ISSN 1728-7901

Абай атындағы
Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

Казахский национальный педагогический
университет имени Абая

ХАБАРШЫ
ВЕСТНИК

Серия «Физико-математические науки» • «Физика-математика ғылымдары» сериясы

№ 4 (56)
2016

Алматы

ISSN 1728-7901

Абай атындағы
Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

Казахский национальный педагогический
университет имени Абая

ХАБАРШЫ
ВЕСТНИК

№ 4 (56)

2016

Алматы

Серия «Физико-математические науки» • «Физика-математика ғылымдары» сериясы

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

ХАБАРШЫ

“Физика-математика ғылымдары” сериясы № 4 (56)

Қазақстан Республикасының Ақпарат министрлігінде тіркелген
№ 4824 – Ж - 15.03.2004
(Журнал бір жылда 4 рет шығады)
2000 жылдан бастап шығады

Редакторлары:**Ф.Р. Гусманова,**
Г.А. Абдулкаримова

Компьютерлік беттеу:
Г.А. Абдулкаримова
Ф.Р. Гусманова

Басуға 23.12.2016 ж. қол қойылды
Таралымы300 дана
Көлемі 15.10 е.б.т.
Пішімі 60х84 1/8.

050010, Алматы қаласы,
Достық даңғылы,13
Абай атындағы ҚазҰПУ
“ЖШС Palitra Press” типографиясында баспадан өткен
Алматы қаласы, Хамиди көшесі, 4а

Мазмұны
Содержание

УДК 517.927

Г.Н. Нугманова, Ж.Х. Жунусова

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

(г. Астана, Евразийский национальный университет имени Гумилева;
г. Алматы, Казахский национальный университет имени аль-Фараби)

Аннотация. *Нелинейные эффекты играют фундаментальную роль во многих явлениях в различных отраслях науки. Такие нелинейные эффекты моделируются нелинейными дифференциальными уравнениями. Некоторые из этих уравнений интегрируемы, и известны как солитонные уравнения. Интегрируемые спиновые системы являются одним из основных разделов интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений и имеют важное значение в математике, в частности, в геометрии кривых и поверхностей. С другой стороны, интегрируемые спиновые системы играют решающую роль в описании нелинейных явлений в магнетиках. В данной статье рассматриваем некоторые интегрируемые уравнения ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами. Изучаем представление Лакса этих уравнений. В частности, для данных уравнений выводим эквивалентные аналоги в виде нелинейных уравнений типа Шредингера. Представляем интегрируемые редукции уравнений ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами. Данные интегрируемые уравнения ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами описывают нелинейные волны в ферромагнетиках с некоторыми дополнительными физическими полями.*

Ключевые слова: *спиновые системы, эквивалентные аналоги, интегрируемые редукции, самосогласованные потенциалы.*

В математике преобразованием обратного рассеяния является метод решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными. Метод представляет собой нелинейный аналог, а в каком-то смысле обобщения преобразования Фурье, которое само по себе применяется для решения многих линейных уравнений в частных производных. Название "метод обратной задачи рассеяния" происходит от ключевой идеи восстановления временной эволюции потенциала от временной эволюции его данных рассеяния: обратное рассеяние относится к задаче о восстановлении потенциала от его матрицы рассеяния, в отличие от прямого рассеяния задача нахождения матрицы рассеяния от потенциала. Обратное преобразование рассеяния может быть применено ко многим из так называемых точно решаемых моделей, то есть вполне интегрируемых бесконечномерных систем. Впервые он был представлен Клиффорда С.Гарднер, Джон М. Грином, и Мартин Д. Крускала и др. (1967, 1974) для уравнения Кортевега-де Фриза, и вскоре распространяется на нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордона и уравнения цепочки Тода. Позднее данный метод был использован для решения многих других уравнений, таких как уравнение Кадомцева-Петвиашвили, уравнение Ишимори, уравнение Дим, и так далее. Характерным свойством решений, полученных методом обратного рассеяния является существование солитонов, решений, напоминающих как частицы и волны, которые не имеют аналогов для линейных уравнений с частными производными и применяются в нелинейной оптике и в физике плазмы, а его квантовый вариант описывает многочастичную систему с б-образным взаимодействием.

