Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева

КазНТУ

О. П. Волобуева

ҚАЗ ҰТУ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебник

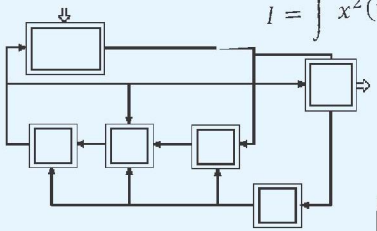
$$I = \int_0^\infty x^T Q X dt \to \min_{u \in U}$$

$$I = \int_0^\infty x_1^2(t)dt \to \min_{u \in U}$$

$$I = \int_0^\infty x^2(t)dt \to \min_{u \in U}$$

$$I(*) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt + g[t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)] \to \min_{u \in U}$$

$$I = \int_0^\infty x^2(t)dt \to \min_{u \in U}$$



$$F_x - \frac{dx}{dt}(F_x) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_i} \\ \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt = (t_1 - t_0) \to \min_{u \in U}$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К. И. Сатпаева

О. П. Волобуева

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан в качестве учебника для вузов

Второе издание, переработанное и дополненное

Алматы 2015

УДК 519.7 (075.8)
ББК 22.18 я 73
В 68

Рецензенты:
Р.Г. Бияшев, зам. директора ИПИ и У МОН РК, д-р техн. наук, проф.
Б. Ж. Хисаров, проф. каф. "Инженерная кибернетика"АУЭС, канд. техн. наук.
Б.К. Курманов, асс.проф. каф. "Компьютерная инженерия" КБТУ, канд. техн. наук.
Ш.К. Кошимбаев, проф. каф. Автоматизации и управления КазНТУ им. К.И. Сатпаева, канд. техн. наук.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2015 г.

В 68 Волобуева О. П. Основы теории управления: Учебник. – 2-е изд., перераб. и доп. – Алматы: КазНТУ, 2015. – 308 с. Ил. 141. Табл. 5. Библиогр. – 56 назв.
ISBN 978-601-228-796-7

В учебнике достаточно подробно излагается теория линейных управляемых динамических систем. Рассматриваются методы исследования устойчивости, анализа качества переходных процессов в линейных стационарных системах, синтеза линейной системы с заданным качеством в пространстве состояний. Остальная часть книги посвящена нелинейным, цифровым и оптимальным системам.

Учебник предназначен для бакалавров, обучающихся по специальностям 5В070300 «Информационные системы» и 5В070400«Вычислительная техника и программное обеспечение», а также может быть полезендля магистрантов и научно-технических работников, участвующих в исследованиях и проектировании современных САУ, САР, ИУС и других компьютерных систем.

УДК 519.7 (075.8)
ББК 22.18 я 73

ISBN 978-601-228-796-7

©Волобуева О. П., 2015
©КазНТУ, 2015

Посвящается 80-летию
Казахского национального
технического университета
имени К. И. Сатпаева

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интенсивное развитие современных средств измерительной и вычислительной техники привело к широкому распространению систем автоматического управления (САУ) в различных отраслях промышленности. При проектировании таких систем используются классические методы, которые применяются при анализе и синтезе систем непрерывного и дискретного действия. Внедрению цифровых систем управления в значительной степени способствует использование микропроцессоров и микро-ЭВМ. Без систем оптимального управления невозможно представить себе реальный сектор. Поэтому предлагаемая вниманию читателей книга посвящена методам анализа и синтеза непрерывных линейных, нелинейных, цифровых САУ и систем оптимального управления.

Основное внимание уделено непрерывным автономным системам с сосредоточенными параметрами, динамика которых полностью описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Классический математический аппарат используется для анализа устойчивости динамических систем, оценки качества переходных процессов, установления свойств полной управляемости и наблюдаемости систем, а также для решения задачи параметрического синтеза САУ с желаемым качеством. Значительная часть книги посвящена методам анализа и параметрического синтеза нелинейных и цифровых САУ с учетом их особенностей, а также системам оптимального управления. Наибольшее предпочтение отдано методам пространства состояний. Привлекательность данного подхода заключается в том, что алгоритмы анализа и синтеза сложных систем могут быть наиболее точно и просто реализованы на ЭВМ.

Настоящая книга написана на основе курса лекций, прочитанных в Казахском национальном техническом университете им. К.И. Сатпаева, адресована студентам технических специальностей, изучающих курс “Основы теории управления”, магистрантам и специалистам, участвующим в проектировании современных САУ, ИУС, САР, САПР САУ, АСНИ, САНТИ и других компьютерных систем.

Автор выражает свою признательность профессору Д. Н. Шукаеву за деятельное участие в обсуждении отдельных глав, способствующих улучшению качества книги. Все замечания и пожелания автор примет с благодарностью и использует в дальнейшей работе над книгой.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие современных средств измерительной и вычислительной техники привело к широкому распространению систем автоматического управления (САУ) в различных отраслях промышленности. При проектировании таких систем используются классические методы, которые применяются при анализе и синтезе систем непрерывного действия. Основой математического аппарата проектирования непрерывных систем являются дифференциальные уравнения, позволяющие описывать динамику систем в реальном времени. Следует отметить, что современный математический аппарат описания САУ в пространстве состояний позволяет представить более полно динамическую систему, т. е. не только управляемую часть системы (классический математический аппарат), но и неуправляемую. Кроме того, представление системы в пространстве состояний позволяет наиболее просто реализовывать алгоритмы параметрического синтеза САУ на ЭВМ, что вызывает наибольший интерес в связи с конкретными практическими приложениями.

Книга состоит из семи глав. В первой главе излагаются основные понятия и определения систем автоматического управления; приведен один из вариантов классификации систем автоматического управления; математическое описание САУ и ее элементов в терминах “вход – выход” и в пространстве состояний. Рассматриваются временные и частотные характеристики типовых звеньев САУ; алгебра структурных преобразований; интегральное преобразование Лапласа. Подчеркивается, что рассмотрение свойств системы в двух пространствах не противоречит друг другу, а только дополняет, т. е. делает более полным представление динамической системы и ее свойств.

