УДК 41.03

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ *

М.Дж.Минглибаев [1),2)], Г.М.Маемерова [1)]

[1)] Казахский национальный университет имени аль-Фараби, [2)] Астрофизический институт имени В.Г.Фесенкова

Abstract. Secular perturbations in the three-bodies problem with masses, changing isotropically by different specific rates are investigated. As initial unperturbed intermediate motion is used individual aperiodic motion at the quasiconic section. Eccentricities and inclinations of the orbits of bodies considered to be small quantities, masses of bodies comparable to each other. Under these assumptions, using a computer algebra system *Mathematica* are evaluated the expressions of secular perturbing function in the analogues of the second system variables Poincare with accuracy up to the second degree inclusive of small quantities. In symbolically are calculated secular perturbations of the three-bodies problem with variable masses.
Keywords: three-bodies problem, secular perturbations, variable masses, aperiodic motion, a computer algebra system *Mathematica*.

Аңдатпа. Массалары изотропты түрде өзгеретін үш дене мәселесінің ғасырлық ұйытқулары зерттелді. Бастапқы ұйытқымаған аралық қозғалыс ретінде өзіндік квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыс қарастырылды. Орбиталардың эксцентриситеттері мен көлбеулері кіші шамалар болып саналады, ал денелердің массалары өзара шамалас. Осы шарттарды ескере отырып, *Mathematica* компьютерлік алгебра жүйесінің көмегімен кіші шамалардың екінші дәрежесіне дейін Пуанкаре айнымалылары аналогтарының екінші жүйесінде ұйытқушы функцияның ғасырлық ұйытқулары алынды. Символдық түрде массалары айнымалы үш дене мәселесінің ғаырлық ұйытқулары есептелді.
Кілттік сөздер: үш дене есебі, ғасырлық ұйытқулар, айнымалы масса, апериодтық қозғалыс, *Mathematica* компьютерлік алгебра жүйесі.

Аннотация. Исследованы вековые возмущения задачи трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах. В качестве исходного невозмущенного промежуточного движения используется индивидуальное апериодическое движение по квазиконическому сечению. Эксцентриситеты и наклоны орбит тел считаются малыми величинами, а массы тел сравнимыми между собой. При этих предположениях применяя систему компьютерной алгебры *Mathematica* вычислены выражения вековой части возмущающей функции в аналогах второй системы переменных Пуанкаре с точностью до второй степени малых величин включительно. В аналитическом виде вычислены вековые возмущения задачи трех тел с переменными массами.
Ключевые слова: задача трех тел, вековые возмущения, переменная масса, апериодическое движение, система компьютерной алгебры *Mathematica*.

1 Введение

В реальных протопланетных и планетных гравитирующих системах на сегодняшний день основными диссипативными факторами считаются приливная эволюция, трения ядро - мантия и трение атмосфера - небесное тело [1]–[3]. Однако, на определенных этапах эволюции гравитирующих систем диссипация массы за пределы системы и обмен масс могут быть ведущими факторами динамической эволюции [4]–[9]. Исследование эволюционных эффектов переменности масс в гравитирующих системах – интересная задача.

Простейшая модель реальных небесных тел – это сферическое тело, гравитационная сила которого на внешней области моделируется гравитационной силой материальной точки, находящейся в центре этой сферы с соответствующей

*Работа частично финансирована грантом 0688/ГФ научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК, 2012г.-2014г.

массой. Рассмотрим три сферических тела с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах взаимогравитурующие по закону Ньютона, что приводит к задаче трех точек с переменными массами. В этой проблеме эффекты диссипации масс не исследованы, по-видимому, из-за сложности задачи и отсутствием математических разработок. В такой постановке отсутствуют десять классических первых интегралов [7], т.е. интеграл энергии, шесть интегралов движения центра масс и три интеграла сохранения момента количества движения. В нашем случае из-за изменения массы в различных темпах происходит диссипация энергии системы в целом. Так как законы изменения масс известны и заданы, то дифференциальные уравнения системы замкнутые и не появляются дополнительные степени свободы. Однако, в связи с диссипацией количества движения, момента количества движения и энергии не сохраняются классические интегралы.

