

УДК 521.1

Г.М. МАЕМЕРОВА, М.ДЖ. МИНГЛИБАЕВ

КазНУ им. аль-Фараби

050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: mayemerova@gmail.com

Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова

050020, Алматы, Обсерватория, 23, e-mail: minglibayev@mail.ru

О НАРУШЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ МАССАМИ

В проблеме трех тел с переменными массами получены новые уравнения в оскулирующих элементах – аналогах второй системы элементов Пуанкаре. Возмущающая функция в модифицированных оскулирующих переменных вычислена с помощью системы аналитических вычислений Mathematica. На основе выведенной возмущающей функции впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи – канонические неавтономные уравнения вековых возмущений. Путем численного анализа уравнений вековых возмущений установлено, что из-за изменения масс в различных темпах неизменность плоскости Лапласа нарушается, восходящий узел "тела с массой" μ_1 не совпадает с нисходящим узлом "тела с массой" μ_2 .

Ключевые слова: *задача трех тел, переменные массы, вековые возмущения, плоскость Лапласа, система аналитических вычислений Mathematica.*

1 ВВЕДЕНИЕ

В реальных протопланетных и планетных гравитирующих системах на сегодняшний день основными диссипативными факторами считаются

© Г.М. Маемерова, М.Дж. Минглибаев, 2013.

Keywords: *three-body problem, variable masses, secular perturbations, Laplace plane, the system of analytical calculations Mathematica*

2010 Mathematics Subject Classification: 70F07

приливная эволюция, трения ядро – мантия и трение атмосфера – небесное тело. Например, экзотическое поступательно-вращательное движение планеты Венера пытаются объяснить этими факторами [1-3]. Однако, на определенных этапах эволюции гравитирующих систем диссипация и обмен масс могут быть ведущими факторами динамической эволюции [4-9] и исследование эволюционных эффектов переменности масс – интересная задача.

Простейшая модель реальных небесных тел – это сферическое тело, гравитационная сила которого на внешней области моделируется гравитационной силой материальной точки, находящейся в центре этой сферы с соответствующей массой. Рассмотрим три сферических тела с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах, взаимогравитирующие по закону Ньютона, что приводит к задаче трех точек с переменными массами. В этой проблеме эффекты диссипации масс не исследованы, по-видимому, из-за сложности задачи и отсутствия математических разработок. В такой постановке отсутствуют десять классических первых интегралов [7], т.е. интеграл энергии, шесть интегралов движения центра масс и три интеграла сохранения момента количества движения. В нашем случае из-за изменения массы в различных темпах происходит диссипация энергии системы в целом. Так как законы изменения масс известны и заданы, то дифференциальные уравнения системы замкнутые и не появляются дополнительные степени свободы. Однако, в связи с диссипацией количества движения, момента количества движения и энергии не сохраняются классические интегралы.

В настоящей работе, используя наши разработки [7], модифицируя классическую схему [10], получено новое разложение в ряд возмущающей функции в задаче трех тел с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах, в принципе. Возмущающая функция выражена через аналоги второй системы элементов Пуанкаре, с точностью до второй степени включительно малых величин e_i , i_i . Эта громоздкая и трудоемкая задача алгебры, конкретное выполнение которой возможно только с использованием компьютерной системы символьных вычислений.

С помощью системы аналитического вычисления *Mathematica* фактически нами получено полное выражение возмущающей функции, которое состоит из 537 слагаемых. На основе полученной возмущающей функции

впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи – канонические неавтономные уравнения вековых возмущений. Путем численного анализа уравнений вековых возмущений установлено, что из-за изменения масс в различных темпах неизменность плоскости Лапласа нарушается, линии узлов "тела с массой" μ_1 не совпадают с линией узлов "тела с массой" μ_2 .

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1 ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим движение трех тел T_0 , T_1 , и T_2 , взаимогравитирующих по закону Ньютона в системе координат Якоби в случае, когда

- 1) массы тел изменяются изотропно, т.е. не возникают дополнительные реактивные силы, законы изменения масс известны и заданы;
- 2) массы m_0 , m_1 первых двух тел изменяются в одинаковом темпе, а темп изменения массы m_2 третьего тела отличается от них:

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad \frac{\dot{m}_0}{m_0} = \frac{\dot{m}_1}{m_1}, \quad \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}; \quad (1)$$

- 3) численные значения масс тел в ходе эволюции остаются сравнимыми между собой;
- 4) элементы орбит e_i , i_i достаточно малые ($i = 1, 2$).

Исследуется динамическая эволюция такой гравитирующей системы с переменными массами.

2.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При условиях 1-4 в п. 2.1 уравнения движения тел в системе координат Якоби (рис. 1) имеют классический вид [5-6]:

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} U, \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} U,$$

однако, здесь $\mu_1 = \mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}$, $\mu_2 = \mu_2(t) = \frac{m_2(m_1 + m_0)}{m_0 + m_1 + m_2} \neq \text{const}$. Знак " $\cdot$ " обозначает первую производную по вре-

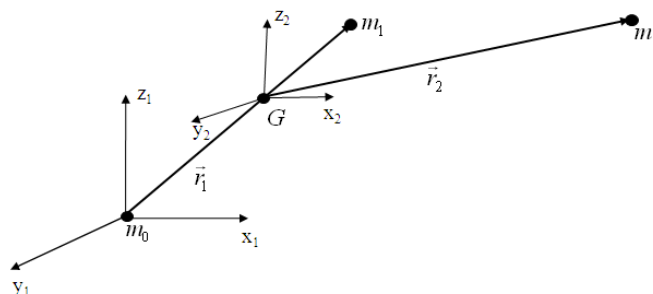


Рисунок 1 – Система координат Якоби.

мени. Другие обозначения также общепринятые [5]:

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right),$$

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$r_{01}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2,$$

$$r_{02}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2,$$

$$\nu_1 = \nu_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} = \text{const}, \quad \nu_0 = \nu_0(t) = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}.$$

Исследуем задачу Коши в такой постановке, используя теорию возмущений на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5].

3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ТРУДНОСТИ

3.1 ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для исследования задачи используем методы канонической теории возмущений. При этом используются индивидуально подобранные исходные нестационарные движения [7]. Они описывают соответствующие апериодические движения по квазиконическому сечению. Эти невозмущенные движения описываются незамкнутыми кривыми второго порядка, что соответствует природе нестационарных задач гравитирующих систем. Проблема заключается в выражении возмущающей функции через орбитальные

элементы. Из-за этого приходится иметь дело, в общем случае, с шестимерными бесконечными рядами. Эта трудность в настоящей работе преодолевается при помощи системы аналитических вычислений *Mathematica* с точностью до второй степени малых величин e_i, i_i . Возмущающая функция вычисляется на компьютере в аналитическом символьном виде.

