are established ensuring the boundedness of the maximal operator, fractional maximal operator, Riesz potential, genuine singular integrals from one generalized Orlicz–Morrey space $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ to another one $M^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$. In [1], the generalized Orlicz–Morrey space $M^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ was introduced to unify Orlicz and generalized Morrey spaces (see also [2], [3]). Other definitions of generalized Orlicz–Morrey spaces can be found in [4] and [5]. In words of [6], our generalized Orlicz–Morrey space is the third kind and the ones in [4] and [5] are the first kind and the second kind, respectively.

REFERENCES

1. *Deringoz F., Guliyev V. S., Samko S.,* "Boundedness of the maximal and singular operators on generalized Orlicz–Morrey spaces," in: Operator Theory, Operator Algebras and Applications, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014, pp. 139–158 (Operator Theory: Advances and Applications, vol. 242).
2. *Deringoz F., Guliyev V. S., Hasanov S. G.,* "Characterizations for the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz–Morrey spaces," J. Inequal. Appl., **2016**, Article ID 248 (2016).

3. *Guliyev V. S., Deringoz F.*, "On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz–Morrey spaces," J. Funct. Spaces, **2014**, Article ID 617414 (2014).
4. *Nakai E.*, "Generalized fractional integrals on Orlicz–Morrey spaces," in: Banach and Function Spaces, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, pp. 323–333.
5. *Sawano Y., Sugano S., Tanaka H.*, "Orlicz–Morrey spaces and fractional operators," Potential Anal., **36**, No. 4, 517–556 (2012).
6. *Guliyev V. S., Hasanov S. G., Sawano Y., Noi T.*, "Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz–Morrey spaces of the third kind," Acta Appl. Math., **145**, 133–174 (2016).

VERY WEAK SOLUTIONS TO WAVE EQUATIONS

Ruzhansky M.

Imperial College London, London, United Kingdom;
m.ruzhansky@imperial.ac.uk

In this talk we will discuss the Cauchy problem for wave equations with very irregular (distributional) coefficients, such as, for example,

$$\partial_t^2 u - (1+\delta)\Delta\, u = 0,$$

where δ is the delta-function. Such equation does not have weak or distributional solutions in view of the impossibility to multiply distributions. We will show that the Cauchy problem has a so-called 'very weak solution' introduced in [1]. Moreover, we show that the notion of very weak solution is consistent with classical, (Sobolev's) weak, distributional, or ultradistributional solutions when they exist.

We also give further examples, such as the very weak well-posedness of the wave equation for the Landau Hamiltonian with irregular electromagnetic field shown in [2]. Moreover, further extensions are possible using the methods of nonharmonic analysis developed in [3].

The talk is based on joint works with Claudia Garetto and Niyaz Tokmagambetov.

REFERENCES

1. *Garetto C., Ruzhansky M.,* “Hyperbolic second order equations with non-regular time dependent coefficients,” Arch. Ration. Mech. Anal., **217**, No. 1, 113–154 (2015).
2. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N.,* “Very weak solutions of wave equation for Landau Hamiltonian with irregular electromagnetic field,” Lett. Math. Phys. (to appear).
3. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N.,* “Nonharmonic analysis of boundary value problems,” Int. Math. Res. Not., **2016**, No. 12, 3548–3615 (2016).

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ
Тезисы

SHORT COMMUNICATIONS
Abstracts

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Айдармамадов А. Г.

Технологический университет Таджикистана, Душанбе, Таджикистан; alisher1805@mail.ru

Пусть $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$, — весовое пространство Бергмана с нормой

$$\|f\|_{q,\gamma} \overset{def}{=} \|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q} < \infty,$$

$$\Omega_m(f,t)_{q,\gamma} = \sup\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_m(f;\rho,\tau,u)|^q d\rho d\tau\right)^{1/q} : |u| \le t\right\}$$

— обобщённый модуль непрерывности m-го порядка в пространстве $B_{q,\gamma}$. $b_n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$, $d^n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$, $d_n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$, $\delta_n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$ и $\quad_n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$ — соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники некоторого компакта $\mathfrak{M} \subset B_{2,\gamma}$ (см. [1]). $\quad(t)$ $(t \ge 0)$ — непрерывная неубывающая функция такая, что $\quad(0) = 0$. $W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m, \quad) = \left\{f \in B_{2,\gamma} : \int_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \le \quad(h)\right\}$.

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \left\{1 - \frac{\sin t}{t},\ \text{если } 0 \le t \le t_*;\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если } t_* \le t \le \infty\right\},$$

где t_* $(4,49 < t_* < 4,51)$ есть минимальный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t$.

Теорема. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$, и функция $\quad$ при любых значениях $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\quad(h)}{\quad(\pi/n)}\right)^p \ge \int_0^{nh}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \left\{\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1}. \quad (1)$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n\Big(W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m, \quad), B_{2,\gamma}\Big) = 2^{-m/2}\left\{\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p} n^{-r+\frac{1}{p}} \quad \left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников. Множество мажорант $\quad$, удовлетворяющих ограничению (1), не пусто.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабозов М. Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // ДАН. 2002. Т. 383, № 2. С. 171–174.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

Акопян Р. Р.

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; RRAkopyan@mephi.ru

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, ограниченная замкнутой жордановой спрямляемой кривой ; γ_1 — измеримое подмножество положительной меры, $\gamma_2 := \ \setminus \gamma_1$. Обозначим через $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{q,r}_{\gamma_1,\gamma_2}(G)$; $q, r \geq 1$, пространство аналитических в G функций из $H^1(G)$, имеющих граничные значения на γ_k, соответственно, из $L^q(\gamma_1)$ и $L^r(\gamma_2)$. В $\mathcal{H}$ выделим класс функций Q, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{L^r(\gamma_2,\varphi_2)} \leq 1$.

Рассматривается следующая задача оптимального восстановления. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ используем либо множество $\mathcal{O}$ всех возможных, либо $\mathcal{B}$ ограниченных, либо $\mathcal{L}$ линейных функционалов на $L^q(\gamma_1)$. Для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$ величина

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf_{T\in\mathcal{R}} \sup\left\{|f(z_0) - Tg| \colon f \in Q,\, g \in L^q(\gamma_1),\, \|f - g\|_{L^q(\gamma_1)} \leq \delta\right\}$$

есть величина оптимального восстановления в точке z_0 функций класса Q по их δ-приближённым граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$.

Теорема. *Справедливы равенства* $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{C}\delta^{\alpha}$, *где* $\mathcal{C} = \varepsilon^{1/q}(\gamma_1)\,\varepsilon^{1/r}(\gamma_2)\,\alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/r}$, $\varepsilon(\gamma_k) = \exp\left(\int_{\gamma_k} p(z_0,\zeta)\ln p(z_0,\zeta)\,ds\right)$, α — *гармоническая мера* γ_1 *относительно* G *в точке* z_0, $\beta = 1 - \alpha$ *и* p — *плотность гармонической меры.*

В докладе также будет приведен оптимальный метод восстановления. Случай $q = r = \infty$ изучен в работе [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акопян Р. Р.* Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Мат. заметки. 2016. Т. 99, вып. 2. С. 163–170.

ВЫРОЖДЕННОЕ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ РАСХОДА РЕСУРСА

Александров В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением $x = A(t)x + B(t)u$, $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in D$, где u — m-мерный вектор управления, компоненты которого подчинены ограничениям $|u_j| \leqslant M_j$, $j = \overline{1, m}$. Предполагается, что система покомпонентно полностью управляема и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geqslant T_0$) систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$ и минимизирующее функционал $J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_k} \sum\limits_{j=1}^{m} |u_j(\tau)| d\tau$. Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Разработан общий метод вычисления оптимального по расходу ресурса управления, включающий как нормальное, так и вырожденное решения задачи. Метод основан на разделении задачи на две независимые подзадачи: 1) вычисление структуры оптимального управления; 2) вычисление моментов переключений оптимального управления. Вычисление структуры основано на оригинальном методе формирования квазиоптимального управления. Вычисление моментов переключений управления основано на найденной связи между отклонениями начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовой траектории в конечный момент. Дан метод задания начального приближения. Разработан итерационный алгоритм и рассмотрены его особенности. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурса // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 5–18.
2. *Александров В. М.* Квазиоптимальное управление динамическими системами // Автоматика и телемеханика. 2016. Вып. 7. С. 47–67.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Алсыкова А. А.

Бурятская государственная сельскохозяйственная академия им. В. Р. Филиппова, Улан-Удэ, Россия; 888552@mail.ru

Доказывается разрешимость задач с пространственно-интегральными условиями для уравнения Буссинеска

$$Lu(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) - \beta u_{xxtt}(x,t) = f(x,t). \tag{1}$$

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0 < T < +\infty$, α и β есть заданные положительные числа, $f(x,t)$, $K(x,t)$, $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ — заданные функции, определенные при $(x,t) \in \overline{Q}$.

Нелокальная задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad \int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T.$$

Нелокальная задача 2. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условия

$$\int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)dx = 0, \quad \int\limits_0^1 K_2(x,t)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Самарский университет, 2012.
3. *Кожанов А. И.* Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // ДАН. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.

НЕГЛАДКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аниконов Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; anik@math.nsc.ru

В теории зондирования неоднородных сред физическими сигналами, как правило, для описания процесса используются дифференциальные уравнения в частных производных или системы уравнений. При этом часто возникает ситуация, когда приходится рассматривать дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами при старших производных. Несмотря на наличие ряда публикаций, эта тема разработана пока явно недостаточно даже для прямых и тем более для обратных задач. В настоящей работе предварительного характера рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка для двух независимых переменных. Один из коэффициентов при производных является разрывной функцией. Вследствие этого характеристические линии оказываются кусочно- гладкими кривыми. Решение задачи Коши понимается в обобщенном смысле, по аналогии с методом характеристик, где проблема сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений на характеристических линиях. Полученное обобщенное решение оказывается довольно специфичным. В частности, оно не определено в некоторой подобласти, а в другой разрывно и непродолжаемо. Мы не обнаружили подобных математических эффектов в работах других авторов, вероятно, из-за разницы в ограничениях, которые у нас ориентированы на проблемы зондирования. Кроме того, решение задачи Коши трактуется также как предел классических решений для сглаженного коэффициента. Результаты, полученные для двух указанных определений, получаются приблизительно одинаковыми, что несомненно повышает доверие к использованным подходам.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН (проект № 0314-2015-0010).

ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ

Аниконов Ю. Е.[1], **Аюпова Н. Б.**[2], **Нещадим М. В.**[3]

Институт математики им. С. Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;

[1]anikon@math.nsc.ru, [2]ayupova2@math.nsc.ru, [3]neshch@math.nsc.ru

Развивается новый способ изучения задач математической физики, в том числе и обратных, основанный на вполне определенных конечных или бесконечных системах уравнений лучевого асимптотического разложения решений параболических и гиперболических уравнений с коэффициентами, зависящими не только от пространственной переменной, но и времени. Фактически и при наличии начально-краевых условий для данных систем уравнений лучевого разложения нелинейные обратные задачи, оказывается, сводятся к прямым задачам, что и демонстрируется для конечных систем уравнений в аналитическом случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта по программе Президиума РАН “Вычислительная томография неоднородных и анизотропных сред” (код проекта 0314-2015-001), РФФИ (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Алгебро-аналитические способы построения решений дифференциальных уравнений и обратные задачи // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 3–21.
2. *Аниконов Ю. Е., Аюпова Н.Б.* Лучевые разложения и тождества для уравнений второго порядка с приложениями к обратным задачам // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2017 (принята в печать).
3. *Нещадим М. В.* Функционально инвариантные решения системы Максвелла // Сиб. журн. индустр. математики. 2017 (принята в печать).

$\mathbf{L_p}$-ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА m-МЕРНОМ ТОРЕ

Базарханов Д. Б.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан;
dauren.mirza@gmail.com

Рассмотрим периодический символ $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ и соответствующий ему формальный псевдодифференциальный оператор

$$T_a : u(x) \mapsto T_a u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i \xi x}.$$

Определение. Пусть $1 \le p \le \infty$, $t \in \mathbb{R}$, $\varrho \in [0,1]$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда периодический символ $a(x,\xi)$ принадлежит классу $L_p S^t_\varrho(s) \equiv L_p S^t_\varrho(s)(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, если для него конечна величина

$$\| \, a \,|\, L_p S^t_\varrho(s) \, \| \equiv \max_{\alpha \,:\, |\alpha| \le s} \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \langle \xi \rangle^{\varrho|\alpha| - \tau} \| \, \Delta^{\alpha}_{\xi} a(\,\cdot\,,\xi) \,|\, L_p(\mathbb{T}^m) \, \|.$$

Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная возрастающая выпуклая (на $[0,1]$) функция с $\omega(0) = 0$. Обозначим через $^{\omega} = {}^{\omega}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ пространство символов $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ таких, что $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $|\alpha| \le m+1$, $\exists c_\alpha > 0$:

$$|\partial^\alpha_\xi a(x,\xi)| \le c_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha|},$$

$$|\partial^\alpha_\xi a(x,\xi) - \partial^\alpha_\xi a(y,\xi)| \le c_\alpha \omega(|x-y|)\langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad ((x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m).$$

Пусть $^{\omega}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ — класс символов $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$, которые являются сужениями (на $\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m$) символов $a^{\mathrm{r}} \in {}^{\omega}$ таких, что $\forall \xi \in \mathbb{Z}^m$ $a^{\mathrm{r}}(x,\xi)$ — периодическая функция по пространственной переменной x.

Теорема 1. *Предположим, что $1 \le p \le \infty$; $\varrho \in [0,1]$; $t \in \mathbb{R}$ такое, что $tp_* < m(\varrho - 1)$, где $p_* = \min\{p, 2\}$. Пусть $a \in L_\infty S^t_\varrho(m+1)(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$. Тогда ПДО T_a — ограниченный оператор из $L_p(\mathbb{T}^m)$ в $L_p(\mathbb{T}^m)$.*

Теорема 2. *Предположим, что $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная возрастающая выпуклая (на $[0,1]$) функция с $\omega(0) = 0$. Тогда ПДО T_a ограничен на $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 < p < \infty$ для любого $a \in {}^{\omega}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, если и только если ω^2 удовлетворяет условию Дини: $\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < +\infty$.*

Работа выполнена при поддержке гранта 5130/ГФ4 МОН Республики Казахстан.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Балакина Е. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
balakina@math.nsc.ru

Рассматривается нестационарное линейное уравнение переноса, описывающее процесс переноса частиц в среде:

$$\frac{\partial f(t,r,\omega,E)}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r f(t,r,\omega,E) + \mu(t,r,E) f(t,r,\omega,E) = J(t,r,\omega,E).$$

К этому уравнению добавляются начальное условие (при $t = 0$ задана плотность f) и два краевых (задана плотность падающего и выходящего потоков). Функции μ и J, характеризующие среду, в которой протекает процесс, могут претерпевать разрыв по пространственной переменной (иначе говоря, среда неоднородна).

Задача состоит в том, чтобы по плотности выходящего потока определить множество, на котором функции μ и J претерпевают разрыв. Такая постановка является продолжением цикла исследований Д. С. Аниконова [1].

Для решения поставленной проблемы сначала исследуется прямая задача о нахождении плотности потока f при заданных начальном условии и плотности падающего потока (такая же постановка, но в случае непрерывных коэффициентов, была рассмотрена А. И. Прилепко [2]). Далее рассматривается некоторая функция, зависящая от известных данных, и показывается, что она принимает неограниченные значения только вблизи искомого множества.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00112 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. *Прилепко А. И., Иванков А. Л.* Обратные задачи определения коэффициента и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 109–119.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЙТРАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Баландин А. С.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; balandin-anton@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$x(t) - \sum_{j=1}^{J} a_j x(t-h_j) + \sum_{k=0}^{K} b_k x(t-r_k) = f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}_0$, $a_j, b_k \in \mathbb{C}$, $h_j > 0$, $r_k \geqslant 0$, функция f локально суммируема. Назовём *решением* уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду.

Как известно [1, раздел 5.1, теорема 1.1], при любом заданном $x(0)$ решение уравнения (1) существует, единственно и представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{2}$$

где X — *фундаментальное решение*, C — *функция Коши*. По определению $X(0) = 1$, $X(t) = 0$ при $t < 0$ и $C(s,s) = 1$, $C(t,s) = 0$ при $t < s$. Из формулы (2) видно, что все асимптотические свойства решений уравнения (1) определяются свойствами фундаментального решения и функции Коши.

Обозначим $\sigma_x = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln|X(t)|}{t}$, $\sigma_c = \overline{\lim}_{t-s\to\infty} \frac{\ln|C(t,s)|}{t-s}$.

Теорема 1. *Если $\sigma_c < 0$, то и $\sigma_x < 0$.*

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако, как показывает следующий результат, при выполнении дополнительного условия данная импликация справедлива.

Теорема 2. *Пусть $\sigma_x < 0$ и функции $g_1(p) = 1 - \sum_{j=1}^{J} a_j e^{-ph_j}$, $g_2(p) = \sum_{k=0}^{K} b_k e^{-pr_k}$, $p \in \mathbb{C}$, не имеют общих нулей одинаковой кратности с неотрицательной вещественной частью. Тогда $\sigma_c < 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

ПОПЕРЕЧНИКИ ФУРЬЕ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО – БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА – ТРИБЕЛЯ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ

Балгимбаева Ш. А.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан;
sholpan.balgyn@gmail.com

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и вещественных чисел, соответственно; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство 1-периодических по каждой переменной функций f, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^d$ с нормой $\|f \,|\, L_p\|$; $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор; $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}^1$.

Поперечником Фурье (или, что то же, *ортопоперечником*) порядка M класса функций F в пространстве L_q называется величина

$$\varphi_M(\mathrm{F}, L_q) = \inf_{\{h_\imath\}_{\imath=1}^M} \sup_{f \in \mathrm{F}} \Big\| f - \sum_{\imath=1}^{M} \langle f, h_\imath \rangle h_\imath \,\Big|\, L_q \Big\|,$$

где нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{h_\imath\}_{\imath=1}^M \subset L_\infty$. Поперечники Фурье были введены В. Н. Темляковым в 1982 г. в работе [1].

Устанавливаются точные по порядку оценки поперечников Фурье классов функций типа Никольского – Бесова $\mathrm{SB}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина – Трибеля $\mathrm{SF}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q $(1 < p < \infty,\ 1 \le q,\ \theta \le \infty,\ r \in \mathbb{N}_0^d)$ по тригонометрической системе типа всплесков $\mathcal{U}^d$ [2].

Работа выполнена при поддержке грантов 5130/ГФ4, 5129/ГФ4 МОН Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // ДАН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 314–317.
2. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constr. Approx. 2000. V. 16, No. 3. P. 399–425.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Балданов Д. Ш.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
05damdin@mail.ru

В настоящей работе рассматривается вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения системы разностных уравнений

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)}, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где $A(n)$, $B(n)$ — N-периодические матрицы размера $m \times m$. Мы будем предполагать, что запаздывающий аргумент ограничен $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$.

Имеет место следующий результат, обобщающий теорему 1 из [1].

Теорема. *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы $H(n)$, $n = 0, 1, \dots, K_j$, $j = 0, 1, \dots, \tau$, такие, что $\Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0$, $j = 1, \dots, \tau$, и составные матрицы*

$$C(n) = -\begin{pmatrix} C_{11}(n) & A^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & A^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ B_1^*(n)H(n+1)A(n) & C_{22}(n) & \dots & B_1^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_\tau^*(n)H(n+1)A(n) & B_\tau^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix}$$

также положительно определены, где

$$C_{11}(n) = A^*(n)H(n+1)A(n) - H(n) + K_0,$$
$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)H(n+1)B_j(n) - \tfrac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 2, \dots, \tau - 1,$$
$$C_{\tau\tau}(n) = B_\tau^*(n)H(n+1)B_\tau(n) - K_\tau,$$

$$B_j(n) = \begin{cases} B(n) & \text{при} \quad \tau(n) = j, \\ 0 & \text{при} \quad \tau(n) \neq j. \end{cases}$$

Тогда нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш.* Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 50–62.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ $\mathbf{y''' = f(x, y, y', y'')}$

Банару Г. А.

Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия;
mihail.banaru@yahoo.com

Давно известна поставленная Н. В. Степановым задача: требовалось провести анализ групп симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка и отыскать условия, при которых обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка допускает присоединение к себе расслоенного пространства со связностью с той или иной фундаментальной группой [1].

Эта задача была решена много лет назад для семимерных и шестимерных групп преобразований. Среди уравнений, обладающих семимерной группой точечных симметрий, помимо тривиального уравнения $y''' = 0$ можно указать и такое: $y''' = \dfrac{3\,(y'')^2}{y'}$.

А среди обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с шестимерной группой точечных симметрий достаточно простых примеров можно привести больше [2]:

$$y''' = \frac{3(y'')^2}{2y'}, \quad y''' = \frac{3y'(y'')^2}{(y')^2 + 1}, \quad y''' = \frac{3y'(y'')^2}{(y')^2 - 1}.$$

Несоизмеримо более сложной оказалась данная задача в случае пятимерной группы преобразований. Основной результат, полученный в данном направлении, таков:

Теорема. *Единственной пятимерной группой точечных симметрий, а также фундаментальной группой расслоенного пространства со связностью для уравнения $y''' = f(x, y, y', y'')$ является группа* ***g5,5***.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов Н. В.* Геометрия дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1981. Т. 12. С. 127–164.
2. *Банару Г. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка с 6-мерной и 7-мерной группами точечных симметрий // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1994. № 3. С. 31–36.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ КОНЕЧНОГО ОБЪЁМА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Белых В. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; belykh@math.nsc.ru

Рассмотрена задача об отыскании свободного (в отсутствие массовых сил и поверхностного натяжения) неустановившегося движения области $\omega \subset \mathbb{R}^3$, занятой идеальной несжимаемой жидкостью, в предположении, что на всей жидкой границе $\partial\omega$ области давление постоянно. Такое движение “по инерции” возникает под действием некоторого начального импульса (давления), распределённого по $\partial\omega$ в начальный момент времени. Объём ω, занятый жидкостью, заранее не фиксирован и состоит из жидких частиц. Спецификой исследуемой задачи является то, что граница $\partial\omega$ (свободная поверхность) является элементом решения задачи. Для её определения имеются два нелинейных условия (кинематическое и динамическое), связывающие форму поверхности $\partial\omega$ и скорости жидких частиц на ней. В предположении потенциальности и осесимметричности движения жидкости задача редуцируется к её одномерному аналогу, описываемому системой эволюционных псевдодифференциальных нелинейных уравнений на $\partial\omega$, дополненной данными Коши. Доказана локальная теорема существования и единственности аналитического по времени решения задачи о “капле” в точной математической постановке. В итоге получено строго обоснованное описание начальной стадии движения осесимметричной капли, предшествующей её эволюционному “разрушению” в момент потери решением аналитичности. Полученный результат может быть использован в качестве стартового в доказательных вычислениях, организуемых посредством аналитического продолжения решения задачи “далеко” по времени с целью отыскания его особенностей, если они есть, на положительной части вещественной оси времени. Интерес к указанной проблематике, всё ещё находящейся вне компетенции современных аналитических и численных методов, сформировался у автора под непосредственным влиянием Л. В. Овсянникова и К. И. Бабенко.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДИХОТОМИИ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА

Блинова М. А.[1], **Бибердорф Э. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* blin_mary@mail.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* biberdorf@ngs.ru

Исследование устойчивости — одна из наиболее актуальных задач современной физики, инженерии и математики. С этой целью применяют экспериментальные, теоретические, а также численные методы. Данная работа посвящена апробации метода дихотомии матричного спектра при изучении процесса формирования турбулентного течения.

Исследование условий развития турбулентности, как правило, проводится с помощью дискретизации соответствующей дифференциальной задачи с дальнейшим рассмотрением полной спектральной задачи. Однако решение полной спектральной задачи избыточно и численно неустойчиво в связи с несимметричностью оператора. Метод дихотомии матричного спектра лишен этих недостатков, разрабатывался для решения задач устойчивости и может быть применим в данном случае [1]. Но исходная версия алгоритма дихотомии не подходит для работы с комплекснозначными матрицами с большой нормой, которые встречаются в практических приложениях. Поэтому была разработана специальная модификация алгоритма, возможности которой были продемонстрированы на примере плоского течения Пуазейля [2, с. 19–50]. В частности, был повторен классический результат об определении минимального числа Рейнольдса, при котором появляется неустойчивость по времени. Результаты расчетов показали, что метод дихотомии хорошо подходит для такого круга задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
2. *Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. Москва, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2006.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ОБТЕКАНИЕ КОНУСА ГАЗОМ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Блохин А. М.[1], **Бибердорф Э. А.**[2]

Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]blokhin@math.nsc.ru, [2]biberdorf@ngs.ru

Моделирование течения реального газа вокруг кругового конуса актуально в целом ряде прикладных областей таких как, например, конструирование летательных аппаратов. В этом случае уравнения газовой динамики сводятся к системе ОДУ, причем соответствующая краевая задача имеет нестандартный вид и не может быть решена обычными методами. В работе [1] реализован один из возможных подходов к численному решению данной задачи. Он сводится к определению нуля функции, значения которой вычисляются интегрированием задачи Коши. Данная функция имеет только два интервала непрерывности в окрестностях искомых углов ударных волн. Выявление этих интервалов является наиболее затратным этапом алгоритма и при этом не поддается полной автоматизации.

