УДК

М. Е. АБИШЕВ, С. ТОКТАРБАЙ, Б. А. ЖАМИ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ОРБИТ ПРОБНОГО ТЕЛА В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ В МЕХАНИКЕ ОТО

Аннотация. В работе рассмотрена проблема орбитальной устойчивости кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел, когда возмущения от второго тела порядка релятивистских поправок движению пробного тела от центрального тела. Все тела, рассматриваемые в задаче, не имеют собственного вращения.

Ключевые слова: ОТО, задача трех тел, адиабатическая теория движения, орбитальная устойчивость.

Тірек сөздер: ЖСТ, үш дене есебі, қозғалыстың адиабаттық теориясы, орбиталық орнықтылық.

Keywords: GTR, three body problem, adiabatic theory of motion, orbital stability.

Задача трех тел имеет глубокое теоретическое и обширное прикладное значение в современной классической небесной механике, но ее всестороннее и детальное рассмотрение в рамках релятивистской небесной механики практически не ведется, так как до настоящего времени отсутствовали соответствующие наблюдательные данные и все вычисления и теоретические выкладки сталкиваются с огромными техническими трудностями. Отсутствие наблюдательных данных связано в основном с отсутствием предсказаний теории, так как эта задача практически не разработана, а также наличием множества факторов, которые по своему действию иногда намного превосходят общерелятивистские эффекты, и выделить их от общего фона не представляется возможным. Но в нашем случае, как мы считаем, космогонические общерелятивистские эффекты могут быть весьма существенными, даже определяющими эволюцию системы тел, особенно когда дело касается устойчивости орбитального движения небесных тел.

Здесь мы рассматриваем задачу об орбитальной устойчивости кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел, когда возмущения от движущегося по круговой орбите второго тела в области движения пробного тела (в плоскости движения второго тела) порядка релятивистских поправок движению пробного тела от центрального тела

$$U_1 << c^2, U_2 << U_1 \tag{1}$$

где U_1, U_2 потенциалы центрального и второго тел соответственно. Все рассматриваемые тела не имеют собственного вращения. Положение покоящегося центрального тела совпадает с точкой отсчета координат, второе тело движется по кругу вокруг центрального (первого) тела и не подвергается возмущению. Пробное тело движется по возмущенной круговой орбите. Данная задача относится к классу квазикеплеровых, и мы применим к нему хорошо апробированную в механике ОТО адиабатическую теорию движения тел, разработанную академиком М. М. Абдильдиным. Релятивистская функция Лагранжа рассматриваемой задачи имеет вид [1–3]:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + \gamma\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2|} + \gamma\frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_3|} + \gamma\frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{8c^2}\left(m_2 v_2^4 + m_3 v_3^4\right) \\ & + \frac{\gamma}{2c^2}\left[\frac{3m_1 m_2}{|\vec{r}_2|}v_2^2 + \frac{3m_1 m_3}{|\vec{r}_3|}v_3^2 + \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\left(3v_2^2 + 3v_3^2 - 7(\vec{v}_2\vec{v}_3) - \frac{\left(\vec{v}_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right)\right)\left(\vec{v}_3\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right)\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2}\right)\right] \\ & - \frac{\gamma^2}{c^2} m_1 m_2 m_3\left(\frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_3||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\right) \\ & - \frac{\gamma^2}{2c^2}\left(\frac{m_1 m_2\left(m_1 + m_2\right)}{|\vec{r}_2|^2} + \frac{m_1 m_3\left(m_1 + m_3\right)}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{m_2 m_3\left(m_2 + m_3\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Наша задача – найти уравнение эволюционного движения пробного (третьего) тела, которое описывает среднее изменение его орбитального момента. Для этого запишем функцию Гамильтона рассматриваемой системы и воспользуемся следующими выражениями

$$H=\vec{v}_i\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}-L;\quad \dot{\vec{r}}_3=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_3};\quad \dot{\vec{p}}_3=-\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_3};\quad \vec{M}=\left[\vec{r}_3,\vec{p}_3\right]; \tag{3}$$

