Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігі
Семей қаласының Шәкәрім атындағы мемлекеттік университеті
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті
РҒА В.А.Стеклов атындағы математикалық институты
ҚР БҒМ математика және математикалық моделдеу институты
Әл-Фараби атындағы ҚҰУ жанындағы математика және механика ҒЗИ
ҚР БҒМ ҒК «Қолданбалы математика институты», Қарағанды қ.

Қазақ ССР Ғылым Академиясының корреспондент мүшесі,
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор
Төлеубай Ыдрысұлы Амановтың
туғанына 90 жыл толуына арналған

«ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ, ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ»

Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының

МАТЕРИАЛДАРЫ

МАТЕРИАЛЫ

Международной научно-практической конференции

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

посвященной 90-летию со дня рождения
члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук,
профессора Толеубая Идрисовича Аманова

1-том

3 – 5 қазан 2013 ж.
Семей

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

$$B=\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0\\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0\\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0\\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0\\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78}\\ 0 & -i\omega\, b_{17} & -i\omega\, b_{47} & 0 & -i\omega\, b_{67} & 0 & b_{87} & 0 \end{bmatrix};\qquad \vec{W}=\begin{pmatrix} u_z\\ \sigma_{zz}\\ u_x\\ \sigma_{xz}\\ u_y\\ \sigma_{yz}\\ \theta\\ q_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

Из структуры матрицы коэффициентов (8) следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловая волна взаимосвязаны.

Отличные от нуля элементы матрицы B b_{13} , b_{24}определяют взаимную трансформацию продольной и поперечной X – поляризованной волн. Элементы b_{15}, b_{26} описывают взаимосвязь поперечной Y-поляризации с продольной волной. Отличный от нуля элемент b_{45} определяет взаимную трансформацию между волнами поперечной поляризации.

Отличие от нуля коэффициента b_{17}: $b_{17}=\dfrac{\beta_{33}}{c_{33}}$ (ромбическая сингония)

означает, что продольная волна распространяется с термоупругим эффектом.

Не нулевые элементы b_{47}и b_{67}:

$$b_{47}=\left(\frac{c_{13}}{c_{33}}\beta_{33}-\beta_{11}\right)im\,;\qquad b_{67}=\left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\beta_{33}-\beta_{22}\right)in$$

означают влияние на упругие волны поперечных поляризаций термоупругого эффекта. При этом b_{47} описывает влияние термоупругого эффекта на упругую поперечную волну X- поляризации, а b_{67}влияние термоупругого эффекта на поперечную волну Y- поляризации.

Аналогично, для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде кубической сингонии построена матрица коэффициентов в объемном случае и проведен анализ матриц коэффициентов. Также получены структуры матриц коэффициентов при распространении термоупругих волн в анизотропных средах ромбической и гексагональной и кубической сингоний в плоскости XZ и YZ, определены типы волн и взаимная трансформация волн различной поляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1986, 556 с.
2. Тлеукенов С.К. Метод матриканта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.
3. С.К. Тлеукенов, М.К. Кудерин, В.А. Козионов, Н.А. Испулов, Е.К. Баяубаев, А.К. Сейтханова Динамические и термодинамические процессы в скальных грунтах и строительных конструкциях / Монография. Под ред. академика АЕН, д.ф.-м.н., профессора С.К. Тлеукенова.- Павлодар, 2006.

УДК 517.957

Ж.Х. Жунусова

Казахский Национальный Университет им.аль-Фараби,

050040, Республика Казахстан, г.Алматы, пр.Аль-Фараби, 71

E-mail: zhzhkh@mail.ru

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ (2+1)-МЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГАУССА-КОДАЦЦИ-МАЙНАРДИ