В основу нового вычислительного метода положено представление решаемой задачи как стандартной краевой задачи с дополнительным условием, а также результаты многочисленных экспериментов. Новый подход также заключается в построении последовательных приближений угла ударной волны, однако для фиксированного приближения решается краевая задача, а дополнительное условие используется для определения следующего приближения. Этот метод полностью автоматизирован и требует гораздо меньше вычислительного времени и ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохин А. М., Бибердорф Э. А.* Численное решение задачи о стационарном обтекании конуса реальным газом // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 2. С. 29–43.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бовкун В. А.

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; 123456m@inbox.ru

Основным объектом исследований является абстрактная стохастическая задача Коши для квазилинейного уравнения

$$X'(t) = AX(t) + F(X(t)) + B\mathbb{W}(t), \quad t \in [0;T], \quad X(0) = \zeta. \tag{1}$$

Здесь оператор A является генератором n-раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы в пространстве $L^2(\mathbb{R})$; F — нелинейное отображение в $L^2(\mathbb{R})$; $\{\mathbb{W}(t),\, t \geq 0\}$ — (обобщенный) процесс типа белого шума со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$; ζ — H_a-значная случайная величина, где H_a — некоторая алгебра в $L^2(\mathbb{R})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H_a)$.

Для решения задачи Коши (1) в работе используется подход, опирающийся на теорию Коломбо умножения обобщенных функций (см., например, [1, 2]) и метод решения задачи (1) с генератором полугруппы класса C_0, предложенный в работе [3]: задача (1) погружается в стохастическую фактор-алгебру $G^n(\Omega, H_a)$. Тогда для решения задачи (1) имеет место результат.

Теорема. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям, оговоренным выше, $\operatorname{Dom} A^2 \subset H_a \subset \operatorname{Dom} A$, отображение F является бесконечно дифференцируемым, удовлетворяет условию Липшица и $F(0) = 0$. Тогда существует последовательность $Y_j \in G^n(\Omega, H_a)$, полученная методом сжимающих отображений.*

Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Colombeau J. F.* Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North Holland, 1985.
2. *Oberguggenberger M.* Multiplication of distributions and applications to partial differential equations. Harlow: Longman, 1992.
3. *Мельникова И. В., Алексеева У. А.* Решение абстрактной задачи Коши с нелинейными и случайными возмущениями в алгебре Коломбо // ДАН. 2013. Т. 449, № 4. С. 393–397.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Бондарь Л. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
b_lina@ngs.ru

В работе продолжаются исследования [1, 2] разрешимости краевых задач

$$\mathcal{L}(D_x)U = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \mathcal{B}(D_x)U|_{x_n=0} = \quad (x')$$

для квазиэллиптических систем в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\, x_n > 0\}$. Рассматривается класс матричных квазиэллиптических операторов $\mathcal{L}(D_x)$, введенный Л. Р. Волевичем [3]. Предполагается, что для краевых задач выполнено условие Лопатинского. Доказана безусловная разрешимость рассматриваемых краевых задач в W^l_p при $p > p* > 1$, а при $p \leq p*$ указаны необходимые условия разрешимости краевых задач в соболевских пространствах. При $\quad = 0$ полученные условия являются достаточными для однозначной разрешимости в W^l_p (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Demidenko G. V.* On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in $\mathbb{R}^n_+$ // J. Anal. Appl. 2006. V. 4. P. 1–11.
2. *Бондарь Л. Н.* Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 341–350.
3. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59. С. 3–52.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

Бурак А. Д.[1]**, Козлов А. А.**[2]

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь;
[1]burakad@inbox.ru, [2]kozlovaa@tut.by

Рассмотрим линейную равномерно вполне управляемую [1] систему

$$x = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m \in \{1,\, 2\}, \quad t \geqslant 0, \qquad (1)$$

с наблюдателем $y = C(t)x$, $y \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему с нулевым управлением

$$x = A(t)x, \quad y = C(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

обладающую свойством равномерной полной наблюдаемости [2, с. 304]. Будем считать, что матрицы-функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ принадлежат классу локально интегрируемых и интегрально ограниченных функций.

Построим по системе (1) и по выходу y систему

$$\widehat{x} = A(t)\widehat{x} + V(t)(y(t) - C(t)\widehat{x}) + B(t)u, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad (3)$$

где $\widehat{x}(t)$ — оценка состояния системы (1). Выберем векторное управление u в виде линейной по фазовым переменным обратной связи $u = U(t)\widehat{x}$.

Систему (3) назовем *равномерно стабилизируемой* [1], если при любом $\alpha < 0$ найдутся измеримые и ограниченные управления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$, что для ее верхнего особого показателя справедливо неравенство $\Omega^0_{U,V} < \alpha$.

На основании подхода, предложенного в [3], нами была доказана

Теорема. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема,* (2) *равномерно вполне наблюдаема, то система* (3) *равномерно стабилизируема.*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (№ Ф16М-006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тонков Е. Л.* Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. *Зайцев В. А.* Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 3. С. 432–442.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Векслер А. С.[1], **Чилин В. И.**[2]

[1]*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;* aleksandr.veksler@micros.uz

[2]*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;* chilin@ucd.uz

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — измеримое пространство с полной σ-конечной мерой μ и E — интерполяционное симметричное пространство действительных измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Обозначим через $AC(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ пространство всех линейных $L_1 - L_\infty$-сжатий в $L_1 + L_\infty$.

Известно, что каждое симметричное пространство E с порядково непрерывной нормой является интерполяционным и, в случае когда $\mu(\Omega) < \infty$, в E верна статистическая эргодическая теорема для всех $T \in AC(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, т. е. средние Чезаро $A_n(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$ сходятся в E в сильной операторной топологии (см., например, [1, глава 2, § 2.1, теорема 2.1.3]). Для ситуации $\mu(\Omega) = \infty$ статистическая эргодическая теорема уже неверна даже для пространств $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Следующая теорема выделяет класс симметричных пространств в случае $\mu(\Omega) = \infty$, для которых сохраняется утверждение статистической эргодической теоремы (ср. [2, теорема 4.2]).

Теорема. *Пусть $E = E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с порядково непрерывной нормой, $\mu(\Omega) = \infty$, и в E выполнено следующее условие: $\|\chi_{F_n}\|_E/\mu(F_n) \to 0$ для любой возрастающей последовательности множеств $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ с ненулевой конечной мерой $\mu(F_n) \to \infty$. Тогда для любых $f \in E$ и $T \in AC(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ существует такое $f \in E$, что $\|A_n(T)(f) - f\|_E \to 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векслер А. С., Федоров А. Л.* Симметричные пространства и статистические эргодические теоремы для автоморфизмов и потоков. Ташкент: "Фан", 2016.
2. *Yeadon F. J.* Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras: II // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1980. V. 88, No. 1. P. 135–147.

ПЛОСКИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗВЁЗДНЫМ УЗЛОМ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ И ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Волокитин Е. П.[1], **Чересиз В. М.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;

[1]volok@math.nsc.ru, [2]vladimir.cheresiz@gmail.com

Рассматриваются плоские полиномиальные системы ОДУ вида

$$x = x + P_n(x, y), \quad y = y + Q_n(x, y), \tag{1}$$

где $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — однородные многочлены степени $n \geq 2$; при этом предполагается, что многочлены $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ не имеют общих множителей и уравнение $uP_n(1, u) - Q_n(1, u) = 0$ имеет только простые корни.

Проведено исследование конечных и бесконечно удалённых особых точек системы (1); изучено поведение сепаратрис; получены необходимые и достаточные условия существования предельного цикла. Доказано, что глобальный фазовый портрет системы (1) однозначно определяется строением её экватора Пуанкаре. На основе проведённого исследования доказано, что у кубической системы вида (1) имеется 14 типов топологически орбитально неэквивалентных фазовых портретов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

К УСТОЙЧИВОСТИ РАДИАЛЬНОГО СХЛОПЫВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Герасимов А. Ю.[1], Годен-Буатар М.[2], Губарев Ю. Г.[1,3], Паважо Л.[4]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* matan_panda@mail.ru

[2] *Национальный французский университет гражданской авиации, Тулуза, Франция;* mathieu.godin-boitard@wanadoo.fr

[3] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* gubarev@hydro.nsc.ru

[4] *Университет промышленных технологий, Биарриц, Франция;* l.pavageau@net.estia.fr

Изучается задача устойчивости радиального схлопывания цилиндрической оболочки, которая заполнена однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкостью [1]. Принимаются следующие предположения: 1) внутри оболочки содержится вакуум; 2) снаружи ее окружает слой сжатого политропного газа, являющегося продуктом мгновенной детонации и оказывающего на внешнюю поверхность оболочки ненулевое постоянное давление; 3) за слоем газа вновь находится вакуум.

Прямым методом Ляпунова [2] установлена абсолютная устойчивость радиального схлопывания рассматриваемой цилиндрической оболочки по отношению к конечным возмущениям того же типа симметрии. Конкретно, построена функция Ляпунова, которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости.

Этот результат означает, что кумуляции кинетической энергии жидкости в процессе радиального схлопывания изучаемой цилиндрической оболочки к своей оси никогда не возникает, что целиком подтверждает и строго доказывает соответствующую гипотезу, выдвинутую ранее автором монографии [1] на основе данных его физических экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тришин Ю. А.* Физика кумулятивных процессов. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики, 2005.
2. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ВЫДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Гордиенко В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; gordienk@math.nsc.ru

Рассматривается система уравнения линейной теории упругости в напряжениях для трёхмерного пространства

$$\begin{cases} \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \varrho\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{grad} p - \widehat{\sigma}\nabla = 0, \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial t} - \nabla\mathbf{u}^\top - \mathbf{u}\nabla^\top + \dfrac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\cdot \mathrm{I} = 0, \end{cases}$$

где p — скалярная часть тензора напряжений, $\widehat{\sigma}$ — девиатор тензора напряжений (симметрическая матрица с нулевым следом), $\mathbf{u}$ — скорость деформации (трёхмерный столбец), $\nabla = \begin{bmatrix}\partial_1 & \partial_2 & \partial_3\end{bmatrix}^\top$.

При $t = 0$ заданы начальные условия $p_{|t=0} = p_0$, $\mathbf{u}_{|t=0} = \mathbf{u}_0$, $\widehat{\sigma}_{|t=0} = \widehat{\sigma}_0$.

Показано, как начальные данные разложить в сумму двух слагаемых: $p_0 = p_1 + p_2$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\widehat{\sigma}_0 = \widehat{\sigma}_1 + \widehat{\sigma}_2$, так что от первого слагаемого получится стационарное решение, не удовлетворяющее условию совместности Сен-Венана а, значит, не представляющееся через перемещение (остаточные напряжения), а от второго — нестационарное, удовлетворяющее условию Сен-Венана и, следовательно, представляющееся через перемещение.

Для построения указанного разложения решаем серию уравнений Пуассона:

$$\triangle\mathbf{b} = (p\cdot\mathrm{I} + \widehat{\sigma})\nabla, \quad \triangle\varphi = \operatorname{div}\mathbf{b}, \quad \triangle\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{b},$$

затем полагаем:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{a}, \quad p_2 = \frac{K}{\lambda+2\mu}\operatorname{div}\mathbf{b}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_0,$$

$$\widehat{\sigma}_2 = \mu\left(\nabla\mathbf{q}^\top + \mathbf{q}\nabla^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{q}\cdot\mathrm{I}\right).$$

О НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Григорьева А. И.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; shadrina_ai1@mail.ru

В работе изучается разрешимость задачи сопряжения для уравнений

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{xt}) - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{xt}) - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t),$$

где $h(x)$ есть заданная определенная при $x \in [-1,0]$ и $x \in (0,1]$ функция, строго положительная и дифференцируемая на указанных множествах и такая, что у нее определено конечное значение $h(+0)$, также являющееся положительным числом, а также определены конечные производные $h'(\pm 0)$.

Для доказательства теорем существования и единственности регулярных решений используется метод продолжения по параметру.

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ГЕМОДИНАМИКИ ДЛЯ КОНИЧЕСКИХ СОСУДОВ

Давыдова С. Г.[1], **Бибердорф Э. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* svetamira_davydova@mail.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* biberdorf@ngs.ru

Математическое моделирование в биологии и медицине приобретает всё большие масштабы. В частности, множество работ посвящено моделированию сердечно-сосудистой системы. При моделировании артериальной системы человека популярна одномерная модель гемодинамики. При этом форма сосудов считается цилиндрической, хотя ряд крупных сосудов, например, аорта, имеет коническую форму. В данной работе получена система уравнений одномерной модели гемодинамики для сосудов конической формы путем усреднения уравнений Навье – Стокса и проведен ряд численных экспериментов.

Наиболее интересные результаты связаны с распространением пульсовой волны. Оказалось, что скорости пульсовой волны в коническом, цилиндрическом сосудах, а также рассчитанная по формуле Моенса – Кортевега приблизительно равны. Также проведено исследование влияния коэффициента фильтрации на формирование отраженной волны и отражения пульсовой волны от стыка двух цилиндрических сосудов, которое показало, что использование конических сосудов, а также специального коэффициента фильтрации на концах терминальных сосудов приводит к сглаживанию формы пульсовой волны.

Полученная система уравнений, моделирующих кровоток для сосудов конической формы, может быть рекомендована для усовершенствования комплексной математической модели сердечно-сосудистой системы, реализованной на платформе BioUML (совместная работа ИМ СО РАН и КТИ ВТ СО РАН) [1], в частности, для более адекватного моделирования профиля пульсовой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев И. Н., Бибердорф Э. А., Баранов В. И., Комлягина Т. Г., Мельников В. Н., Суворова И. Ю., Кривощеков С. Г., Колпаков Ф. А.* Персонализация параметров и валидация модели сердечно-сосудистой системы человека // Математическая биология и биоинформатика. 2015. Т. 10, вып. 2. С. 526–547.

О ТРАНСФОРМАЦИЯХ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Дедок В. А.[1], **Демьяненко А. В.**[2]
[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* dedok@math.nsc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* alex.demy@yandex.ru

В работе исследуется задача построения точных аналитических решений прямой задачи рассеяния для уравнения Шредингера на метрических графах [1, 2].

Оператором Шредингера $H = L + Q$ на графе G будем называть оператор, действующий на соболевском пространстве $W_2^2(G)$ функций, ограничение которых на каждое ребро b_j графа принадлежит пространству $W_2^2(b_j)$, по правилу

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x).$$

Потенциал $q(x)$ предполагается вещественным, измеримым и с конечным первым моментом.

Матрица рассеяния определяется асимптотиками решения уравнения $H\psi = k^2\psi$ на полубесконечных ребрах графа:

$$\begin{aligned} \psi_l^j(x,k) &= T_{lj}(k)e^{ikx} + o(1), \quad x \to \infty,\ x \in E_j,\ 1 \le j, l \le n,\ j \ne l, \\ \psi_l^l(x,k) &= e^{-ikx} + R_{ll}(k)e^{ikx} + o(1), \quad x \to \infty,\ x \in E_l,\ 1 \le l \le n. \end{aligned}$$

Рассматривается задача трансформации матрицы рассеяния для частных случаев графов при локальных ступенчатых деформациях рассеивающего потенциала на компактной части.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00208).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kuchment P.* Graph models for waves in thin structures // Waves Random Media. 2002. V. 12, No. 4. P. R1–R24.
2. *Бондаренко А. Н., Дедок В. А.* Спектральные преобразования для оператора Шредингера на графах // Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2013. С. 99.

О СВОЙСТВАХ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Демиденко Г. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
demidenk@math.nsc.ru

В работе рассматриваются классы матричных квазиэллиптических операторов $\mathcal{L}(D_x)$ в $\mathbb{R}^n$, символы которых не являются квазиоднородными. Эти операторы можно представить в виде

$$\mathcal{L}(D_x) = \mathcal{L}_0(D_x) + \mathcal{L}'(D_x),$$

где $\mathcal{L}_0(D_x)$ — операторы с квазиоднородными символами (см. [1]), а операторы $\mathcal{L}'(D_x)$ — возмущения младшими членами. Цель исследований — изучение свойств изоморфизма операторов $\mathcal{L}(D_x)$ в пространствах суммируемых функций.

Первые теоремы об изоморфизме для скалярных эллиптических операторов были получены в работах В. А. Кондратьева и Л. А. Багирова, M. Cantor, R. C. McOwen. Теоремы об изоморфизме однородных матричных эллиптических операторов были доказаны Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, R. B. Lockhart, R. C. McOwen. Отметим, что теоремы об изоморфизме для эллиптических операторов по Петровскому и эллиптических операторов по Дуглису – Ниренбергу (без младших членов) содержатся в [1].

Первые теоремы об изоморфизме для однородных квазиэллиптических операторов доказаны автором [2]. В работе [1] содержится ряд утверждений об изоморфизме для классов квазиэллиптических операторов без возмущений младшими членами. В настоящей работе мы вводим специальную шкалу весовых соболевских пространств $W^l_{p,q,\sigma}$, в которой удается установить свойство изоморфизма для классов операторов $\mathcal{L}(D_x)$ при некоторых ограничениях на возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В.* Матричные квазиэллиптические операторы в $\mathbb{R}^n$ // ДАН. 2010. Т. 431, № 4. С. 443–446.
2. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}_n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Демиденко Г. В.[1,2], **Бондарь А. А.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* demidenk@math.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* a_a_bondar@mail.ru

В работе изучена задача об экспоненциальной дихотомии для систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{A(n)\}$ — N-периодическая последовательность невырожденных матриц $m \times m$. Установлен критерий экспоненциальной дихотомии в терминах разрешимости специальной краевой задачи для системы дискретных уравнений Ляпунова. Получены оценки параметров дихотомии.

Наши результаты являются аналогами некоторых результатов, установленных в работах М. Г. Крейна, С. К. Годунова, А. Я. Булгакова для систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Настоящая работа продолжает исследования [1–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.
3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.
4. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comp. Math. Optim. 2010. V. 6, No. 1. P. 1–12.
5. *Demidenko G. V.* On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2016. V. 6, No. 1. P. 63–74.

СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕКОТОРЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ

Егоров А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
yegorov@math.nsc.ru

При изучении устойчивости классов отображений в [1] важную роль играют следующие отображения $v : U \to \mathbb{R}^m$ класса Соболева $W^1_{k,\mathrm{loc}}$, определенные на областях $U \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие дифференциальным неравенствам

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) \quad \text{для п. в. } x \in U, \quad K \geq 1, \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — k-однородная квазивыпуклая функция, а $G : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — k-однородный нуль-лагранжиан. Здесь $k, n, m \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq \min\{n, m\}$, $v'(x)$ — матрица Якоби отображения v в точке $x \in U$, $\mathbb{R}^{m\times n}$ — пространство вещественных $(m \times n)$-матриц. Для классов отображений, удовлетворяющих неравенству (1), в [1] были, в частности, установлены свойства замкнутости относительно локально равномерной сходимости и гёльдеровой регулярности. Ряд других результатов для этих отображений был получен в [2]. В частности, там установлены теорема о самоулучшающейся интегрируемости производных и теорема об устранимости особенностей. Доклад посвящен обсуждению новых результатов по свойствам отображений, удовлетворяющих неравенству (1). Эти результаты развивают ранее перечисленные и служат для установления новых интегральных оценок для указанных отображений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00768).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А. А.* Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 796–812.
2. *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: higher integrability and removability of singularities. I, II // Владикавказский мат. журн. 2014. Т. 16, № 3. С. 22–37; Т. 16, № 4. С. 41–48.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВРАГОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Егоров И. Е.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; IvanEgorov51@mail.ru

Постановке краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков, исследованию обобщенной и фредгольмовой разрешимости посвящено довольно много работ. Известно, что для развития спектральной теории для уравнений смешанного типа второго порядка значительный вклад внесли Т. Ш. Кальменов, Е. И. Моисеев, С. М. Пономарев, С. Г. Пятков и другие математики. При этом ряд работ посвящен изучению разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости со спектральным параметром.

В данной работе исследуется фредгольмова разрешимость краевой задачи Врагова [1] для уравнения смешанного типа четного порядка с помощью метода, разработанного в работах [2, 3].

В цилиндрической многомерной области рассматривается краевая задача Врагова для уравнения смешанного типа четного порядка с эллиптическим оператором по пространственным переменным. При определенных условиях на коэффициенты уравнения доказаны обобщенная разрешимость, единственность обобщенного решения и фредгольмова разрешимость краевой задачи Врагова в соответствующих пространствах Соболева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. *Егоров И. Е.* О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 55–64.
3. *Егоров И. Е.* О фредгольмовой разрешимости первой краевой задачи для уравнения смешанного типа четного порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 48–56.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА И ОЦЕНКА ЕГО ПОГРЕШНОСТИ

Егоров И. Е.[1], **Федоров В. Е.**[2], **Тихонова И. М.**[3]

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; [1]IvanEgorov51@mail.ru, [2]VEFedorov58@mail.ru@mail.ru, [3]IrinaMikh3007@mail.ru

Построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа было начато в 70-е годы прошлого века В. Н. Враговым и рядом других авторов. В дальнейшем эта теория развивалась во многих направлениях.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка, которая в общем случае отличается от других задач. В случаях, когда уравнение имеет эллиптический тип вблизи нижнего основания цилиндрической области, а вблизи верхнего основания оно имеет эллиптический или гиперболический тип, с помощью модифицированного метода Галеркина установлена однозначная регулярная разрешимость краевой задачи в пространстве Соболева. Впервые постановка этой задачи была сформулирована авторами в работе [1], в которой ее разрешимость была исследована для первого случая с помощью другой методики. В данной работе используется новый подход [2], который позволяет получить априорные оценки для приближенных решений сразу по всей области, на основании которых получена оценка погрешности модифицированного метода Галеркина.

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки России на 2014–2016 годы (проект № 3047).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонова И. М., Федоров В. Е.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 109–117.
2. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* Модифицированный метод Галеркина для задачи Врагова // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 732–742.

О ЯДРАХ АВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; egorshin@math.nsc.ru

Любое ли подпространство размерности n может быть ядром линейного автономного разностного оператора порядка n? Это сообщение отвечает на этот вопрос. Возникает он при постановке некоторых вариационных задач в конечномерных унитарных пространствах E.

Речь идет о следующем типе вариационных задач. Они называются *задачами сглаживания и идентификации* (математического моделирования). Пусть $\mathbf{y} = \{y_{(i)}\}_0^M \in E = E^{M+1}$. ЗАДАЧА: минимизировать $J = \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|^2$, если $\mathbf{D}\widehat{\mathbf{y}} = \bigl\{ \sum_{j=0}^n \widehat{y}_{(j+k)}\alpha_j^* \bigr\}_{k=0}^K = 0$ и $K = M - n$.

Можно увидеть, что матрица оператора $\mathbf{D}$ в этой задаче есть теплицева ленточная $\bigl((n+1)\times(M+1)\bigr)$-матрица $A^*(\alpha)$ скользящего вектора α [1]: $A = A(\alpha) = \{A_{i,j} = \alpha_{i-j}\}_{i,j=0}^{i=M,j=K}$ и $A_{i,j} = 0$ при $0 > i-j > n$.

Имеем задачу проектирования $\mathbf{y}$ на $S^\perp(A)$. Здесь $S = S(A)$ — оболочка векторов A, а $S^\perp = \mathcal{D}$ — ее ортогональное дополнение — ядро оператора $\mathbf{D}$, $\dim S = K$, а $\dim \mathcal{D} = n$. Условия минимизации функционала J есть ограничения, если не каждое K-подпространство имеет базис вида A и не каждое n-подпространство может быть ядром оператора вида $\mathbf{D}$.

Системы векторов $Y = Y(B) = |y_j|_0^L = |B^j y_0|_0^L$ называются *базисами Крылова*. Если $B = U$ — изометрический на системе Y оператор, то такие системы называются *однородными*. Пусть Y — однородная ортонормальная система в E. Система $X = |x_j|_0^N = |U^j x_0|_0^N \subseteq S(Y)$, $N = L - n$ называется *n-полиномиальной*, если $x_0 = \sum_0^n U^j y_0 \alpha_j = p_\alpha(U)$.

Лемма. $U = Y_{\overline{1,L}}\langle\,\cdot\,, Y_{L-1}\rangle$, где $Y_{\overline{1,L}} = |y_j|_1^L$, $Y_{L-1} = |y_j|_0^{L-1}$.

