

УДК 533.15: 536.25

© 2014 г. М. К. АСЕМБАЕВА, В. МУКАМЕДЕНКЫЗЫ, А. Т. НЫСАНБАЕВА, И. В. ПОЯРКОВ,  
О. В. ФЕДОРЕНКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО МАССОПЕРЕНОСА  
ДЛЯ ПЛОСКОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО КАНАЛА С МАССОНЕПРОНИЦАЕМЫМИ  
СТЕНКАМИ

Численно определена граница молекулярного массопереноса в изотермической трехкомпонентной газовой системе для плоского вертикального диффузионного канала с массонепроницаемыми стенками. Определено критическое число Рэлея смены режима “диффузия-конвекция” для щелевого канала. Показано, что теоретические исследования, проведенные в рамках линейной теории устойчивости, согласуются с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* диффузия, конвекция, диффузионная неустойчивость, линейная теория устойчивости, числа Рэлея.

При исследовании массопереноса в многокомпонентных газовых системах необходимо знать, какой тип смешения в ней осуществляется – диффузионный или конвективный. В связи с этим одна из задач, решаемых при изучении смешения – определение границы перехода системы из устойчивого состояния, характерного при диффузии, в неустойчивое, свойственное конвекции. Смена режима возникает из-за образования стратифицированных по плотности областей в диффузионном канале [1]. Установить это возможно либо через эксперимент, либо с помощью расчета. Однако учитывая сложности и большие материальные затраты при использовании экспериментальных методов, был предложен ряд расчетных методик, позволяющих получить необходимую информацию, не прибегая к эксперименту [1, 2].

**1. Постановка задачи.** Макроскопическое движение идеальной тройной газовой смеси описывается общей системой уравнений гидродинамики, которая включает в себя уравнения Навье–Стокса, сохранения числа частиц смеси и компонентов, и уравнение состояния [1, 3]

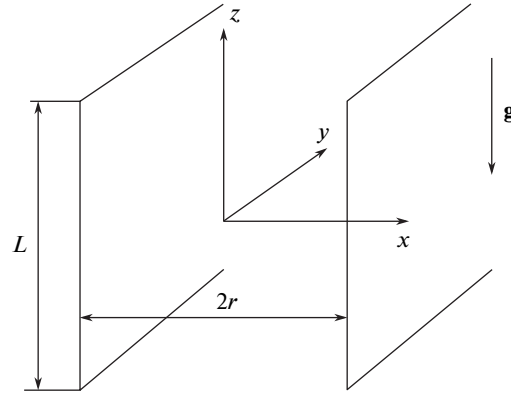
$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c_i = -\operatorname{div} \mathbf{j}_i, \quad i = (1, 2) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j}_1 = -(D_{11}^* \nabla c_1 + D_{12}^* \nabla c_2), \quad \mathbf{j}_2 = -(D_{21}^* \nabla c_1 + D_{22}^* \nabla c_2)$$

$$\rho = \rho(c_1, c_2, p), \quad T = \text{const}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\rho_1 \mathbf{u}_1 + \rho_2 \mathbf{u}_2 + \rho_3 \mathbf{u}_3}{\rho}, \quad \mathbf{v} = \frac{n_1 \mathbf{u}_1 + n_2 \mathbf{u}_2 + n_3 \mathbf{u}_3}{n}$$

где  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  – среднemasсовая и среднечисловая скорость тройной смеси соответственно;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести;  $\eta$  и  $\xi$  – коэффициент сдвиговой и объемной вязкости;  $\mathbf{j}_i$ ,  $c_i$  – плотность диффузионного потока и концентрации



Фиг. 1. Плоский вертикальный канал

$i$ -го компонента;  $D_{ij}^*$  – практические коэффициенты диффузии ( $i, j \in \{1, 2\}$ ), определяемые через коэффициенты взаимной диффузии  $D_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) соотношениями

$$D_{11}^* = \frac{D_{13} [c_1 D_{32} + (c_2 + c_3) D_{12}]}{D}, \quad D_{12}^* = -\frac{c_1 D_{23} (D_{12} - D_{13})}{D}$$

$$D_{22}^* = \frac{D_{23} [c_2 D_{13} + (c_1 + c_3) D_{12}]}{D}, \quad D_{21}^* = -\frac{c_2 D_{13} (D_{12} - D_{23})}{D}$$

$$D = c_1 D_{23} + c_2 D_{13} + c_3 D_{12}$$

Решение системы уравнений (1.1) ищем для плоского вертикального канала, схема которого приведена на фиг. 1.

Для упрощения задачи рассмотрим щелевой канал, в котором длина  $L$  вдоль оси  $z$  много больше поперечного размера  $2r$ . Сила  $rg$  действует только вдоль вертикальной оси  $z$ .