Проблеме устойчивости непрерывных САУ посвящена вторая глава. Дается постановка проблемы устойчивости по А. М. Ляпунову. Анализ устойчивости системы осуществляется в терминах "вход–выход" и в пространстве состояний: теоремы А. М. Ляпунова по первому приближению, алгебраические критерии А. Гурвица и Э. Рауса, частотные критерии А. В. Михайлова и Г. Найквиста, а также по виду ЛАХ. Приводится построение областей устойчивости в плоскости одного и двух параметров методом, предложенным Ю. И. Неймарком.

В третьей главе предложены методы оценки качества линейных САУ: прямые – по виду переходного процесса; корневые – по корням характеристического уравнения; интегральные оценки качества.

Постановке задачи синтеза САУ и ее решению (в двух пространствах) посвящена четвертая глава книги. Изложен метод синтеза корректирующего устройства в прямой связи системы и выбор его параметров. Рассмотрено решение задачи параметрического синтеза САУ в пространстве состояний с использованием модального закона управления.

Пятая глава посвящена нелинейным системам и исследованию их свойств. Рассмотрены основные типы нелинейностей; точные методы исследования свойств нелинейных САУ. Изображение движений в фазовой плоскости. Системы с переменной структурой. Второй (прямой) метод А. М. Ляпунова для исследования устойчивости движения системы. Абсолютная устойчивость. Критерий В. М. Пóпова.

Цифровым системам управления посвящена шестая глава. Приводятся кратко математический аппарат описания дискретных САУ, z-преобразование, анализ устойчивости и оценка качества дискретных САУ. Укрупненный алгоритм параметрического синтеза дискретных САУ.

Системы оптимального управления представлены в седьмой главе. Приведены методы классического вариационного исчисления. Критерии оптимальности управления. Линейные системы, оптимальные по быстродействию. Принцип максимума Л. С. Понтрягина. Функциональное уравнение Р. Беллмана. Метод динамического программирования Р. Беллмана.

В заключение каждой главы приводятся вопросы и задачи, позволяющие закреплять теоретический материал. Каждая глава в книге автономна, тем не менее, рекомендуется последовательное прочтение книги.

Книга написана на основе курса лекций, прочитанных в Казахском национальном техническом университете. Она рассчитана на студентов вузов, изучающих курс “Основы теории управления”, магистрантов и специалистов, участвующих в исследовании и проектировании современных САУ, САР, ИУС и других компьютерных систем.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данной главе представлены основные термины теории управления, один из вариантов классификации САУ и математический аппарат описания динамических систем.

1.1. Основные термины теории управления

Управление – это процесс целенаправленного воздействия на объект регулирования для достижения поставленной цели при условии наличия возмущений, препятствующих ему.

Термин “управление” является более общим, чем термин “регулирование”. Управление – это, например, спуск по горнолыжной трассе: здесь четко определены цели; нечетко – возмущения, так как в качестве возмущений можно взять расставленные препятствия, мягкий или жесткий снег и т. д., и совсем не определены методы достижения цели.

Объектом управления (ОУ) в курсе “Основы теории управления” является динамическая система. *Динамическая система* – это система, состояние которой на выходе определяется не только тем, что действует в данный момент на входе, но и всей предысторией. Иногда эти системы называют системами *с последствием*.

Объект управления обозначается следующим образом:

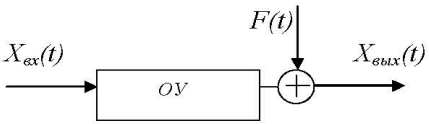


Рис. 1.1а. Представление объекта управления

Здесь (рис. 1.1а, 1.1б, 1.1с) введены следующие обозначения: $F(t)$ – возмущающее воздействие, $X_{вх}(t)$, $X_{вых}(t)$– входные и выходные переменные соответственно; $X_{\text{вых.зад.}}$ – задание; здесь и далее знак плюс (+) означает алгебраическую сумму, т.е. с учетом знаков сигналов.

Если точка приложения возмущения не определена, то ОУ изображают следующим образом (рис. 1.1 б). Как же представить структуру динамической системы управления? И каковы могут быть цели управления?

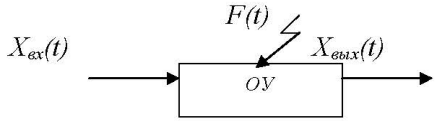


Рис. 1.1б. Представление объекта управления

Цели управления могут быть разными: получить максимальную производительность; достичь извлечения металла 98,9 %; иметь минимальные потери дорогостоящего компонента; достичь максимального быстродействия; обеспечить минимум расхода горючего и т. д. Важно четко сформулировать цель. Затем разработать методы ее достижения.

Чтобы представить структуру системы управления необходимо:

1) Представить ОУ следующим образом:

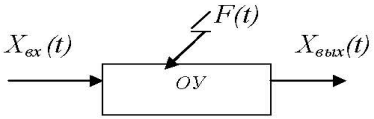


Рис. 1.1в. Представление объекта управления

2) Четко сформулировать цель ($X_{вых.зад}$):

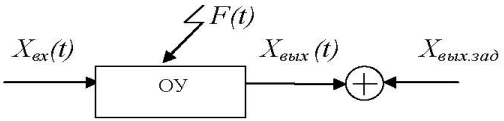


Рис. 1.1с. Представление ОУ с заданием

3) Выработать управляющее воздействие $\delta U(t)$, учитывающее разницу между тем, что задано (цель) и тем, что имеется на выходе в каждый момент времени:

$$e(t) = X_{вых}(t) - X_{вых.зад.}$$
$$\delta U(t) = ke(t).$$

4) Подать $\delta U(t)$ на управляющий вход ОУ:

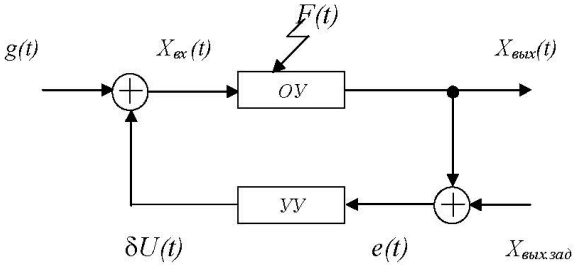


Рис. 1.2. Представление структуры системы управления

Таким образом, *процесс управления* – это выработка такого управляющего воздействия $\delta U(t)$ (рис. 1.2), реакция на которое бы минимизировала *рассогласованиее(t)* (разницу) между заданным и текущим значением выходного сигнала.