3.2 УРАВНЕНИЯ ВЕКОВОГО ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В АНАЛОГАХ ВТОРОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ ПУАНКАРЕ

Как и в классическом случае, в нашей задаче предпочтительны аналоги второй системы элементов Пуанкаре [7], [10], которые могут применяться только для описания движений квазиэллиптического типа

$$\Lambda_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad p_i, \quad q_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

представленные посредством формул

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \beta_i^* \sqrt{a_i}, & \lambda_i &= n_i [\phi(t) - \phi(\tau)] + \pi_i = l_i + \Omega_i + \omega_i, \\ \xi_i &= \sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \cos \pi_i, & \eta_i &= -\sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \sin \pi_i, \\ p_i &= \sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - e_i^2) (1 - \cos i_i)} \cos \Omega_i, & q_i &= -\sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - e_i^2) (1 - \cos i_i)} \sin \Omega_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где Ω_i – долгота восходящего узла, ω_i – аргумент перигентра, i_i – наклонение, $\phi_i(\tau_i)$ – первообразные функции $\gamma_i^{-2}(t)$, $n_i = \beta_i^* / \mu_{i0} a_i^{3/2}$ – аналоги кеплеровского среднего движения, a_i – аналоги большой полуоси, e_i – аналоги эксцентриситетов,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1^* &= \sqrt{f \cdot \mu_1(t_0) m_1(t_0) m_0(t_0)}, \quad \tilde{\beta}_2^* = \sqrt{f \cdot \mu_2(t_0) m_2(t_0) [m_0(t_0) + m_1(t_0)]}, \\ \gamma_1 &= \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(t_0) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_1(t) + m_2(t)}, \\ \mu_1 &= \mu_1(t) = \frac{m_0(t) m_1(t)}{m_0(t) + m_1(t)}, \quad \mu_{10} = \mu_1(t_0) = \frac{m_0(t_0) m_1(t_0)}{m_0(t_0) + m_1(t_0)}, \\ \mu_2 &= \mu_2(t) = \frac{m_2(t) [m_0(t) + m_1(t)]}{m_0(t) + m_1(t) + m_2(t)}, \quad \mu_{20} = \mu_2(t_0) = \frac{m_2(t_0) [m_0(t_0) + m_1(t_0)]}{m_0(t_0) + m_1(t_0) + m_2(t_0)}, \end{aligned}$$

f – гравитационная постоянная. Соответственно в нерезонансном случае вековые возмущения определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}_i &= 0, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial p_i},\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$R_{1\text{век}} = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{(\beta_1^*)^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + \frac{1}{\psi_1} \left[-\frac{b_1}{2} \frac{\gamma_1^2 \Lambda_1^4}{(\beta_1^*)^4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{\Lambda_1} \right) + f F_{\text{век}} \right], \quad (5)$$

$$R_{2\text{век}} = \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{(\beta_2^*)^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + \frac{1}{\psi_2} \left[-\frac{b_2}{2} \frac{\gamma_2^2 \Lambda_2^4}{(\beta_2^*)^4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{\Lambda_2} \right) + f F_{\text{век}} \right], \quad (6)$$

$$\psi_i = \psi_i(t) = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)}, \quad b_i = b_i(t) = \mu_i \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i}, \quad i = 1, 2.$$

4 РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Главная проблема заключается в разложении величины

$$F_{\text{век}} = \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}} \quad (7)$$

в выражениях (5)–(6). Это громоздкая и трудоемкая задача алгебры. Используем систему аналитических вычислений *Mathematica* [12]. Нами выведено аналитическое выражение формул (5)–(6) через элементы (2) в виде ряда. Схема разложения имеет классическую структуру [10]. Элементы ξ_1, η_1 имеют величину порядка оскулирующего эксцентриситета (для малых эксцентриситетов), а переменные ξ_2, η_2 – величину порядка наклона оскулирующей орбиты (для малых наклонов), поэтому вторая система элементов Пуанкаре удобна для получения явного разложения возмущающей функции в задачах астрономии. Выражение возмущающей функции (7) через канонические переменные (2), с точностью до второй степени включительно относительно малых величин e_i, i_i , имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^{534} \Pi_i^*(t) P_i(\varepsilon_k) + \sum_{j=1}^3 \Pi_j^{**}(\Lambda_1, \Lambda_2, t), \quad (8)$$

где $P_i(\partial_k) = P_i(\xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \xi_2, \eta_2, p_2, q_2)$. В частности, когда массы постоянные, полученные соотношения (8) совпадают с известными классическими формулами [10].

5 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В уравнениях (2) переходим к безразмерным величинам:

$$\frac{\Lambda_i}{\Lambda_{0i}} = \tilde{\Lambda}_i, \quad \frac{\xi_i}{\xi_{0i}} = \tilde{\xi}_i, \quad \frac{\eta_i}{\eta_{0i}} = \tilde{\eta}_i, \quad \frac{p_i}{p_{0i}} = \tilde{p}_i, \quad \frac{q_i}{q_{0i}} = \tilde{q}_i, \quad (9)$$

$$\frac{t}{T_0} = \tau, \quad \frac{m_i}{P_0} = \tilde{m}_i, \quad \frac{a_i}{S_0} = \tilde{a}_i, \quad T_{01} = 2\pi \frac{\mu_{10} a_{01}^{3/2}}{\beta_1^*}, \quad T_{02} = 2\pi \frac{\mu_{20} a_{02}^{3/2}}{\beta_2^*},$$

$$P_0 = \frac{\sum m_{i0}}{3} = const, \quad S_0 = \frac{\sum a_{0i}}{2} = const, \quad T_0 = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} = const. \quad (10)$$

Далее знак " ' " обозначает первую производную по времени в безразмерных величинах. Напишем уравнения движения в безразмерных переменных (9):

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_i &= 0, & \tilde{\xi}'_i &= \frac{T_{0i}}{\xi_{0i}\eta_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\partial\epsilon\kappa}}{\partial \tilde{\eta}_i}, & \tilde{p}'_i &= \frac{T_{0i}}{p_{0i}q_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\partial\epsilon\kappa}}{\partial \tilde{q}_i}, \\ \tilde{\lambda}'_i &= -\frac{T_{0i}}{\lambda_{0i}\Lambda_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\partial\epsilon\kappa}}{\partial \tilde{\Lambda}_i}, & \tilde{\eta}'_i &= -\frac{T_{0i}}{\xi_{0i}\eta_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\partial\epsilon\kappa}}{\partial \tilde{\xi}_i}, & \tilde{q}'_i &= -\frac{T_{0i}}{p_{0i}q_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\partial\epsilon\kappa}}{\partial \tilde{p}_i}, \end{aligned} \quad (11)$$

