**Операторы преобразования для дифференциальных уравнений четвертого порядка с неаналитическими коэффициентами**

**Кангужин Б.Е., Абдуахитова Г.Е.**

**Ключевые слова:** операторы преобразования, голоморфность,

1. **Введение.**

При решении обратных задач спектрального анализа для уравнения

Штурма - Лиувилля В.А.Марченко [1,2] эффективно применил специальный математический аппарат, связанный с операторами преобразования. В частности, при восстановлении коэффициента и граничных чисел по спектральным данным задачи

(1)

(2)

В.А.Марченко воспользовался тем, что некоторое решение уравнения (1)

может быть представлено в виде

(3)

где - некоторая функция, которая мы в дальнейшем будем называть ядром оператора преобразования. Здесь удовлетворяет уравнению (1) при Его идея заключалась в следующем: на первом этапе по спектральным данным восстанавливают ядро при , а затем по определяют потенциал и числа

Приведенная схема В.А.Марченко [3,4, 5] оказалась эффективной также в обратной задаче рассеяния. В связи с отмеченными успехами возникло желание перенести результаты В.А.Марченко на дифференциальные уравнения высших порядков [6 - 12]. Однако в начале 60-ых годов благодаря усилиям Л.А.Сахновича, В.И.Мацаева стало ясно, что решения дифференциального уравнения

не всегда могут быть связаны по формулам вида (3) с решением уравнения Подобные примеры приведены в работах Л.А.Сахновича и В.И.Мацаева. Возникают вопросы: как быть, когда - непрерывная, но не дифференцируемая функция? Что в таких случаях использовать вместо формулы (3)? Продолжительное время эффективную замену формуле (3) не могли найти. Вместо этого усилия математиков были направлены на решение следующего вопроса: найти наиболее широкий класс коэффициентов и при которых все еще справедливо представление (3). В указанном направлении отметим результаты И.Г.Хачатряна [8]. Он доказал, что если коэффициенты и голоморфны в некотором четырехугольнике, то для решения верна формула (3). Вопрос о необходимости условии голоморфности коэффициентов и для существования оператора преобразования вида (3) обсуждался в работах В.И.Мацаева [9], Л.А.Сахновича [10,11] и М.М.Маламуда [12]. В [12] доказывается, что если часть коэффициентов дифференциального уравнения

(4)

голоморфны и, кроме того, имеет представления (3), то оставшиеся коэффициенты также голоморфны. Таким образом, чтобы сохранился вид (3) оператора преобразования коэффициенты дифференциального уравнения должны быть голоморфными. Отказ от голоморфности коэффициентов приводит к проблеме, которая до сих пор не решена. Отдельные результаты в этом направлении можно найти в работах М.К.Фаге [13,14], А.Ф.Леонтьева [15,16], А.П.Хромова [17]. Некоторое продвижение наметилось в связи с выходом книги [18].

В случае в работе [18] доказано экспоненциальное представление частных решений дифференциального уравнения (4). В частности, при N=4 результат работы [18] может быть сформулирован в виде.

Основной результат: *Пусть дифференциальное уравнение (4) имеет коэффициенты Тогда найдутся функции такие, что некоторое решение дифференциального уравнения (4) имеет экспоненциальное представление*

*(5)*

*и оно справедливо при всех комплексных значениях параметра .*

Здесь в качестве фигурирует одно из решении дифференциального уравнения (4) с ненулевыми коэффициентами Важным моментом в приведенном утверждении является то, что одни и те же ядра пригодны для всех Таким образом, правая часть представления (5) есть обобщение представления (3) на случай В то же время известно [19], что ядро из (3) может быть интерпретировано как решение задачи Гурса для волнового уравнения

[20]

имеющего единственное решение с естественной априорной оценкой. Аналогичные вопросы, связанные с ядрами представления (5) пока не изучены, и им будет посвящена отдельная работа. Данная работа посвящена конструктивным способам построения ядер из (5).

