Л.Н. Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫ

ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

1995 жылдан шыға бастады ■ Основан в 1995 г. ■ Since 1995

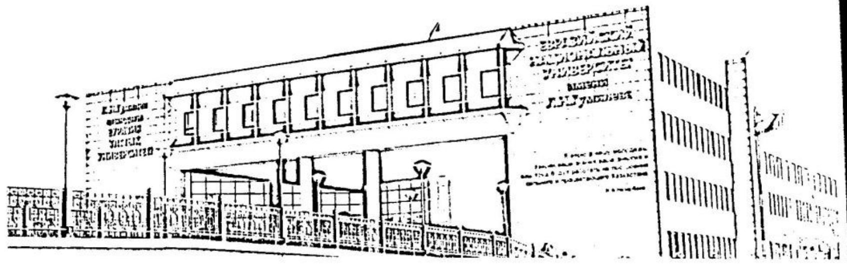
ISSN 1028-9364

SCIENTIFIC JOURNAL

HERALD

L.N. Gumilyov Eurasian
national University

№ 4 (107) 2015



I
БӨЛІМ

МАЗМҰНЫ	СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.958; 538.221

Есмаханова К.Р., Мырзакулова Ж.Р., Тапеева С.К., Тунгушбаева Д.И.

Одно-солитонные решения для (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера и Максвелла-Блоха

(*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*)

В данной работе, получим преобразование Дарбу для (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера и Максвелла-Блоха. Одно-солитонные решения построим с помощью преобразования Дарбу первого порядка.

Введение. В последние годы, нелинейная наука стала мощным предмет для объяснения тайны присутствующей в проблемах развития науки и технологий на сегодняшний день. Важным элементом в развитии теории солитона и полной интегрируемости было взаимодействие между математикой и физикой. Хорошо известно, что преобразование Дарбу является эффективным методом для получения солитонных решений для интегрируемых уравнений [1]-[6].

Целью данной работы является построение преобразования Дарбу, который используется для получения одно-солитонных решений уравнений НУШ и МБ.

Рассмотрим (1+1)-мерное нелинейное уравнения Шредингера и Максвелла- Блоха (НУШ и МБ):

$$\begin{aligned} q_t + iq_{xx} + 2i|q|^2q + 2p &= 0, & (1)\\ p_x + 2qp + 2i\omega p &= 0, & (2)\\ \eta_x - qp^* - q^*p &= 0, & (3)\end{aligned}$$

где $q(x,t)$ и $p(x,t)$-комплексные функции, $\eta(x,t)$ и ω -функции действительных переменных, x и t -действительные постоянные и через " $*$ " обозначим комплексное сопряжение.

Представление Лакса для уравнения НУШ и МБ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_x &= A\Psi, & (4)\\ \Psi_t &= B\Psi, & (5)\end{aligned}$$

где A и B матрицы с собственными параметрами

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda & -q \\ q^* & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda\sigma_3 + A_0, & (6)\\ B &= \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0 + \frac{1}{\lambda + i\omega}B_{-1}, \end{aligned}$$

где λ - комплексная постоянная

$$B_2 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2iq \\ -2iq^* & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} -iqq^* & -iq_x \\ iq_x^* & iqq^* \end{pmatrix},\ B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta & -p \\ -p^* & -\eta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

B_i обозначает матрицу коэффициентов члена λ^i

$$\Psi = \Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda,x,t) \\ \Psi_2(\lambda,x,t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

является собственной функцией, связаная с собственным значением параметра λ линейной системы (4)-(5). Для представления Лакса получим условие совместимости в следующем виде

$$A_t - B_x + AB - BA = 0. \quad (9)$$

Использование преобразования Дарбу первого порядка для НУШ и МБ будет введено в следующем разделе.

1. Преобразование Дарбу первого порядка для (1+1)-мерного НУШ и МБ

В этом разделе, дадим подробное доказательство преобразования Дарбу первого порядка для НУШ и МБ как в работе [7]. Рассмотрим следующие преобразования уравнения (4)-(5)

$$\Psi^{[1]} = T\Psi = (\lambda N - M)\Psi \tag{10}$$

где N и M матрицы 2×2

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Функция $\Psi^{[1]}$ удовлетворяет линейной системе

$$\Psi^{[1]}_x = A^{[1]}\Psi^{[1]}, \tag{12}$$
$$\Psi^{[1]}_t = B^{[1]}\Psi^{[1]}, \tag{13}$$