которые в раскрытом виде имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_1 &= 0, \quad \tilde{\Lambda}'_2 = 0, \\ \tilde{\lambda}'_1 &= -\frac{P_0 T_0 \tilde{\mu}_{10}}{64 \lambda_{01} \Lambda_{01}^3} \left\{ \frac{64 f^2 P_0^4 \tilde{m}_{00}^2 \tilde{m}_{10}^2}{\tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\Lambda}_1^3} - \frac{\Lambda_{01}}{S_0 \tilde{\mu}_1} \left[\frac{48 S_0^3 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_1 \tilde{a}_1^2 \tilde{\mu}_1 (\eta_{01}^2 \tilde{\eta}_1^2 + \xi_{01}^2 \tilde{\xi}_1^2)}{T_0^2 \tilde{\Lambda}_1^2} + \right. \right. \\ &+ f \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 P_0 \left(\frac{4 \tilde{B}_1 \tilde{k}_2 (p_{01}^2 \tilde{p}_1^2 + q_{01}^2 \tilde{q}_1^2)}{\tilde{\Lambda}_1^2} - \frac{4 \Lambda_{01}^{1/2} \tilde{B}_1 \tilde{k}_2 (p_{01} p_{02} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + q_{01} q_{02} \tilde{q}_1 \tilde{q}_2)}{\tilde{\Lambda}_1^{3/2} \sqrt{\Lambda_{02} \tilde{\Lambda}_2}} \right. \\ &\left. \left. \frac{2(12 \tilde{a}_1^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_1^2 - 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2 [-4 \tilde{B}_1 + 3 \tilde{k}_2 (10 \tilde{C}_0 - 3 \tilde{C}_2)]) (\eta_{01}^2 \tilde{\eta}_1^2 + \xi_{01}^2 \tilde{\xi}_1^2)}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1^2} \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\Lambda_{01}^{1/2} \tilde{k}_2 (6(\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^3 + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2^2) (\tilde{C}_2 - 6 \tilde{C}_0) + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 [2(\tilde{B}_2 + 18 \tilde{B}_0) \tilde{k}_1 + 3 \tilde{C}_1 \tilde{k}_2 (4 + 3 \tilde{k}_1)])}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 \tilde{\Lambda}_1^{3/2} \sqrt{\Lambda_{02} \tilde{\Lambda}_2}} \right] \right\} \times \\ &\times (\eta_{01} \eta_{02} \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 + \xi_{01} \xi_{02} \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2) \Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}'_2 = & \frac{P_0 T_0 \tilde{\mu}_{10}}{64 \lambda_{02} \Lambda_{02}^3} \left\{ \frac{64 f^2 P_0^4 (\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_1 0)^2 \tilde{m}_{20}^2}{\tilde{\gamma}_2^2 \tilde{\Lambda}_2^3} - \right. \\ & \left. \frac{\Lambda_{02}}{S_0 \tilde{\mu}_2} \left[\frac{48 S_0^3 \tilde{\gamma}_2 \ddot{\gamma}_2 \tilde{a}_2^2 \tilde{\mu}_2 (\eta_{02}^2 \tilde{\eta}_2^2 + \xi_{02}^2 \tilde{\xi}_2^2)}{T_0^2 \tilde{\Lambda}_2^2} - \right. \right. \\ & - f \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 P_0 \tilde{k}_2 \left(\frac{4 \tilde{B}_1 \tilde{k}_2 (p_{02}^2 \tilde{p}_2^2 + q_{02}^2 \tilde{q}_2^2)}{\tilde{\Lambda}_2^2} - \frac{4 \Lambda_{02}^{1/2} \tilde{B}_1 (p_{01} p_{02} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + q_{01} q_{02} \tilde{q}_1 \tilde{q}_2)}{\tilde{\Lambda}_2^{3/2} \sqrt{\Lambda_{01} \tilde{\Lambda}_1}} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2(12 \tilde{a}_1^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_1^2 - 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2 [-4 \tilde{B}_1 + 3 \tilde{k}_2 (10 \tilde{C}_0 - 3 \tilde{C}_2)])}{\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^4 \tilde{\Lambda}_2^2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\eta_{02}^2 \tilde{\eta}_2^2 + \xi_{02}^2 \tilde{\xi}_2^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\Lambda_{01}^{1/2} \tilde{k}_2 (6(\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^3 + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2^2)(\tilde{C}_2 - 6 \tilde{C}_0) + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 [2(\tilde{B}_2 + 18 \tilde{B}_0) \tilde{k}_1 + 3 \tilde{C}_1 \tilde{k}_2 (4 + 3 \tilde{k}_1)])}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1^2 \tilde{\Lambda}_2^{3/2} \sqrt{\Lambda_{01} \tilde{\Lambda}_1}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\eta_{01} \eta_{02} \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 + \xi_{01} \xi_{02} \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2) \right) \right] \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}'_1 &= \eta_{01} [\eta_{01} \Pi_1(\tau) \tilde{\eta}_1 + \eta_{02} \Pi_2(\tau) \tilde{\eta}_2], \quad \tilde{\eta}'_1 = -\xi_{01} [\xi_{01} \Pi_1(\tau) \tilde{\xi}_1 + \xi_{02} \Pi_2(\tau) \tilde{\xi}_2], \\ \tilde{\xi}'_2 &= \eta_{02} [\eta_{02} \Pi_3(\tau) \tilde{\eta}_2 + \eta_{01} \Pi_4(\tau) \tilde{\eta}_1], \quad \tilde{\eta}'_2 = -\xi_{02} [\xi_{02} \Pi_3(\tau) \tilde{\xi}_2 + \xi_{01} \Pi_4(\tau) \tilde{\xi}_1], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_1 &= q_{01} [q_{01} \Pi_5(\tau) \tilde{q}_1 + q_{02} \Pi_6(\tau) \tilde{q}_2], \quad \tilde{q}'_1 = -p_{01} [p_{01} \Pi_5(\tau) \tilde{p}_1 + p_{02} \Pi_6(\tau) \tilde{p}_2], \\ \tilde{p}'_2 &= q_{02} [q_{02} \Pi_7(\tau) \tilde{q}_2 + q_{01} \Pi_8(\tau) \tilde{q}_1], \quad \tilde{q}'_2 = -p_{02} [p_{02} \Pi_7(\tau) \tilde{p}_2 + p_{01} \Pi_8(\tau) \tilde{p}_1], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1(\tau) &= \left(\frac{[12 \tilde{a}_1^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_1^2 - 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2 (-4 \tilde{B}_1 + 3(10 \tilde{C}_0 - 3 \tilde{C}_2) \tilde{k}_2)] \tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mu}_1} - \right. \\ & \left. - \frac{24 S_0^3 \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_1''}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mu}_1} \right) \frac{f T_0 P_0^2 \tilde{\mu}_{10}}{16 \xi_{01} \eta_{01} S_0 \Lambda_{01}}, \\ \Pi_2(\tau) &= \frac{6(\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^3 + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2^2)(\tilde{C}_2 - 6 \tilde{C}_0) + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 [2(\tilde{B}_2 + 18 \tilde{B}_0) \tilde{k}_1 + 3 \tilde{C}_1 \tilde{k}_2 (4 + 3 \tilde{k}_1) \tilde{k}_2]}{32 \xi_{01} \eta_{01} S_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1^2 \sqrt{\Lambda_{01} \Lambda_{02} \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2} \tilde{\mu}_1} \times \\ & \times f T_0 P_0^2 \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \tilde{k}_2 \tilde{\mu}_{10}, \\ \Pi_3(\tau) &= \left(\frac{[-12 \tilde{a}_2^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_2^3 + 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1^2 \tilde{k}_2 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^4 (4 \tilde{B}_1 + 3(3 \tilde{C}_2 - 10 \tilde{C}_0) \tilde{k}_2)]}{\tilde{a}_1^2 \tilde{\Lambda}_2 \tilde{k}_1^4 \tilde{\mu}_2} \times \right. \\ & \left. \times \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \tilde{k}_2 + \frac{24 S_0^3 \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 \tilde{\mu}_2 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_2''}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mu}_1} \right) \frac{f T_0 P_0^2 \tilde{\mu}_{20}}{16 \xi_{02} \eta_{02} S_0 \Lambda_{02}}, \end{aligned}$$

