

**"Функциональные пространства и обобщенные функции",
лектор проф. Г.И.Бижанова**

Вопросы

1. Множество. Подмножество. Равные множества. Пустое множество. Объединение, пересечение, разность, симметрическая разность множеств. Дизъюнктные множества.
2. Сравнение множеств. Взаимно - однозначное соответствие между множествами. Эквивалентные множества. Примеры.
3. Множества меры нуль. Мера пустого множества.
4. Измеримые функции. Теоремы о функции, заданной на множестве меры нуль и равной константе.
5. Измеримые функции. Теоремы об измеримости функций $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$.
6. Измеримые функции. Теоремы об измеримости функций $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, $g(x) \neq 0$.
7. Эквивалентные функции. Теорема об измеримости эквивалентных функций.
8. Эквивалентные функции. Эквивалентность непрерывных функций.
9. Определение свойства "почти всюду". Сходимость функций почти всюду. Примеры последовательностей функций, сходящихся почти всюду.
10. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Теорема о функции $A \leq f(x) \leq B$. 3 следствия.
11. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Теорема об эквивалентных функциях.
12. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Свойства интеграла Лебега.
13. Интеграл Лебега от произвольной измеримой функции. Теорема о суммируемости эквивалентных функций.
14. Метрические пространства. Открытый шар, ε -окрестность точки x_0 . Замкнутый шар. Предельная точка, внутренняя точка множества. Открытое множество. Замкнутое множество. Замыкание множества. Примеры.
15. Метрические пространства. Граничная точка множества. Замыкание множества. Плотное, всюду плотное множество. Сепарабельное пространство. Примеры.
16. Сходящаяся последовательность. Фундаментальная последовательность. Подпоследовательность. Полные метрические пространства. Компактное множество.
17. Нормированные пространства. Метрика. Пространство Банаха. Эквивалентные нормы. Примеры эквивалентных норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

18. Гильбертовы пространства. Определение. Ряд Фурье.
19. Обобщенные функции. Регулярные, сингулярные обобщенные функции.
20. Обобщенные производные. Примеры.

Вопросы повышенной сложности

1. Счетные множества. Примеры. Теорема о множестве всех рациональных чисел в $\mathbb{R}^1$.
2. Теорема о множестве всех действительных чисел отрезка $[0,1]$. Множества мощности континуума. Примеры.
3. Множества меры нуль. Теорема о мере конечного или счетного множества точек в $\mathbb{R}^n$.
4. Множества меры нуль. Теорема о мере отрезка, интервала, прямой в $\mathbb{R}^2$.
5. Измеримые функции. Определение. Теорема об измеримости множества, на котором определена измеримая функция.
6. Измеримые функции. Теорема об измеримости лебеговых множеств $E_2 = \{x \in E : f(x) \geq a\}$, $E_3 = \{x \in E : f(x) < a\}$, $E_4 = \{x \in E : f(x) \leq a\}$.
7. Измеримые функции. Теоремы об измеримости функций $f(x) + k$, $kf(x)$.
8. Измеримые функции. Теоремы об измеримости функций $|f(x)|$, $f^2(x)$, $\frac{1}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$.
9. Измеримые функции. Теорема об измеримости непрерывной функции, заданной на замкнутом множестве.
10. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Определение интеграла.
11. Интеграл Лебега от неотрицательной неограниченной функции. Определение интеграла.
12. Интеграл Лебега. Теорема: если функция $f(x)$ суммируема, то она почти везде конечна.
13. Интеграл Лебега от произвольной измеримой функции. Определение интеграла. Теорема о суммируемости функций $f(x)$ и $|f(x)|$.
14. Метрические пространства. Метрика в пространстве $\mathbb{R}^n$.
15. Метрические пространства. Предельная точка. Теорема о существовании последовательности, сходящейся к предельной точке множества.
16. Метрические пространства. Два свойства сходящейся последовательности: единственность предела и сходимость подпоследовательности.

17. Пространство Лебега. Определение. Нормы эквивалентных функций (теорема).
18. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Определение. Неравенство Коши - Буняковского. Нормы в евклидовом пространстве.
19. Евклидово пространство. Линейно зависимая и независимая системы элементов. Ортогональная система элементов. Ортонормированный базис. Примеры ортонормированных базисов в $\mathbb{R}^n$, l_2 , $L_2(\Omega)$.
20. Гильбертовы пространства. Задача о наилучшем приближении функции. Неравенство Бесселя. Равенство Стеклова-Парсеваля.

Примеры

1. Пусть $A = \{n\}$, $B = \{2n\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.
2. Установить взаимно-однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и всей числовой прямой $\mathbb{R}^1$.
3. Установить взаимно-однозначное соответствие между окружностью единичного радиуса и полуинтервалом $[0, 1)$.
4. Установить взаимно-однозначное соответствие между полуинтервалом $[0, 1)$ и отрезком $[0, 1]$.
5. Какова мощность множества всех отрезков $[a, b]$, $a < b$, на числовой прямой $\mathbb{R}^1$?
6. Какова мощность множества всех кругов на плоскости $\mathbb{R}^2$?
7. Пусть $M = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{q}\}$, $n, q = 1, 2, \dots$. Является ли M замкнутым множеством? Каковы его производные множества M' , M'' , M''' ?
8. Пусть R – множество рациональных чисел на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Найти его производной множество R' .
9. Может ли равняться нулю мера множества, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку?
10. Пусть множество E на отрезке $[0, 1]$ имеет меру нуль. Всегда ли является его замыкание также множеством меры нуль?
11. Привести примеры множеств а) которые не имеют граничных точек; в) которые имеют граничные точки, но они не принадлежат этому множеству.
12. Вычислить интеграл Лебега

$$\int_0^1 \varphi(x) d\mu, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число в } [0, 1], \\ 0, & x - \text{иррациональное число в } [0, 1]. \end{cases}$$

13. Вычислить интеграл Лебега

$$\int_0^1 f(x) d\mu, \quad f(x) = \begin{cases} x^3, & x - \text{рациональное число в } [0, 1], \\ x^{1/2}, & x - \text{иррациональное число в } [0, 1]. \end{cases}$$

14. Вычислить интеграл Лебега

$$\int_0^1 f(x) d\mu, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{рациональное число в } [0, 1], \\ x^3, & x - \text{иррациональное число в } [0, 1]. \end{cases}$$

15. Вычислить интеграл Лебега

$$\int_0^1 f(x) d\mu, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{рациональное число в } [0, 1], \\ x^3, & x - \text{иррациональное число в } [0, 1], \quad x < 1/3, \\ x^2, & x - \text{иррациональное число в } [0, 1], \quad x > 1/3. \end{cases}$$

16. Вычислить интеграл Лебега

$$\int_0^1 (x-1)^{-\frac{1}{3}} d\mu,$$

используя срезку функции $(x-1)^{-1/3}$.

17. Суммируема ли по Лебегу функция

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

на отрезке $[0, 1]$?

18. Доказать эквивалентность норм

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \text{ и } \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

в $\mathbb{R}^n$ элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$.

19. Доказать эквивалентность норм

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \text{ и } \|x\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

в $\mathbb{R}^n$ элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$.

20. Доказать эквивалентность норм

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \text{ и } \|x\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

в $\mathbb{R}^n$ элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$.