1. **Обсуждение основного результата и уточнение проблемы.**

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

(6)

с начальными условиями

(7)

где функции будем считать раз непрерывно дифференцируемыми на [0,b] функциями, - параметр и символ Кронекера. Решения задач (6)-(7) обозначим как ), ), ), ). Решения ), j=1,2,3,4 при нулевых коэффициентах уравнения (6) соответственно являются функциями  которые определяются следующей формулой



где через обозначены различные корни из (6) степени 4, и .

В статье исследуется только решение ), хотя другие решения ), ), ) могут быть изучены подобным образом. Дается конструктивный способ построения ) по решению  Найден интегральный оператор, который функцию  переводит в решение ). Причем один и тот же интегральный оператор пригоден для всех комплексных значениях . Впервые этот интегральный оператор был приведен в [18]. Здесь изложение методически несколько отличается от изложения работы [18]. Известно, что задача Коши эквивалентна интегральному уравнению относительно ).



где

+.

При решении последнего интегрального уравнения последовательно по формулам определяются итерации

Когда коэффициенты аналитически продолжаются с отрезка [0,b] на некоторую часть комплексной плоскости, то все итерации имеют одну и ту же структуру вида



Следовательно, в случае аналитичности коэффициентов из представления решения в виде ряда

)= )+)+…

вытекает экспоненциальное представление



Если аналитичности не будет мы придем к тому, что структура нулевого приближения

cущественно отличается от структуры первого приближения .

Поскольку в уравнение (6) входит комплексный параметр , то задача Коши (6)-(7) представляет семейство задач. Мы пытаемся единым способом найти все семейство решений указанных задач, т.е. найдем такой оператор Т, который, во-первых не зависит от , во-вторых, он переводит семейство функции  на множество решений

1. **Интегральное представление решения задачи Коши**

Известно [21], что многие задачи для дифференциальных уравнений однозначно редуцируется к интегральным уравнениям. Рассмотрим следующую задачу Коши

и редуцируем ее к эквивалентному интегральному уравнению.

Рассматриваемая задача сводится к следующему интегральному уравнению относительно

, (8)

где

+ (9)

Уравнение (8) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода [22]. Это уравнение будем решать с помощью метода последовательных приближений [23]. Пусть нулевое решение приближение определяется по формуле

(10)

где

Последующие приближения будем считать по формуле

(11)

Тогда согласно книге [21] имеем равномерно сходящийся ряд

. (12)

Соответствующие оценки отдельных приближении приведены в книге [21]. Рассмотрим структуру приближений. К примеру, для первого приближения верна лемма.

**Лемма 1.** Функцию можно представить в виде

 (13)

где

 (14)

 (15)

**Доказательство**. Из формул (10)и (11) следует

 (16)

Меняя порядок интегрирования в формуле (16), имеем

 (17)

Поскольку является линейной комбинацией экспонент, то произведение функций и имеет вид



Перепишем формулу (17) используя это равенство

 (18)

Преобразуем первый интеграл содержащийся в правой части (18). Сначала поменяем в нем порядок интегрирования, затем произведем замену переменного



 (19)

А в последующих интегралах после соответствующих замен  поменяв порядок интегрирования, получим

 (20)

 (21)

Подставим соотношения (19), (20), (21) в формулу (18), предварительно опустив индексы у 

 (22)

Если в соотношении (22) ввести обозначения (14), (15), то получим представление (13). Таким образом, формула (13) доказана.

Отметим, что при доказательстве леммы1 важную роль сыграла возможность преобразования произведения в линейную комбинацию значений функции . В последующих приближениях снова появляются подобные произведения, которые опять же преобразуется в линейные комбинации функции Таким образом, каждое приближение в принципе линейным образом зависит от функции

Докажем методом математической индукции, что все последующие приближения имеют такое же представление какое получилось для первого приближения.