$$\Pi_4(\tau) = \frac{fT_0P_0^2\{6(\tilde{a}_1^2\tilde{k}_1^3+\tilde{a}_2^2\tilde{k}_2^3)(\tilde{C}_2-6\tilde{C}_0)+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{k}_1[2(\tilde{B}_2+18\tilde{B}_0)\tilde{k}_1+3\tilde{C}_1(4+3\tilde{k}_1)\tilde{k}_2]\}}{32\xi_{01}\eta_{01}S_0\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{k}_1^2\sqrt{\Lambda_{01}\Lambda_{02}\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2}\tilde{\mu}_2 \times \tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{k}_2\tilde{\mu}_{20}},$$

$$\Pi_5(\tau) = -\frac{fT_0P_0^2}{8p_{01}q_{01}\Lambda_{01}S_0}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{10}}{\tilde{\Lambda}_1\tilde{\mu}_1},$$

$$\Pi_6(\tau) = \frac{fT_0P_0^2}{8p_{01}q_{01}S_0\sqrt{\Lambda_{01}\Lambda_{02}}}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{10}}{\sqrt{\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2}\tilde{\mu}_1},$$

$$\Pi_7(\tau) = -\frac{fT_0P_0^2}{8p_{02}q_{02}\Lambda_{02}S_0}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{20}}{\tilde{\Lambda}_2\tilde{\mu}_2},$$

$$\Pi_8(\tau) = \frac{fT_0P_0^2}{8p_{02}q_{02}S_0\sqrt{\Lambda_{01}\Lambda_{02}}}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{20}}{\sqrt{\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2}\tilde{\mu}_2},$$

а величины

$$\tilde{A}_0 = \frac{4}{\tilde{a}_2\pi}F(\tilde{\alpha}), \quad \tilde{A}_1 = \frac{4}{\tilde{a}_2\tilde{\alpha}\pi}[F(\tilde{\alpha}) - E(\tilde{\alpha})], \quad \tilde{A}_2 = \frac{2}{3}\left(\tilde{\alpha} + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\tilde{A}_1 - \frac{1}{3}\tilde{A}_0,$$

$$\tilde{B}_0 = \frac{(1+\tilde{\alpha}^2)\tilde{\alpha}}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{2\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1, \quad \tilde{B}_1 = \frac{2\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{(1+\tilde{\alpha}^2)\tilde{\alpha}}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1,$$

$$\tilde{B}_2 = \frac{(1+\tilde{\alpha}^2)\tilde{\alpha}}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{2(1+\tilde{\alpha}^2)^2-6\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1,$$

$$\tilde{C}_0 = \frac{(3+10\tilde{\alpha}^2+3\tilde{\alpha}^4)\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{2\tilde{\alpha}^2(1+\tilde{\alpha}+\tilde{\alpha}^3)}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1,$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{8\tilde{\alpha}^3(1+\tilde{\alpha}^2)}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_0 - \frac{\tilde{\alpha}^2(1+14\tilde{\alpha}^2+\tilde{\alpha}^4)}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_1,$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{(1+22\tilde{\alpha}^2+\tilde{\alpha}^4)\tilde{\alpha}^2}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_0 - \frac{2\tilde{\alpha}^2(1+5\tilde{\alpha}^2+5\tilde{\alpha}^4+\tilde{\alpha}^6)}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_1,$$

– коэффициенты Лапласа [10], $F(\tilde{\alpha})$ – эллиптический интеграл первого рода, $E(\tilde{\alpha})$ – эллиптический интеграл второго рода и

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\tau) = \tilde{\alpha}_0 \cdot \frac{\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10}}{\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10} + \tilde{m}_{20}} \cdot \frac{\tilde{m}_0(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)}{(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1)(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_2)}, \quad \tilde{\alpha}_0 = \frac{\tilde{a}_{01}}{\tilde{a}_{02}} = const,$$

$$\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(\tau) = \frac{\tilde{m}_0(\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10})}{(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1)(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_2)}, \quad \tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(\tau) = \tilde{k}_1 \frac{\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10} + \tilde{m}_{20}}{\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}.$$

Таким образом, мы доказали следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть в задаче трех тел с массами m_0 , m_1 и m_2 , изменяющимися изотропно, в различных темпах выполняется условие $\frac{\dot{m}_0}{m_0} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}$. Тогда эволюционные уравнения – уравнения вековых возмущений описываются восемью линейными неавтономными дифференциальными уравнениями первого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если массы m_0 , m_1 и m_2 постоянные, а также малые величины, тогда системы (12)–(13) превращаются в известные уравнения вековых возмущений для классической двухпланетной задачи трех тел [10].