В настоящей работе используя наши разработки [7], модифицируя классическую схему [10], получено новое разложение в ряд возмущающей функции в задаче трех тел с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах, в принципе. Возмущающая функция выражена через аналоги второй системы элементов Пуанкаре с точностью до второй степени включительно малых величин e_i, i_i. Эта громоздкая и трудоемкая задача алгебры, конкретное выполнение которой возможно только с использованием компьютерной системы символьных вычислений.

С помощью системы аналитического вычисления *Mathematica*, фактически нами получено полное выражение возмущающей функции, в котором только выражение $m_1 m_2/r_{12}$ состоит из 684 слагаемых. На основе полученной возмущающей функции впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи - канонические неавтономные уравнения вековых возмущений и получено аналитическое решение этих уравнений.

2 Постановка задачи

Рассмотрим в координатах Якоби систему взаимогравитирующих трех тел T_0, T_1 и T_2 с переменными массами $m_0 = m_0(t)$, $m_1 = m_1(t)$, $m_2 = m_2(t)$, изменяющимися изотропно в различных темпах

$$\frac{\dot m_0}{m_0} \neq \frac{\dot m_1}{m_1}, \quad \frac{\dot m_0}{m_0} \neq \frac{\dot m_2}{m_2}, \quad \frac{\dot m_1}{m_1} \neq \frac{\dot m_2}{m_2}. \tag{1}$$

Исследуем уравнения возмущенного движения в аналогах второй системы элементов Пуанкаре Λ_i, λ_i, ξ_i, η_i, p_i, q_i, которые определяются следующими формулами [7]

$$\begin{aligned} &\Lambda_i = \tilde\beta_i \sqrt{a_i}, && \lambda_i = n_i[\phi_i(t) - \phi_i(\tau)] + \pi_i = l_i + \Omega_i + \omega_i,\\ &\xi_i = \sqrt{2\Lambda_i(1-\sqrt{1-e_i^2})}\cos\pi_i, && \eta_i = -\sqrt{2\Lambda_i(1-\sqrt{1-e_i^2})}\sin\pi_i,\\ &p_i = \sqrt{2\Lambda_i\sqrt{1-e_i^2}(1-\cos i_i)}\cos\Omega_i, && q_i = -\sqrt{2\Lambda_i\sqrt{1-e_i^2}(1-\cos i_i)}\sin\Omega_i, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\tilde\beta_1^2 = f\cdot\mu_1(t_0)m_1(t_0)m_0(t_0), \quad \tilde\beta_2^2 = f\cdot\mu_2(t_0)m_2(t_0)[m_0(t_0)+m_1(t_0)], \quad n_i = \tilde\beta_i/\mu_{i0}a_i^{3/2},$$

$$\mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0+m_1} \neq const, \quad \mu_2(t) = \frac{m_2(m_1+m_0)}{m_0+m_1+m_2} \neq const, \quad \mu_{i0} = \mu_i(t_0),$$

где $\phi_i(t)$ первообразные функции $\gamma_i^{-2}(t)$, причем

$$\gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0)+m_1(t_0)}{m_0(t)+m_1(t)}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{m_0(t_0)+m_1(t_0)+m_2(t_0)}{m_0(t)+m_1(t)+m_2(t)}.$$

Величины

$$a_i,\ e_i,\ \omega_i,\ \Omega_i,\ \ i_i,\ \phi_i(\tau_i) \tag{3}$$

элементы орбиты – аналоги соответствующих кеплеровских элементов, f – гравитационная постоянная.