В настоящее время существует достаточно обоснованное мнение, что один из ключей к пониманию нелинейности и интегрируемости лежит в дифференциальной геометрии. Сейчас появился новый раздел дифференциальной геометрии, называемый солитонной геометрией [1-8]. Основными уравнениями дифференциальной геометрии являются уравнение Гаусса-Кодацци-Майнарди и уравнение Гаусса-Вейнгартена, которые описывают вложения многообразия в другое многообразие более высокой размерности. Оказалось, что почти все солитонные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются частными случаями уравнения Гаусса-Кодацци-Майнарди или уравнения Гаусса-Вейнгартена. В свою очередь, уравнение Гаусса-Кодацци-Майнарди является частной редукцией уравнения Янга-Миллса-Хиггса. Уравнение Янга-Миллса-Хиггса исследовано нами в других работах. Например, в работе [9] найдены точные солитонные решения уравнения Янга-Миллса-Хиггса в пространстве с постоянной скалярной кривизной, т.е. в (2+1)-мерном пространстве-времени анти де Ситтера. Исследование решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является актуальным как с физической, так и с математической точки зрения. Эти исследования находят большое развитие в работах Казахстанских ученых [4]-[10]. Исследование таких сложных уравнений требует определенных знаний в области теории солитонов [5]-[6].

Уравнение Гаусса-Кодацци-Майнарди в пространстве (1+1) размерности выглядит следующим образом

$$A_t - B_x + [A,B] = 0,$$

где A является 3x3 матрицей, B является произвольной 3x3 матрицей,

$$[A,B] = AB - BA.$$

Уравнение Гаусса-Вейнгартена выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{xx} &= \Gamma_{11}^1 \vec{r}_x + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_t + L\vec{n},\\
\vec{r}_{xt} &= \Gamma_{12}^1 \vec{r}_x + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_t + M\vec{n},\\
\vec{r}_{tt} &= \Gamma_{22}^1 \vec{r}_x + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_t + N\vec{n},\\
\vec{n}_x &= p_{11}\vec{r}_x + p_{12}\vec{r}_t,\\
\vec{n}_t &= p_{21}\vec{r}_x + p_{22}\vec{r}_t
\end{aligned},$$

где символы Кристоффеля Γ_{ij}^k и коэффициенты p_{ij}, $i = 1,2$ вычисляются с помощью формул

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_x - 2FF_x + FE_t}{2\Lambda}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_x - EE_t - FE_x}{2\Lambda},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_t - FG_x}{2\Lambda}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_x - FE_t}{2\Lambda},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_t - FG_t - GG_x}{2\Lambda}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_t - 2FF_t + FG_x}{2\Lambda},$$

$$p_{11} = \frac{FM - GL}{\Lambda}, \ p_{12} = \frac{FL - EM}{\Lambda},$$

$$p_{21} = \frac{EN - GM}{\Lambda}, \ p_{22} = \frac{FM - EN}{\Lambda},$$

$$\Lambda = EG - F^2.$$

В солитонной геометрии удобно работать в ортогональном базисе [4]. Введем ортогональный базис

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_x}{\sqrt{E}}, \quad \vec{e}_1 = \vec{n}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2.$$

В этом случае уравнение Гаусса-Вейнгартена приводится к виду [4]

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}_x = A\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}_t = B\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}0 & k & -\sigma\\ -k & 0 & \tau\\ \sigma & -\tau & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{pmatrix}0 & L & -\frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{E}}\Gamma_{11}^2\\ -L & 0 & -\sqrt{\Lambda}p_{12}\\ \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{E}}\Gamma_{11}^2 & \sqrt{\Lambda}p_{12} & 0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & \omega_3 & -\omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{pmatrix}0 & M & -\frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{E}}\Gamma_{12}^2\\ -M & 0 & -\sqrt{\Lambda}p_{22}\\ \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{E}}\Gamma_{12}^2 & \sqrt{\Lambda}p_{22} & 0\end{pmatrix},$$

k,τ,σ,ω_j являются функциями определяющими поверхность, которая выражается коэффициентами $p_{ij,}\, i,j=1{,}2$ и символами Кристоффеля.