А всегда ли возможно управление? Необходимо оценить это. Существуют такие понятия как управляемость и наблюдаемость; полная управляемость и наблюдаемость, частичная управляемость и наблюдаемость.

Различают автоматические и автоматизированные системы управления.

Автоматические системы управления – это системы, которые в течение достаточно длительного времени нужным образом “изменяют" (или поддерживают неизменными) какие-либо физические величины (напряжение, частоту, температуру, давление и т. п.) в управляемом процессе.

Если же в управлении принимает участие человек, например, сам устанавливает напряжение, которое должно поддерживать система, то система называется *автоматизированной системой управления*.

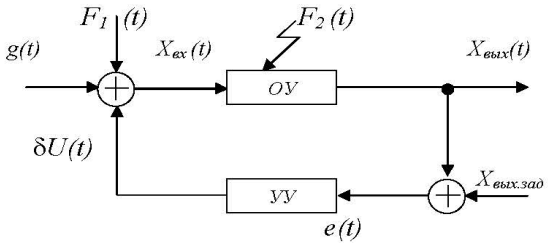


Рис. 1.3. Структура системы управления с обратной связью

Дополним терминологию для управляемых систем. *Понятия прямой и обратной связи.* Связь, совпадающая с направлением распространения основного сигнала от входа к выходу в ОУ, называется прямой; противоположная ей связь – обратной. Ниже будет достаточно подробно показано влияние обратной связи на свойства динамической системы.

Здесь (рис. 1.3) введены следующие обозначения: $X_{вых}(t)$ – регулируемая переменная; $X_{вх}(t)$ – регулирующая переменная; $X_{вых.зад.}$ – задание; $\delta U(t)$ – управляющее воздействие; $F_1(t)$, $F_2(t)$– возмущающие воздействия; *УУ* – управляющее устройство;$e(t)$ – рассогласование, т.е. разность между заданием $X_{вых.зад}$ и текущей выходной координатой $X_{вых}(t)$.

Управляющее устройство может быть реализовано программно на мини- или микро-ЭВМ; может быть реализовано аппаратно. Ниже (рис. 1.4) представлена аппаратная реализация управляющего устройства.

Управляющее устройство состоит из измерительного, усилительно-преобразовательного и исполнительного устройств Измерительное устройство – это чувствительный элемент, реагирующий на отклонение регулируемой величины. Усилительно-преобразовательное и исполнительное устройства служат для формирования регулирующего воздействия $\delta U(t)$на объект, для возможно более точного выполнения задачи регулирования при реально имеющемся возмущающем воздействии $F(t)$.

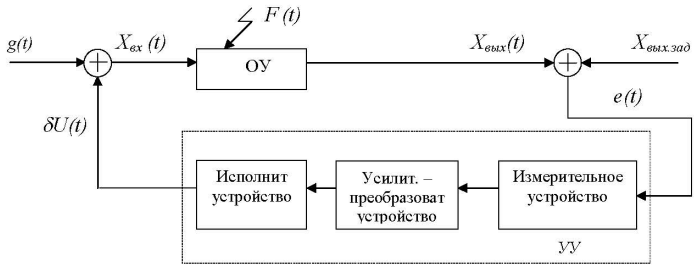


Рис. 1.4. Система управления с аппаратной реализацией УУ

Математическим аппаратом для описания динамических систем являются дифференциальные уравнения, которые показывают связь выхода со входом. Дифференциальные уравнения бывают обыкновенные и в частных производных.

Динамические системы, в которых предполагается, что прохождение возмущения от входа к выходу в ОУ происходит мгновенно, описываются *обыкновенными дифференциальными уравнениями и называются системами с сосредоточенными параметрами.* Например, система управления двигателем, химическим реактором, самолетом и т. п.

Динамические системы, в которых предполагают, что время прохождения возмущения конечно, описываются *дифференциальными уравнениями в частных производных и называются системами с распределенными параметрами.* Например, прохождение воды в трубопроводе, распространение тепла в реакторе, регулирование температуры в нефтепроводе и т. п.

Для математического описания систем используют также алгебраические и интегральные уравнения. Алгебраические уравнения позволяют отражать состояния комбинационных (статических) систем. С помощью интегральных уравнений решаются многие задачи математической физики, в теории управления, например, уравнение Винера-Хопфа.

Следует отметить, что находить решение дифференциальных и интегральных уравнений не просто. Поэтому при решении дифференциальных и интегральных уравнений широко используются прямое и обратное преобразования Лапласа, которые позволяют перейти от интегро-дифференциальных уравнений к обычным алгебраическим.

1.2. Классификация САУ по характеру внутренних динамических процессов

Каждая система автоматического управления (САУ) состоит из целого ряда звеньев, различно соединенных между собой. Каждое отдельно взятое звено имеет вход и выход в соответствии с направлениями, указанными стрелками. Входные и выходные переменные могут иметь любую физическую природу (ток, напряжение, время, давление, перемещение и т. п.). Совокупность уравнений и характеристик всех звеньев описывает динамику процессов управления или регулирования во всей системе в целом.

Любая классификация относительна. Ниже представлен один из вариантов классификации САУ по характеру внутренних динамических характеристик.

Динамические САУ можно разделить на большие классы. Основными признаками деления САУ на классы по характеру внутренних динамических процессов являются следующие:

– *непрерывность* или *дискретность* (прерывность) динамических процессов во времени;

– *линейность* или *нелинейность* уравнений, описывающих динамику процессов регулирования.

По первому признаку автоматические системы управления делятся на системы непрерывного действия, системы дискретного действия (импульсные или цифровые) и системы релейного действия (рис. 1.5).

По второму признаку каждый из указанных классов, кроме релейного, делится на системы линейные и нелинейные. Системы же релейного действия относятся целиком к категории нелинейных систем.

Далее даны определения каждого класса автоматических систем управления и рассмотрены соответствующие примеры.

Системой непрерывного действия называется такая система, в каждом из звеньев которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. Таким образом, чтобы автоматическая система в целом была непрерывной необходимо, прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев системы были непрерывными.