Основным примером интегрируемой спиновой системы является так называемая модель ферромагнетика Гейзенберга, которая выглядит следующим образом [1], [2]

$$\boldsymbol{S_t} = \mathbf{S} \wedge \boldsymbol{S_{xx}} \tag{1}$$

где $\wedge$ означает векторное произведение и

$$\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3), \ \boldsymbol{S}^2 = 1. \tag{2}$$

Матричная форма модели ферромагнетика Гейзенберга выглядит в виде

$$\mathrm{iS_t} = \frac{1}{2}[\mathrm{S}, \mathrm{S_{xx}}], \tag{3}$$

где

$$S = S_i\sigma_i = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь

$$S^2 = I, \ S^{\pm} = S_1 = \pm iS_2$$
$$, \ [A, B] = AB - BA$$

и σ_i матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Заметим, что модель ферромагнетика Гейзенберга является лакшманановым эквивалентом [1] нелинейного уравнения Шредингера

$$\mathrm{i}\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi = 0. \tag{6}$$

Также напомним, что между моделью ферромагнетика Гейзенберга (1) и нелинейным уравнением Шредингера (6) имеет место калибровочная эквивалентность [2]. Различные типы интегрируемых и неинтегрируемых спиновых систем были предложены в литературе (см., например, [3] - [8]).

(1 + 1) -мерное уравнение M-XCIX выглядит следующим образом [3]

$$\mathbf{S}_t + 0{,}5\epsilon_1\mathbf{S}\wedge\mathbf{S}_{xx} + \frac{2}{\omega}\mathbf{S}\wedge\mathbf{W} = 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{W}_x + 2\omega\mathbf{S}\wedge\mathbf{W} = 0, \tag{8}$$

где $\wedge$ означает векторное произведение и

$$\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3), \ \mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3), \tag{9}$$

здесь α является действительной функцией,

$$\boldsymbol{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1,$$

S_i и W_i некоторые вещественные функции, ω и ϵ_i вещественные постоянные. В терминах компонент уравнение M-XCIX (7) - (8) принимает вид

$$\mathrm{S_{1t}} + 0{,}5\epsilon_1(\mathrm{S_2S_{3xx}} - \mathrm{S_3S_{2xx}}) + \frac{2}{\omega}(\mathrm{S_2W_3} - \mathrm{S_3W_2}) = 0, \tag{10}$$

$$\mathrm{S_{2t}} + 0{,}5\,\epsilon_1\,(\mathrm{S_3S_{1xx}} - \mathrm{S_1S_{3xx}}) + \frac{2}{\omega}(\mathrm{S_3W_1} - \mathrm{S_1W_3}) = 0, \tag{11}$$

$$\mathrm{S_{3t}} + 0{,}5\,\epsilon_1\,(\mathrm{S_1}S_{2xx} - \mathrm{S_2}S_{1xx}) + \frac{2}{\omega}(\mathrm{S_1W_2} - \mathrm{S_2W_1}) = 0, \tag{12}$$

$$\mathrm{W_{1x}} + 2\omega(\mathrm{S_2W_3} - \mathrm{S_3W_2}) = 0, \tag{13}$$

$$\mathrm{W_{2x}} + 2\omega(\mathrm{S_3W_1} - \mathrm{S_1W_3}) = 0, \tag{14}$$

$$\mathrm{W_{3x}} + 2\omega(\mathrm{S_1W_2} - \mathrm{S_2W_1}) = 0. \tag{15}$$

С другой стороны уравнение M-XCIX (7)-(8) можно записать как

$$\mathrm{iS_t} + 0{,}25\epsilon_1[\mathrm{S}, \mathrm{S_{xx}}] + \frac{1}{\omega}[\mathrm{S}, \mathrm{W}] = 0, \tag{16}$$

$$\mathrm{i}W_x + \omega[\mathrm{S}, \mathrm{W}] = 0, \tag{17}$$

где

$$\mathrm{S} = S_i\sigma_i = \begin{pmatrix} \mathrm{S_3} & \mathrm{S^-} \\ \mathrm{S^+} & -\mathrm{S_3} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathrm{W} = W_i\sigma_i = \begin{pmatrix} \mathrm{W_3} & \mathrm{W^-} \\ \mathrm{W^+} & -\mathrm{W_3} \end{pmatrix} \tag{19}$$

здесь

$S^{\pm} = S_1 \pm iS_2$, $W^{\pm} = W_1 \pm iW_2$, $[A, B] = AB - BA$, σ_i являются матрицами Паули.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{20}$$

$$\Phi_x = V\Phi, \tag{21}$$

Пусть пары Лакса *U, V* имеют вид [3]-[8]

$$U = -i\lambda S, \tag{22}$$

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \frac{i}{\lambda + \omega} V_{-1} - \frac{i}{\omega} V_0, \tag{23}$$

где

$$V_2 = -i\epsilon_1 S, \tag{24}$$

$$V_1 = 0.25\epsilon_1 [S, S_x], \tag{25}$$

$$V_{-1} = V_0 = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

С матрицами U, V уравнение

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \tag{27}$$

эквивалентно уравнению М-ХСIX (7)-(8). Это означает, что уравнение М-ХСIX (7)-(8) является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния.