$$\dot{\vec{M}}=\left[\dot{\vec{r}}_3,\vec{p}_3\right]+\left[\vec{r}_3,\dot{\vec{p}}_3\right] \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
H=\;&\frac{p_3^{\,2}}{2m_3}+\frac{p_2^{\,2}}{2m_2}-\gamma\left(\frac{m_1m_2}{|\vec{r}_2|}+\frac{m_1m_3}{|\vec{r}_3|}+\frac{m_2m_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}\right)-\frac{1}{8c^2}\left(\frac{p_3^{\,4}}{2m_3^{\,3}}+\frac{p_2^{\,4}}{2m_2^{\,3}}\right)\\
&+\frac{\gamma}{2c^2|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}\left(7\left(\vec{p}_3\vec{p}_2\right)+\frac{\left(\vec{p}_3\left(\vec{r}_2-\vec{r}\right)\right)\left(\vec{p}_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}\right)\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^2}\right)-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(\frac{m_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}+\frac{m_1}{|\vec{r}_2|}\right)\frac{p_2^{\,2}}{m_2}\\
&-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(\frac{m_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|}+\frac{m_1}{|\vec{r}_3|}\right)\frac{p_3^{\,2}}{m_3}+\frac{\gamma^2}{c^2}m_1m_2m_3\left(\frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_3|}+\frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_2-\vec{r}_3|}+\frac{1}{|\vec{r}_3||\vec{r}_2-\vec{r}_3|}\right)\\
&+\frac{\gamma^2}{2c^2}\left(\frac{m_1m_2\left(m_1+m_2\right)}{|\vec{r}_2|^2}+\frac{m_1m_3\left(m_1+m_3\right)}{|\vec{r}_3|^2}+\frac{m_2m_3\left(m_2+m_3\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^2}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{\vec{r}}_3=\frac{\vec{p}_3}{m_3}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{p_3^{\,2}}{m_3^{\,2}}+3\gamma\left(\frac{m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}+\frac{m_1}{|\vec{r}_3|}\right)\right)\right]+\frac{\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}\left(7\vec{p}_2+\frac{\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\left(\vec{p}_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^2}\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}}_3=\;&-\gamma\frac{m_1m_3}{|\vec{r}_3|^3}\vec{r}_3+\gamma\frac{m_2m_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)-\frac{7\gamma}{2c^2}\frac{\left(\vec{p}_2\vec{p}_3\right)\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\\
&-\frac{\gamma}{2c^2}\left[\frac{3\left(\vec{p}_3\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)\left(\vec{p}_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}-\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\left[\vec{p}_2\left(\vec{p}_3\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)+\vec{p}_3\left(\vec{p}_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)\right]\right]\\
&+\frac{3\gamma}{2c^2}\left[\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{m_2}\frac{m_3\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}+\frac{\vec{p}^{\,2}}{m_3}\left(\frac{m_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{m_1\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|^3}\right)\right]\\
&-\frac{\gamma^2m_1m_2m_3}{c^2}\left[-\frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_2||\vec{r}_3|^3}-\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2|}-\frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3||\vec{r}_3|^3}+\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3|\vec{r}_3|}\right]\\
&+\frac{\gamma^2}{c^2}\left[\frac{m_1m_3\left(m_1+m_3\right)\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|^4}-\frac{m_2m_3\left(m_2+m_3\right)\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^4}\right]
\end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя найденные выражения в (4), получим изменение орбитального момента:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{M}}=\;&\left\{\gamma m_2m_3-\frac{7\gamma}{2c^2}\left(\vec{p}_2\vec{p}_3\right)-\frac{3\gamma}{2c^2}\frac{\left(\vec{p}_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)\left(\vec{p}_3\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^2}\right.\\
&\left.+\frac{3\gamma m_2m_3}{2c^2}\left(\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{m_2^2}+\frac{\vec{p}_3^{\,2}}{m_3^2}\right)-\frac{\gamma^2}{c^2}m_1m_2m_3\left(\frac{1}{|\vec{r}_2|}+\frac{1}{|\vec{r}_3|}\right)\right\}\frac{\left[\vec{r}_3,\vec{r}_2\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\\
&+\frac{\gamma}{2c^2}\left(\vec{p}_3\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)\frac{\left[\vec{r}_3,\vec{p}_2\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{\gamma}{2c^2}\left(\vec{p}_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)\frac{\left[\vec{r}_2,\vec{p}_3\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{\gamma}{c^2}\frac{\left(\vec{p}_2\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\right)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\vec{M}+\frac{7\gamma}{2c^2}\frac{\left[\vec{p}_2,\vec{p}_3\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}
\end{aligned} \tag{8}$$

Для получения уравнения эволюционного движения нужно проинтегрировать уравнение (8) по периоду повторения конфигураций системы Т (синодическому периоду пробного тела):

$$\overline{\dot{\vec{M}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\vec{M}} dt \tag{9}$$