Ранее в работе [1] было найдено решение системы (1.1) при обращении в нуль скорости на поверхности полости и возмущения концентрации на границе в виде

$$\{c_1, c_2, u\} = \{c_1^0, c_2^0, u^0\} \sin \left[ (n+1) \frac{\pi}{2} x \right] \exp[-\lambda t]$$

$$x = \pm 1; u = 0, \quad c_i = 0 \quad (1.2)$$

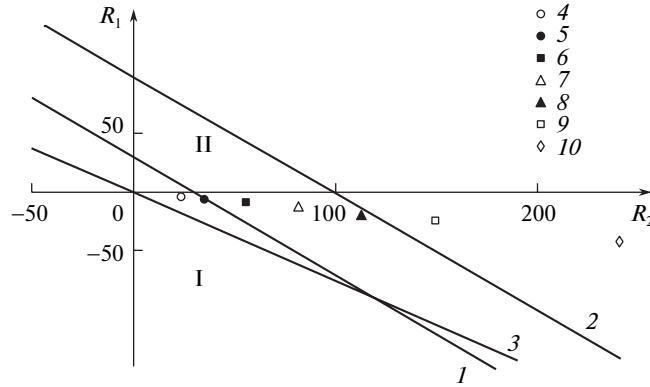
где  $n$  и  $\lambda$  – мода и декремент возмущения, индекс “0” соответствует начальным условиям.

В реальных устройствах ограничивающие поверхности массонепроницаемые.

В настоящей работе система уравнений (1.1) решена для изотермического случая при граничных условиях, предполагающих исчезновение скорости и отсутствие переноса веществ через вертикальные плоскости, ограничивающие слой газовой смеси

$$x = \pm 1; u = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия (1.3) более корректно отражают экспериментальное изучение смены режима смешения.



Фиг. 2. Области диффузионного (I) и конвективного (II) смешения для системы  $0.21 \text{ C}_3\text{H}_8 + 0.79 \text{ CO}_2 - \text{N}_2\text{O}$ : линии – граница устойчивости, рассчитанная в настоящей работе (1) и в [2] (2), и  $\nabla\rho = 0$  (3); точки – опытные данные для диффузии (4), конвекции (5–10);  $p = 0.2$  (4), 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9 МПа (5–10)

**2. Результаты.** Решения краевой задачи (1.1), (1.3) выражаются в следующем виде:

$$u_i = \frac{\text{sh}\gamma x}{\text{sh}\gamma} - \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma}, \quad c_i = -\frac{K_i}{\gamma^4} \left( \frac{\text{sh}\gamma x}{\text{sh}\gamma} + \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right)$$

$$\gamma^4 = K_1 R_1 \tau_{11} + K_2 R_2$$

$$K_1 = \frac{(A_1 - A_2 \tau_{12})}{A_1 (\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21})}, \quad K_2 = \frac{(A_2 \tau_{11} - A_1 \tau_{21})}{A_2 (\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21})}, \quad \tau_{ij} = \frac{D_{ij}^*}{D_{22}^*}$$

где  $\tau_{ij}$  – параметры, определяющие соотношение между практическими коэффициентами диффузии,  $A_i d$  – концентрация  $i$ -го компонента,  $R_i = g\beta_1 A_i d^4 / \nu D_{ii}^*$  – парциальное диффузионное число Рэлея. Декремент возмущений  $\gamma$ , определяемый через парциальные числа Рэлея  $R_1$  и  $R_2$ , можно определить из следующего уравнения:

$$\text{cth}\gamma = -\text{ctg}\gamma \tag{2.1}$$

Переход от диффузии к конвекции характеризуется критическим числом Рэлея, которое находится из уравнения (2.1). Для шелевого канала  $R_1 = 31.29$ .

В этом случае граничная линия устойчивости на плоскости чисел Рэлея имеет вид

$$\tau_{11} \left( 1 - \frac{A_2}{A_1} \tau_{12} \right) R_1 + \left( \tau_{11} - \frac{A_1}{A_2} \tau_{21} \right) R_2 = \gamma^4 (\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21}) \tag{2.2}$$

На линии, определяемой (2.2), происходит срыв диффузионного процесса и возникновение конвективного течения (например, двух токов, идущих по половинкам канала).

В частности, для системы  $0.21 \text{ C}_3\text{H}_8 + 0.79 \text{ CO}_2 - \text{N}_2\text{O}$  (концентрации даны в мольных долях) это уравнение дает на плоскости чисел Рэлея прямую (фиг. 2, линия 1), разделяющую ее на область диффузии – I (возмущения затухают) и неустойчивости

механического равновесия – II (возмущения нарастают). Критическое парциальное число Рэлея составляет  $R_1 = 31.12$  (при  $R_2 = 0$ ), что близко к теоретически найденному значению.