Отсюда мы получим уравнение Гаусса-Кодацци-Майнарди в терминах k,τ,σ,ω_j

$$k_t=\omega_{3x}-\omega_1\sigma+\omega_2\tau\ ,$$
$$\tau_t=\omega_{1x}+\omega_3\sigma-\omega_2 k\ ,$$
$$\sigma_t=\omega_{2x}-\omega_3\tau+\omega_1 k\ .$$

В данной работе рассмотрим нелинейное уравнение M-LXII [4],

$$\begin{gathered}A_{1y}-B_{1x}+[A_1,B_1]=0\ ,\\ A_{1t}-C_{1x}+[A_1,C_1]=0\ ,\\ B_{1t}-C_{1y}+[B_1,C_1]=0\ ,\end{gathered}\tag{1}$$

которое является обобщением уравнения Гаусса-Кодацци-Майнарди в (2+1)-размерности. Приведем следующую лемму об интегрируемости уравнения (1), в смысле существования представления Лакса.**Лемма***Представление Лакса для уравнения M-LXII (1) выглядит в следующем виде*

$$\begin{gathered}-i\Phi_t+\lambda\Phi_{\xi_3}=[-iC_1+\lambda F^+]\Phi\\ \Phi_{\xi_2}-i\lambda\Phi_t=[F^- - i\lambda C_1]\Phi\end{gathered}\ ,\tag{2}$$

где Φ - матричная функция,

$$F^{\pm}=A_1+iB_1\ \frac{\partial}{\partial\xi_3}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial\xi_2}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}.\tag{3}$$

Доказательство леммы. Лемма доказывается непосредственной проверкой условий совместности. Запишем в более привычном виде представление Лакса (3)

$$\Phi_{\xi_2}=\lambda\Phi_{\xi_3}[F^- - \lambda^2F^+]\Phi,\tag{4}$$

$$\Phi_t=-i\lambda\Phi_{\xi_2}[C+i\lambda F^+]\Phi\tag{5}$$

$$\Phi_{\xi_3} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_3} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{6}$$

т.е. $\Phi_{\xi_3} = \Phi_x + i\Phi_y$. Аналогично $\Phi_{\xi_2} = \Phi_x - i\Phi_y$. Перепишем (5) в виде

$$\lambda\Phi_{\xi_2} = i\Phi_t - i[C_1 + i\lambda F^+]\Phi. \tag{7}$$

Подставляем (7) в (4), тогда

$$\Phi_{\xi_2} = i\lambda\Phi_t - i\lambda[C_1\Phi + \lambda^2F^+]\Phi + F^-\Phi - \lambda^2F^+\Phi \tag{8}$$

$$\Phi_{\xi_2} - i\lambda\Phi_t = [F^- - i\lambda C_1]\Phi\ . \tag{9}$$

Таким образом, показали, что из (4), (5) можно получить (3). Теперь берем в (4), (5) условие совместности $\Phi_{\xi_2 t} = \Phi_{t\xi_2}$

$$\Phi_{\xi_2 t} = \lambda^2\Phi_{\xi_3 t}(F_t^- - \lambda^2F_t^+)\Phi + (F^- - \lambda^2F^+)\Phi_t, \tag{10}$$

$$\Phi_{t\xi_2} = -i\lambda\Phi_{\xi_3\xi_2} + [C_{1\xi_2} + i\lambda F_{\xi_2}^+]\Phi + (C_1 + i\lambda F^+)\Phi_{\xi_2}, \tag{11}$$

Отсюда

$$\Phi_{\xi_3\xi_3} : \lambda^2(-i\lambda) = -i\lambda^3, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi_3} :\ & \lambda^2(C_1 + i\lambda F^+) - i\lambda(F^- - \lambda F^+) = \\ & = -i\lambda(F^- - \lambda^2F^+) + (C_1 + i\lambda F^+)\lambda^2,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\Phi:\ \lambda^2(C_{1\xi_3} + i\lambda F_{\xi_3}^+) + F_t^- - \lambda^2F_t^+ + (F^- - \lambda F^+)(C_1 + i\lambda F^+) = \tag{13}$$

$$= -i\lambda(F_{\xi_3}^- - \lambda F_{\xi_3}^+) + C_{1\xi_2}^- + i\lambda F_{\xi_2}^+ + (F^- - \lambda^2F^+)(C_1 + i\lambda F^+)\,. \tag{14}$$