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot\Lambda_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial\lambda_i}, && \dot\xi_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial\eta_i}, && \dot p_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i},\\ &\dot\lambda_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial\Lambda_i}, && \dot\eta_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial\xi_i}, && \dot q_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим нерезонансный случай и осредняя возмущающие функции по λ_i, получим уравнения вековых возмущений

$$\begin{aligned} &\dot\Lambda_i = 0, && \dot\xi_i = \frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial\eta_i}, && \dot p_i = \frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial q_i},\\ &\dot\lambda_i = -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial\Lambda_i}, && \dot\eta_i = -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial\xi_i}, && \dot q_i = -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $R^*_{1\textit{век}}$, $R^*_{2\textit{век}}$ соответствующие вековые части следующих выражений

$$\begin{aligned}
R_1^* &= \frac{1}{\gamma_1^2(t)}\cdot\frac{\tilde\beta_1^4}{2\mu_{10}L_1^2}+\frac{1}{\psi_1}\left[-\frac{b_1r_1^2}{2}+f\left(\frac{m_0m_2}{r_{02}}+\frac{m_1m_2}{r_{12}}-\frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right)\right],\\
R_2^* &= \frac{1}{\gamma_2^2(t)}\cdot\frac{\tilde\beta_2^4}{2\mu_{20}L_2^2}+\frac{1}{\psi_2}\left[-\frac{b_2r_2^2}{2}+f\left(\frac{m_0m_2}{r_{02}}+\frac{m_1m_2}{r_{12}}-\frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right)\right]-\\
&\qquad -\frac{\mu_2}{\psi_2}\left[2\dot\nu_1(\dot x_1x_2+\dot y_1y_2+\dot z_1z_2)+\ddot\nu_1(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\right],
\end{aligned}\tag{5}$$

где

$$\psi_i=\psi_i(t)=\mu_i(t)/\mu_i(t_0),\quad b_1=b_1(t)=\mu_1(t)\ddot\gamma_1(t)/\gamma_1(t),\quad b_2=b_2(t)=\mu_2(t)\ddot\gamma_2(t)/\gamma_2(t),$$
$$\nu_1=\nu_1(t)=\frac{m_1}{m_0+m_1}\neq const,\quad \nu_0=\nu_0(t)=\frac{m_0}{m_0+m_1}\neq const.$$

Решение уравнений вековых возмущений (4) в аналитическом виде является основной целью настоящей работы.

3 Разложение возмущающей функции

Для вычисления вековых частей возмущающих функций необходимо вычислить вековые части следующих величин

$$F_{\textit{век}}=f\left[\frac{m_0m_2}{r_{02}}+\frac{m_1m_2}{r_{12}}-\frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right]_{\textit{век}},\quad F_{\rho\textit{век}}=-\left[\frac{b_1r_1^2}{2\psi_1}+\frac{b_2r_2^2}{2\psi_2}\right]_{\textit{век}},$$
$$V_{\textit{век}}=\frac{\mu_2}{\psi_2}\left[2\dot\nu_1(\dot x_1x_2+\dot y_1y_2+\dot z_1z_2)+\ddot\nu_1(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\right]_{\textit{век}}.$$

Предположим, что элементы e_i, i_i достаточно малые. Тогда, можно разложить возмущающую функцию в ряд по малым параметрам e_i, i_i и учитывать только члены второго порядка включительно. В отличие от двухпланетной задачи трех тел массы $m_1(t)$, $m_2(t)$ не предполагаются малыми.
В аналогах второй системы элементов Пуанкаре вековые выражения для $R_{1\textit{век}}$, $R_{2\textit{век}}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
R^*_{1\textit{век}}&=\frac{1}{\gamma_1^2(t)}\cdot\frac{\tilde\beta_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2}+F_{01}+F_{12\textit{век}1}+F_{1\textit{век}}+F_{\rho1\textit{век}},\\
R^*_{2\textit{век}}&=\frac{1}{\gamma_2^2(t)}\cdot\frac{\tilde\beta_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2}+F_{02}+F_{12\textit{век}2}+F_{2\textit{век}}+F_{\rho2\textit{век}}+V_{\textit{век}},
\end{aligned}\tag{6}$$