Рассмотрим несколько примеров непрерывных динамических систем. Одним из первых в истории техники автоматических регуляторов был изобретен регулятор русским ученым И. И. Ползуновым в 1765 г. в России (г. Барнаул). Это был автоматический регулятор уровня воды в котле паровой машины (рис. 1.6).

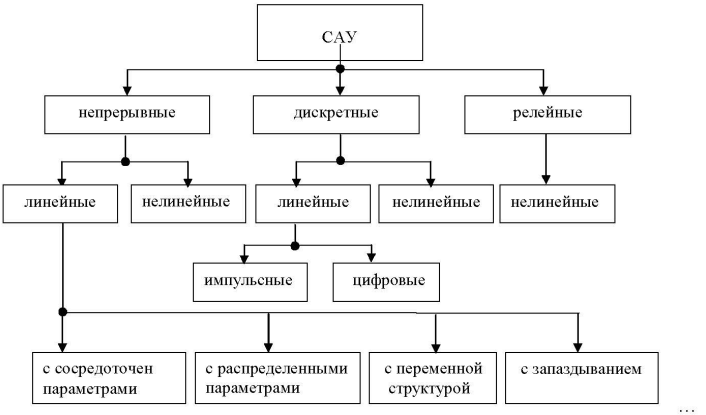


Рис. 1.5. Вариант классификации САУ

Ниже приведен пример непрерывной системы автоматического регулирования (рис. 1.6).

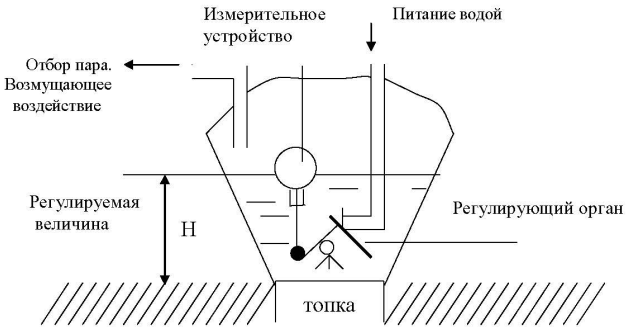


Рис. 1.6. Пример непрерывной системы автоматического регулирования

Здесь котел является регулируемым объектом или объектом управления. Измерительным устройством является поплавок, с помощью которого измеряется регулируемая величина H – высота уровня воды в котле. Поплавок непосредственно перемещает регулирующий орган – клапан питания котла водой. Изменение величины отбора пара из котла в паровую машину является основным возмущающим воздействием на регулируемый объект. Если отбор пара увеличится, испарение воды ускорится, уровень H воды (регулируемая величина) начнет уменьшаться. Тогда поплавок, опускаясь, будет шире открывать регулирующий клапан, усилится приток питающей воды, и уровень ее будет автоматически восстанавливаться. Кроме изменения отбора пара, возмущающее воздействие на объект будет проявляться также и в изменении условий теплового режима работы котла (интенсивность топки, температура питающей воды и окружающего пространства). Регулятор во всех случаях будет действовать так, чтобы ликвидировать нежелательное отклонение уровня воды, по каким бы причинам оно ни возникало.

Представим систему (рис. 1.6) в терминах теории управления (рис. 1.8).

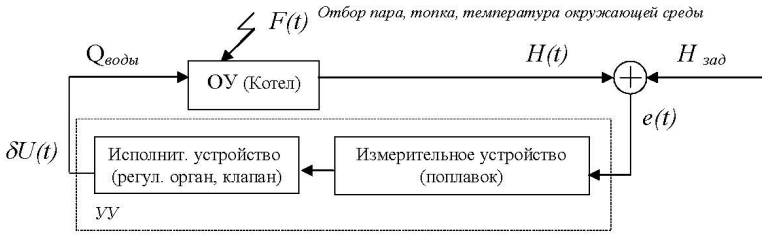


Рис. 1.8. Пример непрерывной САУ

Следующим в истории техники автоматическим регулятором, получившим широкое распространение, был центробежный регулятор скорости вращения вала паровой машины, изобретенной Уаттом в 1784 г. (Англия). Первое программное устройство управления ткацким станком от перфокарты построено в 1808 г. французом Жаккаром.

В 1888 г. русский ученый К. Э. Циолковский предложил автоматический регулятор горизонтального руля дирижабля. В 1961 г. в космос полетел первый человек Ю. А. Гагарин. В настоящее время разрабатываются современнейшие САУ, позволяющие управлять атомными реакторами, космическими кораблями (космическими грузовиками) и т. д. Конечно, современные САУ представляют собой дискретные нелинейные системы.

Системой дискретного действия называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется дискретно (не непрерывно).

Как правило, выходная величина имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени (рис. 1.9).

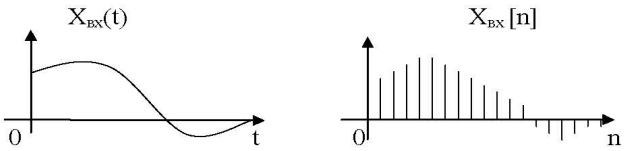


Рис. 1.9. Пример непрерывного и дискретного сигналов

Звено, преобразующее непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, называется импульсным. Если последующее звено системы тоже дискретное, то для него не только выходная, но и входная величина будет дискретной (импульсной). К дискретным автоматическим системам относятся системы импульсного регулирования (т. е. системы с импульсным звеном), а также системы с цифровыми вычислительными устройствами (ЦВУ).

Цифровые вычислительные устройства выдают результат вычисления на выходе дискретно, через определенные промежутки времени, в виде чисел для отдельных дискретных числовых значений выходной величины.

Ниже приведен пример дискретной системы, в которой объектом цифровой системы управления является непрерывный ОУ (рис. 1.10).

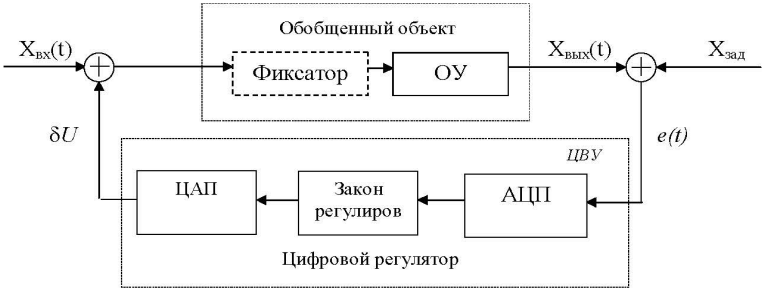


Рис. 1.10. Пример цифровой системы управления

Здесь фиксатор (в случае отсутствия цифро-аналогового преобразователя – ЦАП) преобразует последовательность импульсов управления δU в ступенчатую функцию (рис. 1.11) и условно отнесен к объекту, поэтому ОУ называется обобщенным (рис. 1.10).