Так как коэффициенты при первых и вторых производных тождественно выполняются, собираем коэффициенты при Φ:

$$\lambda^3 :\ iF_{\xi_3}^+ - iF^+F^+ = iF_{\xi_3}^+ - iF^+F^+ \tag{15а}$$

$$\lambda^2 :\ F_t^+ = C_{1\xi_3} - [F^+, C_1], \tag{15б}$$

$$\lambda^1 :\ F_{\xi_2}^+ - F_{\xi_3}^+ = [F^-, F^+], \tag{15в}$$

$$\lambda^0 :\ F_t^- = C_{1\xi_2} - [F^-, C_1], \tag{15г}$$

Учитывая (3), и складывая (15б) и (15в), получим

$$2A_{1t} = C_{1\xi_3} + C_{1\xi_2} - [2A_1, C_1] = 2C_{1x} - 2[A_1, C_1],$$

или

$$A_{1t} - C_{1x} + 2[A_1, C_1] = 0. \tag{16}$$

Учитывая (3) и вычитая (15г) от (15б), имеем

$$2iB_{1t} = C_{1x} + iC_{1y} - 2C_{1x} + iC_{1y} - [2iB_1, C_1] = 2iC_{1y} - 2i[B_1, C_1],$$

или

$$B_{1t} - C_{1y} + [B_1, C_1] = 0. \tag{17}$$

Из (15в), учитывая (3), получим

$$A_{1x} - iA_{1y} - A_{1x} - iA_{1y} + iB_{1x} - i^2B_{1y} + iB_{1x} + i^2B_{1y} = 2i[A_1, B_1],$$

или

$$A_{1y} - B_{1x} + [A_1, B_1] = 0. \tag{18}$$

Уравнения (16), (17), (18) дают нам уравнение M-LXII. Таким образом, лемма доказана.

Таким образом, нам удалось рассмотреть сложное нелинейное дифференциальное уравнением с точки зрения дифференциальной геометрий поверхностей. Последующим этапом наших исследований будет изучение геометрических характеристик соответствующих солитонному решению (2+1)-мерного уравнения Гаусса-Кодацци-Майнарди. Таким образом, исследование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих определенный физический процесс, позволяет параллельно развивать дифференциальную геометрию кривых и поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА
1 Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.Современная геометрия. М.: Наука, 1981. 759 с.
2 Eisenthart L.P. A treatise on the differential geometry of curvers and surfaces (Dover, New York, 1909).
3 Lakshmanan M., Myrzakulov R. et all. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in 2+1 -dimensions // J. Math. Phys., Vol. 39, No. 7, 1998, pp. 3765-3771.
4 Мырзакулов Р. Спиновые системы и солитонная геометрия -Алматы.: Print-S, 2001, -351 с.
5 Мырзакулов Р., Рахимов Ф.К. Солитонная теория магнетизма и дифференциальная геометрия. Prints-S, 2003, с. 700.
6 Ceyhan O., Fokas A.S., Gurses M. Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations // J.Math. Phys. 2000.V.41, No.4, P. 2551-2270.
7 Блиев Н.К., Мырзакулов Р., Жунусова Ж.Х. О солитонной геометрии (2+1)-измерений // Вестник НАН РК. -2000. N2. -С. 21-29.
8 Bliev N.K., Myrzakulov R., Zhunussova Zh.Kh. Some exact solutions of the nonlinear sigma model // Reports NAS RK, 1999, № 5, C. 3-10.
9 Zhunussova Zh.Kh. Soliton solution of the Yang - Mills – Higgs equation // Proc. of the Int. Conf. on "Differential equations and their applications". -Almaty, 2002. -P. 108-112.
10 Zhunussova Zh.Kh. et.al. On the soliton geometry in multidimensions. //Proc. of the Int.Conf "Differential Geomenry and Quantum Physics", Berlin, March 6-10, 2000. Sfb 288 Prepreint 481, P.44-49.

UDC 517.927

Zh. Zhunussova
Kazakh National University named after al-Farabi
050040, Republic of Kazakhstan, Almaty city, Al-Farabi avenue, 71
E-mail: zhzhkh@mail.ru

GEOMETRICAL ROOTS OF COSMOLOGICAL MODEL

Arising of interest in solving of soliton equations in (1+1)-dimension made progress in developing of mathematics, in particularly, differential geometry. There is a lack of geometric characteristics under researching of soliton solution. With this connection we present some geometric explanation of considered model.