Решения уравнений (12)–(13) можно получить аналитическими и численными методами и с помощью этих решений проанализировать величины, характеризующие эволюцию системы:

$$\tilde{e}_i^2 = (\xi_{0i}^2 \tilde{\xi}_i^2 + \eta_{0i}^2 \tilde{\eta}_i^2) / \Lambda_{0i} \tilde{\Lambda}_i, \quad \sin^2 \tilde{i}_i = (p_{0i}^2 \tilde{p}_i^2 + q_{0i}^2 \tilde{q}_i^2) / \Lambda_{0i} \tilde{\Lambda}_i, \quad (14)$$

$$\tilde{\Omega}_i = -\arctg(q_{0i} \tilde{q}_i / p_{0i} \tilde{p}_i), \quad \tilde{\pi}_i = -\arctg(\eta_{0i} \tilde{\eta}_i / \xi_{0i} \tilde{\xi}_i), \quad \tilde{\omega}_i = \tilde{\pi}_i - \tilde{\Omega}_i. \quad (15)$$

6 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть законы изменения масс описываются законом Эдингтона-Джинса

$$dm_i/dt = \varepsilon_i m_i^{n_i}.$$

а) Физические начальные условия (M_Θ – масса Солнца, *a.e.* – астрономическая единица):

$$m_0 = m_0(t) = \frac{m_{00}}{1 - \frac{\dot{m}_{00}}{m_{00}} t}, \quad m_{00} = m_0(t_0) = 2M_\Theta, \quad \dot{m}_0(t_0) = -10^{-4,2} M_\Theta / \text{год}, \quad (16)$$

$$m_1 = m_1(t) = \frac{m_{10}}{1 - \frac{\dot{m}_{10}}{m_{10}} t}, \quad m_{10} = m_1(t_0) = 2M_\Theta, \quad \dot{m}_1(t_0) = -10^{-4,2} M_\Theta / \text{год}, \quad (17)$$

$$m_2 = m_2(t) = \frac{m_{20}}{\sqrt{1 - 2 \frac{\dot{m}_{20}}{m_{20}} t}}, \quad m_{20} = m_2(t_0) = 0,7 M_\Theta, \quad \dot{m}_2(t_0) = -10^{-6} M_\Theta / \text{год}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} l_{01} &= 0^0, \quad \Omega_{01} = 10^0, \quad \omega_{01} = 5^0, \quad \pi_{01} = \Omega_{01} + \omega_{01} = 15^0, \quad i_{01} = 36', \quad e_{01} = 0,01, \\ \Lambda_{01} &= \beta_1^* \sqrt{a_{01}}, \quad a_{01} = 3 a.e., \quad \beta_1^* = \sqrt{f \mu_1(t_0) m_{10} m_{00}}, \quad \mu_{10} = \mu_1(t_0) = \frac{m_{00} m_{10}}{m_{10} + m_{00}}, \\ l_{02} &= 0^0, \quad \Omega_{02} = 15^0, \quad \omega_{02} = 10^0, \quad \pi_{02} = \Omega_{02} + \omega_{02} = 25^0, \quad i_{02} = 48', \quad e_{02} = 0,02, \\ \Lambda_{02} &= \beta_2^* \sqrt{a_{02}}, \quad a_{02} = 12 a.e., \quad \beta_2^* = \sqrt{f \mu_2(t_0) m_{20} (m_{00} + m_{10})}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu_{20} &= \mu_2(t_0) = \frac{m_{20} (m_{00} + m_{10})}{m_{00} + m_{10} + m_{20}}, \\ \Lambda_{01} &= 21,8 \frac{a.e.^2 \cdot M_\Theta}{\text{год}}, \quad \xi_{01} = 0,045 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \quad \eta_{01} = -0,012 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \\ p_{01} &= 0,065 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \quad q_{01} = -0,011 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \\ \Lambda_{02} &= 28,1 \frac{a.e.^2 \cdot M_\Theta}{\text{год}}, \quad \xi_{02} = 0,096 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \quad \eta_{02} = -0,045 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \\ p_{02} &= 0,072 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \quad q_{02} = -0,019 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{\text{год}^{1/2}}, \\ T_0 &= \pi \left(\frac{\mu_{10} a_{01}^{3/2}}{\beta_1^*} + \frac{\mu_{20} a_{02}^{3/2}}{\beta_2^*} \right) \approx 10,9 \text{ год}, \quad f = 39,43 \frac{a.e.^3}{M_\Theta \cdot \text{год}^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

б) Безразмерные начальные условия.

В явном виде примем

$$\begin{aligned} \tilde{m}_0 &= \frac{\tilde{m}_{00}}{1 - \frac{\tilde{m}'_{00}}{\tilde{m}_{00}} \tau}, \quad \tilde{m}_1 = \frac{\tilde{m}_{10}}{1 - \frac{\tilde{m}'_{10}}{\tilde{m}_{10}} \tau}, \quad \tilde{m}_2 = \frac{\tilde{m}_{20}}{\sqrt{1 - 2 \frac{\tilde{m}'_{20}}{\tilde{m}_{20}} \tau}}, \\ \tilde{m}_{00} &= 1,28, \quad \tilde{m}_{10} = 1,28, \quad \tilde{m}_{20} = 0,45, \\ \tilde{m}'_{00} &= \tilde{m}'_{10} = -6,95 \cdot 10^{-4,2}, \quad \tilde{m}'_{20} = -6,95 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_{01} = 1,5, \quad \tilde{a}_{02} = 6,$$

$$\tilde{\Lambda}_{0i} = 1, \quad \tilde{\xi}_{0i} = \tilde{\eta}_{0i} = \tilde{p}_{0i} = \tilde{q}_{0i} = 1, \quad \Delta\tau = \frac{1}{10},$$

где $\Delta\tau$ – шаг, т.е. примерно 10 шагов определяют один оборот.

7 ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И СРАВНЕНИЯ С СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЗАДАЧЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ МАССАМИ

Пользуясь системой *Mathematica*, можно получить решения дифференциальных уравнений (12)–(13) при начальных условиях (16)–(20).

Для сравнения и выявления эффектов изменения масс рассмотрим соответствующую задачу с постоянными массами. В этом случае в формулах (1) $\dot{m}_i(t) = 0$, $\dot{m}_i(t_0) = 0$, тогда имеют место интегралы площадей и энергии:

$$\tilde{\beta}_1^* \sqrt{\tilde{a}_{01}(1 - \tilde{e}_1^2)} \sin i_1 \sin \Omega_1 + \tilde{\beta}_2^* \sqrt{\tilde{a}_{02}(1 - \tilde{e}_2^2)} \sin i_2 \sin \Omega_2 = 0, \quad (21)$$

$$\tilde{\beta}_1^* \sqrt{\tilde{a}_{01}(1 - \tilde{e}_1^2)} \sin i_1 \cos \Omega_1 + \tilde{\beta}_2^* \sqrt{\tilde{a}_{02}(1 - \tilde{e}_2^2)} \sin i_2 \cos \Omega_2 = 0, \quad (22)$$

$$\tilde{\beta}_1^* \sqrt{\tilde{a}_{01}(1 - \tilde{e}_1^2)} \cos i_1 + \tilde{\beta}_2^* \sqrt{\tilde{a}_{02}(1 - \tilde{e}_2^2)} \cos i_2 = C = const, \quad (23)$$

$$T = \frac{1}{2} [\mu_{10} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \mu_{20} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)],$$

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right), \quad (24)$$

$$T - U = h_0 = const. \quad (25)$$

Для того, чтобы проверить нашу теорию в случае постоянной массы, можно проверить сохранение постоянного значения интегралов в ходе численного интегрирования. Эти расчеты имеют следующие ошибки: первый – 0,0005%, второй – 0,0005%, третий – 0,00002% и интеграл энергии – 0,6%. Сохранение значений интегралов площадей и энергии показывает, что выражения (8) и уравнения вековых возмущений (11) в случае постоянной массы дают высокую точность. Выше отмеченные отклонения постоянных интегралов приведены на рисунках 2-5.