Наша цель в данной работе найти эквивалентный аналог типа Шредингера для уравнения М-ХСIX. Для этого введем три новые функции φ, ρ and η

$$\varphi = \alpha e^{i\beta}, \tag{28}$$

$$\rho = -\left[2S^- W_3 - (S_3 + 1)W^- + \frac{S^{-2}W^+}{S_3 + 1}\right] e^{i\varsigma}, \tag{29}$$

$$\eta = 2S_3 W_3 + S^- W^+ + S^+ w^-, \tag{30}$$

где

$$\alpha = 0.5(S_{1x}^2 + S_{2x}^2 + S_{3x}^2)^{0,5}, \tag{31}$$

$$\beta = -i\,\partial_x^{-1}\left[\frac{tr(S_x S_{xx})}{tr(S_x^2)}\right], \tag{32}$$

$$\varsigma = exp\left[i\theta - \frac{1}{2}\partial_x^{-1}\left(\frac{S^+ S_x^- - S_x^+ S^-}{1 + S_3}\right)\right] \tag{33}$$

и $\theta = const$. Не трудно проверить, что эти три новые функции удовлетворяют следующим уравнениям

$$i\varphi_t + \epsilon_1(0.5\varphi_{xx} + |\varphi|^2 \varphi) - 2ip = 0, \tag{34}$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta\varphi = 0, \tag{35}$$

$$\eta_x + \varphi^* p + \varphi\rho^* = 0, \tag{36}$$

Это не что иное, как нелинейное уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха. Ивестно, что уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Представление Лакса выглядит следующим образом, [9] - [10]

$$\Psi_x = A\Psi, \tag{37}$$

$$\Psi_x = B\Psi, \tag{38}$$

где

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0, \tag{39}$$

$$B = \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0 + \frac{i}{(\lambda + \omega)} B_{-1} \tag{40}$$

здесь

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$B_2 = -i\epsilon_1\sigma_3, \tag{42}$$

$$B_1 = \epsilon_1 A_0, \tag{43}$$

$$B_0 = 0.5i\epsilon_1\alpha^2\sigma_3 + 0.5i\epsilon_1\sigma_3 A_{0x}, \tag{44}$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta & -\rho \\ -\rho^* & -\eta \end{pmatrix} \tag{45}$$

Приведем редукции данного интегрируемого уравнения:

1. Основное киральное уравнение: Предположим $\epsilon_1 = 0$. Тогда уравнение М-ХСІХ сводится к уравнению

$$iS_t + \frac{1}{\omega}[S, W] = 0, \tag{46}$$

$$iW_x + \omega[S, W] = 0. \tag{47}$$

Уравнение (46)-(47) представляет собой основное киральное уравнение. Известно, что данное уравнение является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Соответствующая пара Лакса задается следующим образом

$$U = -i\lambda S, \tag{48}$$

$$V = -\frac{i\lambda}{\omega(\lambda+\omega)} W. \tag{49}$$

2. Уравнение ферромагнетика Гейзенберга: Теперь предположим, что W = 0. Тогда уравнение М-ХСІХ сводится к уравнению

$$iS_t + 0.25\epsilon_1[S, S_{xx}] = 0. \tag{50}$$

Это уравнение ферромагнетика Гейзенберга (1) в пределах до простейших масштабных преобразований.

В заключении отметим, что модели ферромагнетика Гейзенберга играют важную роль в современной теории магнетиков. Они основаны нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Некоторые из этих моделей являются интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния, а именно уравнения являются солитонными уравнениями. В этой статье мы рассмотрели некоторые уравнения (модели) ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами, исследовали представление Лакса данных уравнений. Кроме того, мы нашли эквивалентный аналог типа Шредингера.

