

2. Төңіректі классикалық теория

Бірінші ретті дербес туындылы төңіректі теңдеу жай дифференциалдық теңдеулер теориясы әдістері арқылы *сипаттауыш жүйе* деп аталатын мәліметтер көмегімен шешіледі. Физикалық жағынан алып қарағанда, толқын көмегімен және бөлшектер (корпускалалық-толқындық дуализм) көмегімен құбылыстарды екіжақтылы суреттеу арқылы қарастыруға болады. Өріс кейбір бірінші ретті дербес туындылы теңдеулерді қанағаттандырады, ал бөлшектер жай дифференциалдық теңдеулер жүйесімен сипатталады. Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жай дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіру толқын эволюциясын зерттеуді бөлшектер таралуын зерттеуге алып келеді.

Қарастырып отырған бөлімдегі көптеген сұрақтар жай дифференциалдық теңдеулер оқулығында толық көрсетілген (мысалға, [12, 2 тарау]). Бірінші ретті дербес туындылы сызықты және квазисызықты теңдеулер бойынша жалпы шешімін табу туралы есептер, сонымен қатар сәйкес Коши есептерінің шешімін [17, §20] табуға болады. Төменде бірінші ретті дербес туындылы сызықты және сызықты емес теңдеулердің төңіректі теориясын еске түсіреміз және көптеген оқулықтарда жазылмаған сызықты емес теңдеу теориясына көбірек тоқталамыз.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - n өлшемді евклид кеңістігіндегі нүкте болсын. Келесі теңдеуді қарастырамыз:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (2.1)$$

Мұнда $u(x) \equiv u(x_1, \dots, x_n)$ белгісіз функция. Және функция келесідей болған жағдайды қарастырамыз

$$F(x, u, p) \equiv F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$$

p_1, \dots, p_n айнымалылары бойынша дифференциалданады.

Анықтама 2.1. (2.1) түрдегі теңдеу бірінші ретті дербес туындылы теңдеу деп аталады, егер

$$|\nabla_p F|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0$$

$x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n$ айнымалыларының $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ кеңістігінің кейбір ашық жиынында жоғарыдағы теңдеу орындалса.

Анықтама 2.2. (2.1) теңдеуі үшін Коши есебі деп осы теңдеудің келесі бастапқы шартын қанағаттандыратын $u(x)$ шешімін табу есебі аталады

$$u|_\gamma = u_0(x) \quad (2.2)$$

2.1. СЫЗЫҚТЫ ТЕҢДЕУ

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ облысында жататын $\nu = \nu(x)$ жатық векторлық өріс болсын.

Анықтама 2.3. Біртекті бірінші ретті дербес туындылы сызықты теңдеу деп келесі теңдеуді атаймыз

$$L_\nu[u] \equiv \nu_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \nu_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (2.3)$$

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясында $L_\nu \equiv \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ операторы $\nu(x)$ векторлық өріс бағыты бойынша дифференциалданатын оператор деп аталады. (2.3)

геометриялық теңдеуі ізделінді u функциясының

$$\nabla u \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \text{ градиенті } \nu(x) \text{ векторлық өрісіне } \Omega$$

облысынның әрбір нүктесінде ортогональды.

$u = u(x)$ жатық функциясы (2.3) теңдеуінің шешімі болу үшін, $\nu(x)$ өрісінің фазалық қисықтарын бойлай u тұрақты болу қажетті және жеткілікті, яғни келесі теңдеулер жүйесінің бірінші интегралы болу керек

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = \nu_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = \nu_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.4)$$

(2.4) жүйесін $\dot{x} = \nu(x)$ векторлық форма түрінде де жазуға болады, және (2.3) *сызықты теңдеуінің сипаттауыш жүйесі* деп аталады. Сипаттаушы жүйенің шешімі *сипаттауыштар* деп, x -тердің n -өлшемді кеңістігіндегі $\nu(x)$ векторлық өрісті сызықты теңдеудің сипаттауыш векторлық өрісі деп аталады.

Анықтама 2. 4. *Бірінші ретті дербес туындысы бар біртекті сызықты теңдеу деп келесі теңдеуді атайды*

$$L_v[u] = f(x), \quad (2.5)$$

мұнда $f(x)$ – берілген үзіліссіз функция.