где

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3};$$

Возмущенное движение пробного тела описывается выражением

$$r = r_{kep} + r_p + r_{rel} \tag{10}$$

где

$$r_{kep} = \frac{p}{1 + e\cos\omega_3 t};$$

где r_{kep} описывает невозмущенное движение, r_p описывает классическое возмущение от второго тела, а третий член является релятивистской поправкой [4]. В классическом рассмотрении данной задачи показано [5], что возмущение от второго тела в эволюционном уравнении обращается в ноль. Отмечая, что в этой задаче работает принцип суперпозиции малых возмущений [6], мы можем опустить r_p. Импульсы стоят только в релятивистских поправках, поэтому там можно подставить классические выражения. Тогда, подставляя радиус-вектор пробного тела

$$\vec{r}_3 = r_{kep}\left(\vec{i}\cos\omega_3 t + \vec{j}\sin\omega_3 t\right) \tag{11}$$

и второго тела

$$\vec{r}_2 = r_2\left(\vec{i}\cos\omega_2 t + \vec{j}\sin\omega_2 t\right) \tag{12}$$

а также импульсы как производные от них умноженные на соответствующие массы, и проинтегрировав по периоду Т

$$\overline{\dot{\vec{M}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\dot{\vec{M}}_{kep} + \dot{\vec{M}}_{rel}\right) dt \tag{13}$$

получим уравнения эволюционного движения

$$\overline{\dot{\vec{M}}} = \overline{\dot{\vec{M}}}_{kep} + \overline{\dot{\vec{M}}}_{rel} \tag{14}$$

Среднее от Кеплерова движения равняется нулю

$$\overline{\dot{\vec{M}}}_{kep} = 0 \tag{15}$$

Далее, проинтегрировав релятивистскую составляющую, получим ноль

$$\overline{\dot{\vec{M}}}_{rel} = 0 \tag{16}$$

Орбитальная устойчивость движения пробного тела по определению означает равенство нулю среднего изменения момента импульса. Как мы видим из полученного выражения, в общем случае движение пробного тела в плоскости орбиты второго тела является устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

2 Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972, –382 с.

3 Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ университеті, 2006. – 132 с.

4 Hans C. Ohanian and Remo Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd edn., Cambridge University Press, 2013. – 530 p.

5 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968. – 799 с.

6 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. –Алма-Ата: Наука, 1988. – 198 с.

REFERENCES

1 Landau L.D., Lifshitz E.M. Teorya polya . – M.: Nauka, 1973, – 400 s.

2 Brumberg B.A. Relativistskaya nebesnaya mechanika. – M.: Nauka, 1972, –382 s.

3 Abdildin M.M. Problema dvizheniya tel v obshei teorii otnositelnosti. – Almaty: Kazakh Universiteti , 2006, –132 s.
4 Hans C. Ohanian and Remo Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd edn., Cambridge University Press, 2013, –530 p.
5 Duboshin G.N. Nebesnaya mechanika. Osnovnye zadachi i metody. – M.: Nauka, 1968, –799 s.
6 Abdildin M.M. Mechanika teorii gravitatsii Einshteina. – Alma-Ata: Nauka, 1988, –198 s.

Резюме

М. Е. Әбішов, С. Тоқтарбай, Б. А. Жәми

(Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан)

ЖСТ МЕХАНИКАСЫНЫҢ ШЕКТЕЛГЕН ҮШ ДЕНЕ ЕСЕБІНДЕГІ СЫНАҚ ДЕНЕСІНІҢ ДӨҢГЕЛЕК ОРБИТАЛАРЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста, екінші дене тарапынан болатын ұйытқу мен сынақ денесінің қозғалысына орталық дене тарапынан болатын релятивтік түзетулер шамалас болғандағы шектелген үш дене есебіндегі сынақ денесінің дөңгелек орбитасының орнықтылық мәселесі қарастырылған. Қарастырылып отырған есептегі барлық денелердің өздік айналуы жоқ деп есептелінеді.
Тірек сөздер: ЖСТ, үш дене есебі, қозғалыстың адиабаттық теориясы, орбиталық орнықтылық.

Summary

M. E. Abishev, S. Toktarbay, B. A. Zhami

(Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

ON THE STABILITY OF CIRCULAR ORBITS OF A TEST BODY IN THE RESTRICTED THREE BODY PROBLEM IN GR MECHANICS

The paper considers the problem of orbital stability of a circular motion of a test body in the restricted three body problem, when disturbances from the second body of the order of relativistic corrections to the motion of a test body from the central body. It is considered that all bodies do not have own rotation in the problem.
Keywords: GTR, three body problem, adiabatic theory of motion, orbital stability.