We consider a theory of gravity with a metric dependent torsion, so called F(R,T) gravity. Geometric roots of such theory are studied for finding geometric characteristics. In particularly, we explain the derivation of the model with geometric point of view.

More general form F(R,T) gravity with two arbitrary functions is represented and it in the spatially flat Friedmann-Robertson-Walker metric is given. In the cosmological context, we find acceleration scenario of the universe.

The discovery of the accelerated expansion of the universe has revolutionized modern cosmology. It is generally assumed that this cosmic acceleration due to some kind of negative-pressure form of matter known as dark energy.

The nature of dark energy as well as its cosmological origin remains unknown at present. To explain the nature of the dark energy and the accelerated expansion, a wide variety of the theoretical models have been proposed in the literature, such as quintessence, phantom, kessence, tachyon, f-essence, Chaplygin gas, g-essence, etc. Among the different models of dark energy, the modified gravity models is quite interesting as they incorporate some concepts of the quantum and general gravity theories. There are several modified gravity theories like F(R) gravity, F(G) gravity, F(T) gravity and so on [1]- [4]. In our opinion, one of interesting and perspective versions of modified gravity theories is the F(R,T) gravity. Recently one of the versions of F(R,T) gravity were proposed in [5] and its some properties were studied in [6]-[7]. In this paper we consider F(R,T) gravity [7].

Here the gravitational action of F(R,T) gravity and its arguments are derived from the geometrical point of view. Using them to the spatially flat Friedmann-Robertson-Walker metric a system of the action with the curvature and torsion scalars is obtained.

We consider the M43 - model [7]. This model is one of the representatives of F(R, T) gravity. The action of the M43 - model is

$$S_{43} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$R = \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

$$T = \varepsilon_2 S_\rho^{\ \mu\nu} T^\rho_{\ \mu\nu},$$

where L_m is the matter Lagrangian, $\varepsilon_i = \pm 1$ is signature.

We try give one of the possible geometric formulations of this M43 - model. Note that we have the different cases related with the signature:

1) $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1$; 2) $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$; 3) $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$; 4) $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1$;

Also note that the M43 - model is the particular case of the M37 - model having the form

$$S_{37} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$R = u + \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \qquad (2)$$

$$T = v + \varepsilon_2 S_\rho^{\ \mu\nu} T^\rho_{\ \mu\nu},$$

where

$$R_s = \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \qquad T_s = \varepsilon_2 S_\rho^{\ \mu\nu} T^\rho_{\ \mu\nu}. \qquad (3)$$

To understand the geometry of the M43 - model we consider some space-time with the curvature and torsion so that its connection $G^\lambda_{\ \mu\nu}$ is a sum of the curvature and torsion parts. In this paper, the Greek alphabet $(\mu, \nu, \rho, \ldots = 0,1,2,3)$ denote indices related to space-time, and the Latin alphabet $(i, j, k, \ldots = 0,1,2,3)$ denote indices, which are raised and lowered with the Minkowski metric $\eta_{ij} = diag(-1,+1,+1,+1)$. For our space-time the connection $G^\lambda_{\ \mu\nu}$ has the form

$$G^\lambda_{\ \mu\nu} = e_i^{\ \lambda}\partial_\mu e^i_{\ \nu} + e_j^{\ \lambda} e^i_{\ \nu}\omega^j_{\ i\mu} = \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} + K^\lambda_{\ \mu\nu} \qquad (4)$$

Here $\Gamma^j_{i\mu}$ is the Levi-Civita connection and $K^j_{i\mu}$ is the contorsion. Let the metric has the form

$$ds^2 = g_{ij} ds^i ds^j. \qquad (5)$$

Then the orthonormal tetrad components $e_i(x^\mu)$ are related to the metric through

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e^i_\mu e^j_\nu. \qquad (6)$$

so that the orthonormally condition reads as

$$\eta_{ij} = g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\mu_j. \qquad (7)$$