Теорема. *Подпространство размерности n в E может быть ядром линейного разностного автономного оператора тогда и только тогда, когда его ортогональное дополнение в некоторой ортонормальной однородной системе векторов есть n-полиномиальная система.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоршин А. О.* Идентификация и дискретизация линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 29–42.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ МОДЕЛИ ДЖЕФФРИСА С ОБЪЕКТИВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Звягин А. В.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
zvyagin.a@mail.ru

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3,$ — ограниченная область. Рассмотрим следующую задачу, описывающую движение земной коры:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p \in \quad (v); \tag{1}$$

$$\sigma + \mu_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma \mathcal{W} - \mathcal{W} \sigma \right)$$
$$= 2\eta \mathcal{E} + 2\eta\mu_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} + \mathcal{E}\mathcal{W} - \mathcal{W}\mathcal{E} \right); \tag{2}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad v(0,x) = v_0; \quad \sigma(0,x) = \sigma_0. \tag{3}$$

Здесь v — вектор-функция скорости частицы жидкости; p — функция давления; $\eta > 0$ — кинематический коэффициент вязкости; μ_1 — время релаксации; μ_2 — время запаздывания, причем $0 < \mu_2 < \mu_1$; $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформации; $\mathcal{W}$ — тензор завихренности; v_0 и σ_0 — начальные данные.

Пусть многозначное отображение $\quad : E = L_2(0,T;V) \cap W_1^1(0,T;V^*) \times L_2(0,T;L_2(\Omega)) \multimap L_2(0,T;V^*)$ удовлетворяет условиям: (i_1) определено на пространстве E и имеет непустые, компактные, выпуклые значения; (i_2) полунепрерывно сверху и компактно; (i_3) глобально ограничено; (i_4) слабо замкнуто.

Обозначим через $\quad \subset E$ множество всех слабых решений задачи (1)–(3). Рассмотрим функционал качества $\quad : \quad \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям: (j_1) существует число γ такое, что $\quad (v, \sigma) \geqslant \gamma$; (j_2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в E и $\sigma \rightharpoonup \sigma_*$ в E, то $\quad (v_*, \sigma_*) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \quad (v_m, \sigma_m)$.

Теорема. *Если отображение* $\quad$ *удовлетворяет условиям* (i_1)*–*(i_4)*, а функционал* $\quad$ *удовлетворяет* (j_1)*–*(j_2)*, тогда задача (1)–(3) имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, σ_*) *такое, что* $\quad (v_*, \sigma_*) = \inf_{(v,\sigma)\in \quad} \quad (v, \sigma)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-60075 мол_а_дк).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О. С.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; zikirov@yandex.ru

В работе рассматривается вопрос о разрешимости одной неклассической задачи для уравнения

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy}+Lu=g(x,y), \tag{1}$$

где α, β — заданные постоянные, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, а L — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu\equiv a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c\,(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+f(x,y)u$$

на плоскости (x,y).

Обозначим $D=\{(x,y):0<x<l,\ 0<y<h\}$. Пусть $k_i(x,y)$, $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i=1,2)$ — заданные функции, определенные при $x\in[0,l]$, $y\in[0,h]$.

Для уравнения (1) изучается следующая задача: найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным

$$u(x,0)=\psi_1(x),\quad u_y(x,0)=\psi_2(x),\quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

и неклассическим условиям

$$u(0,y)=\int\limits_0^l k_1(x,y)u(x,y)dx+\varphi_1(y),\quad 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$u_x(0,y)=\int\limits_0^l k_2(x,y)u(x,y)dx+\varphi_2(y),\quad 0\le y\le h. \tag{4}$$

При определенных условиях на заданные функции доказано существование единственного решения нелокальной задачи (1)–(4).

ИССЛЕДОВАНИЕ ПСЕВДОСПЕКТРА НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ В ИММУНОЛОГИИ

Кабанихин С. И.[1,2], **Криворотько О. И.**[1,2], **Котомина М. Б.**[2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
kabanikhin@sscc.ru, olga.krivorotko@sscc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
ritakot24314@mail.ru

Получены условия устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений, основанной на исследовании поведения псевдоспектра и числа обусловленности матриц. В качестве примера рассматривается обратная задача для простейшей математической модели иммунологии, описывающей взаимодействие антигенов и иммунных клеток организма [1]. Модель описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Обратная задача состоит в определении параметров модели, характеризующих скорости иммунного ответа, реакции антиген-антитело и смертность антигенов, по дополнительным измерениям концентрации антител и антигенов в фиксированные моменты времени. Исследован псевдоспектр и сингулярные числа дискретного аналога оператора линеаризованной обратной задачи (матрицы) [2], на основе которых построен алгоритм регуляризации обратной задачи [3, 4].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (мероприятие 4.1.3 “Совместные лаборатории НГУ–ННЦ” в рамках Программы повышения международной конкурентоспособности НГУ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Afraites L., Atlas A.* Parameters identification in the mathematical model of immune competition cells // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, No. 4. P. 323–337.
2. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 1997.
3. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
4. *Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I.* Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, No. 5. P. 519–527.

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Казаков А. Л.[1], **Орлов Св. С.**[2]

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;
[1]kazakov@icc.ru, [2]s.orlov@icc.ru

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности (porous medium equation) [1] в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. При наличии пространственных симметрий рассматриваемое уравнение может быть представлено в одномерном виде

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu u}{\rho}\,u_\rho, \tag{1}$$

где $u \triangleq u(t,\rho)\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\nu \in \{0,1,2\}$, $\sigma > 0$. Отметим, что в областях, где $u(t,\rho) = 0$, происходит вырождение типа уравнения (1). При этом оно становится представителем класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной (соболевского типа) [2].

Авторами получены [3] нетривиальные точные решения уравнения (1), имеющие вид тепловой волны, т. е. удовлетворяющие краевому условию $u|_{\rho=f(t)} = 0$, где $\rho = f(t)$ — некоторая достаточно гладкая функция, заданная в плоскости (t,ρ).

В докладе планируется привести описание процедуры построения, а также результаты качественного исследования точных решений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00608, № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vázquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford: The Clarendon Press, Oxford University Press, 2007.
2. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. *Казаков А. Л., Орлов Св. С.* О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 112–123.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ В 3-D ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Казанцев С. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; kazan@math.nsc.ru

В работе [1] для пространства $\mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{L}_2(\mathbb{B}^3)$ векторных полей в единичном шаре построен ортогональный базис из полиномиальных вектор-функций в соответствии с разложением Гельмгольца, т. е. с разделением базиса на три части: потенциальную, гармоническую и соленоидальную. В [2] дан способ построения фундаментальных систем в подпространстве $\mathbf{H}$ соленоидальных полей пространства $\mathbf{H}_0^1$ из любой фундаментальной системы в $\mathbf{H}_0^1$. В настоящей работе конструируются полиномиальные базисы векторных полей для следующих пространств Соболева, связанных с операторами ротора и дивергенции:

$$\mathbf{H}(\nabla *) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2 : \nabla * \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2\}, \quad \mathbf{H}(\nabla * = 0) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\nabla *) : \nabla * \mathbf{v} = 0\},$$

а также для соответствующих им подпространств с однородными граничными условиями:

$$\mathbf{H}_0(\nabla *) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\nabla *) : \mathbf{n} * \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \mathbb{S}^2\},$$

$$\mathbf{H}_0(\nabla * = 0) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\nabla *) : \nabla * \mathbf{v} = 0\}.$$

Здесь $\mathbf{n}$ есть единичный вектор внешней нормали на сфере $\mathbb{S}^2$, ∇ — оператор градиента, символ $*$ означает либо скалярное $\boldsymbol{\cdot}$, либо векторное $\times$ произведения. При этом, соответственно, получаются операторы дивергенции $\operatorname{div} \equiv \nabla\boldsymbol{\cdot}$ и ротора $\operatorname{rot} \equiv \nabla\times$. Построенные базисы могут использоваться при решении краевых задач в шаре для дифференциальных уравнений с операторами ротор и дивергенция.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН (проект № 0314-2015-0010).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Derevtsov E. Yu., Kazantsev S. G., Schuster Th.* Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007. V. 15, No. 1. P. 19–55.
2. *Ладыженская О. А.* О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 306. С. 92–106.

ЗАДАЧА О ЛОКАЛИЗАЦИИ МЕСТА ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МЕМБРАНУ

Киприянов Я. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
yaroslav.kipriyanov@gmail.com

Настоящая работа посвящена исследованию новой обратной задачи для уравнения колебаний мембраны. Данная обратная задача исследуется в двух вариантах. В первом варианте известными данными являются: коэффициент, определяющий фазовую скорость, начальные данные задачи Коши, решение задачи Коши на двух заданных плоскостях, а также производные от решения вдоль направления вектора нормали к этим плоскостям. Искомым объектом является носитель правой части уравнения колебаний в начальный момент времени. В работе ставится задача локализации искомого объекта, т. е. требуется найти такую ограниченную область, в которой он содержится. В работе доказано существование алгоритма, позволяющего решить поставленную задачу. Во втором варианте доказано существование такого алгоритма в случае, когда коэффициент, определяющий фазовую скорость, не известен, но известен интервал его возможных значений. Проведен ряд численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00112 мол_а).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

Кожанов А. И.[1], Потапова С. В.[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* kozhanov@math.nsc.ru

[2]*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия;* sargy@inbox.ru

Доклад посвящен изложению результатов о разрешимости в пространствах С. Л. Соболева краевых задач для следующих классов дифференциальных уравнений:

- ультрапараболических уравнений с меняющимся направлением эволюции;
- вырождающихся дифференциальных уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками;
- псевдопараболических уравнений с меняющимся направлением эволюции.

Отличительной особенностью изучаемых задач является то, что в них задаются краевые условия типа условий Жевре. Для всех изучаемых задач доказывается существование регулярных — имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение — решений.

Отметим также следующее: в процессе исследований был получен побочный, но в то же время имеющий самостоятельное значение результат о разрешимости новой неклассической задачи сопряжения для эллиптических уравнений с разрывными краевыми условиями.

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Козлов А. А.

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь;
`kozlovaa@tut.by`

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$x = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Предполагаем, что матричные коэффициенты $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ локально интегрируемы и интегрально ограничены на положительной полуоси. В качестве допустимых управлений $u = u(t)$ в системе (1) возьмем измеримые и ограниченные при всех $t \geqslant 0$ вектор-функции.

Определение [1]. Пусть $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ локально интегрируемы с квадратом. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при всяких $t_0 \geqslant 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $\xi^T \int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,\tau)Q^T(t_0,\tau)d\tau\xi \geqslant \alpha\|\xi\|^2$.

Замечание. Данное свойство линейной управляемой системы (1) позволяет найти [2] для любых начального момента времени и начального состояния системы такое допустимое управление с липшицевой оценкой, зависящей от нормы начального состояния системы, которое обеспечивало бы перевод этого начального состояния в ноль за время σ.

Для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ обозначим $\operatorname{sign} v = (\operatorname{sign} v_1, \ldots, \operatorname{sign} v_n)^T$. Имеет место критерий, обобщающий условие равномерной полной управляемости на системы (1) с локально интегрируемыми коэффициентами.

Теорема. *Линейная система* (1) *равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда найдутся такие величины* $\sigma > 0$ *и* $\alpha > 0$, *при которых для произвольного числа* $t_0 \geqslant 0$ *и любого вектора* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство* $\int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0,\tau) \operatorname{sign}(Q^T(t_0,\tau)\xi)\, d\tau \geqslant \alpha\,\|\xi\|$.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований РБ “Конвергенция-2020” (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalman R. E.* Contribution to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mex., II. Ser. 1960. V. 5. P. 102–119.
2. *Тонков Е. Л.* Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Коновалова Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; dsk@math.nsc.ru

В трехмерном случае, где одна из переменных интерпретируется как время, рассматривается задача Коши для почти линейного дифференциального уравнения первого порядка с разрывными коэффициентами при производных по пространственным переменным. Выделяются и исследуются три особых случая, когда коэффициенты в различных подобластях предполагаются пропорциональными. Дается определение обобщенного решения, доказывается его существование и анализируются свойства. Исследование более общего случая планируется выполнить в дальнейшем. Иначе говоря, работа является небольшим начальным фрагментом намеченного обширного исследования проблем, возникающих в теории зондирования неоднородных сред физическими сигналами, описываемыми дифференциальными уравнениями или системами уравнений. Отмечается, что исследованная задача близка к аналогичной проблеме, где единственный разрывный коэффициент уравнения находится при производной по времени. Указанный случай интересен тем, что он подобен, например, уравнениям Максвелла для неоднородных сред.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН (проект № 0314-2015-0010).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ФУЛЛЕРА

Коробов А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; korobov@math.nsc.ru

Пусть $a_1 < 0 < a_2$. Известно, что кривая переключения для задачи Фуллера $x = y$, $y = u$, $u \in [a_1, a_2]$, $\int\limits_0^\infty x^6(t)dt \to \inf$ состоит из двух кусков парабол $x = \alpha y^2$ и $x = \beta y^2$ в верхней и нижней части фазовой плоскости соответственно.

Теорема. *Параметры α, β кривой переключения однозначно находятся из уравнений:*

$$\frac{\frac{8}{693a_i^6} - \frac{8\alpha}{63a_i^5} + \frac{4\alpha^2}{7a_i^4} - \frac{4\alpha^3}{3a_i^3} + \frac{5\alpha^4}{3a_i^2} - \frac{\alpha^5}{a_i} + \frac{\alpha^6}{6}}{\frac{8}{693a_i^6} - \frac{8\beta}{63a_i^5} + \frac{4\beta^2}{7a_i^4} - \frac{4\beta^3}{3a_i^3} + \frac{5\beta^4}{3a_i^2} - \frac{\beta^5}{a_i} + \frac{\beta^6}{6}} = \left(\frac{\alpha - \frac{1}{2a_i}}{\beta - \frac{1}{2a_i}}\right)^{\frac{11}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Функция Беллмана $\omega_{[a_1,a_2]}(x, y) = -\inf \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty x^6(t)dt \mid x = x(0),\ y = y(0) \right\}$ *задаётся выражением:*

$$\omega_{[a_1,a_2]}(x, y) = -\frac{8y^{13}}{9009} + \frac{8y^{11}x}{693a_1^6} - \frac{4y^9x^2}{63a_1^5} + \frac{4y^7x^3}{21a_1^4} - \frac{y^5x^4}{3a_1^3} + \frac{y^3x^5}{3a_1^2} - \frac{yx^6}{6a_1}$$

$$-\frac{\frac{8}{693} - \frac{8a_1\alpha}{63} + \frac{4(a_1\alpha)^2}{7} - \frac{4(a_1\alpha)^3}{3} + \frac{5(a_1\alpha)^4}{3} - (a_1\alpha)^5 + \frac{(a_1\alpha)^6}{6}}{13a_1^7(1 - 2(a_1\alpha))^{\frac{11}{2}}} |y^2 - 2a_1x|^{\frac{13}{2}}$$

при $u(x, y) = a_1$; а при $u(x, y) = a_2$

$$\omega_{[a_1,a_2]}(x, y) = -\frac{8y^{13}}{9009} + \frac{8y^{11}x}{693a_2^6} - \frac{4y^9x^2}{63a_2^5} + \frac{4y^7x^3}{21a_2^4} - \frac{y^5x^4}{3a_2^3} + \frac{y^3x^5}{3a_2^2} - \frac{yx^6}{6a_2} -$$

$$\frac{\frac{8}{693} - \frac{8a_2\beta}{63} + \frac{4(a_2\beta)^2}{7} - \frac{4(a_2\beta)^3}{3} + \frac{5(a_2\beta)^4}{3} - (a_2\beta)^5 + \frac{(a_2\beta)^6}{6}}{13a_2^7(1 - 2(a_2\beta))^{\frac{11}{2}}} |y^2 - 2a_2x|^{\frac{13}{2}}.$$

РАСЧЕТ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТЕРМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ, ДИССОЦИАЦИИ И ИОНИЗАЦИИ

Коробов О. А.[1], **Шоев Г. В.**[2]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* oleg0101@ngs.ru

[2] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия*

Данная работа посвящена моделированию течений за сильными ударными волнами. В таких течениях возбуждаются колебательные степени свободы молекул, происходит диссоциация и ионизация. Численное моделирование таких высокоскоростных течений (с термохимической неравновесностью) на основе сплошносредного подхода сопряжено с рядом существенных трудностей, связанных с корректным описанием колебательной релаксации и диссоциации многоатомных молекул.

В работе обсуждаются вопросы, связанные с реализацией математических моделей колебательной релаксации, диссоциации и ионизации. Разработан открытый код для учета термической неравновесности при моделировании гиперзвуковых течений газа в программном комплексе ANSYS Fluent на основе уравнений Навье – Стокса в двухтемпературном приближении. Проведено моделирование течения около капсулы RAMC-II, входящей в атмосферу Земли с первой космической скоростью. Получены численные результаты электронной плотности около аппарата RAMC-II, хорошо согласующиеся с экспериментальными измерениями.

Это позволяет заключить, что реализованная в данной работе математическая модель может использоваться для описания слабоионизованных течений около возвращаемых аппаратов с первой космической скоростью.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Криворотько О. И.[1,2], Кондакова Е. А.[2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* olga.krivorotko@sscc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* e.kondakova@g.nsu.ru

В докладе рассматриваются вопросы устойчивости прямой и обратной задач для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая описывает взаимодействие раковой опухоли и иммунитета [1]. Исследованы фазовые портреты системы ОДУ и установлено влияние члена, отвечающего за лечение, на устойчивость системы. Исследованы спектральные портреты [2] дискретного аналога оператора линеаризованной обратной задачи для математической модели взаимодействия раковой опухоли и иммунитета, которая состоит в определении коэффициентов системы ОДУ по дополнительным измерениям концентраций опухолевых клеток и иммунных в фиксированные моменты времени. На основе исследования сингулярных чисел получившейся матрицы разработан алгоритм регуляризации обратной задачи [3].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (мероприятие 4.1.3 “Совместные лаборатории НГУ–ННЦ” в рамках Программы повышения международной конкурентоспособности НГУ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ledzewicz U., Mosalman M. S. F., Schättler H.* Optimal controls for a mathematical model of tumor-immune interactions under targeted chemotherapy with immune boost // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B. 2013. V. 18, No. 4. C. 1031–1051.
2. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 1997.
3. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.

ТЕОРЕМА ТИПА БОЛЯ – ПЕРРОНА И УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Куликов А. Ю.

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия; stphn@mail.ru

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) - x(n) - bx(n) + ax(n - h(n)) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, $f, x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$.

Оператор $\mathbf{K}$, заданный по правилу $(\mathbf{K}f)(n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} K(n, i+1) f(i)$, называется *оператором Коши* уравнения (1).

Приведем известный [1] результат, связывающий устойчивость уравнения (1) по правой части, *понимаемую как действие оператора Коши в паре некоторых пространств*, с экспоненциальной устойчивостью.

Предложение. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *оператор* $\mathbf{K}$ *действует из пространства* $\mathbf{l}_\infty$ *в пространство* $\mathbf{l}_\infty$*;*
2) *уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Результаты, подобные приведенному, называют *теоремами типа Боля – Перрона.* Поскольку доказать, что оператор Коши действует в паре некоторых пространств, зачастую проще, чем напрямую доказать экспоненциальную устойчивость уравнения, такие теоремы имеют важное практическое значение для получения признаков устойчивости.

Теорема. *Пусть* $H = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} h(n) < \infty$. *Тогда, если*

$$(|a|^2 + |a||b|)H < 1 - |1 - a + b|,$$

то оператор Коши уравнения (1) *действует из пространства* $\mathbf{l}_\infty$ *в пространство* $\mathbf{l}_\infty$.

Следствие. *В условиях теоремы уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Матем. 2011. № 12. С. 30–41.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА СУПЕРЭВМ

Куликов И. М.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; kulikov@ssd.sscc.ru

В докладе будет изложен метод высокого порядка точности на гладких решениях и с малой диссипацией решения в области разрывов для решения уравнений релятивистской газовой динамики. Численный метод основан на комбинации метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне [1]. Для построения решения задачи Римана была решена задача о полном спектральном разложении для уравнений релятивистской газовой динамики [2]. Процедура восстановления примитивных переменных основана на работе [3]. Численный метод был протестирован на задаче о распаде релятивистского разрыва, допускающего аналитическое решение. В рамках модели релятивистской газовой динамики был смоделирован процесс центрального столкновения двух черных дыр. Такую постановку задачи также можно интерпретировать как столкновение двух релятивистских пучков в ускорителе [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-31-20150).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kulikov I., Vorobyov E.* Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // J. Comput. Phys. 2016. V. 317. P. 318–346.
2. *Falle S. A. E. G., Komissarov S. S.* An upwind numerical scheme for relativistic hydrodynamics with a general equation of state // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1996. V. 278, No. 2. P. 586–602.
3. *Mignone A., Bodo G.* An HLLC Riemann solver for relativistic flows – I. Hydrodynamics // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2005. V. 364, No. 1. P. 126–136.
4. *East W. E., Pretorius F.* Ultrarelativistic black hole formation // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110, No. 10. Article ID 101101.

О ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОБОБЩЁННЫМИ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Лангаршоев М. Р.

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан;
mukhtor77@mail.ru

Аналитическая в круге $|z| < 1$ функция f принадлежит весовому пространству Бергмана [1], если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \Big(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^q d\sigma\Big)^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q \le \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ — неотрицательная измеримая весовая функция.

Гладкость функции $f \in B_{q,\gamma}$ характеризуем обобщенным модулем непрерывности $\Omega_m^2(f,t)_{2,\gamma} = \frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t \|\Delta_{\frac{m}{h}} f(\cdot)\|^2 dh_1 \dots dh_m$. Положим $\mathcal{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} = \Big\{f(z) \in B_{q,\gamma} : \|f_a^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty\Big\}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le q \le \infty$. Пусть $W_{m,a}^{(r)}(h) = \Big\{f \in \mathcal{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} : \Big(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)},t)dt\Big)^{m/2} \le 1\Big\}$. Величины $b_n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$, $d^n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$, $d_n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$, $\lambda_n(\mathfrak{M}, B_{2,\gamma})$ и $\ {}_n(\mathfrak{M}, B_{2\gamma})$ называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками [2] некоторого подмножества $\mathfrak{M} \subset B_{2,\gamma}$.

Теорема. *Для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство*

$$\sigma_n\left(W_{m,a}^{(r)}(h), B_{2,\gamma}\right) = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{nh}{2[nh - Si(nh)]}\right\}^{m/2},$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БАЗОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

Латышенко В. А.[1], **Криворотько О. И.**[2], **Кабанихин С. И.**[3]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* Latushenko_varia@mail.ru

[2]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* krivorotko.olya@mail.ru

[3]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* ksi52@mail.ru

В данной работе исследована базовая математическая модель инфекционного заболевания, разработанная группой под руководством Г.И. Марчука [1]. Модель состоит из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздывающим аргументом, которые описывают изменение числа антигенов, рост плазматических клеток, баланс числа антител и характеристику пораженной части органа.

Цель данной работы — постановка, исследование и построение алгоритма численного решения задачи определения коэффициентов системы ОДУ с запаздыванием (обратная задача) по дополнительным статистическим данным о решении прямой задачи в заданный момент времени [2]. Для решения данной обратной задачи разработана и проанализирована комбинация двух методов, а именно генетического алгоритма и градиентного метода. Приведены результаты численных расчетов.

Решение обратной задачи иммунологии актуально, так как оно помогает описать различные процессы, происходящие в организме человека (распространение лекарств, развитие болезни с течением времени), а также позволяет разработать адекватную математическую модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991.
2. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ДВУХ КИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Лашина Е. А.[1,3], Чумаков Г. А.[2,3], Чумакова Н. А.[1,3]

[1] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;* lashina@catalysis.ru, chum@catalysis.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* chumakov@math.nsc.ru

[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

Представлены результаты анализа двух кинетических моделей гетерогенных каталитических реакций окисления лёгких углеводородов (метан и этан) [1, 2], которые являются системами нелинейных ОДУ. С помощью качественной теории ОДУ и численного анализа в [1, 2] найдены значения параметров, при которых в обеих моделях существует устойчивый предельный цикл, который является математическим образом автоколебаний скорости реакции. В данной работе рассматривается случай, когда в моделях возможно выделение двух малых параметров $\varepsilon \ll \delta < 1$, так что системы ОДУ являются сингулярно возмущенными и имеют следующий вид: $\varepsilon x = f(x, y, z)$, $y = g(x, y, z)$, $z = \delta h(x, y, z)$. Численный анализ показал, что рассмотренные механизмы реакций позволяют качественно описать экспериментальные данные по автоколебаниям скоростей. Определены параметры модели, при которых существует устойчивый предельный цикл при $\varepsilon \to 0$. Найдено изолированное решение $x = \varphi(y, z)$ уравнения $f(x, y, z) \equiv 0$, которое является асимптотически устойчивым по Ляпунову равномерно по (y, z) для присоединенной системы $dx/d\tau = f(x, y, z)$, в которой (y, z) рассматриваются как параметры, и показано, что выполнены условия теоремы Тихонова. Доказано, что если в вырожденной системе (при $\varepsilon = 0$) существует устойчивый предельный цикл l, то в полной системе также существует устойчивый предельный цикл L, близкий к l при малых ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лашина Е. А., Каичев В. В., Чумакова Н. А., Устюгов В. В., Чумаков Г. А., Бухтияров В. И.* Математическое моделирование автоколебаний в реакции окисления метана на никеле: изотермическая модель // Кинетика и катализ. 2012. Т. 53, № 3. С. 389–399.
2. *Устюгов В. В., Каичев В. В., Лашина Е. А., Чумакова Н. А., Бухтияров В. И.* Математическое моделирование автоколебаний в реакции окисления этана на никеле // Кинетика и катализ. 2016. Т. 57, № 1. С. 115–126.