$$F_{01}=-\frac{b_1}{2\psi_1}\gamma_1^2a_1^2+f\frac{m_1m_2A_0}{2\psi_1}-\frac{f}{\psi_1}\left(\frac{m_1m_2}{a_2\gamma_2}+\frac{a_1^2\gamma_1^2m_0m_2\nu_1^2}{2a_2^3\gamma_2^3}\right),$$
$$F_{02}=-\frac{b_2}{2\psi_2}\gamma_2^2a_2^2+f\frac{m_1m_2A_0}{2\psi_2}-\frac{f}{\psi_2}\left(\frac{m_1m_2}{a_2\gamma_2}+\frac{a_1^2\gamma_1^2m_0m_2\nu_1^2}{2a_2^3\gamma_2^3}\right),$$
$$F_{12\textit{век}1}=\frac{f}{\psi_1}\left[\frac{m_1m_2}{r_{12}}\right]_{\textit{век}},\quad F_{12\textit{век}2}=\frac{f}{\psi_2}\left[\frac{m_1m_2}{r_{12}}\right]_{\textit{век}},$$
$$F_{1\textit{век}}=-f\frac{3a_1^2\gamma_1^2m_0m_2\nu_1^2}{4a_2^3\gamma_2^3\Lambda_1}(\xi_1^2+\eta_1^2),\quad F_{\rho1\textit{век}}=-\frac{3b_1\gamma_1^2a_1^2}{4\Lambda_1\psi_1}(\xi_1^2+\eta_1^2),$$
$$F_{2\textit{век}}=-f\frac{3a_1^2\gamma_1^2m_0m_2\nu_1^2}{4a_2^3\gamma_2^3\Lambda_2}(\xi_2^2+\eta_2^2),\quad F_{\rho2\textit{век}}=-\frac{3b_2\gamma_2^2a_2^2}{4\Lambda_2\psi_2}(\xi_2^2+\eta_2^2),$$
$$V_{\textit{век}}=-\frac{9a_1a_2\mu_2\gamma_2(2\dot\gamma_1\dot\nu_1+\gamma_1\ddot\nu_1)}{14\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\Lambda_2}\psi_2}(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2).$$

Вычисление m_1m_2/r_{12} требует много времени и большой работы. Формулы (6) получены с помощью системы аналитических вычислений *Mathematica* [12]. Полученное полное неосредненное выражение m_1m_2/r_{12} очень громоздкое и труднообозримое, его запишем в следующем компактном виде

$$F_{12}=\sum_{i=1}^{680}\Pi_i^*(t)P_i(\epsilon_k)+\sum_{j=1}^{4}\tilde\Pi_j(\Lambda_1,\Lambda_2,t),\tag{7}$$

где $\epsilon_k=\epsilon_k(\lambda_1,\,\Lambda_1,\,\xi_1,\,\eta_1,\,p_1,\,q_1,\,\lambda_2,\,\Lambda_2,\,\xi_2,\,\eta_2,\,p_2,\,q_2)$. Осредняя выражение (7) по быстрым переменным λ_1, λ_2, получим $[m_1m_2/r_{12}]_{\textit{век}}$. Анализ формул (6) показывает, что уравнения вековых возмущений расщепляются на две системы относительно элементов ξ_i, η_i и p_i, q_i. Поэтому удобно обозначить

$$R^*_{1\textit{век}}=\frac{1}{\gamma_1^2(t)}\cdot\frac{\tilde\beta_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2}+F^*_{1\textit{век}},\quad R^*_{2\textit{век}}=\frac{1}{\gamma_2^2(t)}\cdot\frac{\tilde\beta_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2}+F^*_{2\textit{век}}$$
$$F^*_{1\textit{век}}=F^*_{1\textit{век}}(\xi_i,\eta_i,t)+F^*_{1\textit{век}}(p_i,q_i,t),\quad F^*_{2\textit{век}}=F^*_{2\textit{век}}(\xi_i,\eta_i,t)+F^*_{2\textit{век}}(p_i,q_i,t).$$