Here $\eta_{ij} = diag(-1,+1,+1,+1)$ and we used the relation

$$e^i_\mu e^\mu_j = \delta^i_j. \qquad (8)$$

The quantities $\Gamma^j_{i\mu}$ and $K^j_{i\mu}$ we define as

$$\Gamma^l_{\ jk} = \frac{1}{2} g^{lr}\left\{\partial_k g_{rj} + \partial_j g_{rk} - \partial_r g_{jk}\right\} \qquad (9)$$

and

$$K^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{T}^\lambda_{\ \mu\nu} + \mathrm{T}_{\mu\nu}^{\ \ \lambda} + \mathrm{T}_{\nu\mu}^{\ \ \lambda}\right) \qquad (10)$$

respectively. Here the components of the torsion tensor are given by

$$\mathrm{T}^\lambda_{\ \mu\nu} = e_i^{\ \lambda}\mathrm{T}^\lambda_{\ \mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\ \nu\mu}, \qquad (11)$$

$$\mathrm{T}^i_{\ \mu\nu} = \partial_\mu e^i_{\ \nu} - \partial_\mu e^i_{\ \mu} + \Gamma^i_{\ j\mu} e^j_{\ \nu} - \Gamma^i_{\ j\nu} e^j_{\ \mu}. \qquad (12)$$

The curvature $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ we define as

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = e_i{}^{\rho} e^j{}_{\sigma} R^i{}_{j\mu\nu} = \partial_\mu G^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu G^{\rho}{}_{\sigma\mu} + G^{\rho}{}_{\lambda\mu} G^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - G^{\rho}{}_{\lambda\nu} G^{\lambda}{}_{\sigma\mu}$$

$$= R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \partial_\mu K^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \partial_\nu K^{\rho}{}_{\sigma\mu} + K^{\rho}{}_{\lambda\mu} K^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - K^{\rho}{}_{\lambda\nu} K^{\lambda}{}_{\sigma\mu} \tag{13}$$

$$+ \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} K^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} K^{\lambda}{}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} K^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} K^{\rho}{}_{\lambda\nu}$$

where the Riemann curvature of the Levi-Civita connection are defined in the standard way

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \tag{14}$$

Now we introduce two important for us quantities namely the curvature (R) and torsion (T) scalars as

$$R = g^{ij} R_{ij}, \tag{15}$$

$$T = S_{\rho}^{\mu\nu} T^{\rho}_{\mu\nu}, \tag{16}$$

where

$$S_{\rho}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(K^{\mu\nu}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\rho} T^{\theta\nu}_{\theta} - \delta^{\nu}_{\rho} T^{\theta\mu}_{\theta}) \tag{17}$$

Then the M43 - model we write in the form (1).
From here we work with the spatially flat Friedmann-Robertson-Walker metric

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{18}$$

where a(t) is the scale factor. In this case, the non-vanishing components of the Levi-Civita connection are

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^i_{00} = 0,$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = \Gamma^0_{ij} = a^2 H \delta_{ij}, \tag{19}$$

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = H\delta^i_j,$$

where $H = (\ln a)_t$ and $(i, j, k, \ldots = 1,2,3)$. Now we calculate the torsion components. It's the non-vanishing components are given by

$$T_{110} = T_{220} = T_{330} = a^2 h,$$

$$T_{123} = T_{231} = T_{312} = 2a^3 f, \tag{20}$$

where h and f are some real functions [6]. Note that the indices of the torsion tensor are being raised and lowered with respect to the metric that is

$$T_{ijk} = g_{kl} T^l_{ij}, \tag{21}$$

Now we can find the contortion components. We get

$$K^1{}_{10} = K^2{}_{20} = K^3{}_{30} = 0,$$

$$K^1{}_{01} = K^2{}_{02} = K^3{}_{03} = h,$$

$$K^0{}_{11} = K^0{}_{22} = K^0{}_{33} = a^2 h \tag{22}$$

$$K^1{}_{23} = K^2{}_{31} = K^3{}_{12} = -af$$

$$K^1{}_{32} = K^2{}_{13} = K^3{}_{21} = af.$$

The non-vanishing components of the curvature $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ are given by