(m,k)-СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕЯВНЫХ И ЖЁСТКИХ СИСТЕМ ОДУ

Левыкин А. И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; lai@osmf.sscc.ru

Предложен класс (m,k)-методов решения задачи Коши для неявных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной [1–3]

$$F(x,x') = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \le t \le t_k.$$

Исследуемые методы индуцированы (m,k)-схемами [4] решения разрешенных систем. Для систем индекса 1 и 2 получены условия согласованности и сходимости численного решения в случае использования замораживания матриц производных. Проведено исследование схем при $k \le 5$ и получены оптимальные по затратам схемы с использованием как точных, так и замороженных матриц производных.

Анализ результатов расчетов показывает высокую эффективность (m,k)-методов при их применении для решения широкого класса задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00977).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 1991.
2. *Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. Новосибирск: Наука, 1989.
3. *Boscarino S.* Error analysis of IMEX Runge–Kutta methods derived from differential-algebraic systems // SIAM J. Numer. Anal. 2007. V. 45, No. 4. P. 1600–1621.
4. *Новиков Е. А., Шитов Ю. А., Шокин Ю. И.* Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 6. С. 1310–1314.

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА И ПОСТРОЕНИИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Лемперт А. А.[1], **Зимина Н. И.**[2]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;* lempert@icc.ru

[2]*Байкальский государственный университет, Иркутск, Россия;* nadai.zimina@mail.ru

В данной работе рассматривается двумерное уравнений эйконала

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{1}{v^2(x,y)}, \tag{1}$$

где $v(x,y)$ — функция, задающая скорость распространения волн.

Известно [1], что если $f(x,y)$ — решение уравнения (1), то фронт волны в момент времени τ описывается уравнением $f(x,y)=\tau$, а положение источников возмущения задается уравнением $f(x,y)=0$.

Точные решения уравнения (1) известны только для функций v определенных типов (константы, линейной, степенной и т. п.), нахождение фронта в общем случае, как правило, осуществляется численными методами.

В данной работе произведен переход к полярным координатам, позволяющий в ряде случаев более эффективно осуществлять построение замкнутых волновых фронтов. Предложен вычислительный алгоритм, основанный на оптико-геометрическом подходе [2]. Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого сравнивались с известными точными решениями [1, 3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00356).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровских А. В.* Двумерное уравнение эйконала // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 993–1018.
2. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 50–57.
3. *Москаленский Е. Д.* О нахождении точных решений двумерного уравнения эйконала // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 201–209.

О ЗАДАЧЕ УПАКОВКИ РАВНЫХ КРУГОВ В НЕОДНОСВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО

Лемперт А. А.[1], Ле К. М.[2]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;* lempert@icc.ru

[2]*Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия;* quangmungle2010@gmail.com

Рассматривается задача об отыскании расположения равных кругов в компактном множестве M, при котором они заполнят наибольшую долю последнего.

В случае, когда пространство является евклидовым, эта задача достаточно хорошо изучена [1], однако существует ряд задач, к примеру, в области инфраструктурной логистики, которые, с одной стороны, приводят к необходимости рассматривать неодносвязные множества, и, с другой стороны, использовать специальные метрики.

Определим расстояние между точками множества M следующим образом:

$$\rho(a,b) = \min_{G \in G(a,b)} \int\limits_G \frac{dG}{f(x,y)}.$$

Здесь $0 < \alpha \le f(x,y) \le \beta$ — непрерывная функция, задающая скорость движения в каждой точке множества M, $G(a,b)$ — множество непрерывных кривых, лежащих в M и соединяющих a и b. Иными словами, кратчайшим путем между точками будет кривая, на преодоление которой затрачивается наименьшее время.

Для поставленной задачи авторами предложены вычислительные алгоритмы, основанные на оптико-геометрическом подходе [2] к отысканию решения уравнения эйконала, представлены результаты численного эксперимента.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00464).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Szabo P. G., Markot M. C., Csendes T., Specht E., Casado L. G., Garcia I.* New approaches to circle packing in a square. New York: Springer, 2007.
2. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 50–57.

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ломов А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; lomov@math.nsc.ru

В докладе исследуется новый операторный подход [1, 2] к идентификации коэффициентов линейных дифференциальных и разностных уравнений по наблюдениям множества функций-решений с аддитивными возмущениями, основанный на использовании алгебраического метода М. Фльеса [2] в сочетании с методом ортогональной регрессии в пространстве наблюдаемых функций, преобразованных интегральными операторами типа свертки. Операторные методы отличаются малой вычислительной трудоемкостью, что в ряде случаев оправдывает их применение по сравнению с асимптотически оптимальными ортoрегрессионными (вариационными) методами идентификации [3]. В [1] была доказана состоятельность операторного метода и на примерах проведено численное исследование его асимптотических свойств. В докладе представлен ряд обобщений операторного метода, позволяющих учесть наличие общих переменных в идентифицируемых разностных уравнениях для соседних моментов времени, что способствует повышению устойчивости оценок коэффициентов. Приведены результаты расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломов А. А., Климов А. В., Ким Хан Бок.* Комбинированный операторно-регрессионный метод идентификации // XII Всероссийское совещание по проблемам управления: Труды. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 2669–2678.
2. *Fliess M., Sira-Ramirez H.* An algebraic framework for linear identification // ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 2003. V. 9. P. 151–168.
3. *Ломов А. А.* Об асимптотической оптимальности орторегрессионных оценок // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 51–60.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ

Лосев А. А.

Церковно-приходская школа при храме Всех Святых Алексеевского ставропигиального женского монастыря, Москва, Россия;
andrey.a.losev@gmail.com

Рассматривается система вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида

$$y_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + q_i \operatorname{sgn} y_2 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Здесь $n \geqslant 2$; $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — неизвестные функции времени t; y_i обозначает производную dy_i/dt, $i = 1, \dots, n$; $(p_1, \dots, p_n)^{\mathrm{T}}$ и $(q_1, \dots, q_n)^{\mathrm{T}}$ — заданные постоянные n-мерные векторы (символ Т обозначает транспонирование); $(r_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ — заданная постоянная $(n \times n)$-матрица.

Для доопределения системы (1) на гиперплоскостях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы и на пересечении этих гиперплоскостей можно использовать простейшее выпуклое доопределение, доопределение методом эквивалентного управления, общее доопределение, причем для релейной системы (1) все три доопределения совпадают [1].

Определение. Решением системы (1) называется набор абсолютно непрерывных функций $(y_1(t), \dots, y_n(t))$, который вне гиперплоскостей $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ удовлетворяет системе (1), а на этих гиперплоскостях и их пересечении — системам, полученным из (1) методом эквивалентного управления (при почти всех t).

В настоящей работе получен ряд достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости (в малом) положения равновесия $(0, \dots, 0)$ системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОЗМУЩЕННЫХ СВЕРХУСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Люлько Н. А.[1], **Кмит И. Я.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* natlyl@mail.ru

[2]*Institute of Mathematics, Humboldt University of Berlin, Berlin, Germany;* kmit@mathematik.hu-berlin.de

Линейная система
$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t), \quad u(0) \in X \quad (0 < t < \infty), \tag{1}$$
рассматриваемая в банаховом пространстве X, называется *асимптотически устойчивой* с показателем $\gamma > 0$, если существует число $M > 0$ такое, что для любого решения u этой системы при $t \geq 0$ справедлива оценка $\|u(t)\| \leq Me^{-\gamma t}\|u(0)\|$. Система (1) называется *сверхустойчивой*, если она устойчива с любым показателем $\gamma > 0$, т. е. все решения u этой системы убывают быстрее экспоненты в любой степени [1].

Для линейной гиперболической системы первого порядка рассмотрим в полуполосе $\quad = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}$ смешанную задачу, которую представим в виде (1), где u — n-мерная вектор-функция и
$$A(t) : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1) : \qquad (A(t)u)(x) = a(x,t)u_x + b(x,t)u,$$
$$D(A(t)) = \{u \in L^2(0,1) : \ u_x \in L^2(0,1),\ P(u(0,t), u(1,t)) = 0\}.$$
Здесь a, b — гладкие матрицы размерности $n \times n$, P — линейный оператор, задающий граничные условия; $n \geq 2$. В [2] выделен класс сверхустойчивых гиперболических задач, всех решения которых стабилизируются к нулю за конечное время, не зависящее от начальных данных $u(0)$. Доказано, что при малом возмущении матрицы b возмущенные системы становятся асимптотически устойчивыми. Найдены условия, при которых возмущенные системы обладают свойством повышения гладкости.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН (проект № 0314-2015-0012).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Appl. Math. Comput. 2005. V. 164, No. 2. P. 321–326.
2. *Kmit I., Lyul’ko N.* Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // arxiv.org/abs/1605.04703.

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ СОПРЯЖЁННОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРИ МАЛОМ ЧИСЛЕ МАРАНГОНИ

Магденко Е. П.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия; magdenko_evgeniy@icm.krasn.ru

Исследуется одно частично инвариантное решение ранга два и дефекта три [1] уравнений, описывающих осесимметрическое движение вязкой теплопроводной жидкости, построенное на четырёхмерной подалгебре Ли $G_4 = \langle \partial_z, \partial_w + t\partial_z, \partial_p, \partial_\theta \rangle$ [2], допускаемой системой уравнений модели Обербека – Буссинеска. Оно интерпретируется как двухслойное движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твёрдой стенкой и общей подвижной недеформируемой поверхностью раздела.

С математической точки зрения возникающая начально-краевая задача является сильно нелинейной и обратной. При некоторых (часто выполняющихся в практических приложениях) предположениях задача заменяется линейной. Кроме того, предполагается, что в начальный момент времени поверхность раздела была круглым цилиндром. В результате получены неулучшаемые априорные оценки для решений поставленных задач, равномерные на своих областях определения, и на их основе доказано, что если выполняется ряд условий, то найденные решения с ростом времени экспоненциально стремятся к нулю.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00067).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Андреев В. К., Пухначёв В. В.* Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения // Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14, № 5. С. 3–23.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Малыгина В. В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; mavera@list.ru

Рассмотрим семейство уравнений

$$x(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k(t)x(t - r_k(t)) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где a_k и r_k — измеримые ограниченные функции, причем $0 \leqslant a_k(t) \leqslant a_k$, $0 \leqslant r_k(t) \leqslant r_k$. Поставим в соответствие уравнению (1) test-уравнение

$$y(t) + \sum_{k=1}^{N} p_k(t)y(t - r_k) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

коэффициенты которого определяются следующим образом: $p_k(t) = a_k$, если $t \leqslant r_k + t_0$, и $p_k(t) = 0$, если $t > r_k + t_0$, где t_0 — первый нуль решения test-уравнения. Обозначим через $\omega = \max_k r_k$, через L — точку первого минимума test-уравнения.

Теорема. *Пусть* $\int_0^\infty \sum_{k=1}^N a_k(s)ds = \infty$ *и выполнено любое из условий:* (а) $L > 5\omega/3$; (б) $L \leqslant 5\omega/3$ *и* $y(L) > -1$. *Тогда уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

На основе теоремы удается получать точные эффективные признаки устойчивости для уравнений вида (1), которые уточняют известные результаты из работы [1].

Работа выполнена в рамках госзадания № 2014/152 Минобрнауки РФ, проект № 1890.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krisztin T.* On stability properties for one-dimensional functional differential equations // Funkc. Ekvacioj. 1991. V. 34, No. 2. P. 241–256.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Мамонтов А. Е.[1], **Прокудин Д. А.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;

[1]aemamont@hydro.nsc.ru, [2]prokudin@hydro.nsc.ru

Рассматриваются уравнения стационарных баротропных движений смесей $N > 1$ вязких сжимаемых жидкостей [1], [2]:

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p(\rho) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Здесь $\rho_i = \alpha_i \rho$ — плотность i-й компоненты смеси, где концентрации составляющих α_i являются известными постоянными такими, что $0 < \alpha_i < 1$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, а $\rho = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность; $\boldsymbol{u}_i$ — поле скоростей i-й составляющей; $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{u}_i$ — средневзвешенная скорость смеси; p — суммарное давление; векторы $\boldsymbol{f}_i$ и $\boldsymbol{g}_i$ являются известными полями внешних сил; $\mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} \Big(2\mu_{ij} \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) + \lambda_{ij} (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \mathbb{I}\Big)$ — тензоры вязких напряжений.

В докладе будет представлена теорема существования решений краевой задачи для уравнений (1), (2), будут обсуждаться перспективы и трудности дальнейшего развития теории.

Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–8146.2016.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М: Наука, 1987.
2. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений политропного движения вязких сжимаемых многожидкостных сред // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 664–693.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМА–ВАКУУМ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Мандрик Н. В.

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия; manikitos@gmail.com

В данной работе рассматривается задача со свободной границей “плазма–вакуум” для случая, когда плотность в области плазмы убывает к нулю не непрерывно, а скачком. Для моделирования плазмы используется система уравнений магнитной гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости, а в области вакуума — система уравнений Максвелла.

Новизна работы состоит в том, что область вакуума моделируется не эллиптической div-rot системой пред-максвелловской динамики, как в классической постановке [1], а с помощью системы уравнений Максвелла для магнитного и электрического полей. Ранее такая модель рассматривалась в работе [2] для релятивистского случая, в работе [3], где были получены априорные оценки для линеаризованной задачи и доказана возможность ее некорректности при достаточно большом невозмущенном электрическом поле в вакууме, а также в работе [4], где были получены ручные априорные оценки (tame estimates) в подходящих пространствах Соболева.

В ходе работы доказано локальное по времени существование и единственность решения данной задачи. Доказательство, как и в [1], проводилось с помощью итераций Нэша – Мозера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Secchi P., Trakhinin Y.* Well-posedness of the plasma-vacuum interface problem // Nonlinearity. 2014. V. 27, No. 1. P. 105–169.
2. *Trakhinin Y.* Stability of relativistic plasma-vacuum interfaces // J. Hyperbolic Differ. Equ. 2012. V. 9, No. 3. P. 469–509.
3. *Mandrik N., Trakhinin Y.* Influence of vacuum electric field on the stability of a plasma-vacuum interface // Commun. Math. Sci. 2014. V. 12, No. 6. P. 1065–1100.
4. *Мандрик Н. В.* Ручные априорные оценки в пространствах Соболева для задачи со свободной границей “плазма-вакуум” // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. (принята в печать).

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Марков В. Г.[1], **Попов С. В.**[2]

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия;

[1]bntr@rambler.ru, [2]guspopov@mail.ru

В работе рассматриваются вопросы разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial t^{2m+1}} + \sum_{k=0}^{2m} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\, a_k(t) + Lu = f, \tag{1}$$

$$Lu \equiv \frac{1}{g(x)}(L_0u + \lambda_0 u + Mu), \quad (x,t) \in Q = (a,b) \times (0,T),$$

где дифференциальный оператор L_0 — оператор по пространственной переменной $2n$-го порядка, M — его возмущение, λ_0 — комплексный параметр, функция $g(x)$ может обращаться в нуль и менять знак на интервале (a,b).

В частности, при $m = 0$ получаются $2n$-параболические уравнения с меняющимся направлением времени и рассматриваются вопросы корректности краевых задач с полной матрицей условий сопряжения (склеивания).

Отметим, что подобные уравнения возникают во многих областях физики, механики и некоторых других их приложениях, и уравнения высокого порядка рассматривались в работах [1, 2].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект № 3047).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кислов Н. В.* Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1427–1436.
2. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Матвеева И. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
matveeva@math.nsc.ru

Рассматриваются системы уравнений с запаздыванием

$$y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau), y(t-\tau)),$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы с периодическими элементами. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений уравнений с запаздыванием (см., например, [1–5]). Мы получаем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и устанавливаем оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности. Аналогичные исследования проведены для систем с несколькими запаздываниями. При получении результатов использованы функционалы Ляпунова – Красовского специального вида.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
2. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
4. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. V. 2015, No. 83. P. 1–22.
5. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. (в печати).

О СТРУКТУРЕ ОБЛАСТЕЙ D-РАЗБИЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Мулюков М. В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; Mulykoff@gmail.com

Рассмотрим систему $x(t)+\int_0^h dR(s)x(t-s) = 0$, где $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$, R — это $N \times N$ вещественная матричная функция ограниченной вариации, интегралы понимаются в смысле Римана – Стилтьеса. Доопределим x суммируемой начальной вектор-функцией при $t \in [-h, 0)$. Решение системы, локально абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая данной системе почти всюду на $\mathbb{R}_+$, существует и единственно.

Исследование устойчивости рассматриваемой системы сводится к изучению корней функции $\quad(z) = \det\bigl(Iz + \int_0^h e^{-zs}dR(s)\bigr)$. Метод D-разбиения [1], вероятно, является наиболее эффективным приёмом изучения зависимости количества корней характеристического уравнения $\quad(z) = 0$ с положительной вещественной частью от параметров.

Пусть   линейно зависит от вещественных параметров r_1, r_2, тогда характеристическое уравнение имеет вид $f_0(z)+r_1f_1(z)+r_2f_2(z) = 0$. В этом случае удаётся провести классификацию областей D-разбиения и разделить характеристические уравнения на четыре типа по качественно различным свойствам структуры областей D-разбиения и их границ.

Области D-разбиения характеристического уравнения первого рода имеют криволинейные границы. Области D-разбиения характеристического уравнения второго и третьего рода — выпуклые многоугольники, отличие заключается в способе вычисления направления возрастания вещественной части корня на границе многоугольников. Область устойчивости характеристического уравнения четвёртого рода пуста.

Эти результаты позволили получить новые эффективные признаки устойчивости систем уравнений с последействием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И.* Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива // Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9, вып. 3. С. 190–203.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Муминов К. К.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; m.muminov@rambler.ru

Пусть $X = \mathbb{R}^4$ — четырехмерное пространство Минковского, т. е. псевдоевклидово пространство сигнатуры $(3, 1)$ с метрикой

$$[x, x] = x^T Jx = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \tag{1}$$

Обозначим через $O(3, 1)$ группу Лоренца линейных преобразований в X, сохраняющих форму (1). Полупрямое произведение $G = O(3, 1) \rhd R^4$ группы Лоренца и группы четырехмерных сдвигов называют *группой Пуанкаре*.

Путем в X называется вектор-функция $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^4$ из $(0, 1)$ в $\mathbb{R}^4$, у который все координатные отображения $x_i : (0, 1) \to \mathbb{R}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Производная r-го порядка от пути есть вектор-функция $x^{(r)}(t) = \{x_1^{(r)}(t)\}_{i=1}^4$, где $x_i^{(r)}(t)$ — r- ая производная координатной функции $x_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$. Для каждого пути $x(t)$ через $M(x(t))$ обозначим (4×4)-матрицу $(x(t)\ x^{(1)}(t)\ x^{(2)}(t)\ x^{(3)}(t))$, где i-ый столбец имеет координаты $x_i^{(j-1)}(t)$, $i = \overline{1, 4}$. Через $M'(x(t))$ обозначается, соответственно, матрица $(x^{(1)}(t)\ x^{(2)}(t)\ x^{(3)}(t)\ x^{(4)}(t))$. Путь $x(t)$ называется *регулярным*, если определитель $\det M(x(t))$ не равен нулю при всех $t \in (0, 1)$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в X, называются *G-эквивалентными*, если существует такое $(g, a) \in G = O(3, 1) \rhd \mathbb{R}^4$, что $y(t) = gx(t) + a$ для всех $t \in (0, 1)$ ($gx(t)$ означает обычное умножение матрицы g на вектор-столбец $x(t)$).

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ такие пути в X, что пути $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ регулярны.

Теорема 1. *Два регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ G-эквиваленты тогда и только тогда, когда для всех $t \in (0, 1)$ выполнены следующие равенства:*

$$(M'(x(t)))^{-1}M''(x(t)) = (M'(y(t)))^{-1}M''(y(t))$$

$$(M'(x(t)))^T JM''(x(t)) = (M'(x(t)))^T JM''(x(t)), \quad J = \mathrm{Diag}\,(1, 1, 1, -1).$$

Теорема 2. *Пути $x(t)$ и $y(t)$ являются G-эквивалентными тогда и только тогда, когда $[x^{(r)}(t), x^{(r)}(t)] = [y^{(r)}(t), y^{(r)}(t)]$ для всех $t \in (0, 1)$, $r = \overline{1, 4}$.*

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ТИПА СТЕФАНА

Мухамбетжанов С. Т.[1], **Абдиахметова З. М.**[2]

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

[1]mukhambetzhanov_@mail.ru, [2]zukhra.abdiakhmetova@gmail.com

В работе исследована двумерная задача изотермической фильтрации со свободной границей. Предлагаемый метод применен ранее с целью построения класса точных решений двумерных задач неоднородной жидкости и магнитной гидродинамики. Структура исследования состоит из определения давления методом, указанным в работе [1], полностью определяется топологическая структура течения, затем определяется насыщенность вытесняемой фазы. Для уравнения неразрывности каждой компоненты жидкости:

$$\frac{\partial(m\rho_i s_i)}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_i \nu_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

М. Маскет предложил следующее формальное обобщение закона Дарси [2, 3] для каждой из жидкостей: $\nu_i = -K_0(k_0^i/\mu_i)(\bigtriangledown p_i + \rho_i g)$, $i = 1, 2$, где K_0 — коэффициент фильтрации пористой среды для однородной жидкости (или симметричный тензор для анизотропной среды), μ_i — коэффициенты динамической вязкости, а k_0^i — относительные фазовые проницаемости. При этом k_0^i должны зависеть от насыщенности s_i, поскольку часть парового пространства занята другой жидкостью. По определению насыщенности s_i меняются в пределах $0 < s_0^i \le s_i \le 1 - s_j^0$, $i \ne j$, $s_1 + s_2 = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В., Мокин Ю. А.* Класс точных решений двумерных уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. 1972. Вып. 12. С. 5–13.
2. *Levitt L. C.* Some exact solutions for a class of two-dimensional hydromagnetic steady flows // J. Math. Anal. Appl. 1963. V. 6, No. 3. P. 483–496.
3. *Антонцев С. Н., Монахов В. Н.* О некоторых задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. 1969. Вып. 2. С. 156–167.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

Намм Р. В.[1], **Цой Г. И.**[2]

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия;
[1]rnamm@yandex.ru, [2]tsoy.dv@mail.ru

В докладе рассматривается плоская задача теории упругости с трещиной с условиями непроникания берегов трещины друг в друга [1]. Задачи такого типа порождают математические модели с нелинейными краевыми условиями вида неравенств на берегах трещины. Эти модели допускают вариационную постановку в виде минимизации выпуклого функционала на замкнутом выпуклом подмножестве исходного гильбертова пространства или в виде вариационных неравенств.

Для решения задачи минимизации функционала потенциальной энергии применяется схема двойственности, построенная на основе модифицированных функционалов Лагранжа. Модифицированные функционалы Лагранжа для решения вариационных неравенств механики рассматривались в работах [2, 3]. В этих работах предполагалась достаточная регулярность решения исходной задачи, обеспечивающая разрешимость двойственной задачи. Однако для задачи теории упругости с трещиной регулярность решения в окрестности краев трещины может быть недостаточной для разрешимости двойственной задачи. Несмотря на указанную проблему, для решения поставленной задачи в работе строится и обосновывается схема двойственности с использованием функционалов чувствительности и теорем о следах функции [1].

Приводятся численные примеры, указывающие на эффективность предложенного модифицированного метода двойственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
2. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 12. С. 2023–2036.
3. *Вихтенко Э. М., Ву Г. С., Намм Р. В.* Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1218–1228.

О ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Намсараева Г. В.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия; gerel@inbox.ru

В настоящей работе исследуется разрешимость обратных задач для уравнения Буссинеска, в которых вместе с решением неизвестным является множитель, зависящий от временной переменной и определяющий правую часть в граничном условии первого или второго рода.

Обратные задачи определения вместе с решением также неизвестных граничных данных ранее изучались для параболических уравнений и уравнений соболевского типа в работах [1–4], для уравнения же Буссинеска подобные задачи не изучались.

Подход к исследованию разрешимости обратных задач I и II основан на применении метода Фурье и сведении задач к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* Обратные задачи определения граничных режимов для некоторых уравнений соболевского типа // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. модел. програм. 2016. Т. 9, № 2. С. 37–45.
2. *Костин А. Б., Прилепко А. И.* О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. II // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 11. С. 1519–1528.
3. *Короткий А. И., Ковтунов Д. А.* Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
4. *Телешева Л. А.* Восстановление параметров в краевых задачах для линейных параболических уравнений четвертого порядка // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 3. С. 48–56.