**Лемма 2**. Функции могут быть представлены в виде

 (23)

где

 (24)

 (25)

**Доказательство**. Поскольку начальный шаг индукции в лемме1 уже доказан, предположим, что представление (23) справедливо при *к.* Попытаемся получить формулу (23) при *к+1.* Из формул (11) и (23) имеем

 (26)

Преобразуем правую часть формулы (26).

Рассмотрим выражение

Подынтегральные функции, зависящие от параметра  не зависят от , поэтому

интеграл по сделаем внутренним



Используя правила умножения экспонент, имеем



С учетом последнего соотношения выражение  разобьем на сумму четырех интегралов

 (27)

Преобразуя каждый член, входящий в правую часть соотношения (27), имеем

 (28)

Рассмотрим теперь выражение



Переставив порядок интегрирования, мы получим

Выражение и функция подобны (см. формулу (17)). Разница между ними состоит в том, что вместо функций в стоит в . Поэтому выражение можно сразу записать по аналогии с .

 (29)

Подставим преобразованные выражения (28), (29) интегралов и в формулу (26) для (*к+1*)-го приближения, тогда мы имеем представление



где





Тем самым получили требуемые формулы для следующего приближения

а также для его коэффициентов Следовательно, лемма 2 полностью доказана.

При 



где



Введены функции



которые не зависит от параметра  и доказаны оценки коэффициентов гарантирующие равномерную сходимость рядов Поэтому, подставляя (26) и (10) в правую часть (12) и меняя очередность интегрирования и суммирования, приходим к основной теореме.

**Теорема.** Решение *y* задачи (6), (7) имеет интегральное представление



где

**Литература**

1. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. //ДАН СССР, т.72, №3, с. 457-460.
2. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. // Труды ММО, 1952, т.1, с. 327-420.
3. Марченко В.А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн. // ДАН СССР, 1955, т.104, №5, с. 695-698.
4. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. – Киев: Наукова думка, 1972.
5. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наукова думка, 1977.
6. Delsarte J., Lions J. Transmutations d’ operateurs differentieles dans le domaine complexe. // Comment.Math. Helv., 1957, v.32, №2, p. 113-128.
7. Хачатрян И.Г. Операторы преобразования для краевых задач. Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 1980, т. 15, №1, с. 30-44.
8. Хачатрян И.Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков. // Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 1978, т. 13, №3, с. 215-237.
9. Мацаев В.И. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков. // ДАН СССР, 1960, т.130, №3, с. 499-502.
10. Сахнович Л.А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка n>2 с аналитическими коэффициентами. // Мате. Сб., 1958, т.46(88), №1, с.61-76.
11. Сахнович Л.А. Необходимые условия наличия оператора преобразования для уравнения четвертого порядка. // УМН, 1961, т. 16, №5, с.199-204.
12. Маламуд М.М. Необходимые условия существования оператора преобразования для уравнений высших порядков. // Фунц. Анализ и его прилож,, 1982, т.16, №3, с.74-75.
13. Фаге М.К. Решение одной задачи Коши путем увеличивания числа независимых переменных. // Труды 3 всесоюз.матем.съезда, 1956, т.1, с.71-72.
14. Фаге М.К. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной . // Труды ММО, 1959, т.8, с.3-48.
15. Леонтьев А.Ф. Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций // Сиб. Матем. Ж., 1960, т.1, №3, с. 456-487.
16. Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент. М., Наука, 1981.
17. Хромов А.П. Об одном представлении ядер резольвент вольтерровских операторов и его применениях. Матем.сб. 1972, т.89(131), №2, с. 207-226.
18. Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных функций. –Шымкент. Ғылым. 1996.-С.321.
19. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М., Наука, 1969.
20. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М., Наука 1984.
21. Щетинин Н.И. Теория интегральных уравнений. М., Изд. МГУ.1968, с.103.
22. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М., Изд.МГУ, 1989.
23. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М., Изд.МГУ, 1984.