$$R^0{}_{101} = R^0{}_{202} = R^0{}_{303} = a^2(\dot{H} + H^2 + Hh + \dot{h}),$$

$$R^0{}_{123} = -R^0{}_{213} = R^0{}_{312} = 2a^3 f(H + h),$$

$$R^1{}_{203} = -R^1{}_{302} = R^2{}_{301} = -a(Hf + \dot{f}),$$

$$R^1{}_{212} = R^1{}_{313} = R^2{}_{323} = a^2[(H + h)^2 + f^2]. \tag{23}$$

Similarly, we write the non-vanishing components of the Ricci curvature $R_{\mu\nu}$ as

$$R_{00} = -3\dot{H} - 3\dot{h} - 3H^2 - 3Hh,$$

$$R_{11}=R_{22}=R_{33}a^2(\dot{H}+\dot{h}+3H^2+5Hh+2h^2-f^2). \quad (24)$$

Similarly we find the non-vanishing components of the tensor $S_\rho^{\mu\nu}$. We obtain

$$S_1^{10}=\frac{1}{2}(K_1^{10}+\delta_1^1 T_\theta^{\theta 0}-\delta_1^9 T_\theta^{\theta\nu})=\frac{1}{2}(h+2h)=h, \quad (25)$$

$$S_1^{10}=S_2^{20}=S_3^{\ 30}=2h, \quad (26)$$

$$S_1^{23}=\frac{1}{2}(K_1^{23}+\delta_1^2+\delta_1^3)=-\frac{f}{2a}, \quad (27)$$

$$S_1^{23}=S_2^{31}=S_3^{\ 21}=-\frac{f}{2a} \quad (28)$$

and

$$T=T_{10}^1 S_1^{10}+T_{20}^2 S_2^{20}+T_{30}^3 S_3^{30}+T_1^{23} S_{23}^1+T_{31}^2 S_2^{31}+T_{12}^3 S_3^{12}. \quad (29)$$

Now we are ready to write the explicit forms of the curvature and torsion scalars

$$R=6(\dot{H}+2H^2)+6\dot{h}+18Hh+6h^2-3f^2 \quad (30)$$

$$T=6h^2-a^{-2}f^2 \quad (30)$$

So finally the M43 - model we write as

$$S_{43}=\int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T)+L_m],$$

$$R=6(\dot{H}+2H^2)+6\dot{h}+18Hh+6h^2-3f^2 \quad (32)$$

$$T=6h^2-a^{-2}f^2$$

Further we can define The Lagrangian formulation of the generalized F(R,T) gravity model and construct some cosmological solutions for the particular model $F=\mu R+\nu T$. In this case, the solutions of the cosmological equations are divided into two classes. Each of them is related with some torsion scalar functions. In particular, the exact de Sitter solution can be found. These exact analytic solutions of the cosmological equations describe the accelerated expansion of the universe.

REFERENCES

1 E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, // Int. J. Mod. Phys. 2006. D 15, 1753. [hepth/0603057];

2 M. Li, X. D. Li, S. Wang and Y. Wang, // Commun. Theor. Phys. 2011. 56, 525 [arXiv:1103.5870];

3 A. De Felice and S. Tsujikawa, // Living Rev. Rel. 13, 3, 2010. arXiv:1002.4928];

4 S. Nojiri and S. D. Odintsov, // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 4, 115, 2007. [hep-th/0601213];

5 F. Muller-Hoissen. // Phys. Lett. A, 1982. 92, N9, 433-434;

6 A.J. Lopez-Revelles, R. Myrzakulov, D. Saez-Gomez, // Physical Review D, 2012. 85, N10, 103521.

7 K. Bamba, R. Myrzakulov, S. Nojiri, S. D. Odintsov, // Physical Review D, 2012. 85, N10, 104036.

УДК: 531.36

Абдрахманов А.Т.

РГП Институт проблем информатики и управления МОН РК,
050010, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина, 125,
e-mail:*ata61@mail.ru*

ОБ КОРРЕКТИРУЮЩЕМ УПРАВЛЕНИИ МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА

Уравнения Лагранжа – Максвелла. Механизмы с электроприводом (манипуляторы) можно рассматривать как электромеханические системы. Для исследования их динамики наиболее удобным являются уравнения Лагранжа-Максвелла, которые имеют форму уравнений Лагранжа второго рода и позволяют автоматически получать не только уравнения движения механической части системы, но и связанные с ними уравнения электрической части.