Международная научная конференция

«Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения»

посвящается 60-летию академика НАН РК
Джумадильдаева Аскара Серкуловича

Тезисы докладов

Алматы - 2016 года

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

[illegible] Организационного Комитета:
[illegible] НАН РК Кальменов Т.Ш.

[illegible]
[illegible] С.Н.(СДУ), член-корр. НАН РК Байжанов Б.С. (ИММM), [illegible] М.А. (КазНУ)

[illegible] Комитета:
[illegible] (ИММM), профессор Асанова А.Т. (ИММM), акаде- [illegible] Ш.А. (Узбекистан, Институт математики), профессор [illegible] Д.Б. (ИММM), доцент Бекенов М.И. [illegible] (ИММM), профессор Вербовский В.В. (ИММM, [illegible] Н.С. (ИММM, КБТУ), [illegible] Д.С. (ИММM), про- [illegible] Д.Х. (ЕНУ), член-корр. НАН РК [illegible] А.Б. (КазНУ), про- [illegible] НАН РК Ойнаров Р.О. (ЕНУ), [illegible] член-корр. НАН РК Садыбеков М.А. [illegible] РАН [illegible] И.А. (Россия, [illegible] Д.А. (ЕНУ), член-корр. [illegible] академик НАН РК Харин С.Н. [illegible] Н.Г. (Восточно-Казахстанский технический [illegible] И.П. (Бразилия, Университет Сан Пауло).

СЕКЦИИ

1. Алгебра, [illegible] логика и геометрия
Руководитель секции — д.ф.-м.н., профессор Б.С. Байжанов

2. [illegible] и функциональный анализ
Руководитель секции — д.ф.-м.н., профессор Д.Б. Базарханов

3. Теория дифференциальных уравнений и их приложения
Руководитель секции —д.ф.-м.н., профессор М.Т. Дженалиев

4. Математическое моделирование и уравнения математической физики
Руководитель секции —д.ф.-м.н., профессор Л.А. Алексеева

С О Д Е Р Ж А Н И Е

представлений ее алгебры Ли эквивалентны. Поэтому в категории ограниченных модулей можно ввести когомологию алгебраической группы и соответствующую когомологию ее алгебры Ли. Недавно в [2] автором были получены необходимые и достаточные условия изоморфности первой группы когомологии алгебраической группы с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ и соответствующей первой группы когомологии ее алгебры Ли с коэффициентами в простых модулях и приведены примеры нетривиальных изоморфных первых групп когомологии. Все они одномерны. В настоящий момент, для вторых групп когомологии аналогичные необходимые и достаточные условия не получены. Цель настоящей работы – получить примеры одномерных вторых групп когомологии алгебр Ли классического типа над алгебраически замкнутым полем k положительной характеристики $p \geq h$, h – число Кокстера, и изучить их изоморфности с соответствующими когомологиями алгебраических групп.

Пусть G – простая односвязная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$ и $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, T – максимальный тор в G.

Обозначим через Φ систему корней группы G относительно (G, T). Множество положительных и отрицательных корней соответственно обозначим через Φ^+ и Φ^-, и пусть Δ – множество простых корней. Для системы корней ранга l, пусть $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ – простые корни и $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ – фундаментальные веса. Обозначим целочисленную решетку весов, порожденную фундаментальными весами, через $X(T)$ (аддитивная группа характеров максимального тора T).

Скалярное произведение на евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, порожденное системой корней Φ, обозначается через $\langle , \rangle$. Двойственным к $\alpha \in \Phi$ коренем является $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

Пусть α_0 – максимальный корень, и $\widetilde{\alpha}_0$ – максимальный короткий корень. Аффинная группа Вейля W_p порождается всеми аффинными отражениями $s_{\alpha,np}$, где $\alpha \in \Phi^+$, $n \in \mathbb{Z}$. В дальнейшем мы будем пользоваться действием W_p на $X(T)$, определяемым формулой

$$s_{\alpha,np} \cdot \lambda = \lambda - \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha + np\alpha.$$

Пусть $V(\lambda)$ – модуль Вейля над G со старшим весом λ, тогда $H^0(\lambda) \cong V(-w_0\lambda)^*$, т.е. индуцированный модуль $H^0(\lambda)$ является G-модулем, двойственным модулю Вейля со старшим весом $-w_0(\lambda)$. При этом простой G-модуль $L(\lambda)$ будет простым цоколем $H^0(\lambda)$ или простым фактор-модулем $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю [3].