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Орлов С. С.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
orlov_sergey@inbox.ru

Уравнения в частных производных, не разрешенные относительно старшей производной, в математической литературе принято называть уравнениями типа С. Л. Соболева. Наряду с ними, в приложениях возникают интегродифференциальные аналоги, которые можно трактовать как уравнения соболевского типа, возмущенные сверточным интегральным оператором Вольтерра. Примеры таковых доставляют уравнения, встречающиеся при моделировании электронных (ионных) магнитозвуковых колебаний [1]

$$(\Delta - \alpha)\varphi - \beta \cdot (t * \varphi_{x_3x_3}) = f(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

течения вязкоупругих жидкостей [2]

$$(\nu - \Delta)v_t - \Delta v - k_1(t) * \Delta v = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

вязкоупруго-динамического состояния среды [3]

$$(a - \Delta)u_{tt} - b\Delta u_t - \Delta u + k_2(t) * \Delta u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

и многих других явлений и процессов. С единых позиций начально-краевые задачи для них могут быть изучены в форме интегральных и интегродифференциальных уравнений в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части. Некоторым результатам автора в этом направлении будет посвящен предполагаемый доклад.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
2. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
3. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping // Math. Methods Appl. Sci. 2001. V. 24, No. 14. P. 1043–1053.

РЯД ПО ЛИПШИЦЕВОМУ ВОЗМУЩЕНИЮ ГРАНИЦЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Парфёнов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; parfenov@math.nsc.ru

Для целого $n \geqslant 2$ пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \omega(x')\}$ — надграфик финитной липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. В [1] проверены существование и единственность классического решения U_ω задачи

$$\Delta\, U_\omega = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad U_\omega\big|_{\partial\Omega} = 0; \quad U_\omega(x) = x_n + o(|x|) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ пусть ${}^{j} = \mathcal{F}^{-1}(-|\xi|)^j\mathcal{F}$ — степени оператора Дирихле – Неймана ^{1}. При $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ положим

$$ {}_{1}^{\varphi} = -\varphi; \qquad {}_{k}^{\varphi} = -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varphi^j}{j!}\; {}^{j}\; {}_{k-j}^{\varphi} \quad (k > 1). \tag{1}$$

Ясно, что $\{\,{}_{k}^{\varphi}\} \subset C_0^\infty$. Распределение $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n-1})$ гармонически продолжается в $\mathbb{R}^n_+$ формулой $\mathcal{H}_\psi(x) = \ (n/2)\pi^{-n/2}x_n\langle\psi, |x - (\cdot, 0)|^{-n}\rangle$.

Теорема. *Пределы* ${}_{k}^{\omega} = \lim_{i\to\infty} {}_{k}^{\omega_i}$ *существуют в* $\mathcal{E}'$ *для любой соболевской аппроксимации* $\omega_i \to \omega$. *Если* $M \geqslant 0$, $N \geqslant 1$, $\|\omega\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant Q$, *а расстояние* R *от* x *до* $\operatorname{supp}\omega \times \{0\}$ *достаточно велико, то*

$$\left| U_\omega(x) - x_n - \sum_{k=1}^{M+N-1} \mathcal{H}_{\,{}_{k}^{\omega}}(x) \right| \leqslant c_1 c_2^M x_n R^{-n} \|\omega\|^M_{\mathrm{Lip}} \|\omega\|^N_{b_N^*},$$

где $c_i = c_i(n, N, Q)$, $b_N^* = L_1$ *при* $N = 1$ *и* $b_N^* = b_N^{1-1/N}$ *(однородное пространство Слободецкого) при* $N \geqslant 2$.

Эта теорема обобщает теоремы 1, 2 и 9 работы [1].

Определение (1) аналогично формуле (9) из [2] для задачи Дирихле в гладком возмущении круга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парфёнов А. И.* Оценка погрешности обобщенной формулы М. А. Лаврентьева нормой дробного пространства Соболева // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 335–377.
2. *Kautský J.* Approximation of solutions of Dirichlet’s problem on nearly circular domains and their application in numerical methods // Apl. Mat. 1962. V. 7, No. 3. P. 186–200.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЖИВЫХ СИСТЕМ

Перцев Н. В.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; homlab@ya.ru

Работа посвящена изучению задачи Коши для дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающих в математических моделях живых систем. Пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ — численность элементов некоторой живой системы в момент времени t, $x_i(t)$ — количество элементов i-го типа, $dx_i(t)/dt$ — правосторонняя производная, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\omega \geqslant 0$ — некоторая константа, $I_\omega = [-\omega, 0]$, $x_t : I_\omega \to \mathbb{R}^m$ — запаздывающая переменная, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in I_\omega$, $t \geqslant 0$. Обозначим через $C(I_\omega, A)$ множество всех непрерывных функций $z : I_\omega \to A$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

Полагаем, что динамика $x_i(t)$ описывается соотношениями

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_t) - (\mu_i + g_i(t, x_t))x_i(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$x_i(t) = \psi_i(t), \quad t \in I_\omega, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2}$$

где $f_i(t, x_t)$ — скорость появления в системе элементов i-го типа, $\mu_i + g_i(t, x_t)$ — интенсивность гибели элементов i-го типа или их перехода в другие системы, $\psi_i(t)$ — количество первоначальных элементов i-го типа. Принято, что константы $\mu_i > 0$, $\psi_i(t)$ — непрерывные неотрицательные функции, $1 \leqslant i \leqslant m$. Отображения $f_i(t, z)$, $g_i(t, z)$ обладают следующими основными свойствами: 1) для некоторых $a_1 < 0, \ldots, a_m < 0$

$$f_i, g_i : \mathbb{R}_+ \times C(I_\omega, [a_1, \infty) \times \cdots \times [a_m, \infty)) \to \mathbb{R}$$

являются непрерывными, 2) $f_i, g_i : \mathbb{R}_+ \times C(I_\omega, \mathbb{R}_+^m) \to \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

В работе установлена совокупность условий относительно отображений $f_i(t, z)$, $g_i(t, z)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, обеспечивающих существование, единственность и неотрицательность решений задачи Коши (1), (2) на полуоси $t \in [0, \infty)$. В рамках указанных условий доказана непрерывная зависимость решений задачи Коши (1), (2) от начальных функций на конечных промежутках времени.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Пиманов Д. О.[1], **Фадеев С. И.**[1,2], **Косцов Э. Г.**[3]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* pimanov-daniil@yandex.ru

[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* fadeev@math.nsc.ru

[3]*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия;* kostsov@iae.nsk.su

Приводятся результаты численного исследования математической модели микроэлектромеханического высокочастотного резонатора класса МЭМС (микроэлектромеханические системы). Математическая модель прибора представлена начально-краевой задачей, описывающей нелинейные колебания подвижного электрода (тонкая металлизированная пленка) цилиндрической формы. Нелинейность колебаний обусловлена электростатическим воздействием на подвижный электрод в узком зазоре. В случае постоянной разности потенциалов возникают автоколебания определенного периода и частоты. Для описания цилиндрической формы изгиба подвижного электрода используется уравнение упругой балки с жестко закрепленными концами. Найденные в рамках математической модели значения параметров, при которых существуют ограниченные колебания, характерны для параметров, обеспечивающих работоспособность прибора, значения которых известны из публикаций.

Рассмотрена задача о вынужденных нелинейных колебаниях подвижного электрода в виде недеформируемой платформы, прикреплённой к пружине, под действием периодически меняющихся электростатических сил в узком зазоре. С применением метода продолжения по параметру на основе дифференциальных прогонок найдены области в плоскости параметров модели с множественностью периодических решений, как устойчивых, так и неустойчивых, а также области, в которых ограниченные колебания платформы не существуют. Вычисление собственных чисел матрицы монодромии позволило определить устойчивость колебаний.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Поляков Д. М.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
DmitryPolyakow@mail.ru

Доклад посвящен исследованию различных спектральных свойств оператора $L_{bc} : D(L_{bc}) \subset \mathrm{L}_2[0,\omega] \to \mathrm{L}_2[0,\omega]$, $\omega > 0$, определенного дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^k y^{(2k)} - qy, \quad k \geq 1, \quad q \in \mathrm{L}_2[0,\omega],$$

и краевыми условиями bc:
(a) периодические $bc = per$: $y^{(j)}(0) = y^{(j)}(\omega)$, $j = 0, 1, \dots, 2k-1$;
(b) антипериодические $bc = ap$: $y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(\omega)$, $j = 0, 1, \dots, 2k-1$;
(c) Дирихле $bc = dir$: $y(0) = y(\omega) = \dots = y^{(2k-2)}(0) = y^{(2k-2)}(\omega) = 0$,
Следовательно, $D(L_{bc}) = \{y \in W_2^{2k}[0,\omega] : y$ удовлетворяет условию $bc\}$.

Для исследования этого оператора применяется новый вариант метода подобных операторов (см. [1]). Полученные результаты касаются асимптотики собственных значений, оценок отклонений спектральных проекторов, оценок равносходимости спектральных разложений. Также доказано асимптотическое представление полугруппы операторов с генератором $-L_{bc}$. Полученные результаты об асимптотике собственных значений улучшают (уточняют) известные до настоящего времени результаты (см. [2–3], а также более подробно краткий вариант [4]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00027).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г., Поляков Д. М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. 2016. (принято к печати).
2. *Ахмерова Э. Ф.* Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$-го порядка // Мат. заметки. 2011. Т. 90, вып. 6. С. 833–844.
3. *Menken H.* Accurate asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a boundary-value problem of fourth order // Bound. Value Probl. 2010. V. 2010, Article ID 720235.
4. *Поляков Д. М.* Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1133–1137.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУППЫ ДИЭДРА $\mathbf{D_{2h}}$

Попов А. С.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; popov@labchem.sscc.ru

С момента создания С. Л. Соболевым общей теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно преобразований конечных групп вращений, прошло уже более полувека [1]. За это время наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников.

Кубатурные формулы, инвариантные относительно различных диэдральных групп симметрии, рассматривались в работах [2–3]. В частности, в [2] был предложен алгоритм построения наилучших (в некотором смысле) кубатур на сфере, инвариантных относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{6h}, а в [3] — относительно группы D_{4h}.

В данной работе будет описан аналогичный алгоритм построения наилучших кубатур, инвариантных относительно группы D_{2h}. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии до 35-го порядка точности n. При этом для $n \leq 11$ будут найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n — приближённые, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 769–796.
2. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{6h} // Сиб. журн. вычисл. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 57–62.
3. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{4h} // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 457–464.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

Попов Н. С.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; madu@ysu.ru

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей , Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \ \times (0,T)$ — боковая граница, $f(x,t)$ — заданная в цилиндре $\overline{Q}$ функция, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — заданные на множестве $\overline{\Omega}$ функции, $K_i(x,y,t)$ $(i = 1,2)$ — функции, заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Краевая задача: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} + \Delta^2 u + cu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)\Big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K_1(x,y,t)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S}, \tag{3}$$

$$\Delta\, u(x,t)\Big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K_2(x,y,t)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S}. \tag{4}$$

Методом Фурье доказывается регулярная разрешимость краевой задачи (1)–(4) (см. [1]). Исследованию подобных нелокальных краевых задач для параболических уравнений посвящена работа [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // ДАН. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.
2. *Попов Н. С.* О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 79–86.

ГАРАНТИРОВАННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Рогалев А. Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия; rogalyov@icm.krasn.ru

Первые постановки задач об устойчивости на конечном промежутке времени принадлежат Н. Г. Четаеву, Н. Д. Моисееву, В. Гермаидзе и Н. Н. Красовскому, Г. В. Каменкову. Эти постановки исследованы в их работах и получили дальнейшее развитие как теория практической или технической устойчивости на конечном интервале времени. Практическая устойчивость на конечном интервале времени означает равномерную ограниченность решений относительно множества начальных значений и совокупности возмущающих воздействий. Для практической устойчивости требуется не только существование ограничивающей постоянной для решений, но и чтобы эта постоянная имела значения, достаточные для того, чтобы решения, начинающиеся во множестве Y_0, все время оставались в Y_0. В докладе описаны новые результаты применения гарантированных границ множеств решений для исследования практической устойчивости. Эти границы решений вычисляются при помощи методов, основанных на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории [1]–[3], и учитывают влияние на решения постоянно действующих возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогалев А. Н.* Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 102–116.
2. *Рогалев А. Н.* Вычисление гарантированных границ множеств достижимости управляемых систем // Автометрия. 2011. Т. 47, № 3. С. 100–112.
3. *Рогалев А. Н.* Безопасность сложных систем и оценки областей допустимых отклонений // Современные технологии, системный анализ, моделирование. 2014. № 4 (44). С. 84–91.

О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННОЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СУММИРУЕМОСТИ

Романов А. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
asrom@math.nsc.ru

Рассмотрим пространство Соболева с переменным показателем суммируемости [1]

$$L^1_{p(\cdot)}(G) = \{f \in L_1(G) \mid \nabla f \in L_{p(\cdot)}(G)\}.$$

Структура таких классов Соболева существенным образом зависит от регулярности показателя суммируемости, далее мы будем предполагать, что функция $p(x)$ является липшицевой.

Со всяким измеримым отображением $\varphi : G \to G'$ свяжем оператор композиции φ^*, определяемый условием $\varphi^* f = f \circ \varphi$, где f принадлежит пространству Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G')$.

Нас будут интересовать условия на отображение φ, при которых оператор φ^* будет изоморфизмом пространств Соболева

$$\varphi^* : L^1_{p(\cdot)}(G') \to L^1_{p(\varphi(\cdot))}(G), \tag{1}$$

т. е. соответствие будет взаимно однозначным и норма оператора φ^* будет ограничена.

Предположим, что $1 < p_- \le p(y) \le p^+ < \infty$ при всех $y \in G'$. При таком ограничении, используя альтернативное описание пространства $L^1_{p(\cdot)}$, основанное на липшицевой оценке специального вида [2], удается довольно просто показать, что требование квазиизометричности (билипшицевости) отображения φ является достаточным для существования изоморфизма (1).

Мы будем предполагать, что области G и G' ограничены и имеют гладкую границу, а функция $p(y)$ является липшицевой и $n < p_- \le p(y) \le p^+ < \infty$. При этих условиях у всякого отображения φ, индуцирующего изоморфизм (1), координатные функции принадлежат пространству Соболева $L^1_{p_-}(G) \subset C(G)$, что позволяет легко доказать гомеоморфность отображения. Используя оценки искажения нормы пробных функций удается доказать квазиизометричность отображения φ.

В случае $1 < p_- \leq p(y) \leq p^+ < n$ необходимость требования квазиизометричности отображения φ удается доказать при дополнительном предположении о его гомеоморфности.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 16-41-02004.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czech. Math. J. 1991. V. 41, No. 4. P. 592–618.
2. *Романов А. С.* Функции соболевского типа с переменным показателем суммируемости на метрических пространствах с мерой // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 178–194.

СПИРАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ ПОТЕНЦИАЛА

Рылов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; rylov@math.nsc.ru

В основе работы лежит относительно мало известная система уравнений газовой динамики

$$kU_\varphi - V_\psi = 0, \quad U_\psi + V_\varphi = 0. \tag{1}$$

Эта система создавалась в свое время для анализа линий уровня нулевых компонент вектора ускорения [1, 2]. Соответственно, зависимые переменные системы (1) являются некоторыми комбинациями производных от газодинамических параметров, взятых вдоль линии тока. Детали построения системы (1) и соответствующие обозначения приведены в [1, 2].

В рассматриваемом случае система (1) интересна тем, что она имеет очевидное частное решение для произвольной постоянной μ:

$$U = \mu\psi, \quad V = -\mu\varphi. \tag{2}$$

Совместный анализ системы (1) и решения (2) на плоскости потенциала, что достаточно принципиально, приводит к спиральному течению Толлмина [3], в котором изобары на физической плоскости являются логарифмическими спиралями, а на плоскости потенциала (φ, ψ) — лучами $\lambda = \psi/\varphi$, выходящими из начала координат плоскости потенциала. Все детали изложены в одноименной статье, выходящей в ближайшее время в журнале ДАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рылов А. И.* О свойствах однородных систем уравнений газовой динамики для компонент вектора ускорения // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 169–174.
2. *Рылов А. И.* Топология линий нулевых значений компонент вектора ускорения в дозвуковых течениях // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 3. С. 400–411.
3. *Tollmien W.* Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen // Z. Angew. Math. Mech. 1937. V. 17, No. 2. P. 117–136.

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Сабатулина Т. Л.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; TSabatulina@gmail.com

Рассмотрим систему уравнений

$$x(t) + \int_0^\omega dR(s)\, x(t-s) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\omega > 0$, каждая компонента матрицы-функции R, определённой на отрезке $[0, \omega]$, имеет ограниченную вариацию. Интеграл понимается в смысле Римана – Стилтьеса. Следуя [1], назовём *решением* уравнения (1) локально абсолютно непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента полагаем решение доопределённым заданной начальной вектор-функцией.

Будем называть определённую на положительной полуоси непрерывную вектор-функцию *осциллирующей*, если каждая её компонента имеет на полуоси неограниченную справа последовательность нулей.

В исследовании уравнения (1) важную роль занимает его характеристическая функция

$$g(p) = \det\left(pE + \int_0^\omega e^{-p\xi} dR(\xi)\right), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Для системы (1) справедлив следующий результат.

Теорема. *Все решения системы* (1) *осциллируют тогда и только тогда, когда функция g не имеет вещественных корней.*

С помощью теоремы можно получать эффективные необходимые и достаточные условия осцилляции любого решения системы типа (1).

Работа выполнена в рамках госзадания № 2014/152 Минобрнауки РФ, проект № 1890.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Саидусайнов М. С.

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан;
`smuqim@gmail.com`

Пусть $U_R \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса $R \in (0,1]$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $U_1 := U$; $\mathcal{A}(U_R)$ — множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U)$ символом $B_{q,\gamma}$ $(1 \le q \le \infty)$ обозначим банахово пространство Бергмана с нормой

$$\|f\|_{q,\gamma} := \|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q} < \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ — положительная весовая суммируемая функция, $d\sigma$ — элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега. Через $B_{q,\gamma,R}$ $(0 < R \le 1)$ обозначим пространство Бергмана функций $f \in \mathcal{A}(U_R)$, для которых $\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} = \|f(R\cdot)\|_{q,\gamma} < \infty$. Пусть $\quad(u)$, $u \ge 0$, — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\quad(0) = 0$. Приняв $\quad(u)$ в качестве мажоранты, для любого значения параметра $\mu \ge 1/2$ и $r \in \mathbb{N}$ определим класс аналитических функций $W_{q,a}^{(r)}(\quad, \mu) := \big\{f(z) \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h}\int_0^h \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma}\left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right] dt \le \quad(h),\ 0 < h \le \pi/2\big\}$. Введём обозначение $(1 - \cos nt)_* := \{1 - \cos nt,$ если $nt \le \pi;\ 2,$ если $nt > \pi\}$.

Теорема. *Если при некотором* $\mu \ge 1/2$ *и любых* $h \in (0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$ *мажоранта* $\quad(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\quad(h)}{\quad(\pi/2\mu n)} \ge \frac{\pi}{\pi - 2}\int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2}\right\} dt,$$

то при любых $r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty,\ 0 < R \le 1$ *справедливы равенства*

$$d_n(W_{q,a}^{(r)}(\quad, \mu), B_{q,\gamma,R}) = b_n(W_{q,a}^{(r)}(\quad, \mu), B_{q,\gamma,R})$$
$$= E_{n-1}(W_{q,a}^{(r)}(\quad, \mu))_{B_{q,\gamma,R}} = \pi R^n [2(\pi - 2)n^r]^{-1} \quad(\pi/2\mu n),$$

где $d_n(\cdot)$ *и* $b_n(\cdot)$ *соответственно называют колмогоровским и бернштейновским* n*-поперечникам (см., например,* [1]*). Множество мажорант, удовлетворяющих указанному ограничению, не пусто.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ

Сафонов Е. И.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
dc.gerz.hd@gmail.com

В докладе рассматривается вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в параболическом уравнении

$$u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x,t), \quad (x,t) \in (a,b) \times (0,T), \qquad (1)$$

где $L_0 u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функция $u(x,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в водоеме или воздухе, функции $N_i(t)$ — мощности источников загрязнения, точки $x_i \in (a,b)$ — точечные источники и r — число этих источников. Чтобы определить неизвестные источники, уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями

$$B_j u = \varphi_j(t), \quad j = 1,2, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

и условиями переопределения

$$u(y_j,t) = \psi_j(t), \quad j = 1,2,\ldots,s.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры (проект № 15-41-00063).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пененко В. В.* Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 421–434.
2. *Badia A. El., Ha-Duong T., Hamdi A.* Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem // Inverse Probl. 2005. V. 21, No. 3. P. 1121–1136.
3. *Badia A. El., Hamdi A.* Inverse source problem in an advection–dispersion–reaction system: application to water pollution // Inverse Probl. 2007. V. 23, No. 5. P. 2103–2120.

УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА – ХОПФА, ЯДРОМ КОТОРОГО ЯВЛЯЕТСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Сгибнев М. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; sgibnev@math.nsc.ru

Рассмотрим уравнение

$$z(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} z(x-y)\,F(dy) + f(x), \qquad x > 0, \tag{1}$$

где $z(x)$ — неизвестная функция, F — заданное распределение вероятностей в $\mathbb{R}$ и $f(x)$ — известная функция. Если распределение F абсолютно непрерывно: $F(dy) = k(y)dy$, то уравнение (1) эквивалентно классическому неоднородному уравнению Винера – Хопфа

$$z(x) = \int\limits_{0}^{\infty} k(x-y)z(y)\,dy + f(x), \qquad x > 0.$$

Теорема 1. *Пусть F — распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ такое, что $\mu := \int_{-\infty}^{\infty} xF(dx) \in (0, +\infty]$. Предположим, что у функции f существует предел $f(\infty) := \lim_{x\to\infty} f(x)$ и $\sup_{x>0} f(x) < \infty$. Тогда решение уравнения (1) удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению:*

$$z(x) \sim \frac{f(\infty)}{\mu}\,x, \qquad x \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть F — распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ и $\mu \in (0, +\infty)$. Предположим, что неотрицательная функция $f(x) = x^{\alpha}L(x)$, $x \geqslant 0$, правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha \geqslant 0$, причем $f(\infty) = \infty$, и функция $f(x)$ монотонно не убывает, начиная с некоторого места x_0, и ограничена на $[0, x_0]$. Пусть $\int_{-\infty}^{0} f(-x)F((-\infty, x))dx < \infty$. Тогда решение уравнения (1) существует и удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению:*

$$z(x) \sim \frac{x^{\alpha+1}L(x)}{(\alpha+1)\mu} = \frac{xf(x)}{(\alpha+1)\mu}, \qquad x \to \infty.$$

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Сибин А. Н.[1], **Папин А. А.**[2]

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
[1]sibin_anton@mail.ru, [2]papin@math.asu.ru

В работе рассматривается задача о совместном движении двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. В основе используемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкостей и пористого скелета, закон Дарси для жидкостей, учитывающий движение пористого скелета, формула Лапласа для капиллярного давления, реологическое уравнения для пористости и условие равновесия “системы в целом” [1, 2]. Данная модель является обобщением классической модели Маскета – Леверетта, в которой пористость считается заданной функцией [3].

В докладе излагаются результаты о разрешимости автомодельной задачи поршневого вытеснения двух жидкостей [4, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 2014/2, Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-08-01097).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Connolly J. A. D., Podladchikov Yu. Yu.* Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodinamica Acta. 1998. V. 11, No. 2–3. P. 55–84.
2. *Папин А. А., Подладчиков Ю. Ю.* Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Изв. АлтГУ. 2015. Вып. 1(85), т. 2. С. 131–135.
3. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Веригин Н. Н.* О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде // 2-й Всесоюзный съезд по теор. и прикл. мех.: аннот. докл. М.: Наука, 1964. С. 50.
5. *Папин А. А., Сибин А. Н.* Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Изв. АлтГУ. 2016. Вып. 1(89). С. 152–156.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Скворцова М. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
sm-18-nsu@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв, обитающих на одной территории [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = rx(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{K}\right) - px(t)y(t), \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - dy(t), \\ \dfrac{d}{dt}z(t) = bpx(t)y(t) - bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - cz(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ — численность популяции жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $z(t)$ — численность популяции молодых хищников, все параметры системы предполагаются положительными.

В работе изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия системы (1). Получены условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми. Используя модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского [2], установлены оценки скорости сходимости решений к положениям равновесия и оценки на области притяжения [3].