4 Решение уравнений вековых возмущений для элементов ξ_i, η_i

Рассмотрим отдельно уравнения вековых возмущений для (ξ_i, η_i)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial F^*_{1\text{век}}}{\partial \eta_1}, \qquad \dot{\eta}_1 = -\frac{\partial F^*_{1\text{век}}}{\partial \xi_1}, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial F^*_{2\text{век}}}{\partial \eta_2}, \qquad \dot{\eta}_2 = -\frac{\partial F^*_{2\text{век}}}{\partial \xi_2}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$F^*_{1\text{век}}(\xi_i, \eta_i, t) = K_0 + K_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + K_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + K_3(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2), \tag{9}$$

$$F^*_{2\text{век}}(\xi_i, \eta_i, t) = K'_0 + K'_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + K'_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + K'_3(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2), \tag{10}$$

$$K_0 = -\frac{b_1}{2\psi_1}\gamma_1^2 a_1^2 + f\frac{m_1 m_2 A_0}{2\psi_1} - \frac{f}{\psi_1}\left(\frac{m_1 m_2}{a_2\gamma_2} + \frac{a_1^2\gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{2a_2^3\gamma_2^3}\right),$$

$$K_1 = \frac{1}{\psi_1}\left\{-\frac{3b_1\gamma_1^2 a_1^2}{4\Lambda_1} - f\frac{3a_1^2\gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3\gamma_2^3} + f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1^2 a_2^2\gamma_1^2\gamma_2^2\Lambda_1\Lambda_2}\Big(6\nu_0^3 a_1^4 C_0 \gamma_1^4 \Lambda_2 - \right.$$
$$\left. -6\nu_0 a_1^3 a_2 \gamma_1^3 \gamma_2 \Lambda_2 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0 \Lambda_2 (3C_2 - 5C_0) - 4B_1\Lambda_2\Big)\right\},$$

$$K_2 = \frac{f}{\psi_1}\left\{-\frac{3a_1^2\gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3\gamma_2^3} + \frac{m_1 m_2}{16a_1^2 a_2^2\gamma_1^2\gamma_2^2\Lambda_1\Lambda_2}\Big(6a_2^4 C_0 \gamma_2^4 \Lambda_1 - \right.$$
$$\left. -6a_1 a_2^3 \gamma_1 \gamma_2^3 \Lambda_1 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0^2 \Lambda_1 (3C_2 - 5C_0) - 4\nu_0 B_1 \Lambda_1\Big)\right\},$$

$$K_3 = -f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\psi_1}\Big\{6\nu_0^2 a_1^2 \gamma_1^2 (3C_0 - C_2) + $$
$$+6a_2^2\gamma_2^2(3C_0 - C_2) - a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (18B_0 + 2B_2 + 3\nu_0(7C_1 + C_3))\Big\},$$

$$K'_0 = -\frac{b_2}{2\psi_2}\gamma_2^2 a_2^2 + f\frac{m_1 m_2 A_0}{2\psi_2} - \frac{f}{\psi_2}\left(\frac{m_1 m_2}{a_2\gamma_2} + \frac{a_1^2\gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{2a_2^3\gamma_2^3}\right),$$

$$K'_1 = \frac{1}{\psi_2}\left\{-f\frac{3a_1^2\gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3\gamma_2^3} + f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1^2 a_2^2\gamma_1^2\gamma_2^2\Lambda_1\Lambda_2}\Big(6\nu_0^3 a_1^4 C_0 \gamma_1^4 \Lambda_2 - \right.$$
$$\left. -\ 6\nu_0 a_1^3 a_2 \gamma_1^3 \gamma_2 \Lambda_2 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0 \Lambda_2 (3C_2 - 5C_0) - 4B_1\Lambda_2\Big)\right\},$$