Теорема. *Пусть* $p \geq h$. *Тогда* $H^2(\mathfrak{g}, L(s_{\widetilde{\alpha}_0,p} s_{\alpha,0} \cdot 0)) \cong k$, *где*

$\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_l\}$, *если* $\Phi = A_l$, $l > 2$;

$\alpha = \alpha_1$, *если* $\Phi \in \{B_l\,(l > 2),\, E_7,\, G_2\}$;

$\alpha = \alpha_2$, *если* $\Phi \in \{C_l\,(l > 2),\, D_l\,(l > 3),\, F_6\}$;

$\alpha = \alpha_8$, *если* $\Phi = E_8$;

$\alpha = \alpha_4$, *если* $\Phi = F_4$.

Литература

1. *Джумадильдаев А.С.* О когомологиях модулярных алгебр Ли // Матем. сб. - 1982. -Т. 119(161), №1(9).-С. 132-149.
2. *Ибраев Ш.Ш.* О первой когомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике // Матем. заметки. - 2014. -Т. 96, №4.-С. 512-521.

3. *Cline E., Parshall, B.Scott L.* Cohomology, hyperalgebras and representations // J. of Algebra - 1980. V. 63. - P. 98-123.

УДК 510.54

Исахов А.А.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби (Казахстан, Алматы)

e-mail: asylissakhov@mail.ru

A-вычислимые универсальные нумераций конечных семейств функций

Рассмотрим конечное семейство F всюду определенных функций, вычислимых относительно оракула A. Нумерация $\alpha : \omega \to F$ называется A–вычислимой, если бинарная функция $\alpha(n)(x)$ является A–вычислимой; данное понятие развивалось в работах [1–3]. Если A является вычислимым множеством, то мы имеем дело с семейством вычислимых функций и их классическими вычислимыми нумерациями, [4]. Семейство F называется A–вычислимой, если оно имеет A–вычислимую нумерацию. Частично упорядоченное множество $\Re_A(F) = \langle \{deg(\alpha) | \alpha \in C_A(F)\}, \leq \rangle$, где через $C_A(F)$ обозначено множество всех A–вычислимых нумераций семейства F, называется полурешеткой Роджерса семейства F. A–вычислимая нумерация, к которой вычислимо сводятся все A–вычислимые нумераций данного семейства, называется универсальной.

Последовательность $\{F_n\}_{n \in \omega}$ конечных множеств называется сильной таблицей, если существует вычислимая функция f такая, что $F_n = D_{f(n)}$. А бесконечное множество A называется гипериммунным, если не существует не пересекающейся сильной таблицы $\{F_n\}_{n \in \omega}$ такой, что $F_n \cap A \neq \emptyset$ для всех n.

Известно, что если A является гипериммунным множеством и A-вычислимое семейство F всюду определенных функций содержит по крайней мере две функций, то F не имеет A-вычислимую универсальную нумерацию, [5]. Данный результат и дальнейшие исследования гипериммунных множеств показали, что в случае с нумерациями гораздо удобнее пользоваться результатом Кузнецова, Медведева и Успенского: бесконечное множество A является гипериммунным тогда и только тогда, когда никакая рекурсивная функция не мажорирует A, [6].

Степень a называется гипериммунной, если a содержит гипериммунное множество, в противном случае a называется гипериммунно-свободной.

Степень a гипериммунно-свободна тогда и только тогда, когда для любой функций степени $\leq a$ существует мажорирующая ее вычислимая функция, [7]. Отметим, что любая степень не сравнимая с $0'$ является гипериммунно-свободной.

Теорема 1. Пусть тьюрингова степень множества A гипериммунно-свободна. Тогда любое A-вычислимое конечное семейство всюду определенных функций имеет A-вычислимую универсальную нумерацию.

Теорема 2. Пусть $\emptyset <_T A$. Тогда любое A-вычислимое конечное семейство всюду определенных функций имеет по меньшей мере две не эквивалентные A-вычислимые нумераций.

Литература

1. *Гончаров С.С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. - 1997. - Т. 36, №6. - С. 621-641
2. *Бадаев С.А., Гончаров С.С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. - 2001. - Т. 40, №5. - С. 507-522
3. *Бадаев С.А., Гончаров С.С.* Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. - 2014. - Т. 53, №5. - С. 555-569
4. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. - Москва: Наука, 1977. - 416 с.
5. *Issakhov A.* A-computable numberings of the families of total functions // Book of abstracts of the International Conference Logic Colloquium. - Helsinki, Finland, August 3-8, 2015. - P.745.
6. *Soare R.I.* Recursively enumerable sets and degrees // - Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1987. - 437 p.
7. *Miller W., Martin D.A.* The degree of hyperimmune sets // Z. Math. Logik Grundlag. Math. - 1968. - Vol.14. - P.159-166.

Калмурзаев Б.С.