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Forde J. E.* Delay differential equation models in mathematical biology // PhD thesis. University of Michigan, 2005.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.
3. *Скворцова М. А.* Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 108–120.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АРТЕРИАЛЬНОГО КРОВОТОКА

Соловьева Е. О.[1], **Бибердорф Э. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* kat-08@list.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* biberdorf@ngs.ru

Работа посвящена актуальной проблеме компьютерного моделирования артериального кровотока. В качестве математической модели используется 1D модель гемодинамики [1]. В основу численного алгоритма положен метод Мак-Кормака. Он позволяет сделать пространственные разбиения по сосуду независящими друг от друга, т. к. сосуды связываются между собой только граничными условиями, в отличие, например, от ортогональной прогонки. Это позволяет распараллелить алгоритм и сэкономить время расчетов на мелких сосудах.

Сглаживание решений является неотъемлемой частью алгоритма с использованием схемы Мак-Кормака. Мы предлагаем новый метод нелокального сглаживания, в основе которого лежит QR-разложение. Он основан на идеях академика С. К. Годунова и аналогичен методу регуляризации плохо обусловленных СЛАУ, описанному в [2]. Результаты экспериментов показали, что по некоторым показателям он превосходит классический метод усреднения. Несмотря на ресурсоемкость QR-разложения, в данном случае его применение требуется только один раз. Кроме того, данный метод позволяет переходить от грубой сетки к более мелкой, если градиенты решения увеличиваются, и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова Л. Н., Блохин А. М., Маркель А. Л. (ред.)* Система кровообращения и артериальная гипертония: биофизические и генетико-физиологические механизмы, математическое и компьютерное моделирование. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
2. *Бибердорф Э. А., Попова Н. И.* Гарантированная точность современных алгоритмов линейной алгебры. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

Старовойтов В. Н.[1,2], **Старовойтова Б. Н.**[1]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* starovoitov@hydro.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

В работе доказано существование обобщенного слабого решения нестационарной задачи о движении абсолютно твердого тела в потоке вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндрическую трубу произвольного сечения. Течение жидкости подчиняется уравнениям Навье – Стокса и стремится на бесконечности к течению Пуазейля. Тело движется согласно законам классической механики под действием окружающей жидкости и силы тяжести, направленной вдоль цилиндра. Столкновения тела с границей области течения не допускаются, поэтому задача рассматривается до момента времени, когда тело приблизится к границе.

В существующих работах по данной тематике область течения либо совпадает со всем пространством, либо является ограниченной. При этом, в первом случае скорость стремится к нулю на бесконечности, а во втором — обращается в нуль на границе области течения. Нестационарные задачи подобного типа с некомпактной границей и ненулевыми условиями на бесконечности до настоящего времени не изучались.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-20019).

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Торебек Б. Т.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан; torebek@math.kz

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^d$ — ограниченная область ($d > 2$), симметричная относительно начала координат с гладкой границей $\partial\Omega$. Такая симметричность означает, что вместе с точкой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, “противоположная” ей точка $x^* = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_d)$ также принадлежит области.

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению

$$-\Delta\, u\,(x) = \lambda u\,(x)\,, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

а на её границе — краевым условиям

$$u\,(x) = -u\,(x^*)\,, \quad x \in \partial\Omega \cap \{x_1 \geq 0\}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u\,(x)}{\partial n_x} = \frac{\partial u\,(x^*)}{\partial n_x} + \alpha u\,(x^*)\,, \quad x \in \partial\Omega \cap \{x_1 \geq 0\}. \tag{3}$$

Здесь n_x — производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$, а $\alpha \geq 0$ — действительное число.

В докладе доказана самосопряженность задачи (1)–(3) и показана методика построения ее собственных функций. Получены спектральные неравенства для первого и второго собственных значений. Доказан аналог неравенства типа Релея для первого собственного значения и установлены некоторые изопериметрические неравенства для первого и второго собственных значений задачи (1)–(3).

Впервые задача (1)–(3) при $\alpha = 0$ была сформулирована и исследовалась в [1] для случая окружности и аналогичные результаты были получены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садыбеков М. А., Турметов Б. Х.* Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 2. С. 264–268.
2. *Sadybekov M. A., Torebek B. T.* Some spectral properties and isoperimetric inequalities for a nonlocal Laplacian problem // arxiv.org/abs/1608.05602.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТАКТНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРЫВА

Трахинин Ю. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; trakhin@math.nsc.ru

В магнитной гидродинамике (МГД) идеальной сжимаемой жидкости существует два вида сильных разрывов, являющихся контактными в том смысле, что отсутствует поток массы через поверхность разрыва. Это тангенциальные и, собственно, *контактные* разрывы. Локальная по времени теорема существования и единственности для тангенциальных разрывов доказана в [1] при условии, что в начальный момент времени в каждой точке разрыва выполнено найденное достаточное условие корректности. Что же касается контактных МГД разрывов, то до сих пор вопрос о доказательстве их существования и нахождении соответствующих условий на начальные данные оставался открытым.

Для контактных МГД разрывов для двумерного случая нами доказана локальная по времени теорема существования и единственности в пространствах Соболева H^m при условии, что в начальный момент времени в каждой точке разрыва выполнено условие Рэлея – Тейлора $[\partial p/\partial n] < 0$ на знак скачка производной по нормали давления плазмы. Доказательство [2] основано на выводе априорной оценки решения линеаризованной задачи [3] и методе Нэша – Мозера.

Результат получен совместно с Alessandro Morando и Paola Trebeschi (Университет Брешиа, Италия).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Trakhinin Y.* The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. V. 191, No. 2. P. 245–310.
2. *Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P.* Local existence of MHD contact discontinuities // (в печати).
3. *Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P.* Well-posedness of the linearized problem for MHD contact discontinuities // J. Differ. Equations. 2015. V. 258, No. 7. P. 2531–2571.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Турметов Б. Х.

Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан; turmetovbh@mail.ru

Пусть Ω — некоторая область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, X — линейное пространство функций, определенных в области Ω. Предположим, что заданы линейные операторы L_1 и L_2, действующие из X в X. Приведем определение нормированных систем [1].

Определение. Систему функций $f_k(x)$ из X назовем *f-нормированной* относительно (L_1, L_2) в Ω с основанием f_0, если всюду в этой области выполняются равенства

$$L_1 f_0(x) = f(x), \quad L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), \quad k \geq 1, \quad x \in \Omega.$$

Рассмотрим уравнение

$$(L_1 - L_2) y(x) = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Основные свойства системы функций, нормированной относительно (L_1, L_2), изложены в работе [1]. Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если операторы L_1 и L_2 коммутируют, а система функций $f_k(x)$ является f-нормированной относительно (L_1, L_2) в Ω, то решение уравнения (1) можно записать в виде $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_k(x)$.*

В настоящей работе мы исследуем вопросы применения метода нормированных систем к построению решений дифференциальных уравнений дробного порядка. Для некоторых классов дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными и переменными коэффициентами будут построены фундаментальные системы решений и изучены задачи типа Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karachik V. V.* Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 287, No. 2. P. 577–592.

НАИЛУЧШИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Тухлиев К.

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова, Худжанд, Таджикистан; `kamaridin.t54@mail.ru`

Пусть $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ — пространство измеримых и суммируемых в p-й степени на всей оси $\mathbb{R}$ функций f с нормой $\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} := \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}$, $L_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty, r \in \mathbb{Z}_+)$ — множество функций $f \in L_p(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. Символом $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty, 1 \leq p \leq \infty)$ обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. $\mathcal{A}_\sigma(f)_p := \inf\big\{\|f-g_\sigma\|_p : g_\sigma \in B_{\sigma,p}\big\}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ элементами подпространства $B_{\sigma,p}$. $\Omega_m^{(q)}(f^{(r)};t)_p$ — обобщённый модуль непрерывности производной $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$, определённый при помощи функции Стеклова. Введём следующую экстремальную характеристику

$$\mathcal{M}_{\sigma,m,r,q}(\psi;t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^t \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)_2\, \psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}},$$

где $r \in \mathbb{Z}_+$; $m \in \mathbb{N}$; $t, \sigma \in \mathbb{R}_+$; $0 < q \leq 2$; ψ — неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0,t]$ функция.

Теорема. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < t < \pi/\sigma$, $0 < q \leq 2$ и ψ — неотрицательная измеримая на отрезке $[0,t]$ функция. Тогда выполняются неравенства*

$$\Big\{a_{m,r,q}(\psi;t,\sigma)\Big\}^{-1} \leq \mathcal{M}_{\sigma,m,r,q}(\psi;t) \leq \Big\{\inf_{\sigma \leq u < \infty} a_{m,r,q}(\psi;t,u)\Big\}^{-1},$$

где

$$a_{m,r,q}(\psi;t,u) = \left(u^{rq}\int\limits_0^t \left(1 - \frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{mq} \psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}, \ u \geq \sigma.$$

О ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уварова И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
sibirochka@ngs.ru

В работе рассматривается класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x).$$

Коэффициенты матрицы A_n зависят от размерности системы n и параметров. Опираясь на методы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, предложенные Г. В. Демиденко (см., например, [1–3]), мы устанавливаем, что при больших n последняя компонента решения приближенно описывается решением одного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau.$$

Оценки аппроксимации существенно зависят от размерности n и параметров, входящих в систему. Полученные результаты дают способ приближенного нахождения решений систем из данного класса с использованием уравнений с запаздывающим аргументом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
2. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.
3. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Фаязов К. С.[1], **Хажиев И. О.**[2]

[1] *Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Ташкент, Узбекистан;* kfayazov@yahoo.com

[2] *Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;* h.ikrom@mail.ru

Пусть H — гильбертово пространство, A и B — линейные операторы, действующие в этом пространстве. Область определения этих операторов обозначим соответственно $D(A)$ и $D(B)$, а их общая область определения D.

Будем рассматривать задачу о разрешимости системы абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков вида

$$\begin{cases} Bu_t(t) + Au(t) = f(t), \\ Bv_{tt}(t) + Av(t) = u(t) \end{cases} \tag{1}$$

при $t \in (0, T)$ с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad v_t(0) = v_1, \quad v_0, v_1, u_0 \in D. \tag{2}$$

Уравнения первого и второго порядков рассматривались во многих работах (см., например, [1–3]).

В данной работе установлена оценка условной устойчивости и построено приближенное решение задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.
2. *Пятков С. Г.* Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1986. С. 65–84.
3. *Фаязов К. С.* Некорректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядков с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 702–706.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Федосеев А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; `alexeyfedoseev.nsk@gmail.com`

В докладе на примере уравнений продольного движения летательного аппарата [1] $\begin{bmatrix}\alpha(t)\\ q(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z_\alpha & Z_q\\ M_\alpha & M_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha(t)\\ q(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}Z_{\delta_e}\\ M_{\delta_e}\end{bmatrix}\left[\delta_e(t)\right] + w(t)$ анализируется поведение пяти методов параметрической идентификации: метода инструментальных переменных в частотной области, линейного метода наименьших квадратов, метода ортогональной регрессии, вариационного метода идентификации [2] и метода по минимуму ошибки прогноза из пакета MATLAB® System Identification Toolbox™. Перечисленные методы сравниваются на предмет устойчивости (в смысле разброса оценок на протяжении серии статистических экспериментов) в условиях возмущений смешанного типа — аддитивный шум в наблюдениях, и шум в невязке уравнения, моделирующий атмосферную турбулентность. В противоположность случаю больших возмущений в невязке уравнения [3], в докладе рассматривается случай больших возмущений в наблюдениях. Помимо численного моделирования применен так называемый локальный подход — в предположении малости возмущений получены аналитические выражения для дисперсий оценок исследуемых методов в условиях смешанного шума, и проведен сравнительный вычислительный эксперимент.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Larsson R., Enqvist M.* Sequential aerodynamic model parameter identification // 16th IFAC Symp. Syst. Identification. Brussels, 2012. P. 1413–1418.
2. *Егоршин А. О.* Оптимизация параметров стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Вып. 12. С. 29–48.
3. *Федосеев А. В.* Сравнение методов идентификации параметров уравнений летательного аппарата // Всероссийское совещание по проблемам управления: Труды. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 3139–3147.

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Финогенко И. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; fin@icc.ru

Исследуются разрывные системы дифференциальных уравнений с последействием на бесконечномерном фазовом пространстве непрерывных функций:

$$x = f(t, x_t(\cdot)),$$

где $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \le \theta \le 0$. Определяется структура многообразий точек разрыва правых частей уравнений и способы определения решений по аналогии с известными понятиями для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью без запаздывания. Уравнения “скользящих режимов” записываются с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова. Рассматриваются вопросы локализации правых предельных множеств.

ДИНАМИКА СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Хазова Ю. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; hazova.yuliya@hotmail.com

На окружности рассматривается параболическая задача с преобразованием отражения

$$u_t + u = Du_{\varphi\varphi} + K(1 + \gamma \cos u(\pi - \varphi, t)), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t). \tag{2}$$

Задача (1), (2) моделирует динамику фазовой модуляции $u(\varphi, t)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь D — коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент K пропорционален интенсивности входного поля, γ — видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$.

В качестве бифуркационного параметра примем D. Проведенный анализ показал, что замена исходной задачи некоторыми упрощенными моделями является целесообразной. В галёркинских аппроксимациях средних (15–25) размерностей реализуется широкий спектр седлоузловых бифуркаций. Исследована задача о приближенных стационарных решениях типа переходного слоя. Установлено, что для решения этой задачи при средних значениях параметра D применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4, № 3–4. С. 245–257.
2. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 3. С. 82–95.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ СТЕКЛОВА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Холиков Д. К.

Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан; xoliqov23@mail.ru

В прямоугольнике $D = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение третьего порядка

$$Lu = f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x,t)dx, \qquad (1)$$

где

$$Lu \equiv u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + e(x,t)u,$$

$a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$, $e(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции, а α и β — заданные постоянные, причем $0 \le \alpha < \beta \le l$.

В данной работе изучается следующая задача: найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим начальному

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (2)$$

и граничным условиям

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(l,t) + \alpha_3(t)u_x(0,t) + \alpha_4(t)u_x(l,t) = 0, \qquad (3)$$

$$\beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t) + \beta_3(t)u_x(0,t) + \beta_4(t)u_x(l,t) = 0, \qquad (4)$$

здесь $\varphi(x)$, $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$ — заданные функции.

При определенных условиях на заданные функции доказано существование единственного решения нелокальной задачи (1)–(4).

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА МЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Хужакулов Ж. Р.[1], **Эшимбетов М. Р.**[1], **Собиров З. А.**[2]

[1] *Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;* jonibek.16@mail.ru

[2] *Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан;* sobirovzar@gmail.com

В последнее время возрос интерес к исследованию различных краевых задач в разветвленных структурах и метрических графах. Актуальность таких задач обуславливается широким спектром проблем современной физики, которые сводятся к таким задачам.

Мы рассмотрим простой граф , состоящий из трех конечных ребер (отрезков), соединенных в одной точке, называемой вершиной графа. Координату x_k на ребре B_k определим сопоставлением данного ребра к интервалу $(0, L_k)$, $k = 1, 2, 3$, вершине графа сопоставляется начало отчета.

В настоящей работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности дробного порядка

$$u_{kxx} - {}_cD_{0t}^{\alpha} u_k = 0$$

с оператором дробного дифференцирования Капуто, $0 < \alpha < 1$. На свободных концах ребер ставим краевые условия

$$u_k(L_k, t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

В вершине графа условия склеивания (Кирхгофа) задаем следующим образом

$$u_1 = u_2 = u_3, \quad a_1 u_{1x} + a_2 u_{2x} + a_3 u_{3x} = 0.$$

Методом разделения переменных построено решение задачи на простом графе.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОНАПРАВЛЕННОМ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

Черемных Е. Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия; elena_cher@icm.krasn.ru

Рассматривается начально-краевая задача, описывающая однонаправленное термогравитационное движение вязкой жидкости в плоском канале, ограниченном твёрдыми неподвижными стенками (или верхняя стенка — свободная граница). Для неё получены априорные оценки, найдено точное стационарное решение и определены условия, при которых решение нестационарной задачи выходит на этот стационарный режим с ростом времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00067).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V.* Mathematical models of convection. Berlin/Boston: Walter de Gruyter, 2012.
2. *Andreev V. K., Cheremnykh E. N.* The joint creeping motion of three viscid liquids in a plane layer: a priori estimates and convergence to steady flow // J. Appl. Ind. Math. 2016. V. 10, No. 1. P. 7–20.

ЛИЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В АЛГЕБРАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Чилин В. И.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; chilin@ucd.uz

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра и $Z(A)$ — центр алгебры A. Линейный оператор $D : A \to A$ называют *ассоциативным (лиевым) дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ (соответственно, $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$) при всех $x, y \in A$, где $[x, y] = xy - yx$. Примером лиевого неассоциативного дифференцирования служит центрозначный след $E : A \to Z(A)$, т. е. такое линейное отображение E из A в $Z(A)$, для которого $E(xy) = E(yx)$ при всех $x, y \in A$.

Хорошо известно, что любое лиево дифференцирование L на C^*-алгебре A единственным образом представляется в виде $L = D + E$, где D — ассоциативное дифференцирование и E — центрозначный след на A [1]. Такое представление лиевого дифференцирования L называют *стандартной формой* для L. Для алгебр измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, стандартная форма лиевого дифференцирования $L : A \to A$ установлена в [2].

Важными примерами C^*-алгебр служат AW^*-алгебры, введенные И. Капланским в 1951 году. Класс AW^*-алгебр существенно шире класса W^*-алгебр (алгебр фон Неймана).

Ниже устанавливается стандартная форма для лиевого дифференцирования, действующего в алгебре измеримых операторов, присоединенных к AW^*-алгебре.

Теорема. *Пусть A — $*$-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к AW^*-алгебре и L — лиево дифференцирование в A. Тогда существуют такие ассоциативное дифференцирование $D : A \to A$ и центрозначный след $E : A \to Z(A)$, что $L(x) = D(x) + E(x)$ для всех $x \in A$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mathieu M., Villena A. R.* The structure of Lie derivations on C^*-algebras // J. Funct. Anal. 2003. V. 202, No. 2. P. 504–525.
2. *Chilin V., Juraev I.* Lie derivations on the algebras of locally measurable operators // arxiv.org/abs/1608.03996.

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Чудинов К. М.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; cyril@list.ru

В классической работе [1] доказано, что все решения уравнения

$$\dot{x}(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где $p(t) \geqslant 0$, $\tau(t) \leqslant t$ и $\tau(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, осциллируют при условии $\varliminf_{t\to+\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > \frac{1}{e}$. Здесь константа $\frac{1}{e}$ неулучшаема.

Известны обобщения этого результата на уравнение

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t)x(\tau_k(t)) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

В частности [2], все решения уравнения (1) осциллируют, если $p_k(t) \geqslant 0$, $\tau_k(t) = t - r_k$ и $\varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{t}^{t+r_k} p_k(s)\,ds > \frac{1}{e}$. В случае переменных запаздываний не удается получить условие осцилляции в виде точной оценки суммы интегралов по длинам запаздываний. Аналогичные трудности имеют место для разностных уравнений с запаздываниями.

Новые точные условия получены в терминах предложенного в [3] семейства множеств $E_k(t) = \{s \mid \tau_k(s) \leqslant t \leqslant s\}$, $k = \overline{1,m}$, $t \geqslant 0$.

Теорема. *Если* $p_k(t) \geqslant 0$, $\tau_k(t) \leqslant t$, $\tau_k(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$ *и*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k(t)} p_k(s)\,ds > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Работа выполнена в рамках госзадания № 2014/152 Минобрнауки РФ, проект № 1890.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 8. С. 1463–1465.
2. *Li B.* Oscillation of first order delay differential equations // Proc. Am. Math. Soc. 1996. V. 124, No. 12. P. 3729–3737.
3. *Chudinov K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016. No. 2. P. 1–10.

О ПОГРЕШНОСТИ ВЕСОВЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Шабозов М. Ш.

Институт математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан; shabozov@mail.ru

Рассматривается квадратурная формула

$$\int_b^a q(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

задаваемая векторами узлов $X = \big\{x_k : \ a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b\big\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n(f) := R_n(q,f;X,P)$ — погрешность формулы (1) на функции f. Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс заданных на $[a,b]$ функций f, то требуется найти величину [1]

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) := \inf_{(X,Y)} \sup_{f\in\mathfrak{M}} \big|R_n(q,f;X,P)\big|. \tag{2}$$

Задача (2) решается для ряда конкретных весов q. В частности, доказано, что если $q(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, то среди формул вида (1) наилучшей является классическая формула Эрмита – Чебышёва для классов функций малой гладкости $H^\omega[-1,1]$ и $W^{(1)}L[-1,1]$ (см. [1, 2]), причём

$$\mathcal{E}_n\big(H^\omega[-1,1]\big) = 2n \int_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt, \quad \mathcal{E}_n\big(W^{(1)}L[-1,1]\big) = \frac{\pi}{n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Наука. 1988.
2. *Шабозов М. Ш., Шабозова А. А.* Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1 (59), вып. 1. С. 79–86.

О ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ МАРКОВА

Шабозова А. А.

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан;
adolat@mail.ru

Для функций f, заданных в области $Q = \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}$, рассмотрим кубатурную формулу типа Маркова

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f), \tag{1}$$

определённую вектором $(X, Y; P)$ узлов $X = \{x_k : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\}$, $Y = \{y_k : 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1\}$ и коэффициентов $P = \{p_{ki}\}_{k,i=0}^{m,n}$, $R_{mn}(f) := R_{mn}(f; X, Y; P)$ — погрешность формулы (1) на функции f. Пусть $H_p^{\omega}(Q)$ — класс функций f, для любых (x', y'), $(x'', y'') \in Q$ удовлетворяющих условию

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \le \omega\left(\sqrt[p]{(x'-x'')^p + (y'-y'')^p}\right), \quad 1 \le p < \infty.$$

Теорема. *Среди всех кубатурных формул вида (1) наилучшей для класса $H_p^{\omega}(Q)$ является формула трапеций*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki}^* f(k/n, i/n) + R_{mn}(f), \tag{2}$$

где наилучшие коэффициенты p_{ki}^* имеют вид:

$$p_{oo}^* = p_{mo}^* = p_{on}^* = p_{mn}^* = 1/(4mn),\ p_{oi}^* = p_{mi}^* = 1/(2n) \quad i = \overline{1, n-1};$$
$$p_{ko}^* = p_{kn}^* = 1/(2mn),\ p_{ki}^* = 1/(mn), \quad k = \overline{1, m-1},\ i = \overline{1, n-1}.$$

Погрешность кубатурной формулы (2) на классе $H_p^{\omega}(Q)$ равна

$$\mathcal{E}_{mn}(H_p^{\omega}(Q)) = 4mn \int_0^{1/(2m)} \int_0^{1/(2n)} \omega(\sqrt[p]{t^p + \tau^p})dtd\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабозов М. Ш., Шабозова А. А.* Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1 (59), вып. 1. С. 79–86.

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ

Шамолин М. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; shamolin@rambler.ru

В работе предъявляются новые случаи интегрируемости систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [1]. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов является трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств [1, 2].

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также порождают системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. В работе тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности (см. также [2, 3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 3. С. 3–237.
2. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 4. С. 3–229.
3. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20, № 4. С. 3–231.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА БЕРГМАНА – ГЕРЦА В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

Шамоян Р. Ф.[1], **Куриленко С. М.**[2]

Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского, Брянск, Россия; [1]rsham@mail.ru, [2]SergKurilenko@gmail.com

В докладе рассматриваются аналоги аналитических классов типа Герца в трубчатых областях над симметрическими конусами, и изучается действие интегральных операторов типа Бергмана в этих классах.

Пусть Ω есть симметрический конус в евклидовом пространстве V, $T_\Omega = V + i\Omega$ — трубчатая область над этим конусом; dv — мера Лебега в T_Ω. Детерминант $\Delta^{\beta}(\operatorname{Im} z)$, $\beta > 0$, $z \in T_\Omega$, в трубчатой области мы определяем, следуя стандартным определениям из [1].

Мы приводим ряд новых оценок для упомянутых выше интегральных операторов в аналитических классах типа Герца в трубчатых областях над симметрическими конусами. Это аналитические классы функций с нормой типа

$$\int_{T_\Omega} \left(\int_{B(z,R)} |f(w)|^p \Delta^{\alpha}(\operatorname{Im} w) dv(w) \right)^{\frac{q}{p}} \Delta^{\beta}(\operatorname{Im} z) dv(z),$$

$z \in T_\Omega$, $R > 0$, $B(z,R)$ — шар Бергмана в T_Ω, $\alpha, \beta > 0$, $p, q \in [1, \infty)$, или их различные аналоги в $T_\Omega^m = T_\Omega \times \cdots \times T_\Omega$, $m \geq 1$.