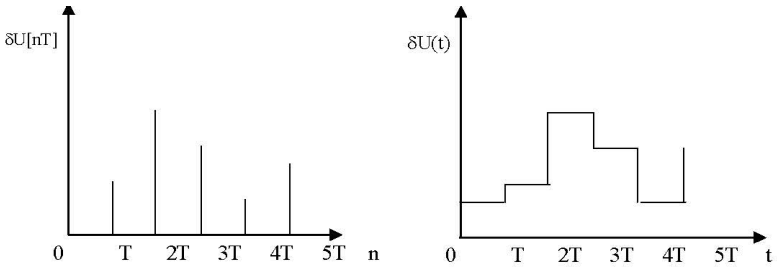


Рис. 1.11. Сигналы на входе и выходе фиксатора нулевого порядка

В целом система дискретная, так как содержит импульсный элемент – ЦВУ. Зачем в одной системе используются два противоположных преобразователя аналогово-цифровой преобразователь (АЦП) и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)? Для того чтобы можно было в контуре управления

использовать ЦВУ (микро- и мини-ЭВМ), что обеспечивает следующие основные преимущества:

– возможность управления многими объектами от одной машины;

– возможность реализации сложных законов управления (оптимальных, адаптивных и др.);

– возможность типизации и унификации задач контроля и управления, обусловленных гибкой программной подстройкой законов управления под новые объекты.

Системой релейного действия называется такая система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина в некоторых точках процесса изменяется скачком. Такое звено называется релейным звеном. Статическая характеристика релейного звена имеет точки разрыва (рис. 1.12).

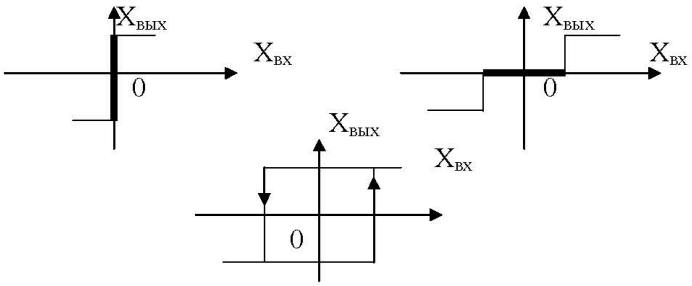


Рис. 1.12. Статические характеристики релейного звена

Существенное *отличие релейных систем* от импульсных заключается в том, что релейные системы по самому принципу своему являются нелинейными системами. Дело в том, что здесь моменты времени, в которые происходит замыкание и размыкание системы, заранее неизвестны; они не задаются извне, а определяются внутренними свойствами самой системы (ее структурой и величинами ее параметров).

В качестве примера релейной системы ниже рассмотрена система регулирования температуры (рис. 1.13): необходимо поддерживать постоянную температуру ОУ, охлаждаемого

воздухом. Регулирующим органом являются шторки, угловое положение которых φ определяет собой интенсивность поступления охлаждающего воздуха.

В рассматриваемой системе релейным элементом является поляризованное реле 3. Его средний контакт в зависимости от знака тока в диагонали моста 2, т. е. в зависимости от знака отклонения регулируемой величины Q, замыкается с правым или левым контактом, включая ток либо в одну, либо в другую обмотку возбуждения двигателя, в результате этого получаем либо одно, либо другое направление движения шторок на регулируемом объекте 1 (ОУ). Мост 2 настраивают так, чтобы при заданной температуре, которую надо поддерживать неизменной, ток в диагонали моста отсутствовал.

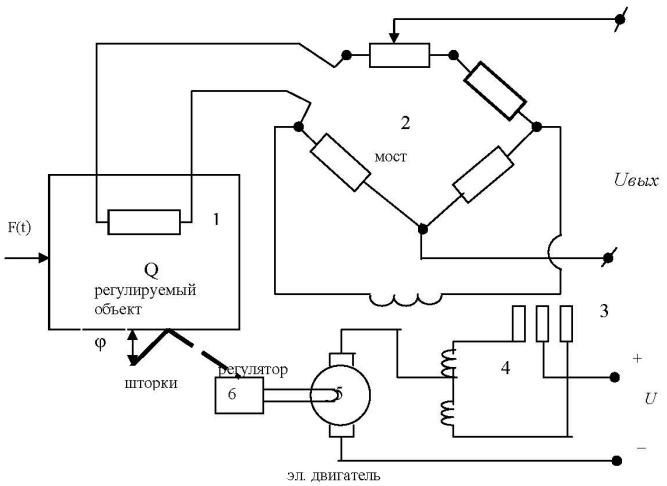


Рис. 1.13. Пример релейной системы регулирования температуры

Из сети в управляемую цепь (рис. 1.13) (цепь контактов) подается постоянное напряжение $U = C$. Напряжение U, питающее двигатель, изменяется в зависимости от величины тока I в диагонали моста по следующему закону (рис. 1.14):

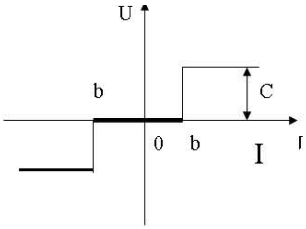


Рис. 1.14. Изменения напряжения в управляемой цепи

Нейтральному положению среднего контакта реле соответствует значение $U=0$ при малых величинах тока $-b<I<b$. При некоторой величине тока $I = b$ реле срабатывает, включая напряжение $U = C$ в одну из обмоток двигателя. При обратном направлении тока I, которое считается отрицательным, будет та же картина срабатывания при$I = -b$, причем, то же самое напряжение и включается в другую обмотку двигателя и задает ему другое направление вращения. Это направление будем считать отрицательным $U= -C$. Интервал $-b < I < b$, где $U = 0$ называется *зоной нечувствительности реле.*

По второму признаку приведенной классификации САУ делятся на линейные и нелинейные системы.