где $A^{[1]}$ и $B^{[1]}$ зависят от $q^{[1]}$, $p^{[1]}$, $\eta^{[1]}$ и λ. Тогда матрица T удовлетворяет следующим тождествам

$$T_x + TA = A^{[1]}T, \tag{14}$$
$$T_t + TB = B^{[1]}T. \tag{15}$$

Подставляя матрицы N и M в уравнении (15)-(16) и сравнивая коэффициенты обеих сторон получим следующее условие

$$n_{12} = n_{21} = 0, \quad (n_{11})_x = (n_{22})_x = 0. \tag{16}$$

Поэтому выберем $N = I$. Далее матрицы T берем в виде $T = \lambda I - M$. Из формулы (14) получим

$$\lambda^2: \quad I\sigma_3 = \sigma_3 I. \tag{17}$$

$$\lambda^1: \quad A^{[1]}M = -M\sigma_3 M + A_0 M + \sigma_3 M^2 \tag{18}$$

$$\lambda^0: \quad M_x + MA_0 = A_0^{[1]}M \tag{19}$$

Из выражения (18) имеем

$$q^{[1]} = q^* + 2m_{12}, \tag{20}$$

$$q^{*[1]} = q^* + 2m_{21} \tag{21}$$

Элементы матрицы M удовлетворяют условию $m_{21} = m^*_{12}$.

Подставляя элементы матриц в уравнении (16) и сравнивая коэффициенты при λ с обеих сторон получим следующие условия

$$\lambda^3: \quad B_2 = B_2^{[1]}, \tag{22}$$

$$\lambda^2: \quad -MB_2 + B_1 = B_1^{[1]} - B_2^{[1]}M, \tag{23}$$

$$\lambda^1: \quad -MB_1 + B_0 \;=\; B_0^{[1]} - B_1^{[1]}M, \tag{24}$$

$$\lambda^0: \quad -M_t - MB_0 + B_{-1} \;=\; -B_{-1}^{[1]} - B_0^{[1]}M, \tag{25}$$

$$\frac{1}{\lambda + i\omega}: \quad -i\omega B_{-1} - MB_{-1} \;=\; -i\omega B_{-1}^{[-1]}M - B_{-1}^{[1]}M. \tag{26}$$

Отсюда имеем

$$B_{-1}^{[1]} = (M + i\omega I)B_{-1}(M + i\omega I)^{-1}. \tag{27}$$

Для матрицы $B_{-1}^{[1]}$:

$$trB_{-1}^{[1]} = 0, \; \eta^{[1]} \equiv (B_{-1}^{[1]})_{11}, \quad (B_{-1}^{[1]})_{12}^{*} = (B_{-1}^{[1]})_{21}.$$

Запишем матрицу M в виде

$$M = H\Lambda H^{-1}, \tag{28}$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1, t, z) & \Psi_1(\lambda_2, t, z) \\ \Psi_2(\lambda_1, t, z) & \Psi_2(\lambda_2, t, z) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Здесь $\det H \neq 0$ и λ_1, λ_2 комплексные постоянные. Используя формулы (4), (5) и (29) получим

$$H_x = \sigma_3 H\Lambda + A_0 H, \tag{30}$$

$$H_t = B_2 H\Lambda^2 + B_1 H\Lambda + B_0 H + B_{-1}H\Sigma, \tag{31}$$

где $\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 + i\omega} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} \end{pmatrix}$. Возьмем матрицу H в следующем виде

$$\lambda_2 \;=\; -\lambda_1^{*}, \tag{32}$$

$$H \;=\; \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1, t, z) & -\Psi_2^{*}(\lambda_1, t, z) \\ \Psi_2(\lambda_1, t, z) & \Psi_1^{*}(\lambda_1, t, z) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Подставляя (28) в (20) и (27) получим решения для НУШ и МБ

$$q^{[1]} \;=\; q + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)\Psi_2^{*}\Psi_1}{\Delta}, \tag{34}$$

$$\eta^{[1]} \;=\; \frac{1}{\nabla}[(|m_{11} + i\omega|^2 + |m_{12}^2|)\eta + pm_{12}^{*}(m_{11} + i\omega) - p^{*}m_{12}(m_{11}^{*} + i\omega)], \tag{35}$$

$$p^{[1]} \;=\; \frac{1}{\nabla}[(m_{11} + i\omega)(m_{12} + m_{12}^{*})\eta + p(m_{11} + i\omega)^2 - p^{*}m_{12}^2], \tag{36}$$

$$p^{[1]^{*}} \;=\; -\frac{1}{\nabla}[(m_{12} + m_{12}^{*})(m_{11}^{*} + i\omega)\eta - p^{*}(m_{11}^{*} + i\omega)^2 + p(m_{12}^{*})^2]. \tag{37}$$

где $\nabla = \Delta^2$.