На плоскости  $(R_1, R_2)$  также можно определить положение линии, все точки которой отражают состояние равновесия смеси с равным нулю градиентом суммарной плотности (фиг. 2, линия 3)

$$\tau_{11}R_1 = -R_2$$

Эта линия разделяет плоскость чисел Рэлея на две области: зону, расположенную выше нее (градиент плотности положителен), и ниже – градиент плотности отрицателен. Отрицательность градиента плотности показывает, что газовая смесь большей плотности располагается под смесью с меньшей суммарной плотностью, что в поле силы тяжести соответствует устойчивому, т.е. диффузионному процессу смешения.

Для подтверждения полученных расчетов были использованы экспериментальные результаты, полученные двухколбовым методом [4, 5]. В опыте колбы соединялись диффузионным каналом в виде плоской щели, имеющей размеры  $(0.17 \times 0.05 \times 0.003) \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ . Эксперименты показали, что при давлении  $p = 0.25 \text{ МПа}$  для системы  $0.21 \text{ C}_3\text{H}_8 + 0.79 \text{ CO}_2 - \text{N}_2\text{O}$  в диффузионном канале происходит смена режима смешения: ниже этого давления наблюдается диффузия, выше – конвекция.

Результаты экспериментальных исследований можно отобразить на плоскости чисел Рэлея, используя следующие формулы:

$$R_1 = \frac{gna^2b^2(m_1 - m_3) \cdot \Delta c_1}{\rho v D_{11}^* L}, \quad R_2 = \frac{gna^2b^2(m_2 - m_3) \cdot \Delta c_2}{\rho v D_{22}^* L}$$

где  $a$  и  $b$  – толщина и ширина канала;  $m_i$  – масса молекулы  $i$ -го сорта (для расчетов мы предполагали, что индекс  $i = 1, 2, 3$  нумерует компоненты смеси: 1 –  $\text{N}_2\text{O}$ , 2 –  $\text{CO}_2$ , 3 –  $\text{C}_3\text{H}_8$ ).

Сравнение результатов эксперимента с проведенными численными расчетами отражено на фиг. 2. Видно, что точка 5, соответствующая давлению  $p = 0.3 \text{ МПа}$ , лежит на линии устойчивости (1), рассчитанной при условии массонепроницаемости ограничивающих поверхностей. Точки, соответствующие более высокому давлению, т.е. точки 6–10, находятся в области неустойчивости. Точка 4, рассчитанная для давления меньшего  $p = 0.3 \text{ МПа}$ , лежит в области устойчивого массопереноса, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Также на фиг. 2 приведена линия устойчивости 2, полученная при граничных условиях (1.2), согласно которой смена режима смешения должна происходить при давлении  $p > 0.5 \text{ МПа}$ , более чем в два раза превышающее опытные результаты.

**Заключение.** Предложена математическая модель описания смены режима “диффузия-конвекция”, учитывающая размеры диффузионного канала с массонепроницаемыми стенками, адекватно описывающая экспериментальные данные при монотонных возмущениях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косов В.Н., Селезнев В.Д., Жаврин Ю.И. О диффузионной неустойчивости в изотермических трехкомпонентных газовых смесях // Теплофизика и аэромеханика. 2000. Т. 7. № 1. С. 127–135.

2. *Жаврин Ю.И., Косов Н.Д., Новосад З.И.* Описание нестационарной диффузии в многокомпонентных газовых смесях методом эффективных коэффициентов диффузии // *Ж. физ. химии.* 1975. Т. 49. № 3. С. 706–709.
3. *Akylbekova G.A., Kossov V.N., Poyarkov I.V., Zhavrin Yu.I.* Diffusion in isothermal ternary gas mixtures // 5<sup>th</sup> European Thermal-Sciences Conf. Eindhoven, Netherlands, 2008.
4. *Жаврин Ю.И., Мукамеденкызы В., Пояров И.В.* Диффузионное и конвективное смешение бинарной смеси пропана и двуокиси углерода с чистой закисью азота // *Ж. техн. физики.* 2007. Т. 77. № 7. С. 127–129.
5. *Жаврин Ю.И., Молдабекова М.С., Пояров И.В., Мукамеденкызы В.* Экспериментальное исследование диффузионной неустойчивости в трехкомпонентной газовой смеси при нулевом градиенте плотности // *Письма в ИЖТФ* // 2011 . Т. 37. № 15. С. 62–68.

Алматы  
Москва

Поступила в редакцию  
5.XI.2012