Линейной системой называется такая система, динамика всех звеньев которой вполне описывается линейными уравнениями (алгебраическими и дифференциальными или разностными). Линейные системы подчиняются принципу суперпозиции, сущность которого представлена ниже.

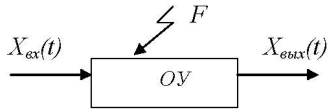
Принцип суперпозиции: реакция системы на несколько различных воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий. Принцип суперпозиции присущ только линейным системам.

Нелинейной системой называется такая система, в которой хотя бы в одном звене нарушается линейность статической характеристики или же имеет место любое другое нарушение линейности уравнений динамики звена (произведение переменных или производных, корень, квадрат и т. п.).

1.3. Уравнения динамики. Линеаризация

Объектом управления является динамическая система, свойства которой описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Получение математического описания динамической системы в ОТУ называется задачей идентификации. На сегодняшний день достаточно точно решается задача параметрической идентификации при заданной структуре математического описания (математической модели).

Пусть поведение динамической системы полностью описывается обыкновенным дифференциальными уравнением "*n*"-го порядка с постоянными коэффициентами[4]:



$$a_0 \frac{d^n X_{вых}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{вых}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n X_{вых}(t) = \\ = b_0 \frac{d^m X_{вх}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} X_{вх}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m X_{вх}(t) \qquad (1.3.1)$$

Здесь $a_i \ (i = \overline{0,n}),\ b_j \ (j = \overline{0,m}) - const;\ m \le n$ – условие физической реализуемости.

Для получения решения дифференциального уравнения "*n*"-го порядка должно быть задано "*n*" начальных условий:

$$X_{вых}(0) \neq 0;\ \dot{X}_{вых}(0) \neq 0;\ \ddot{X}_{вых}(0) \neq 0;\ \ldots;\ X^{(n-1)}{}_{вых}(0) \neq 0.$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения равно сумме общего (однородного) и частного (правая часть):

$$X_{вых}(t) = X^{общ}_{вых}(t) + X^{част}_{вых}(t).$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения есть сумма экспонент:

$$X_{вых}^{общ}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}, \qquad (1.3.2)$$

где c_i – постоянные (*const*), зависящие от начальных условий;

λ_i $(i = \overline{1,n})$ – собственные числа или решение характеристического полинома следующие вида:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 .$$

Общее решение (1.3.2) характеризует *собственное движение* динамической системы.

Частное решение имеет следующий вид**:**

$$X_{вых}^{част}(t) = \int_0^t K(t-\tau) X_{вх}(\tau) d\tau , \qquad (1.3.3)$$

где $K(t-\tau)$ – весовая функция.

Частное решение(1.3.3)характеризует *вынужденное движение* системы.

Собственное движение называют переходным процессом, вынужденное – *установившимся режимом*, которое формально является решением дифференциального уравнения после окончания действия начальных условий.

Сравним решение обыкновенного дифференциального уравнения в математике и в теории управления:

В математике	$\Rightarrow$	*общее*	+	*частное*
		$\Downarrow\Downarrow$		$\Downarrow\Downarrow$
В теории управления	$\Rightarrow$	*собственное движение (переходной процесс)*	+	*вынужденное (установившийся режим)*

Если правая часть уравнения (1.3.1) меняется достаточно медленно (производные малого порядка), то и левая часть этого уравнения изменяется достаточно медленно. Отсюда трудно получить хорошее математическое описание ОУ, так как выход будет повторять вход. Поэтому на входе системы дают ощутимые изменения, например скачок. Но при этом производная терпит разрыв (неопределенность). Поэтому математическое

описание (МО) рассматривают в узком диапазоне, находя частные решения. А так как МО рассматривают в узком диапазоне, то полученное математическое описание относительное. Следовательно, необходимо всегда выделять область применения полученного математического описания.

Имея математическое описание динамической системы в форме (1.3.1), необходимо получить решение, которое показывает траекторию движения системы. Для этого следует уравнение (1.3.1) "n" раз проинтегрировать или перейти от дифференциального уравнения "n"-го порядка к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка (удобнее в форме Коши) и решить систему.

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (1.3.4)$$

Систему дифференциальных уравнений (1.3.4) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\dot{X} = AX, \qquad (1.3.4а)$$

где матрица $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$;

векторы $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix}$, $\dot{X} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_n \end{vmatrix}$.

Запишем решение системы (1.3.4). Это система однородных уравнений, поэтому общее решение представляется в виде (1.3.2) или в матричной форме

$$X(t) = e^{At} X_0, \qquad (1.3.5)$$

где X_0 – начальное значение вектора X в момент $t = t_0 = 0$, $X(0) \neq 0$.

В уравнении (1.3.5) экспоненциальная матрица e^{At} определяется бесконечным рядом следующего вида:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + ... + \frac{A^n}{n!}t^n + ... \qquad (1.3.6)$$

и называется *переходной матрицей системы* (1.3.4) или в матричной форме – системы (1.3.4 а).

Рассмотрим *неоднородную систему* дифференциальных уравнений 1-го порядка, т.е. на вход системы (1.3.4) подан сигнал *U(t)*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 U \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 U \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n U \end{cases}. \qquad (1.3.7)$$

Вводя вектор $b^T = (b_1, b_2, ..., b_n)$, запишем систему (1.3.7) в матричной форме

$$\dot{X} = AX + b^T U. \qquad (1.3.7а)$$

Пусть при $t=t_0=0$ начальное значение вектора $X(t_0) = X_0 \neq 0$. Решение системы (1.3.7) в матричной форме запишется следующим образом:

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)} b U(\tau) d\tau,$$

где $e^{At} X_0$ – общее решение; $\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)} b^T U(\tau) d\tau$ – частное решение.

Математическое описание САУ в пространстве состояний

Математическое описание ОУ или математическая модель ОУ в общем виде в пространстве состояний представляется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \\ \dot{X}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{X}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \end{cases}, \qquad (1.3.8)$$

где X_i – переменные состояния системы $(i = \overline{1,n})$; U_j – переменные управления $(j = \overline{1,m})$.