Одно-солитонные решения для НУШ и МБ

В этом разделе построим одно-солитонные решения для НУШ и МБ. При условиях $q = 0, p = 0, \eta = 1, \lambda_1 = \nu_1 + i\rho_1, (\nu_1, \rho_1 \in R)$

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (38)$$
$$\Psi_t = B\Psi, \quad (39)$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (40)$$
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad (41)$$
$$B = \begin{pmatrix} -2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda + i\omega} & 0 \\ 0 & 2\lambda^2 - \frac{1}{\lambda + i\omega} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Из линейной системы (38), (39) получим собственные функции

$$\Psi_1 = \exp(\lambda_1 x - 2i\lambda_1^2 t + \frac{1}{\lambda_1 + i\omega}t + \frac{x_0 + iy_0}{2}), \quad (43)$$
$$\Psi_2 = \exp(-\lambda_1 x + 2i\lambda_1^2 t - \frac{1}{\lambda_1 + i\omega}t - \frac{x_0 + iy_0}{2} + i\theta), \quad (44)$$

где x_0, y_0, ω и θ действительные постоянные. Одно-солитонное решение имеет вид [7]

$$q^{[1]} = 2\nu_1 sech[\tilde{x}]e^{i\tilde{y} - i\theta} \quad (45)$$

$$\eta^{[1]} = \frac{\nu_1^2 sech^2[\tilde{x}] + (\rho_1 - \omega)^2 cosh^2[\tilde{x}] - \nu_1^2}{\nu_1^2 sech^2[\tilde{x}] + (\rho_1 - \omega)^2 cosh^2[\tilde{x}] + \nu_1^2}, \quad (46)$$

$$p^{[1]} = 2\frac{\nu_1^2 sech[\tilde{x}] + i\nu_1(\rho_1 - \omega)cosh[\tilde{x}]}{\nu_1^2 sech^2[\tilde{x}] + (\rho_1 - \omega)^2 cosh^2[\tilde{x}] + \nu_1^2}, \quad (47)$$

где

$$\tilde{x} := 2\nu_1 x + 8\nu_1\rho_1 t + \frac{2\nu_1}{\nu_1^2 + (\rho_1 + \omega)^2}t + x_0, \quad (48)$$

$$\tilde{y} := 2\rho_1 x - 4(\nu_1^2 + \rho_1^2)t - 2\frac{2(\rho_1 + \omega)}{\nu_1^2 + (\rho_1 + \omega)^2}t + y_0. \quad (49)$$

Заключение. В данной работе мы построили преобразование Дарбу для (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера и Максвелла-Блоха (НУШ и МБ). С помощью преобразования Дарбу были построены одно-солитонные решения для (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера и Максвелла-Блоха (НУШ и МБ).

Литература

1 S. W. Xu, J. S. He and L. H. Wang. The Darboux transformation of the derivative nonlinear Schrödinger equation// J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V.44. 305203.
2 V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux transformations and solitons// Springer, Berlin. 1991. 3 Chuanzhong Li, Jingsong He, K. Porsezian. Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations// [arXiv:1205.1191]
4 Chuanzhong Li, Jingsong He. Darboux transformation and positons of the inhomogeneous Hirota and the Maxwell-Bloch equation// [arXiv:1210.2501]
5 Jieming Yang, Chuanzhong Li, Tiantian Li, Zhaoneng Cheng. Darboux transformation and solutions of the two-component Hirota-Maxwell-Bloch system// Chin. Phys Lett. V. 30, N10. 104201. 2013. arXiv:1310.0617.
6 Zh. Kh. Zhunussova, K. R. Yesmakhanova, D. I. Tungushbaeva, G. K. Mamyrbekova, G. N. Nugmanova, R. Myrzakulov. Integrable Heisenberg Ferromagnet Equations with self-consistent potentials.// [arXiv:1301.1649] 7 J. S. He, Y. Cheng and Y. S. Li. The Darboux Transformation for NLS-MB Equation// Commun. Theor. Phys. 2002. -P.493-496.

Қ.Р. Есмаханова, Ж.Р. Мырзакулова, С.Қ. Тапеева, Д.И. Тунгушбаева
(1+1)-өлшемді сызықты емес Шредигер теңдеуі және Максвелл-Блох теңдеуінің бір-солитондық шешімдері
Осы мақалада біз (1+1)-өлшемді сызықты емес Шредигер теңдеуі және Максвелл-Блох теңдеуінің бір-солитондық шешімдері құрастырамыз, Дарбу түрлендіру әдісін пайдаланып.

K.R. Yesmakhanova, Zh.R. Myrzakulov, S.K. Tapeeva, D.I. Tungushbaeva
One-soliton solution for (1+1)-dimensional nonlinear Schrodinger and Maxwell-Bloch equation
In this paper we derive Darboux transformation of the (1+1)-dimensional nonlinear Schrodinger and Maxwell-Bloch equation. One-soliton solutions for this equation are obtained by Darboux transformation.

Поступила в редакцию 20.05.2015.