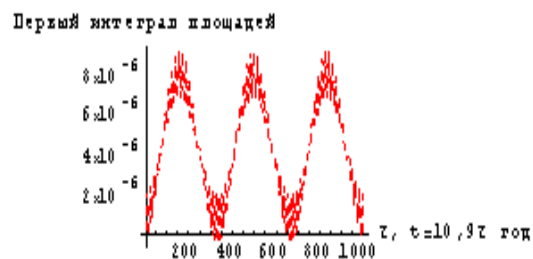


Рисунок 2 – Первый интеграл площадей в случае постоянной массы.

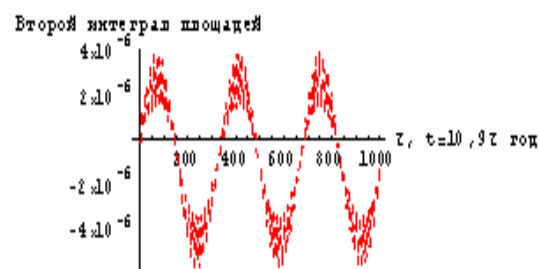


Рисунок 3 – Второй интеграл площадей в случае постоянной массы.

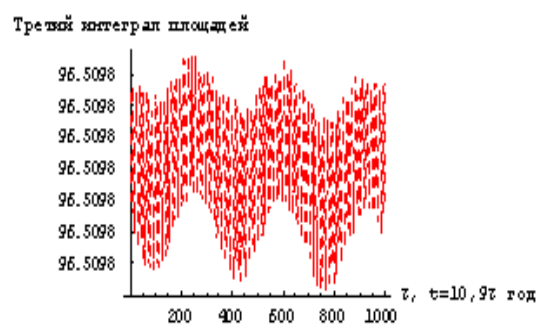


Рисунок 4 – Третий интеграл площадей в случае постоянной массы.

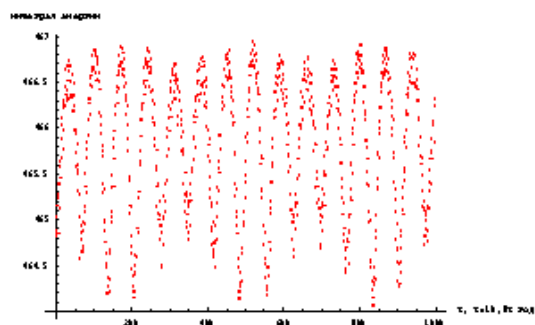
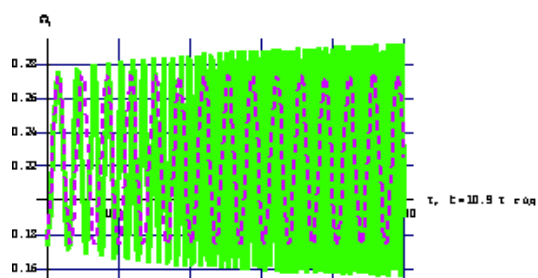
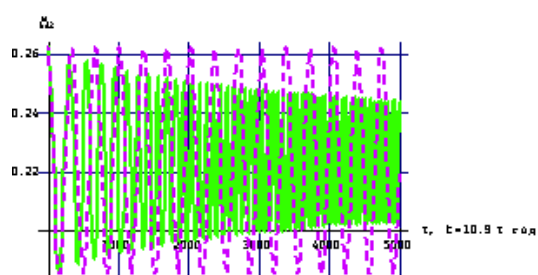


Рисунок 5 – Интеграл энергии в случае постоянной массы.

Рисунок 6 – Долгота восходящего узла $\tilde{Q}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.Рисунок 7 – Долгота восходящего узла $\tilde{Q}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.

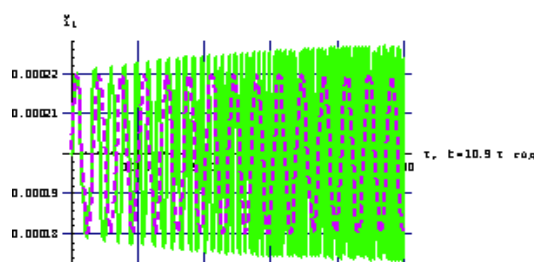


Рисунок 8 – Наклонность $\tilde{i}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.

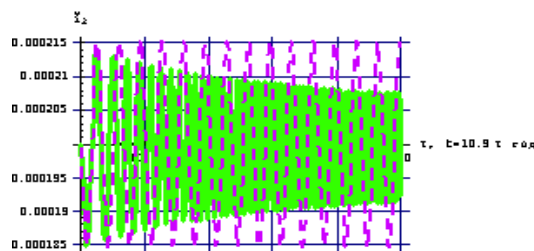


Рисунок 9 – Наклонность $\tilde{i}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.

На основе численных решений системы дифференциальных уравнений (12)–(13) по формулам (14)–(15) можно получить графики изменения аналогов кеплеровских элементов (рисунки 6-9), где $i_i(\text{градус}) = 57,3 \cdot \tilde{i}_i$, $\Omega_i(\text{градус}) = 57,3 \cdot \tilde{\Omega}_i$.

С помощью численных решений системы дифференциальных уравнений (12)–(13) по формулам (14)–(15) можно также получить графики изменения аналогов эксцентриситетов (рисунки 10-11).

В связи с тем, что рисунки 6-11 плохообозримы, приведем отрезки рисунков орбитальных элементов на коротком интервале, где тенденции эволюции элементов будут четко видны (рисунки 12-17).

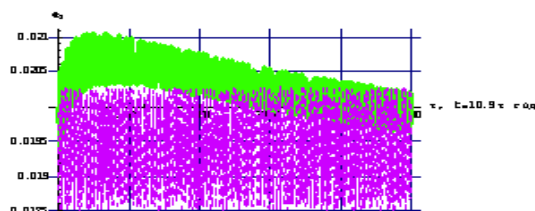


Рисунок 10 – Эксцентриситет $\tilde{e}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – линией переменная масса.