Система уравнений (1.3.8) называется *уравнениями состояния.*

Обозначим через $y_k (k = \overline{1,r})$ выходные переменные объекта управления. Тогда

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = \varphi_r(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}. \qquad (1.3.9)$$

Ниже приведено представление объекта управления в пространстве состояний (рис. 1.15).

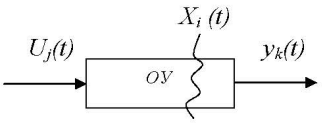


Рис. 1.15. Представление ОУ в пространстве состояний

Функции $f_i(i = \overline{1,n}), \varphi_k(k = \overline{1,r})$ представляют собой математическую запись тех физических законов, которым подчиняется поведение объекта управления.

Если управление U_j ($j = \overline{1,m}$) непосредственно воздействует на выходные переменные объекта $y_k (k = \overline{1,r})$, то уравнения выходных переменных имеют вид:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = \varphi_r(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \end{cases}. \qquad (1.3.9\text{ а})$$

Систему уравнений (1.3.9) и (1.3.9 а) часто называют *уравнениями наблюдений*. Вводя в рассмотрение векторы переменных состояния, управления и выхода ОУ:

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix}, \qquad U = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_m \end{vmatrix}, \qquad y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_r \end{vmatrix},$$

запишем уравнения объекта в векторной форме следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X,U) \\ Y = \varphi(X) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{X} = f(X,U) \\ Y = \varphi(X,U) \end{cases}, \qquad (1.3.10)$$

где $f(\bullet)$ и $\varphi(\bullet)$ – нелинейные векторные функции векторных аргументов (X,U):

$$f = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \ldots \\ \varphi_r \end{vmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения, описывающие поведение элементов САУ, обычно бывают нелинейными. Нелинейные уравнения сложны для анализа и, тем более, для решения задач синтеза. Поэтому удобно сначала линеаризовать дифференциальные уравнения и получить уравнения первого приближения, которые значительно проще для исследования.

Линеаризация

Пусть динамическая система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X,U) \\ Y = \varphi(X,U) \end{cases}.$$

Рассмотрим уравнения САУ в виде (1.3.8) и (1.3.9 а) и разложим нелинейные функции для x_i, y_k $(i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,r})$ в ряд Тейлора в *окрестности рабочего режима* (*):

$$\begin{aligned} X_i^{\,0} &\neq 0 \qquad (i = \overline{1,n}); \\ U_j^{\,0} &\neq 0 \qquad (j = \overline{1,m}). \end{aligned} \qquad (*)$$

Причем все слагаемые 2-го и выше порядка поместим в слагаемые R_i, F_k $(i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,r})$.

Тогда система уравнений состояния примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + b_{11}U_1 + b_{12}U_2 + \ldots + b_{1m}U_m + R_1 \\ \dot{X}_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + b_{21}U_1 + b_{22}U_2 + \ldots + b_{2m}U_m + R_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{X}_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n + b_{n1}U_1 + b_{n2}U_2 + \ldots + b_{nm}U_m + R_n \end{cases} \qquad (1.3.11)$$

Соответственно система уравнений наблюдения будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + ... + c_{1n}X_n + d_{11}U_1 + d_{12}U_2 + ... + d_{1m}U_m + F_1 \\ y_2 = c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + ... + c_{2n}X_n + d_{21}U_1 + d_{22}U_2 + ... + d_{2m}U_m + F_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = c_{r1}X_1 + c_{r2}X_2 + ... + c_{rn}X_n + d_{r1}U_1 + d_{r2}U_2 + ... + d_{rm}U_m + F_r \end{cases} \quad (1.3.12)$$

где $a_{ij} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial X_j}\right)^0, b_{ij} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial U_j}\right)^0, c_{kj} = \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_j}\right)^0, d_{kj} = \left(\frac{\partial Y_k}{\partial U_j}\right)^0$

$i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m};\ k = \overline{1,r};$

представляют собой константы, определяемые как значения соответствующих частных производных, вычисленные в точке рабочего режима (*).

Если отклонения переменных X_i, U_j от их значений в рабочем режиме (*) $\left(X_i - X_i^{\,0}\right), \left(U_j - U_j^{\,0}\right)$ достаточно малы, то в (1.3.11) и (1.3.12) можно пренебречь нелинейными остатками R_i, F_k ввиду их более высокого порядка малости по сравнению с линейными членами.

Тогда системы уравнений (1.3.11) и (1.3.12) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n + b_{11}U_1 + b_{12}U_2 + ... + b_{1m}U_m \\ \dot{X}_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n + b_{21}U_1 + b_{22}U_2 + ... + b_{2m}U_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{X}_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n + b_{n1}U_1 + b_{n2}U_2 + ... + b_{nm}U_m \end{cases} \quad (1.3.13)$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + ... + c_{1n}X_n + d_{11}U_1 + d_{12}U_2 + ... + d_{1m}U_m \\ y_2 = c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + ... + c_{2n}X_n + d_{21}U_1 + d_{22}U_2 + ... + d_{2m}U_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = c_{r1}X_1 + c_{r2}X_2 + ... + c_{rn}X_n + d_{r1}U_1 + d_{r2}U_2 + ... + d_{rm}U_m \end{cases} \quad (1.3.14)$$

Системы уравнений (1.3.13) и (1.3.14) представляют *собой линеаризованные уравнения состояний* объекта и уравнения наблюдений (выходных переменных) и носят название *уравнений линейного приближения*.

Введем в рассмотрение матрицы:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{vmatrix},$$

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{vmatrix}.$$

Тогда системы уравнений (1.3.13) и (1.3.14) можно записать в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{X}=AX+BU \\ Y=CX+DU \end{cases}. \qquad (1.3.15)$$

Если в САУ отсутствует непосредственное воздействие управления на выход, то система (1.3.15) несколько упрощается:

$$\begin{cases} \dot{X}=AX+BU \\ Y=CX \end{cases}. \qquad (1.3.16)$$

В дальнейшем будем пользоваться именно этим описанием динамической системы.

Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы

Если для заданной матрицы A некоторый вектор V удовлетворяет следующему уравнению

$$AV=\lambda V,$$

то λ называется собственным числом матрицы A, (λ– скаляр); V – собственным вектором.