Пусть далее $1 \leq p < \infty$, $f(z) = f(z_1, \ldots, z_m)$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \ldots, m$. Рассмотрим аналитические подпространства $H(T_\Omega^m)$, $T_\Omega^m = T_\Omega \times \cdots \times T_\Omega$, $\tau_j > \frac{n}{r} - 1$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \ldots, m$. Это пространства со следующими нормами:

$$B^p_{\vec{\tau}}(T_\Omega^m) : \left(\int_{T_\Omega} \cdots \int_{T_\Omega} \int_{B(z_1,R)} \cdots \int_{B(z_m,R)} |f(z_1, \ldots, z_m)|^p \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{m} \Delta^{\tau_j - \frac{n}{r}}(z_j) dv(z_j) dv(z_j) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad B^p_{\tau}(T_\Omega) = B^p_{\tau}(T_\Omega^1),$$

$$A^p_{\vec{\nu}}(T_\Omega^m) : \left(\int_{T_\Omega} \cdots \int_{T_\Omega} |f(w_1, \ldots, w_m)|^p \right.$$

$$\times \Delta^{\nu_1}(\operatorname{Im} w_1)\ldots\Delta^{\nu_m}(\operatorname{Im} w_m)dv(w_1)\ldots dv(w_m)\Bigg)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

более широкий чем $A^p_{\vec{\nu}}$ класс измеримых функций обозначим $L^p_{\vec{\nu}}$.

Введем новые интегральные операторы типа Бергмана – Герца для $\alpha_j > 0$, $\beta > -1$, $\gamma > -1$, $\beta_j > -1$, $\gamma_j > -1$, $j = 1, \ldots, m$.

$$T_{\vec{\alpha},\beta,\gamma}(g)(z_1,..,z_m) = \int_{T_\Omega}\int_{B(w,R)} \frac{g(w)[\Delta^{\beta}(\operatorname{Im} w)]dv(w)}{\left[\prod_{j=1}^m \Delta^{\alpha_j}(\frac{z_j-w}{i})\right]}\Delta^{\gamma}(\operatorname{Im} w)dv(w).$$

$$T^1_{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}}(g)(z_1,\ldots,z_m) = \int_{T_\Omega}\ldots\int_{T_\Omega}\int_{B(w_1,R)}\ldots\int_{B(w_m,R)} g(w_1,\ldots,w_m)$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^m[\Delta^{\beta_j}(\operatorname{Im} w_j)]dv(w_1)\ldots dv(w_m)}{\left[\prod_{j=1}^m \Delta^{\alpha_j}(\frac{z_j-w_j}{i})\right]}\prod_{j=1}^m \Delta^{\gamma_j}(\operatorname{Im} w_j)dv(w_1)\ldots dv(w_m),$$

$z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \ldots, m$. Эти интегральные операторы являются новыми даже в простейшем случае единичного круга на комплексной плоскости. Нами изучается действие этих интегральных операторов в классы типа Герца и типа Бергмана. В частности, в [2] нами доказаны следующие результаты.

Теорема. *При* $1 \le p < \infty$ *и некоторых ограничениях на параметры верны следующие оценки:*

1. $\|T_{\vec{\alpha},\beta,\gamma}(g)\|_{L^p_{\vec{\nu}}(T^m_\Omega)} \le c_1\|g\|_{(B^p_\tau)(T_\Omega)}$;
2. $\|T^1_{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}}(g)\|_{L^p_{\vec{\nu}}(T^m_\Omega)} \le c_2\|g\|_{(B^p_{\vec{\tau}})(T^m_\Omega)}$.

Нами также установлены конкретные ограничения на параметры, входящие в эти оценки (см. [2]). Полученные результаты ранее были известны частично в единичном шаре и в полидиске [3].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант 1.1704.2014К).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shamoyan R. F., Kurilenko S. M.* A note on a distance function in Bergman type analytic function spaces of several variables // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2015. V. 8, No. 1. P. 75–85.
2. *Kurilenko S. M., Shamoyan R. F.* On Bergman type integral operators in analytic spaces in tubular domains over symmetric cones // Kragujevac J. Math. 2017 (принята в печать).
3. *Shamoyan R. F., Mihić O. R.* On traces in some analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains // J. Funct. Spaces. 2015. V. 2015, Article ID 265245.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Шергин С. Н.[1], **Пятков С. Г.**[2]

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
[1]`ssn@ugrasu.ru`, [2]`s_pyatkov@ugrasu.ru`

Работа посвящена рассмотрению обратных задач для уравнений соболевского типа, возникающих в динамике стратифицированной жидкости, теории упругости, гидродинамике, электродинамике и других областях. Рассматривается задача об определении вместе с решением U неизвестной правой части для уравнения типа Соболева

$$L_0U_{tt} + L_1U_t + L_2U = f, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T),$$

где L_i $(i = 0,1,2)$ — операторы 2-го порядка по переменным x, G — ограниченная область в R^n $(n \geq 1)$ с границей $\ \in C^2$. Уравнение дополняется условиями:

$$U|_S = \varphi, \quad S = \ \times (0,T), \quad U|_{t=0} = U_0(x), \quad U_t|_{t=0} = U_1(x).$$

Полагаем, что правая часть имеет вид $f = \sum_{i=1}^m c_i(t)f_i(x,t)+f_0(x,t)$, где функции f_i $(i = 0,1,\ldots,m)$ известны, а функции $c_i(t)$ подлежат определению. В качестве условия переопределения рассматриваются значения решения U в отдельных точках, т. е.

$$U(x_i,t) = \psi_i(t) \quad (i = 1,2,..,m),$$

где x_i — произвольные точки из G. Задача об определении решения u и функций $c_i(t)$ сводится к некоторому операторному уравнению, разрешимость которого устанавливается при помощи априорных оценок и теоремы о неподвижной точке. При некоторых естественных условиях на данные задачи мы доказываем теоремы о существовании и единственности решения. Решение $(U,c_1,\ldots,c_m)$ ищется в классе U, $U_t \in C([0,T];W_p^2(G))$, $U_{tt} \in L_p(0,T;W_p^2(G))$, $c_i \in L_p(0,T)$ $(i = 1,2,\ldots,m)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-06582).

К РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

Шишканова А. А.

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина; shganna@mail.ru

Рассматривается разложение потенциалов Рисса, входящих в состав двумерных интегральных уравнений, к которым сводятся некоторые смешанные задачи теории упругости [1]. Взят отдельный случай потенциалов Рисса меры, носителем которой является двусвязная область Ω, уравнения границ которой зависят от малого параметра ε, и в общем случае не подобны. Для области в форме кругового кольца, когда плотность потенциала зависит только от расстояния до центра кольца, в [2] получено разложение потенциала простого слоя через одномерные интегралы от плотности потенциала. В данной работе построено аналогичное разложение потенциала простого слоя, когда плотность не обладает круговой симметрией. Доказательство проведено методом математической индукции. При условии принадлежности плотности к пространству $C[a, b]$ доказана сходимость и на границе области. Отдельные случаи такого разложения приведены в [3].

Используется отображение двусвязной области Ω на круговое кольцо при условии, что это отображение взаимно однозначное, непрерывно дифференцируемое, когда отношение меры образа к мере прообраза равно якобиану соответствующего линейного отображения.

Получены решения пространственных контактных задач при наличии шероховатости и трения в случае некруговых кольцевых областей, а также задачи о напряженно-деформированном состоянии тел, ослабленных плоской трещиной, с контуром, близким к круговому кольцу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
2. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. М.: ГИФМЛ, 1961.
3. *Shyshkanova G.* Solution of the integral equations in the three-dimensional nonsymmetrical contact problems with the friction taken into account // TWMS J. Pure Appl. Math. 2011. V. 2, No. 1. P. 134–145.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ НАГРУЗОК НА ВЯЗКОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА В КАНАЛЕ

Шишмарев К. А.

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
shishmarev.k@mail.ru

Рассматриваются линейные вязкоупругие волны в ледовом покрове канала, вызванные воздействием внешних нагрузок. Изучается случай примороженного к стенкам канала льда. Канал имеет прямоугольное сечение. Параметры льда и канала считаются постоянными. Прогибы ледового покрова описываются уравнением колебаний вязкоупругой тонкой пластины. Жидкость в канале идеальная и несжимаемая. Внешняя нагрузка моделируется как локализованное пятно давления или как диполь, помещенный в жидкость. Исходная задача сводится к задаче относительно профиля волны поперек канала методом интегральных преобразований, после чего полученная задача решается методом нормальных мод. В докладе излагаются результаты по исследованию прогибов и удлинений ледового покрова в случаях прямолинейного движения внешней локализованной нагрузки по ледовому покрову и движения диполя подо льдом с постоянной скоростью.

Задача с плавающей ледовой пластиной подробно исследована в [1]. Взаимодействие ледового покрова и одной стенки исследовано в [2]. Результаты по исследованию влияния параметров канала и толщины льда на прогибы и удлинения в ледовом покрове описаны в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Минобрнауки Российской Федерации № 2014/2 и гранта РФФИ “Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями” (проект № 16-08-00291 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J.* Moving loads on ice plates. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. *Brocklehurst P.* Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures // PhD thesis. Norwich: University of East Anglia, 2012.
3. *Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A.* The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. 2016. V. 59. P. 313–326.

К ВОПРОСУ О РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Щеглова А. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; shchegl@icc.ru

Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)

$$Ax'(t) + Bx(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1}$$

где A и B — заданные вещественные $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ — искомая n-мерная функция. Предполагается, что $\det A = 0$. Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы.

Пусть система (1) асимптотически устойчива. Проблема робастной устойчивости рассматривается как нахождение условий, при которых возмущенная система

$$(A + \Delta_2)\, x'(t) + (B + \Delta_1)\, x(t) = 0$$

(Δ_1 и Δ_2 — вещественные матрицы неопределенностей) остается асимптотически устойчивой.

Показано, что возмущения ДАУ не могут быть произвольными, поскольку введение в систему высокого индекса неопределенностей может полностью изменить не только ее внутреннюю структуру, но и дифференциальный порядок. Найдены условия, при которых возмущения не меняют структуру общего решения рассматриваемой системы. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены условия робастной устойчивости для ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности. Введено понятие и получены значения радиусов устойчивости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН № II.2 и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-8081.2016.9).

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ыскак Т. К.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
istima92@mail.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа с параметром

$$\frac{d}{dt}\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0,$$

где $\mu > 0$ — параметр, $\tau > 0$ — запаздывание, D — матрица $n \times n$, $A(t)$, $B(t)$ — непрерывные T-периодические матрицы $n \times n$. Предполагается, что спектр матрицы $A(t)$ лежит в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ при всех $t \in [0, T]$.

В случае $D = 0$, $B(t) \equiv 0$ в [1] и в случае $D = 0$, $B(t) \not\equiv 0$ в [2] показано, что асимптотическая устойчивость нулевого решения гарантируется при всех достаточно больших параметрах μ.

В настоящей работе указаны условия на параметр $\mu \gg 1$ и матрицу D, при которых нулевое решение асимптотически устойчиво, установлена оценка, характеризующая экспоненциальную скорость убывания решений на бесконечности.

При получении результатов был использован функционал Ляпунова – Красовского, введенный в [3, 4] для исследования асимптотической устойчивости нулевого решения систем нейтрального типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Asymptotic stability of solutions to a class of linear time-delay systems with periodic coefficients and a large parameter // J. Inequal. Appl. 2015. V. 2015, Article ID 331.
3. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No. 3. P. 119–130.
4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Юсупов Г. А.

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан;
G_7777@mail.ru

Пусть H_p, $1 \le p \le \infty$, — пространство Харди функций f, аналитических внутри единичного круга, с конечной нормой

$$\|f\| = \|f\|_p = \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p}.$$

Обозначим через $b_n(\mathfrak{N}, H_p)$, $d_n(\mathfrak{N}, H_p)$ (см., например, [1]), соответственно, бернштейновский и колмогоровский n-поперечники некоторого подмножества $\mathfrak{N} \subset H_p$. Известно, что норма функций в H_p, $1 \le p \le \infty$, реализуется на угловых граничных значениях $F(t) := f(e^{it})$. Обозначим через $\omega_2(F, 2\delta) = \sup\{\|F(x+t) - 2F(t) + F(t-x)\| : |x| \le \delta\}$ модуль гладкости $f \in H_p$. $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше n. $E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$ — наилучшее приближение функции $f \in H_p$ элементами $p_n \in \mathcal{P}_n$. Пусть $\ \ (u)$ — непрерывная неубывающая при $u \ge 0$ функция такая, что $\ \ (0) = 0$, а $W_a^{(r)}(\ \ ) = \left\{f \in H_p : (1/h)\int\limits_0^h \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)dt \le \ \ (h)\right\}$. Полагаем

$$(1 - \cos nt)_* := \{1 - \cos nt, \text{ если } 0 < nt \le \pi;\ \ 2, \text{ если } nt \ge \pi\}.$$

Теорема. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$ и мажоранта $\ \ $ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\ \ (h)}{\ \ \big(\pi/(2n)\big)} \ge \frac{\pi}{\pi - 2}\,\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1 - \cos t)_* dt. \tag{1}$$

Тогда при всех $1 \le p < \infty$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)}(\ \ ), H_p\right) = d_n\left(W_a^{(r)}(\ \ ), H_p\right) = \frac{\pi}{2(\pi - 2)}\,\frac{1}{n^r}\ \ \ \left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Множество функций $\{\ \ \}$, удовлетворяющих условию (1), не пусто. Например, $\ \ _*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi - 2)$ удовлетворяет условию (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.

THE HARDY–LITTLEWOOD–SOBOLEV THEOREM FOR RIESZ POTENTIAL GENERATED BY GEGENBAUER OPERATOR

Akbulut A.

Ahi Evran University, Kirsehir, Turkey; aakbulut@ahievran.edu.tr

The Hardy–Littlewood maximal function is an important tool of harmonic analysis. It was first introduced by Hardy and Littlewood in 1930 (see [1]) for 2π-periodical functions, and later it was extended to the Euclidean spaces, some weighted measure spaces, symmetric spaces, various Lie groups, for the Jacobi-type hypergroups [2], for Chebli–Trimeche hypergroups [3], for the one-dimensional Bessel–Kingman hypergroups [4], for the n-dimensional Bessel–Kingman hypergroups ($n \geq 1$) [5], for Laguerre hypergroup [6].

In this work we introduced and studied the maximal function (G-maximal function) and the Riesz potential (G-Riesz potential) generated by Gegenbauer differential operator

$$G_\lambda = \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d}{dx} \left(x^2-1\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}.$$

The $L_{p,\lambda}$ boundedness of the G-maximal operator is obtained. Hardy–Littlewood–Sobolev theorem of G-Riesz potential on $L_{p,\lambda}$ spaces is established (see [7]).

REFERENCES

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.,* "A maximal theorem with function-theoretic applications," Acta Math., **54**, 81–116 (1930).
2. *Connett W. C., Schwartz A. L.,* "A Hardy–Littlewood maximal inequality for Jacobi type hypergroups," Proc. Am. Math. Soc., **107**, No. 1, 137–143 (1989).
3. *Bloom W. R., Xu Z.,* "The Hardy–Littlewood maximal function for Chebli–Trimeche hypergroups," in: Applications of Hypergroups and Related Measure Algebras, AMS, Providence, 1995, pp. 45–70 (Contemp. Math., vol. 183).
4. *Stempak K.,* "Almost everywhere summability of Laguerre series," Stud. Math., **100**, No. 2, 129–147 (1991).
5. *Guliev V. S.,* "On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator," Math. Inequal. Appl., **6**, No. 2, 317–330 (2003).
6. *Guliyev V. S., Assal M.,* "On maximal function on the Laguerre hypergroup," Fract. Calc. Appl. Anal., **9**, No. 3, 307–318 (2006).
7. *Ibrahimov E. J., Akbulut A.,* "The Hardy–Littlewood–Sobolev theorem for Riesz potential generated by Gegenbauer operator," Trans. A. Razmadze Math. Inst., **170**, No. 2, 166–199 (2016).

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE AIRY TYPE EQUATION ON SIMPLE METRIC STAR GRAPH

Akhmedov M. I.[1], **Eshimbetov M. R.**[2], **Sobirov Z. A.**[1]

[1] *Tashkent Financial Institute, Tashkent, Uzbekistan;*
maqsad.ahmedov@mail.ru

[2] *National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;* eshimbetov92@mail.ru

In this work, we address the linearized KdV equation on a star graph with one bounded bond and two semi-infinite bonds connected at one point, called the vertex. The bonds are denoted by B_j, $j = 1, 2, 3$, the coordinate x_1 on B_1 is defined from $-l_1$ to 0, and coordinates x_2 and x_3 on the bonds B_2 and B_3 are defined from 0 to l_k, $k = 2, 3$, respectively. On each bond we consider the linear equation:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial_j^3}\right) u_j(x_j, t) = f_j(x, t), \quad t > 0, \quad x_j \in B_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Below, we will also use the notation x instead of x_j, $j = 1, 2, 3$.

We need to impose 5 BCs at the vertex point, which should also connect the bonds and 2 BCs at the left side of B_1. In detail, we require:

$$u_1(0,t) = a_2 u_2(0,t) = a_3 u_3(0,t), \quad u_{1x}(0,t) = c_2 u_{2x}(0,t) + c_3 u_{3x}(0,t),$$

$$u_{1xx}(0,t) = \frac{1}{a_2} u_{2xx}(0,t) + \frac{1}{a_3} u_{3xx}(0,t),$$

$$u_1(1,t) = \phi_1(t), \quad u_k(b_k,t) = \phi_k(t), \quad u_{kx}(b_k,t) = \psi_k(t)$$

for $0 < t < T$, $T = \text{const}$. Furthermore, we assume that the functions $f_j(x,t)$, $j = 1, 2, 3$, are smooth enough and bounded. The initial conditions are given by:

$$u_j(x, 0) = 0,$$

$x \in \overline{B_j}$ $(j = 1, 2, 3)$. It should be noted that the above vertex conditions are not the only possible ones. The main motivation for our choice is caused by the fact that they guarantee uniqueness of the solution and, if the solutions decay (to zero) at infinity, the norm (energy) is conserved.

ON THE SOLVABILITY OF NONLOCAL PROBLEM FOR THE SOBOLEV-TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL CONDITION

Assanova A. T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan; anarasanova@list.ru

We consider the nonlocal problem for the Sobolev-type differential equation with integral condition on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + D(t,x)u + f(t,x), \quad (1)$$

$$u(0,x) = \int\limits_0^T K_1(t,x)u(t,x)dt + \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \quad (2)$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \quad (3)$$

$$u(t,\omega) = \int\limits_0^\omega K_2(t,x)u(t,x)dx + \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad (4)$$

where $u(t,x)$ is unknown function, the functions $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, and $f(t,x)$ are continuous on Ω, the function $K_1(t,x)$ is continuously differentiable by x on Ω, the function $K_2(t,x)$ is continuously differentiable by t on Ω, the function $\varphi(x)$ is continuously differentiable on $[0,\omega]$, the functions $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

Nonlocal problems for the Sobolev-type differential equations appears in a variety of physical problems [1]. In present communication we investigate of conditions of an existence and uniqueness of a classical solution to problem (1)–(4). For this goal we use the method of introduction functional parameters [2].

REFERENCES

1. *Soltanalizadeh B., Roohani Ghehsareh H., Abbasbandy S.* “A super accurate shifted Tau method for numerical computation of the Sobolev-type differential equation with nonlocal boundary conditions,” Appl. Math. Comput., **236**, 683–692 (2014).
2. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* “Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations,” J. Math. Anal. Appl., **402**, No. 1, 167–178 (2013).

ON CYCLES IN ONE GENE NETWORK MODEL

Ayupova N. B.[1,2], **Golubyatnikov V. P.**[1,2], **Kazantsev M. V.**[3]
[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
ayupova@math.nsc.ru
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org
[3]*Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russia;*
markynaz.astu@gmail.com

Consider nonlinear 6-dimensional chemical kinetics dynamical system

$$\frac{dm_j}{dt} = -k_j m_j + f_j(p_{j-1}); \qquad \frac{dp_j}{dt} = \mu_j(m_j - p_j) \tag{1}$$

as a model of functioning of one simple gene network. Here and below all parameters are positive, $p_j, m_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, and if $j = 1$, then $j - 1 = 3$.

The functions $f_j(p)$ are smooth and decrease monotonically, they describe negative feedbacks. The variables m_j, p_j in the system (1) denote concentrations of interacting components in the network.

We show that the system (1) has exactly one equilibrium point. Characteristic polynomial of linearization of (1) at this point has the form

$$P(\lambda) = (k_1 + \lambda)(k_2 + \lambda)(k_3 + \lambda)(\mu_1 + \lambda)(\mu_2 + \lambda)(\mu_3 + \lambda) + a^6.$$

Theorem. *If $P(\lambda)$ has two roots with positive real parts and four roots with negative real parts, then the system (1) has at least one cycle.*

In one particular symmetric dimensionless case $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; $k_1 = k_2 = k_3 = 1$; $f_1(p) = f_2(p) = f_3(p) \equiv \alpha(1 + p^\gamma)^{-1} + \alpha_0$ the system (1) was introduced in [1] and later was studied from different viewpoints in numerous publications, see, for example [2]. In this case the roots of corresponding polynomial $P(\lambda)$ satisfy the conditions of our theorem.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-00745).

REFERENCES

1. *Elowitz M. B., Leibler S.,* "A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators," Nature, **403**, 335–338 (2000).
2. *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh,* "Buffering in cyclic gene networks," Theor. Math. Phys., **187**, No. 3, 935–951 (2016).

LOCAL WELL-POSEDNESS OF THE PROBLEM OF FLOW ABOUT INFINITE PLANE WEDGE WITH INVISCOUS NON-HEAT-CONDUCTING GAS

Blokhin A. M.[1], **Tkachev D. L.**[2]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; [1]`blokhin@math.nsc.ru`, [2]`tkachev@math.nsc.ru`

As is well-known [1], on stationary supersonic gas flow over infinite plane wedge (angle σ at the point of the wedge is small enough, $\sigma < \sigma_{\text{lim}}$) theoretically there are two possible stationary solutions: one of them corresponds to strong shock wave when gas speed beyond the shock is less than the speed of sound, i.e. $u_0^2 + v_0^2 < c_0^2$ (u_0, v_0 are components of the speed vector, c_0 is the speed of sound), and the other corresponds to the weak shock wave, when, generally speaking, $u_0^2 + v_0^2 > c_0^2$.

However, in numerous physical and computational experiments if there is no additional information, for example about the value of the pressure down the flow, the case of weak shock wave is realized. As of today there is no strict mathematical explanation why this is happening. R. Courant and K. O. Friedrichs noticed in their monograph [1], that there is an opinion that strong shock wave is unstable by Lyapunov while weak shock wave is on the contrary stable.

In this work, unlike papers [2]–[4], in which we studied stability of corresponding linear problems (with respect to each of two stationary solutions), local well-posedness in time of the original quasilinear problem has been proven.

REFERENCES

1. *Courant R., Friedrichs K. O.,* Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publ., Inc., New York (1948).
2. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Baldan L. O.,* "Study of the stability in the problem on flowing around a wedge. The case of strong wave," J. Math. Anal. Appl., **319**, No. 1, 248–277 (2006).
3. *Blokhin A. M., Tkachev D. L.,* "Stability of a supersonic flow about a wedge with weak shock wave," Sb. Math., **200**, No. 2, 157–184 (2009).
4. *Blokhin A. M., Tkachev D. L.,* "Stability of a supersonic flow over a wedge containing a weak shock wave satisfying the Lopatinski condition," J. Hyperbolic Differ. Equ., **11**, No. 2, 215–248 (2014).

ON WELL-POSEDNESS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ATMOSPHERIC BALANCE EQUATIONS

Bourchtein A.[1], **Bourchtein L.**[2]

Pelotas State University, Pelotas, Brazil;
[1]bourchtein@gmail.com, [2]bourchtein@ufpel.edu.br

Atmosphere modeling is based on the nonlinear partial differential equations (PDEs) expressing the laws of a compressible continuum medium in the rotating reference frame. The governing equations support both relatively slow dominant processes and fast gravity and acoustic waves of small amplitude. Solution of such a stiff system requires, in particular, definition of appropriate initial conditions. The actual initial data are not adjusted dynamically, that is, they do not belong to a slow manifold related to the main dynamic processes, and therefore, the fast oscillations of a large amplitude, which are not observed in the real atmosphere, are generated in the corresponding solutions of the governing equations.

An adjustment of the initial data for the atmospheric models usually leads to a set of nonlinear diagnostic PDEs representing balance relations. A general problem of these diagnostic relations is non-ellipticity of the PDEs for some real atmospheric conditions that does not allow us to formulate well posed boundary value problems. For example, the nonlinear balance equation by Charney is of the Monge–Ampere type and as such is non-elliptic for a given pressure function in the regions with strong anticyclonic activity. In this study, we derive ellipticity conditions for more complex differential systems of nonlinear adjustment and present a hierarchy of such conditions with respect to the complexity of the adjustment equations. Based on these results, we analyze a distribution of non-elliptic regions in the actual atmospheric fields for different forms of the balance equations and the possibility to solve the corresponding boundary value problems.

REFERENCES

1. *Daley T.*, Atmospheric Data Analysis, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
2. *Bourchtein A.*, "Ellipticity conditions of the shallow water balance equations for atmospheric data," J. Atmos. Sci., **63**, No. 5, 1559–1566 (2006).
3. *Bourchtein A.*, *Bourchtein L.*, "On ellipticity of balance equations for atmospheric dynamics," J. Comput. Appl. Math., **234**, No. 4, 1017–1026 (2010).