$$K'_2 = \frac{1}{\psi_2}\left\{-\frac{3b_2\gamma_2^2 a_2^2}{4\Lambda_2} - f\frac{3a_1^2\gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3\gamma_2^3} + f\frac{m_1 m_2}{16a_1^2 a_2^2\gamma_1^2\gamma_2^2\Lambda_1\Lambda_2}\Big(6a_2^4 C_0 \gamma_2^4 \Lambda_1 - \right.$$
$$\left. -6a_1 a_2^3 \gamma_1 \gamma_2^3 \Lambda_1 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0^2 \Lambda_1 (3C_2 - 5C_0) - 4\nu_0 B_1 \Lambda_1\Big)\right\},$$

$$K'_3 = -\frac{1}{\psi_2}\left\{f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\Big(6\nu^2 a_1^2 \gamma_1^2 (3C_0 - C_2) + 6a_2^2\gamma_2^2(3C_0 - C_2) - \right.$$
$$\left. -a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (18B_0 + 2B_2 + 3\nu_0(7C_1 + C_3))\Big) + \frac{9a_1 a_2 \mu_2 \gamma_2 (2\dot{\gamma}_1 \dot{\nu}_1 + \gamma_1 \ddot{\nu}_1)}{14\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\Lambda_2}}\right\},$$

где

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3$$

– коэффициенты Лапласа [10].

Аналитическое решения уравнений (8) можно получить методом Пикара. В первом приближении запишем

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(t) = \xi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \eta_i}\right)_0 dt, \\ \eta_i &= \eta_i(t) = \eta_i(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_i}\right)_0 dt, \end{aligned} \tag{11}$$

где индекс ноль в выражениях $(\partial F_i/\partial \xi_i)_0$, $(\partial F_i/\partial \eta_i)_0$ заключенных в скобки означает, что оскулирующие элементы в них заменены начальными значениями.

5 Решение уравнений вековых возмущений для элементов p_i, q_i

Теперь рассмотрим отдельно уравнения вековых возмущений для (p_i, q_i)

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{\partial F^*_{1\text{век}}}{\partial q_1}, \qquad \dot{q}_1 = -\frac{\partial F^*_{1\text{век}}}{\partial p_1}, \\ \dot{p}_2 &= \frac{\partial F^*_{2\text{век}}}{\partial q_2}, \qquad \dot{q}_2 = -\frac{\partial F^*_{2\text{век}}}{\partial p_2}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$F^*_{1\text{век}}(p_i,q_i,t)=\psi_1^*(t)F(p_i,q_i),\quad F^*_{2\text{век}}(p_i,q_i,t)=\psi_2^*(t)F(p_i,q_i),$$

$$\psi_1^*(t)=-\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_1},\quad \psi_2^*(t)=-\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_2}, \tag{13}$$

$$F(p_i,q_i)=K_1^*(p_1^2+q_1^2)+K_2^*(p_2^2+q_2^2)+K_3^*(p_1p_2+q_1q_2), \tag{14}$$

$$K_1^*=\frac{1}{\Lambda_1},\quad K_2^*=\frac{1}{\Lambda_2},\quad K_3^*=-\frac{2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}.$$

Введем новые переменные

$$p_1=\gamma_{11}^*z_1^*+\gamma_{12}^*z_2^*,\quad q_1=\gamma_{11}^*y_1^*+\gamma_{12}^*y_2^*,$$

$$p_2=\gamma_{21}^*z_1^*+\gamma_{22}^*z_2^*,\quad q_2=\gamma_{21}^*y_1^*+\gamma_{22}^*y_2^*,$$

используя ортогональные преобразования

$$\begin{gathered}\gamma_{12}^*\gamma_{11}^*+\gamma_{22}^*\gamma_{21}^*=0,\quad (\gamma_{11}^*)^2+(\gamma_{21}^*)^2=1,\quad (\gamma_{12}^*)^2+(\gamma_{22}^*)^2=1,\\ 2K_1^*\gamma_{11}^*\gamma_{12}^*+2K_2^*\gamma_{21}^*\gamma_{22}^*+K_3^*(\gamma_{11}^*\gamma_{22}^*+\gamma_{12}^*\gamma_{21}^*)=0.\end{gathered} \tag{15}$$