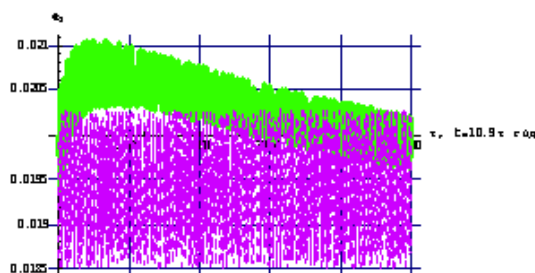


Рисунок 11 – Эксцентриситет $\tilde{e}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией переменная масса.

Расчеты показывают, что в случае постоянной массы (интервал времени – 545 000 лет) амплитуды колебаний орбитальных элементов $\tilde{\Omega}_i, \tilde{i}_i, \tilde{e}_i$ постоянны. В то же время, в нашей задаче с переменными массами в отличие от задачи с постоянными массами амплитуды меняются со временем. Характер изменения амплитуд приведен на рисунках 18-23, где четко прослеживается эволюционная тенденция.

Из выше проведенного численного анализа систем уравнений вековых возмущений следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть в задаче трех тел с массами m_0, m_1 и m_2 , изменяющимися изотропно, в различных темпах выполняется условие $\frac{\dot{m}_0}{m_0} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}$. Тогда

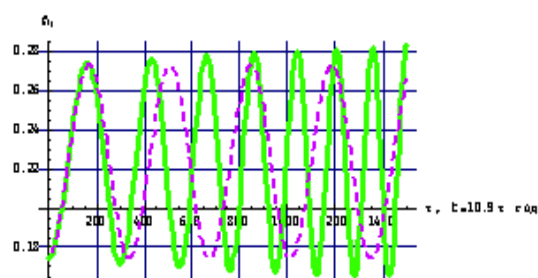


Рисунок 12 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

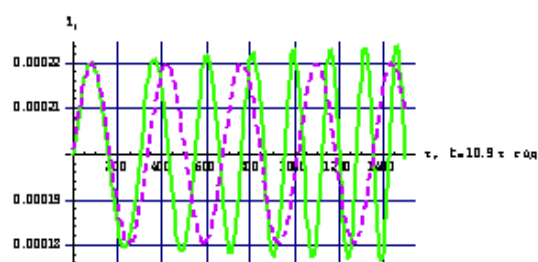


Рисунок 13 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

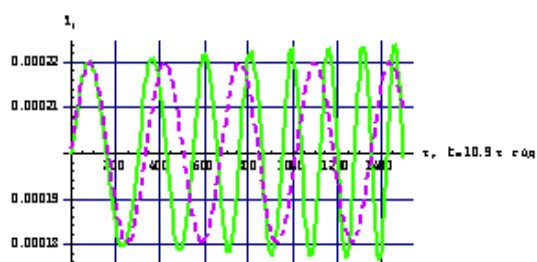


Рисунок 14 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

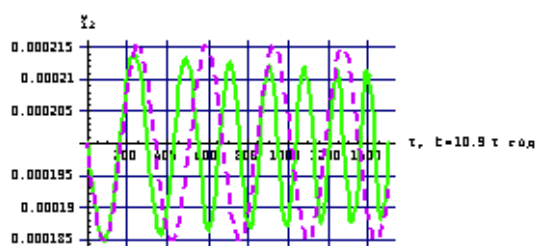


Рисунок 15 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

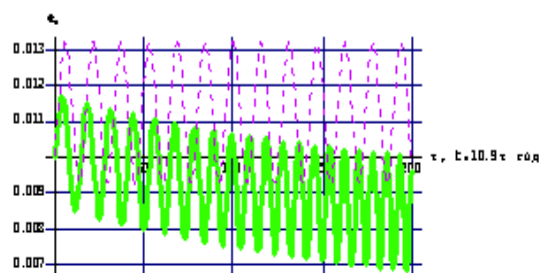


Рисунок 16 – Интервал времени 21 800 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

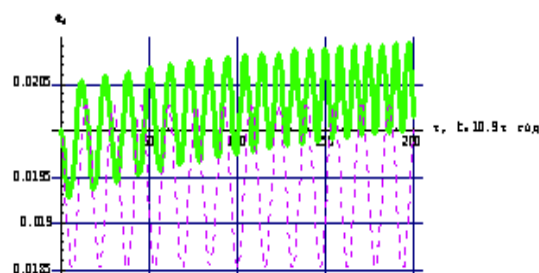


Рисунок 17 – Интервал времени 21 800 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

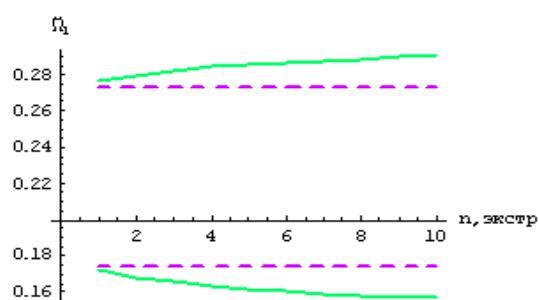


Рисунок 18 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{\Omega}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

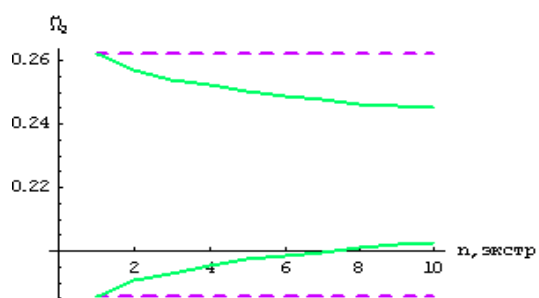


Рисунок 19 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{\Omega}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

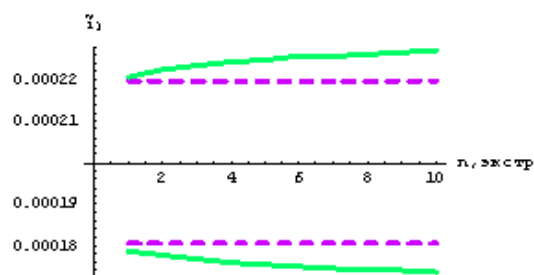


Рисунок 20 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{i}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

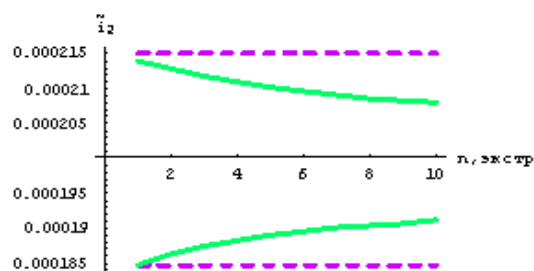


Рисунок 21 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{i}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