STABILITY OF SHEAR SHALLOW WATER FLOWS WITH FREE SURFACE

Chesnokov A. A.[1], **El G. A.**[2], **Gavrilyuk S. L.**[3], **Pavlov M. V.**[1]

[1]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
chesnokov@hydro.nsc.ru, mpavlov@itp.ac.ru
[2]*Loughborough University, Loughborough, United Kingdom;*
g.el@lboro.ac.uk
[3]*Aix-Marseille Université, Marseille, France;*
sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr

Stability of shear flows for the full Euler equations is a fundamental problem of Fluid Mechanics (see e.g. Drazin, 2002). The classical stability and instability criteria formulated in terms of growth of linear perturbations (Rayleigh, Fjortoft) are usually obtained for flows between rigid walls. Some recent works use the generalized notion of stability as the well-posedness of time evolution, i.e. hyperbolicity (see Chumakova, Manzaque, Milewski et al., 2009), but they also consider either flows under closed lid or use periodic boundary conditions in the vertical direction which greatly simplifies the analysis. However, the presence of free surface can obviously change the flow stability criteria and, to our knowledge, stability of shallow water shear flows with a free surface has not been studied before.

In this work, stability of inviscid shear shallow water flows with free surface is studied in the framework of the Benney equations. This is done by investigating the generalized hyperbolicity of the integrodifferential Benney system of equations. It is shown that all shear flows having monotonic convex velocity profiles are stable. The hydrodynamic approximations of the model corresponding to the classes of flows with piecewise linear continuous and discontinuous velocity profiles are derived and studied. It is shown that these approximations possess Hamiltonian structure and a complete system of Riemann invariants, which are found in an explicit form. Sufficient conditions for hyperbolicity of the governing equations for such multilayer flows are formulated. The generalization of the above results to the case of stratified fluid is less obvious, however, it is established that vorticity has a stabilizing effect (see [1] for details).

REFERENCES

1. *Chesnokov A. A., El G. A., Gavrilyuk S. L., Pavlov M. V.* "Stability of shear shallow water flows with free surface," arxiv.org/abs/1610.04331.

THERMAL MOTION OF GAS IN THE RAREFIED SPACE

Chirkunov Yu. A.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia; chr101@mail.ru

We study the model describing thermal motion of the gas in highly rarefied space. For a given initial distribution of the pressure a specific selection of mass Lagrange variables leads to a reduction of the system of differential equations describing this motion to the system, for which the number of independent variables is less on the unit. It means that in highly rarefied space for a given initial distribution of the pressure, all the gas particles are localized on the two-dimensional surface. For the obtained system we found all nontrivial conservation laws of the first order. In addition to the classical conservation laws the system has another conservation law, which generalizes the energy conservation law. We obtained the following exact solutions of the system: 1) solution, describing the state of the medium behind the front of shock wave after very strong blast, 2) solution, which depends on the time by exponential law, and describes the dynamic processes in highly rarefied space: either the scattering of the gas particles to infinity, or the localization of gas particles near a fixed surface, 3) solution, which describes in a highly rarefied space a dynamic process in which each particle performs periodic oscillations, 4) solution, which describes the state of the medium after performing a series of very strong blasts, 5) solutions, which describe the processes taking place inside of the tornado.

The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00446 a).

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A.*, "The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound," J. Appl. Math. Mech., **73**, No. 4, 421–425 (2009).
2. *Chirkunov Yu. A., Khabirov S. V.*, Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics [in Russian], Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (2012).
3. *Chirkunov Yu. A.*, "Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space," Int. J. Non-Linear Mech., **83**, 9–14 (2016).

STATIC TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC MODEL

Chirkunov Yu. A.[1], **Belmetsev N. F.**[2]

[1] *Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;* chr101@mail.ru

[2] *Tyumen State University, Tyumen, Russia;* n.f.belmecev@utmn.ru

We found the conditions under which the system of the equations of the three-dimensional static transversely isotropic elastic model has a gradient of a harmonic function as a partial solution. In this case, parameters of the elasticity modulus tensor satisfy the Gassmann conditions. The Gassmann conditions are widely used in geophysics in the research of transversely isotropic elastic media. We fulfilled a group foliation of the system of the equations of the static transversely isotropic elastic model with the Gassmann conditions with respect to the infinite subgroup generated by the gradient of a harmonic function and contained in a normal subgroup of the main group of this system. We obtained a general solution of the automorphic system. This solution is a three-dimensional analogue of the Kolosov–Muskhelishvili formula. We found the main Lie group of transformations of the resolving system of this group foliation. With the help of this group foliation, we obtained non-degenerate exact solutions of the equations of the static transversely isotropic elastic model with the Gassmann conditions. For the found exact solutions, we have depicted the corresponding deformations arising in an elastic body for particular values of the elastic moduli.

The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00446 a).

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A., Belmetsev N. F.*, "Exact solutions of three-dimensional equations of static transversely isotropic elastic model," Acta Mech. (2016); DOI:10.1007/s00707-016-1712-4.
2. *Annin B. D., Bel'metsev N. F., Chirkunov Yu. A.*, "A group analysis of the equations of the dynamic transversely isotropic elastic model," J. Appl. Math. Mech., **78**, No. 5, 529–537 (2014).
3. *Chirkunov Yu. A.*, "Group foliation of the Lamé equations of the classical dynamical theory of elasticity," Mech. Solids, **44**, No. 3, 372–379 (2009).

INVARIANT SUBMODELS OF THE MODEL OF THERMAL MOTION OF GAS IN A RAREFIED SPACE

Chirkunov Yu. A.[1], **Pikmullina E. O.**[2]

[1]*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;* chr101@mail.ru

[2]*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The model of thermal motion of a gas in a rarefied space was obtained in [1]. One-dimensional version of this model has been used to solve the problem of a strong blast [2–4]. The multi-dimensional model was investigated in [5]. The two-dimensional model was investigated in [6]. Exact solutions and conservation laws for the three-dimensional model were obtained in [7]. In this paper all significantly various (not limited by point transformation) invariant submodels of the model of thermal motion of gas in a rarefied space defined by invariant solutions of rank 2 of the system that defines the thermal motion of the gas in the rarefied space are obtained.

The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00446 a).

REFERENCES

1. *Ovsyannikov L. V.*, “The “PODMODELI” program. Gas dynamics,” J. Appl. Math. Mech., **58**, No. 4, 601–627 (1994).
2. *Sedov L. I.*, “Propagation of strong blast waves” [in Russian], J. Appl. Math. Mech., **10**, No. 2, 241–250 (1946).
3. *Taylor G.*, “The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion,” Proc. R. Soc. Lond. A, **201**, No. 1065, 159–174 (1950).
4. *von Neuman J.*, “The point source solution,” in: *Bethe H. A., Fuchs K., Hirschfelder J. O., Magee J. L., Peierls R. E., von Neumann J.*, Blast Wave, Los-Alamos Scientific Laboratory Report LA–2000, 1958, pp. 27–55.
5. *Chirkunov Yu. A.*, “The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound,” J. Appl. Math. Mech., **73**, No. 4, 421–425 (2009).
6. *Khabirov S. V.*, “The plane isothermal motions of an ideal gas without expansions,” J. Appl. Math. Mech., **78**, No. 3, 287–297 (2014).
7. *Chirkunov Yu. A.*, “Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space,” Int. J. Non-Linear Mech., **83**, 9–14 (2016).

APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS OF HIGHT SMOOTHNESS BY RIGHT-ANGLED FOURIER SUMS

Chumak E. A.

Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine;
chumaklena@mail.ru

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the right-angled Fourier sums taken over classes of periodical functions of two variables of hight smoothness. These equalities, in corresponding cases, guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skii problem for the right-angled Fourier sums on the specified classes of functions.

Our main result is in the following theorem (see definitions in [1, 2]).

Theorem. *Suppose that* $\psi_i(k) \in D_{q_i}$, $q_i \in (0;1)$, $\ _i(k) \in D_{Q_i}$, $Q_i \in (0;1)$, β_i, $\beta_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$. *Then the following relations hold as* $n_i \to \infty$, $i = 1,2$,

$$\mathcal{E}(C^{2\psi}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C^{2\psi}_{\beta,\infty}} ||f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C = \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1,2} \psi_i(n_i) K(q_i)$$

$$+O(1)\left[\sum_{i=1,2} \frac{\psi_i(n_i) q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1,2} \frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \ ^{Q_1,Q_2}_{n_1,n_2}(\ _1, \ _2)\right],$$

where $K(q)$ *is the total elliptic integral of the first kind,*

$$\varepsilon_m(\psi) = \sup_{k \geq m} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \quad q = \lim_{k \to \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)},$$

$$\ ^{Q_1,Q_2}_{n_1,n_2}(\ _1, \ _2) = \prod_{i=1,2} \frac{\ _i(n_i)}{1-Q_i} \left(1 + \frac{\varepsilon_{n_1}(\ _1)}{1-Q_1} + \frac{\varepsilon_{n_2}(\ _2)}{1-Q_2} + \frac{\varepsilon_{n_1}(\ _1)\varepsilon_{n_2}(\ _2)}{(1-Q_1)(1-Q_2)}\right),$$

$O(1)$ *is a quantity uniformly bounded with respect to* n_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*, $i = 1,2$.

REFERENCES

1. *Nikolsky S.*, "Approximation of functions in the mean by trigonometrical polynomials," Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **10**, No. 3, 207–256 (1946).
2. *Serdyuk A. S.*, "Approximation of Poisson integrals by de la Vallée Poussin sums," Ukr. Math. J., **56**, No. 1, 122–134 (2004).

MODELING THE CHAOTIC DYNAMICS OF HETEROGENEOUS CATALYTIC REACTIONS

Chumakov G. A.[1], **Chumakova N. A.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* chumakov@math.nsc.ru

[2]*Boreskov Institute of Catalysis SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* chum@catalysis.ru

Self-oscillations and chaotic behavior are the examples of amazing phenomena in catalysis. An efficient approach to theoretical studying consists in development of a mathematical model as a system of nonlinear ordinary differential equations (ODEs) describing the temporal changes of the concentrations of certain intermediates on the catalyst surface.

We consider a kinetic model of three nonlinear ODEs with fast, intermediate, and slow variables to illustrate that the influence of adsorbed species on the catalyst activity may lead to rather complex dynamics. In [1], we studied a scheme that allows us to generate the multi-peak oscillations. The approach was based upon global dynamics of the one-parameter family of the two-variable subsystems with intermediate and fast variables. Moreover, there was discussed the scenario of transition from a stable limit cycle on a strongly deformed torus to chaotic multi-peak oscillations by the bifurcation of the invariant torus.

Now, some results are presented of studying chaotic behavior in the low-dimensional dynamical systems with a hierarchy of characteristic times. This scheme allows us to generate the homoclinic chaos numerically by the Feigenbaum period-doubling scenario. In particular, the subharmonic period-doubling cascade leads to generation of a global attractor in the phase space. Unstable manifolds of the periodic orbits in the cascade are topologically equivalent to Möbius bands. We call such orbits *Möbius orbits*. Using the one-dimensional approximations of the Poincare map and its second iteration, we find a transversal homoclinic orbit to some Möbius orbit. The Möbius orbits from the track of the direct period-doubling cascade and the standard Kaplan–Yorke formula can give a lower bound for the Lyapunov dimension of the global attractor.

REFERENCES

1. *Chumakov G. A., Chumakova N. A., Lashina E. A.* “Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables,” Chem. Eng. J., **282**, 11–19 (2015).

THE SOBOLEV–ADAMS INEQUALITY FOR RIESZ POTENTIALS IN THE LIMITING CASE “q = p” AND APPLICATIONS

Korobkov M. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
korob@math.nsc.ru

We prove Luzin N-property and Morse–Sard–Dubovitskii theorems for mappings $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ of the Sobolev–Lorentz class $W^k_{p,1}$, $p = \frac{n}{k}$ (this is the sharp case that guaranties the continuity of mappings), see [1–2]. Our main tool is a new trace theorem for Riesz potentials of Lorentz functions for the limiting case $q = p$.

Theorem [1]. *Let μ be a positive Borel measure on $\mathbb{R}^n$ satisfying the grows condition on balls:*

$$\mu(B(x,r)) \le r^{n-\alpha p},$$

where $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $\alpha p < n$. Then for any compact set $E \subset \mathbb{R}^n$ the estimate

$$\|I_\alpha(1_E)\|^p_{L_p(\mu)} \le C \operatorname{meas}(E), \tag{1}$$

holds, where 1_E is the indicator function of the set E, I_α is the corresponding Rietz potential $I_\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|y-x|^{n-\alpha}}\,\mathrm{d}y$, and C depends on n, p, α only.

Note, that by the classical Adams theorem (which is an extension of the Sobolev inequality)

$$\int |I_\alpha f|^q \,\mathrm{d}\mu \le C\,\|f\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2}$$

for $q > p$ whenever $\mu(B(x,r)) \le r^{(n-\alpha p)\frac{q}{p}}$. It is well known that (2) fails in general for $q = p$. Thus, the estimate (1) is the limiting case for (2).

Using these results, we find also some very natural approximation and differentiability properties for functions in $W^k_{p,1}$ with exceptional set of small Hausdorff content.

REFERENCES

1. *Kristensen J., Korobkov M. V.*, “The trace theorem, the Luzin N- and Morse–Sard properties for the sharp case of Sobolev–Lorentz mappings,” Report no. OxPDE–15/07 (2015), www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/OxPDE%2015.07.pdf.
2. *Hajlasz P., Korobkov M. V., Kristensen J.*, “A bridge between Dubovitskii–Federer theorems and the coarea formula,” arxiv.org/abs/1603.05858.

SOLVING OF THE PROBLEM OF PARAMETERS IDENTIFICATION FOR SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Krivorotko O. I.[1], **Kashtanova V. N.**[2]

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
[1]krivorotko.olya@mail.ru, [2]vikakashtanova@ya.ru

A lot of physical processes can be described by systems of ordinary differential equations (ODE). In this work we consider the mathematical model for spread of the epidemic of tuberculosis in the population that is described by the system of nonlinear ODE [1]. The coefficients of this system characterize the features of population and disease spread. Consequently, it is necessary to qualitatively evaluate parameters of model (or their combinations) [2] for specification model for specific population.

The purpose of this work is the construction and investigation of the numerical algorithm for solving problem of parameters identification for mathematical model of tuberculosis transmission processes with treatment and drug resistance [1] using additional information about given population according to statistical data for the previous few years (namely, the number of healthy, latently infected and infectious diseases individuals). The numerical algorithm based on combination of very fast annealing and gradient approach for minimization of least squares objective function is investigated [3]. The results of numerical calculations are presented and discussed.

The authors were supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (4.1.3 The Joint Laboratories of NSU – NSC SB RAS).

REFERENCES

1. *Trauer J. M., Denholm J. T., McBryde E. S.*, “Construction of a mathematical model for tuberculosis transmission in highly endemic regions of the Asia-pacific,” J. Theor. Biol., **358**, 74–84 (2014).
2. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, De Gruyter, Berlin (2011).
3. *Banks H. T., Hu Sh., Thompson W. C.*, Modeling and Inverse Problems in the Presence of Uncertainty, Chapman and Hall/CRC press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. (2014).

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING OF INVERSE PROBLEMS FOR THE MATHEMATICAL MODEL OF CELLULAR HIV DYNAMICS

Krivorotko O. I.[1], **Yermolenko D. V.**[2]

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
[1]krivorotko.olya@mail.ru, [2]ermolenko.dasha@mail.ru

Mathematical models in immunology are described by systems of nonlinear ordinary differential equations (SODEs). It is important to determine parameters of these systems that characterize features of immunity and disease for constructing an individual treatment plan.

In this paper the parameter identification problem (inverse problem [1]) for mathematical model of HIV dynamics with treatment [2] using additional measurements of some concentrations in fixed times is numerically investigated. The mathematical model describes the dynamics of infected and uninfected CD4 T-lymphocytes, infected and uninfected macrophages, free virus and immune effectors (CD8-cells). Parameter identification problem is reduced to minimization problem of least square function that describes the deviation between model and measured data. The phase portraits of stationary states of SODE are obtained and analyzed. The genetic algorithm for solving the minimization problem is implemented and studied. After that optimization problem of determining the optimal treatment control is numerically investigated. The results of numerical calculation are discussed.

The authors were supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (4.1.3 The Joint Laboratories of NSU – NSC SB RAS).

REFERENCES

1. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, De Gruyter, Berlin (2011).
2. *Adams B. M., Banks H. T, Davidian M., Hee-Dae Kwon, Tran H. T, Wynne S. N, Rosenberg E. S.*, “HIV dynamics: Modeling, data analysis, and optimal treatment protocols,” J. Comput. Appl. Math., **184**, No. 1, 10–49 (2005).

ON DECAY RATE OF NONNEGATIVE SOLUTIONS OF SINGULAR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Muravnik A. B.

JSC Concern "Sozvezdie", Voronezh, Russia;
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia;
amuravnik@yandex.ru

The following Cauchy problem is considered:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\beta}{u}|\nabla u|^2 + C(x,t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Nonlinearities of the above kind arise in problems of directed polymers and interface growth (see, e.g., [1, 2]).

It is assumed that $u_0(x)$ is nonnegative, continuous, and bounded in the space $\mathbb{R}^n$, $\beta > -1$, and there exists a positive constant α such that one of the two following inequalities is satisfied in the half-space $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$:

$$C(x,t) \le -\alpha \min\left(1, \frac{1}{|x|^2}\right) \tag{3}$$

or

$$C(x,t) \le -\alpha. \tag{4}$$

We prove the two following assertions:

- No more than one classical bounded nonnegative solution $u(x,t)$ of problem (1)–(2) exists.
- If inequality (3) is satisfied, than $u \overset{t\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ uniformly with respect to x in any compact subset of the space $\mathbb{R}^n$ (provided that u exists);
  if (the stronger) inequality (4) is satisfied, than there exists a positive constant a such that the inequality $|u(x,t)| \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} u_0(x)\, e^{-at}$ holds in the half-space $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ (provided that u exists).

REFERENCES

1. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.*, "Dynamic scaling of growing interfaces," Phys. Rev. Lett., **56**, No. 9, 889–892 (1986).
2. *Medina E., Hwa T., Kardar M., Zhang Y.-C.*, "Burgers equation with correlated noise: Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth," Phys. Rev. A, **39**, No. 6, 3053–3075 (1989).

APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY FEJER SUMS

Novikov O. A.[1], **Rovenska O. G.**[2]

[1] *Donbass State Pedagogical University, Slov'yansk, Ukraine;*
sgpi.slav@dn.ua

[2] *Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine;*
o.rovenskaya@mail.ru

Asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of Fourier sums and Fejer sums on the classes of periodic functions that admit analytic extensions to a fixed strip of the complex plane, may be found in [1, 2]. For upper bounds of the deviations of right-angled Fejer sums taken over classes of periodic functions of two variables we obtain asymptotic equalities. In certain cases, these equalities give a solution of the corresponding Kolmogorov–Nikol'skii problem.

Theorem. *Suppose that q_i, $Q_i \in (0;1)$, $i = 1,2$. Then the following relations hold as $n_i \to \infty$, $i = 1,2$,*

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{1,\infty}\sigma_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C^{2q}_{1,\infty}} \|f(x) - \sigma_{\vec{n}}(f;\vec{x})\|_C = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{1}{n_i}\left(\frac{2q_j}{1-q_j^2} + \ln\frac{1+q_j}{1-q_j}\right)$$

$$+O(1)\left(\sum_{i=1,2}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)^3} + \prod_{j=1,2}\frac{1}{n_j(1-Q_j)^3}\right),$$

where $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n_i, q_i, Q_i, $i = 1,2$.

REFERENCES

1. *Nikolsky S.*, “Approximation of functions in the mean by trigonometrical polynomials,” Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **10**, No. 3, 207–256 (1946).
2. *Novikov O. A., Rovenska O. G.*, “Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums,” Comput. Research Model., **7**, No. 4, 813–819 (2015).

COMPUTING SOLUTION OPERATORS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR LINEAR SYMMETRIC HYPERBOLIC SYSTEMS OF PDES

Selivanova S.[1], **Selivanov V.**[2]

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia;
`s_seliv@math.nsc.ru`
[2]*A. P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia;*
Kazan Federal University, Kazan, Russia; `vseliv@iis.nsk.su`

We apply [1] numerical analysis and differential equations methods [2] to proving computability, in the sense of the rigorous approach of computable analysis [3], of solution operators of dissipative boundary-value problems for symmetric hyperbolic systems of PDEs. One of the main results is:

Theorem. *Let* $Q = [0,1]^m$; $T > 0$ *be a computable real and* $M_\varphi > 0$, $p \geq 2$ *be integers. Let* $A, B_1, \ldots, B_m$ *be fixed computable symmetric matrices, such that* $A = A^* > 0$, $B_i = B_i^*$. *Let* ${}^{(1)}_{i}$, ${}^{(2)}_{i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *be fixed computable rectangular real non-degenerate matrices, with their numbers of rows equal to the number of positive and negative eigenvalues of* $A^{-1}B_i$, *respectively, and such that the dissipativity property holds. If* $\varphi \in C^{p+1}(Q)$ *satisfies* $\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|_s \leq M_\varphi$, $\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\|_s \leq M_\varphi$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *and meets the boundary conditions, then the operator* $R : \varphi \mapsto \mathbf{u}$ *mapping the initial function to the unique solution* $\mathbf{u} \in C^p(Q \times [0,T], \mathbb{R}^n)$ *of the boundary-value problem*

$$\begin{cases} A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = f, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_m), \\ {}^{(1)}_{i}\mathbf{u}(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_m, t) = 0, \\ {}^{(2)}_{i}\mathbf{u}(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_m, t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

is a computable partial function from $C_s(Q, \mathbb{R}^n)$ *to* $C_{sL_2}(Q \times [0,T], \mathbb{R}^n)$.

REFERENCES

1. *Selivanova S., Selivanov V.*, “Computing solution operators of boundary-value problems for some linear hyperbolic systems of PDEs,” Log. Methods Comput. Sci. (in press).
2. *Godunov S. K.*, Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1971).
3. *Weihrauch K.*, Computable Analysis: An Introduction, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).

SHAPE SENSITIVITY ANALYSIS OF ELASTIC PLATES WITH DEFECTS

Shcherbakov V. V.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
victor@hydro.nsc.ru

The talk is concerned with an equilibrium problem for an elastic plate reinforced a rigid inclusion. The inclusion is assumed to delaminate partially from the matrix, there being an interfacial crack. Fully coupled nonpenetration conditions between the crack faces are taken into account. The problem is nonlinear and can be formulated as a variational inequality. We investigate shape differentiability of the potential deformation energy and find an explicit representation for its Gateaux derivative.

REFERENCES

1. *Shcherbakov V.*, " Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks," Z. Angew. Math. Phys., **67**, No. 3, Article ID 71 (2016).

MATHEMATICAL PROBLEMS OF FLUID MOTION IN POROELASTIC MEDIA

Tokareva M. A.

Altai State University, Barnaul, Russia; tma25@mail.ru

The problems of filtration in porous media are of practical importance for studies related to the forecast distribution of pollution filtration near the river dams, reservoirs and other hydraulic structures, drainage, foundations and basements of buildings, irrigation drainage and agricultural fields, water and oil and gas production, movement of magma in the crust, etc. The work is devoted to studying the mathematical model of fluid filtration in poroelastic media. The laws of conservation of mass for fluid and solid phases, Darcy's law, taking into account the skeleton movement, the rheological Maxwell law and the general equation of conservation of momentum for system are describing this process [1–2]. The local solvability of the problem is proved for the case in which the density of the mass forces is equal to zero and the fluid is compressible [3]. The system of equations in Lagrange variables is reduced to degenerate nonlinear parabolic equation for porosity. Localization of solutions of the equations has been established by the integral energy estimates method [4]. In the report the questions of solvability of equations of fluid filtration in poroelastic medium are considered.

REFERENCES

1. *Connolly J. A. D., Podladchikov Yu. Yu.*, "Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock," Geodinamica Acta, **11**, No. 2–3, 55–84 (1998).
2. *Morency C., Huismans R. S., Beaumont C., Fullsack P.*, "A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability," J. Geophys. Res., **112**, B10407 (2007).
3. *Tokareva M. A.*, "Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media," Journal of Physics: Conference Series, **722**, 012037 (2016).
4. *Tokareva M. A.*, "Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium," Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **8**, No. 4, 467–477 (2015).

АВТОРСКИЙ ИНДЕКС

Научное издание

СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная школа-конференция
Новосибирск, Россия, 18–22 декабря 2016 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Подписано в печать 01.12.2016 г.
Формат 60×84 1/16. Уч.-изд. л. 12,2. Усл. печ. л. 11,2.
Тираж 200 экз. Заказ № 264

Издательско-полиграфический центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.