Откуда следует

$$\gamma_{11}^*=\frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_1+\Lambda_2}}=const,\quad \gamma_{21}^*=\frac{\sqrt{\Lambda_2}}{\sqrt{\Lambda_1+\Lambda_2}}=const,$$

$$\gamma_{12}^*=-\frac{\sqrt{\Lambda_2}}{\sqrt{\Lambda_1+\Lambda_2}}=const,\quad \gamma_{22}^*=\frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_1+\Lambda_2}}=const.$$

Тогда квадратичная форма (14) приводится к виду

$$F(p_i,q_i)=F^*(z_i^*,y_i^*)=E_1^*\left[(z_1^*)^2+(y_1^*)^2\right]+E_2^*\left[(z_2^*)^2+(y_2^*)\right],$$

где

$$E_1^*=K_1^*(\gamma_{11}^*)^2+K_2^*(\gamma_{21}^*)^2+K_3^*\gamma_{11}^*\gamma_{21}^*=0,$$

$$E_2^*=K_1^*(\gamma_{12}^*)^2+K_2^*(\gamma_{22}^*)^2+K_3^*\gamma_{12}^*\gamma_{22}^*=\frac{\Lambda_1+\Lambda_2}{\Lambda_1\Lambda_2}=const\neq 0.$$

Дифференциальные уравнения вековых возмущений (12) в новых переменных сохраняют свой канонический вид

$$\frac{dz_1^*}{dt}=\frac{\partial F^*_{1\text{век}}}{\partial y_1^*}=0,\qquad \frac{dy_1^*}{dt}=-\frac{\partial F^*_{1\text{век}}}{\partial z_1^*}=0,$$

$$\frac{dz_2^*}{dt}=\frac{\partial F^*_{2\text{век}}}{\partial y_2^*}=-\psi_2^*(t)E_2^*2y_2^*,\quad \frac{dy_2^*}{dt}=-\frac{\partial F^*_{2\text{век}}}{\partial z_2^*}=-\left[-\psi_2^*(t)E_2^*2z_2^*\right].$$

Решения последней системы дифференциальных уравнений напишем в виде

$$z_1^*=z_{10}^*=M_1^*\cos\beta_1^*=const,\quad y_1^*=y_{10}^*=M_1^*\sin\beta_1^*=const,$$

$$z_2^*=M_2^*\cos\left(\sigma_2\int\psi_2^*(t)dt+\beta_2^*\right),\quad y_2^*=M_2^*\sin\left(\sigma_2\int\psi_2^*(t)dt+\beta_2^*\right),$$

где M_1^*, M_2^*, β_1^*, β_2^*, – постоянные интегрирования, $\sigma_2=2E_2^*=2(\Lambda_1+\Lambda_2)/\Lambda_1\Lambda_2$.
Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений вековых возмущений (12) имеет вид

$$\begin{gathered}p_1=\gamma_{11}^*M_1^*\cos\beta_1^*+\gamma_{12}^*M_2^*\cos\left(\sigma_2\int\psi_2^*(t)dt+\beta_2^*\right),\\ q_1=\gamma_{11}^*M_1^*\sin\beta_1^*+\gamma_{12}^*M_2^*\sin\left(\sigma_2\int\psi_2^*(t)dt+\beta_2^*\right),\\ \\ p_2=\gamma_{21}^*M_1^*\cos\beta_1^*+\gamma_{22}^*M_2^*\cos\left(\sigma_2\int\psi_2^*(t)dt+\beta_2^*\right),\\ q_2=\gamma_{21}^*M_1^*\sin\beta_1^*+\gamma_{22}^*M_2^*\sin\left(\sigma_2\int\psi_2^*(t)dt+\beta_2^*\right).\end{gathered} \tag{16}$$