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби (Казахстан, Алматы)

e-mail: birzhan_mm@mail.ru

О полурешетках Роджерса двухэлементных семейств множеств 2-го уровня иерархии Ершова

Исследование вычислимых семейств множеств иерархии Ершова было инициировано работами [1], [2], в которых был предложен общий подход к введению понятия вычислимой нумерации для широкого класса семейств конструктивных объектов и сформулирована программа их изучения в терминах свойств так называемых полурешеток Роджерса. В работе [3] показано что полурешотка Роджерса двухэлементного семейства вложенных вычислимо перечислимых (в.п.) множеств бесконечно. А если в конечном семействе в.п. множеств любая пара множеств не вложены, тогда полурешетка Роджерса этого семейства будет одноэлементной.

Полученные к настоящему времени результаты о полурешетках вычислимых нумераций семейств множеств иерархии Ершова выявили новые феномены, не присущие классическим вычислимым нумерациям семейств в.п. множеств. В частности, было доказано существование семейств, состоящих из двух вложенных множеств, полурешетка Роджерса которых одноэлементна [4].

Понятие n-вычислимо перечислимого (n-в.п.) множества было предложено C.J. Ash, J.F. Knight в индуктивной форме [5]: 1-*в.п.* множества – это в точности в.п. множества, а каждое $(n+1)$-*в.п.* множество – это разность некоторого в.п. и некоторого n-в.п. множеств. n-в.п. множества образуют уровень Σ^{-1}_n иерархии Ершова [6], о них также говорят как о Σ^{-1}_n-множествах.

Сюръективное отображение α множества натуральных чисел ω на непустое множество $\mathcal{A}$ называется нумерацией множества $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ – семейство множеств из уровня Σ^{-1}_n, $n \geq 1$, иерархии Ершова. Нумерация $\alpha : \omega \to \mathcal{A}$ называется Σ^{-1}_n-*вычислимой*, если

$$\{\langle x, n\rangle | x \in \alpha(n)\} \in \Sigma^{-1}_n.$$

Ясно, что понятие Σ^{-1}_1-вычислимой нумерации совпадает с классическим понятием вычислимой нумерации семейства в.п. множеств [3]. Множество всех Σ^{-1}_n-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathrm{Com}^{-1}_n(\mathcal{A})$. Нумерация α семейства $\mathcal{A}$ *сводится* к нумерации β этого семейства (символически $\alpha \leq \beta$), если существует рекурсивная функция f, для которой $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются эквивалентными ($\alpha \equiv \beta$). Обозначим через $\deg(\alpha)$ *степень нумерации* α, т.е. совокупность нумерации $\{\beta | \beta \equiv \alpha\}$. Отношение сводимости нумерации является предпорядком на $\mathrm{Com}^{-1}_n(\mathcal{A})$ и индуцирует отношение частичного порядка на множестве степеней нумерации из $\mathrm{Com}^{-1}_n(\mathcal{A})$, которое также будем обозначать через $\leq$. Частично упорядоченное множество

$$\mathcal{R}^{-1}_n(\mathcal{A}) \rightleftharpoons \langle\{\deg(\alpha) | \alpha \in \mathrm{Com}^{-1}_n(\mathcal{A})\}, \leq\rangle$$

является верхней полурешеткой, и называется полурешеткой Роджерса семейства $\mathcal{A}$.

Следующая теорема утверждает, что существуют Σ^{-1}_2-вычислимые семейства такие, что полурешетка Роджерса 2-го и 3-го уровня иерархии Ершова этого семейства не изоморфны.

Теорема 1. *Найдется двухэлементное семейство Σ^{-1}_2-множеств $S = \{A, B\}$ такие, что $|\mathcal{R}^{-1}_2(S)| = 1$ и $|\mathcal{R}^{-1}_3(S)| > 1$.*

В то же время не для всех двухэлементных семейств Σ^{-1}_2-множеств утверждение теоремы 1 остаётся верной.

Теорема 2. *Найдется двухэлементное семейство Σ^{-1}_2-множеств $S = \{A, B\}$ такие, что $|\mathcal{R}^{-1}_2(\mathcal{S})| = |\mathcal{R}^{-1}_3(\mathcal{S})| = 1$.*

Следствие. *Существуют бесконечно много различных двухэлементных семейств такие как в теореме 1 и бесконечно много различных двухэлементных семейств такие как в теореме 2.*

Литература

1. *Гончаров С.С., Сорби А.* Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. -1997, -Т. 36, No 6. -С. 621-641.
2. *Badaev S.A., Goncharov S.S.* Theory of numberings: open problems// Computability theory and its applications. -2000. -Т. 257, С. 23-38.
3. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. Москва: Наука, 1977. -416 с.
4. *Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T.* Computable numberings in the hierarchy of Ershov // in: Goncharov, S.S. (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), NJ, World Scientific, -2006, -С. 17-30.