1. Lakshmanan M. // Physics Letters A. - 1977. - V. 61, -P. 53.
2. Takhtajian L. // Physics Letters A. - 1977. - V. 64, -P. 235.
3. Myrzakulov R. On some integrable and nonintegrable soliton equations of magnets I-IV // HEPI, Alma-Ata, 1987.
4. Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G. N., Lakshmanan M. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials // Symmetry. - 2015. - V. 7(3), -P. 1352-1375.
5. Zhunussova Zh.. Nonlinear PDE as Immersions // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, ISBN 978-3-319-12576-3, - 2015. -P. 289–297.
6. Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Nugmanova G., Myrzakulov R. Darboux Transformation and Exact Solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. - 2016. - V. 13. -P. 1550134.
7. Zhunussova Zh. Geometrical features of the soliton solution // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, ISBN 978-3-319-12576-3, -2015. -P.671-677.
8. Zhunussova Zh.. About domain wall solution of the integrated spin system // KazNU Bulletin, ser. math., mech., inf. -2014. –V. 81, - № 2. - P.46-51.
9. Burtsev S.P., Gabitov I.R. // Physics Letters A. - 1994. - V. 49, -P. 2065.
10. Porsezian K., Nakkeeran K. Physics Review Letters. - 1995. - V. 74, -P. 2941.

Аңдатпа. *Сызықты емес әсерлер ғылымның түрлі салаларында көптеген құбылыстарда негізгі рөл ойнайды. Бұндай сызықты емес әсерлер сызықты емес дифференциалдық теңдеулермен модельденеді. Осы теңдеулердің кейбіреуі интеграцияланатын, және солитон теңдеулері деп аталады. Интеграциялануын сығу жүйелер және қисық беттерді, атап* *айтқанда геометрия жылы Интегралданатын сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің негізгі бөлімдерінің бірі болып интегралданатын спиндік жүйелер табылады және математикада маңызды өте маңызды, атап айтқанда, беттер мен қисықтар геометриясында. Екінші жағынан интегралданатын спиндік жүйелер сызықты емес құбылыстарды магнетиктерде сипаттауда шешуші рөл атқарады.*

Бұл мақалада өзара келісілген потенциалдарды кейбір интегралданатын Гейзенберг ферромагнетик теңдеулері қарастырылады. Осы теңдеулердің Лакс жұбы зерттеледі. Атап айтқанда, осы теңдеулер үшін Шредингер сызықты емес теңдеулер түрінде эквивалентті аналогтар алынған. Өзара келісілген потенциалдарды интегралданатын Гейзенберг ферромагнетик теңдеулерінің редукцияларын келтіреміз. Бұл өзара келісілген потенциалдарды интегралданатын Гейзенберг ферромагнетик теңдеулері кейбір қосымша физикалық өрістері бар ферромагнетиктегі бейсызықты толқындарды сипаттайды.

***Түйін сөздер:** спиндік жүйе, эквивалентті аналог, интегралданатын редукциялар, Өзара келісілген потенциалдар.*

***Abstract.** Nonlinear effects play a fundamental role in many phenomena in various fields of science. These nonlinear effects are modeled by nonlinear differential equations. Some of these equations are integrable, and are known as soliton equations. Integrable spin systems are one of the main sections of integrable nonlinear differential equations and are important in mathematics, in particular in the geometry of curves and surfaces. On the other hand, integrable spin systems play a critical role in the description of nonlinear phenomena in magnetic. In this paper we study some of the integrable Heisenberg ferromagnet equation with self-consistent potentials. We investigate their Lax representation. In particular, we derive their equivalent counterparts in the form of the nonlinear Schrödinger equation type. We present the integrable reductions of the Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials. These integrable Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials describe nonlinear waves in ferromagnets with some additional physical fields.*

***Keywords**: spin system, equivalent counterpart, integrable reductions, self-consistent potentials.*

УДК 517.928.2

Д.Н. Нургабыл

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

(г.Талдыкорган, Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова)

***Аннотация**. В данной статье на основе аналитического представления решения доказывается существование и единственность решения краевой задачи. Рассмотрены вопросы предельного перехода решения возмущенной задачи к решению невозмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Исследованы вопросы существования явления начального скачка. С помощью начальных и граничных функций найдено асимптотическое представление решения возмущенной задачи. При этом найдены формулы начальных скачков, установлены порядки скачков.*

***Ключевые слова**: асимптотические оценки, начальные и граничные функции, краевая задача, начальный скачок, вырожденная задача, предельный переход.*

Постановка задачи. Краевые задачи для обыкновенных и интегро - дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при старших производных, рассматривались в [1-4]. В этих работах на основе аналитического