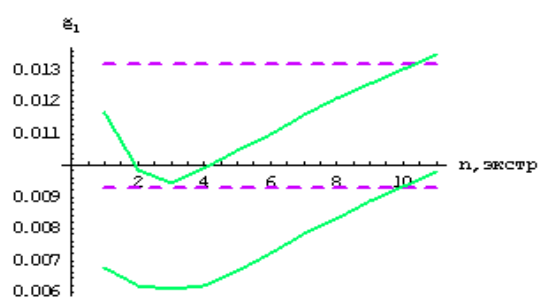


Рисунок 22 – Изменение $\max$ и $\min$ амплитуд $\tilde{\epsilon}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

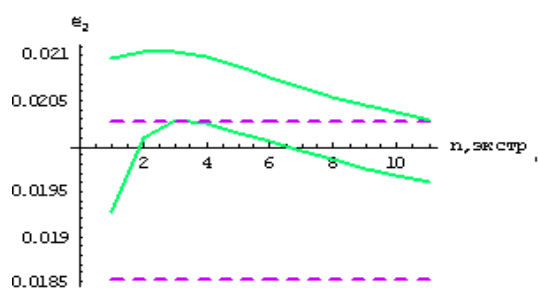


Рисунок 23 – Изменение $\max$ и $\min$ амплитуд $\tilde{\epsilon}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной переменная масса.

1. неизменность плоскости Лапласа нарушается;
2. восходящий узел орбиты Ω_1 тела μ_1 не совпадает с нисходящим узлом Ω_2 тела μ_1 на основной плоскости.

СЛЕДСТВИЕ 2. Нормаль к плоскости Лапласа эволюционирует по закону

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \beta_1 \sqrt{a_{01}(1-e_1^2(t))} \sin i_1(t) \sin \Omega_1(t) + \beta_2 \sqrt{a_{02}(1-e_2^2(t))} \sin i_2(t) \sin \Omega_2(t), \\ c_2(t) &= -\beta_1 \sqrt{a_{01}(1-e_1^2(t))} \sin i_1(t) \cos \Omega_1(t) - \beta_2 \sqrt{a_{02}(1-e_2^2(t))} \sin i_2(t) \cos \Omega_2(t), \\ c_3(t) &= \beta_1 \sqrt{a_{01}(1-e_1^2(t))} \cos i_1(t) + \beta_2 \sqrt{a_{02}(1-e_2^2(t))} \cos i_2(t). \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы орбитальные элементы проблемы трех тел – точек с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах. В качестве исходного невозмущенного промежуточного движения использовано аperiодическое движение по квазиконическому сечению. Эксцентриситеты и наклоны орбит тел считаются малыми величинами, а массы тел сравнимы между собой. При этих предположениях, применяя систему аналитических вычислений *Mathematica* [8], вычислены выражения вековой части возмущающей функции в аналогах второй системы переменных Пуанкаре. Получена новая система из восьми линейных неавтономных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая вековые возмущения. На основе численных решений этих дифференциальных уравнений выявлены эволюционные тенденции орбитальных элементов. Впервые показано, что неизменность ориентации плоскости Лапласа нарушается и восходящий узел орбиты Ω_1 тела μ_1 не совпадает с нисходящим узлом Ω_2 тела μ_2 на основной плоскости.

Работа частично финансирована грантом 0688/ГФ научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК 2012-2014 гг.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Белецкий В.В., Хентов А.А. Резонансные вращения небесных тел. – Нижний Новгород: НИРФИ, 1985. – 430 с.
- 2 Ласкар Ж. Крупномасштабный хаос и маргинальная устойчивость в Солнечной системе. – в кн.: Резонансы в небесной механике. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – С. 247-305.
- 3 Коррейя А., Ласкар Ж. Четыре конечных положения оси вращения Венеры. – в кн.: Резонансы в небесной механике. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – С. 305-316.
- 4 Омаров Т.Б. Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алматы: Наука, 1975. – 143 с.
- 5 Omarov T.B. Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. – New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002. – 248 с.
- 6 Bekov A.A., Omarov T.B. The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. and Astrophys. Transactions. – 2003. – Т. 22. – Р. 145.
- 7 Минглибаев М.Ж. Динамика нестационарных гравитирующих систем. – Алматы: Изд. КазНУ, 2009. – 209 С.
- 8 Eggleton P. Evolutionary processes in binary and multiple stars. – UK: Cambridge University Press, 2006. – 332 p.
- 9 Лукьянов Л.Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. журнал. – 2008. – Т. 85, № 8. – С. 755-768.
- 10 Шарлье К. Небесная механика. – Москва, 1966. – 628 С.
- 11 Minglibayev M., Mayemerova G. Secular perturbations in the three-body problem with variable masses // The Sixth Int. Workshop. Computer algebra systems in teaching and research. – Poland, Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2011. – Р. 198-204.
- 12 Прокопеня А.Н. Решение физических задач с использованием системы *MATHEMATICA*. – Брест: Изд. БГТУ, 2005. – 260 с.

Статья поступила в редакцию 01.09.12

Маемерова Г.М., Минглибаев М.Дж. МАССАЛАРЫ АЙНЫМАЛЫ
ҮШ ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНДЕГІ ЛАПЛАС ЖАЗЫҚТЫҒЫ ОРИЕНТАЦИ-
ЯСЫНЫҢ БҰЗЫЛУЫ

Пуанкаре элементтерінің екінші жүйесінің аналогтары – оскуляциялаушы айнаымалыларда массалары айнаымалы үш дене мәселесінің жаңа теңдеулері алынды. Модификацияланған оскуляциялаушы айнаымалылар жүйесінде түрткілеуші функцияның өрнегі Mathematica аналитикалық есептеу жүйесі арқылы қорытып шығарылды. Түрткілеуші функцияның негізінде алғаш рет мәселенің эволюциялық теңдеулері – ғасырлық түрткілеудің канондық автономды емес теңдеулері табылды. Ғасырлық түрткі теңдеулерін сандық тәсілдермен талдау нәтижесінде тұрақты Лаплас жазықтығының массалардың әр түрлі қарқында өзгеру салдарынан осы жазықтықтың ориентациясы өзгеретіні көрсетілді. "Массасы μ_1 дененің" жоғарылау түйіні "массасы μ_2 дененің" құлдырау түйінімен сәйкес келмейтіндігі анықталды.

Mayemerova G.M., Minglibayev M.Zh. ON DISORIENTATION OF
LAPLACE PLANE IN THREE-BODY PROBLEM WITH VARYING
MASSES

In three-body problem with variable masses there are obtained new equations in osculating elements – the analogues of the second system of Poincare elements. Perturbing function in the modified osculating variables is calculated by the system of analytical calculations Mathematica. On the basis of the derived perturbing function there are obtained for the first time the evolution equations of the problem, which are non-autonomous canonical equations of the secular perturbations. By numerical analysis of the equations of secular perturbations it is found that due to changes of masses in different rates the immutability of Laplace plane is broken, the ascending node "of the body with mass" μ_1 does not coincide with the descending node "of the body with mass" μ_2 .