Формулы определяющие орбитальные элементы, с точностью до второй степени включительно малых величин e_i, i_i – как исходные допущения, имеют вид

$$\begin{gathered}\xi_i=\sqrt{\Lambda_i}e_i\cos\pi_i,\quad \eta_i=-\sqrt{\Lambda_i}e_i\sin\pi_i,\quad \Lambda_ie_i^2=\xi_i^2+\eta_i^2,\quad \mathrm{tg}\,\pi_i=-\eta_i/\xi_i,\\ p_i=\sqrt{\Lambda_i}\sin i_i\cos\Omega_i,\quad q_i=-\sqrt{\Lambda_i}\sin i_i\sin\Omega_i,\quad \Lambda_i\sin^2 i_i=p_i^2+q_i^2,\quad tg\Omega_i=-q_i/p_i.\end{gathered} \tag{17}$$

Аналитические соотношения (17), (16) и (11) полностью описывают изменение со временем орбитальных элементов $e_i(t)$, $\pi_i(t)$, $i_i(t)$, $\Omega_i(t)$ при произвольных законах изменений масс (1). Они дают возможность полностью анализировать динамическую эволюцию рассматриваемой задачи трех тел с переменными массами. В частности, из них следует

$$\Lambda_1\sin^2 i_1+\Lambda_2\sin^2 i_2=(M_1^*)^2+(M_2^*)^2=const. \tag{18}$$

Это является аналогом теоремы Лапласа об устойчивости системы в нашей задаче. В классической двухпланетной задаче трех тел (с постоянными массами) теорема Лапласа об устойчивости системы широко известна [10].

6 Заключение

С помощью системы аналитических вычислений *Mathematica*, вычислено полное выражение возмущающей функции в задаче трех тел с массами изменяющимися изотропно в различных темпах, в котором только выражение $m_1 m_2 / r_{12}$ состоит из 684 слагаемых. На основе полученной возмущающей функции, впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи – канонические неавтономные уравнения вековых возмущений и аналитическое решение этих уравнений. Получены в символьном виде вековые возмущения задачи трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах. Подробный анализ полученных решений будет рассмотрен в отдельной работе. Результаты настоящей работы можно эффективно использовать в анализе динамической эволюции нестационарных тройных гравитирующих иерархических систем, в первую очередь, в двухпланетной (двухпротопланетной) задаче трех тел с переменными массами.

Список литературы

[1] Резонансные вращения небесных тел./ Белецкий В.В., Хентов А.А. Нижний Новгород: НИРФИ, 1985 - 430 с.

[2] Крупномасштабный хаос и маргинальная устойчивость в Солнечной системе. В кн.: Резонансы в небесной механике. / Ласкар Ж. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006 - 247-305 с.

[3] Четыре конечных положения оси вращения Венеры. В кн.: Резонансы в небесной механике. / Коррейя А., Ласкар Ж. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006 - 305-316 с.

[4] Динамика гравитирующих систем Метагалактики. / Омаров Т. Б. Алматы: Наука, 1975 - 143 с.

[5] Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. / Omarov T. B. (Editor). New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002 - 248 c.

[6] The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems. Bekov A. A., Omarov T. B. // Astron. and Astrophys. Transactions. 2003. - № 22 с. 145.

[7] Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. / Минглибаев М.Дж. Германия: Lambert Academic Publishing, 2012 - 229 с.

[8] Evolutionary processes in binary and multiple stars. / Eggleton P. UK: Cambridge University Press, 2006 - 332 p.

[9] Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс. Лукьянов Л. Г. // Астрон. ж. 2008. - № 8 с.755-768.

[10] Небесная механика. / Шарлье К. Москва, 1966 - 628 с.

[11] Secular perturbations in the three-body problem with variable masses. Minglibayev M., Mayemerova G. // The Sixth International Workshop. Computer algebra systems in teaching and research, Poland, Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia. 2011. - pp. 198-204.

[12] Решение физических задач с использованием системы MATHEMATICA. / Прокопеня А.Н. Брест: Издательство БГТУ, 2005 - 260 с.