Решим задачу нахождения собственного числа и собственного вектора. Если перенесем переменные в левую часть последнего уравнения и вынесем вектор V вправо, то получим следующее уравнение:

$$(A-\lambda I)V=0, \qquad (1.3.17)$$

где 0 – нулевой вектор, т. е. $0=\begin{vmatrix}0_1\\0_2\\...\\0_n\end{vmatrix}$.

Для того, чтобы уравнение (1.3.17) имело решение, необходимо, чтобы определитель матрицы $(A-\lambda I)$ был равен нулю, т. е.

$$det\,(A-\lambda I)=0. \qquad (1.3.18)$$

Раскрывая определитель, получаем полиномиальное уравнение следующего вида:

$$\lambda^n+a_n\lambda^{n-1}+a_{n-1}\lambda^{n-2}+...+a_2\lambda+a_1=0,$$

где $a_i(i=\overline{1,n})$ коэффициенты характеристического полинома.

Полученное уравнение (1.3.18) полиномиальное относительноλ и называется *характеристическим уравнением* матрицы *A*.

Корни характеристического полинома (1.3.18) $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ называются *собственными значениями* (*собственными числами*) матрицы *A*.

Пример 1.1

Пусть математическое описание динамической системы задано в виде системы уравнений следующего вида:

$$\dot{X}=AX+BU,$$

где $A=\begin{vmatrix}1 & 3\\7 & 5\end{vmatrix}$, *U(t) = 0.*

Определить собственные числа матрицы *A*.

Алгоритм и решение:

1) Записывается характеристическое уравнение системы:

$$det(A-\lambda I)=0;\ n=2.$$

2) Определяются собственные числа заданной матрицы A:

$$det\left(\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 5\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=0$$

$$det\left(\begin{vmatrix}(1-\lambda) & 3\\ 7 & (5-\lambda)\end{vmatrix}\right)=0$$

$$\lambda^2-6\lambda-16=0$$

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=8.$$

Векторы V_i, соответствующие собственным значениям λ_i, называются *собственными векторами* матрицы *A* и определяются решением следующего уравнения:

$$(A-\lambda_i I)V_i=0 \text{ или тождеством } \lambda_i V_i=AV_i\ \forall i=\overline{1,n}. \quad (1.3.19)$$

Если матрица A имеет "*n*" различных собственных значений, то собственные векторы V_i являются *линейно независимыми*. Так как матрица $(A-\lambda_i I)$ системы (1.3.19) имеет ранг, который не превосходит величины *(n-1)*, то каждый из собственных векторов V_i определяется с точностью до произвольного множителя $\forall i=\overline{1,n}$.

1.4. Интегральное преобразование Лапласа

Вводится комплексная переменная $s(s=c+j\omega)$, которая определяет точку в комплексной плоскости.

Преобразованием Лапласа называют соотношение следующего вида:

$$X(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}x(t)dt,$$

где $x(t)$ – оригинал сигнала, $X(s)$ – изображение сигнала.

Обозначается прямое преобразование Лапласа следующим образом: $L\{x(t)\} = X(s)$; обратное – $L^{-1}\{X(s)\} = x(t)$, где L и L^{-1} – операторы Лапласа, прямой и обратный соответственно.

Основные свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности

Для любых постоянных α и β *(α, β = const)* преобразование Лапласа от суммы оригиналов равно сумме изображений по Лапласу:

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}.$$

2. Дифференцирование оригинала

$$L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0), \text{ где } X(s) = L\{x(t)\},\ x(0) = \lim_{t \to +0} x(t);$$

$$L\{\ddot{x}(t)\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0).$$

$$L(x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - [s^{n-1}x(0) + s^{n-2}\dot{x}(0) + s^{n-3}\ddot{x}(0) + ... + x^{(n-1)}(0)],$$

где $x^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} x^{(k)}(t)$, *k = 0,1,2, ..., n-1,* т. е. значения соответствующих производных сигнала *x(t)* в начальные моменты времени. При нулевых начальных условиях:

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

тогда $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s)$.

Правило

Дифференцирование оригинала сигнала *x(t)* при нулевых начальных условиях заменяется умножением переменной *s* на изображение сигнала по Лапласу *X(s)*; причем, переменная *s* в той степени, каков порядок дифференциала.

3. Интегрирование оригинала

$$L\{\int_0^t x(t)dt\} = \frac{1}{s}[X(s)].$$

Правило

Интегрирование оригинала сигнала $x(t)$ заменяется делением на переменную sизображения сигнала по Лапласу $X(s)$; причем, переменная sставится в той степени, каков порядок интеграла.

4. Теорема запаздывания

Для любого положительного числа τ $(\tau > 0)$ изображение сигнала с запаздыванием $x(t - \tau)$ равно изображению сигнала без запаздывания в форме преобразования Лапласа, умноженному на экспоненту в степени $(-s\tau)$.

$$L\{x(t-\tau)\} = e^{-s\tau}L\{x(t)\} = e^{-s\tau}X(s).$$

5. Теорема о свертке (теорема умножения изображений)

Пусть заданы оригиналы сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и их изображения $X_1(s)$, $X_2(s)$.

Правило: произведение изображений сигналов по Лапласу равно интегралу от произведения оригиналов, причем любой из сигналов берется с запаздыванием на величину $\tau > 0$.

$$X_1(s)X_2(s) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau .$$

Интеграл правой части равенства называют сверткой функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и обозначают следующим образом $x_1(t) * x_2(t)$:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau .$$

6. Теоремы о предельных значениях

Если $x(t)$ есть оригинал сигнала, а $X(s)$ – его изображение, то

$$x(0) = \lim_{s \to +\infty} sX(s).$$

Если предел $x(\infty) = \lim_{t \to +\infty} x(t)$ существует, то $x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$.

В дальнейшем изображения будут рассматриваться при нулевых начальных условиях сигналов, т.е.

$$X(0) = X'(0) = X''(0) = ... = X^{(n-1)}(0) = 0.$$

Используя преобразование Лапласа, можно записать уравнение, эквивалентное уравнению(1.3.1), следующего вида:

$$a_0 s^n X_{вых}(s) + a_1 s^{n-1} X_{вых}(s) + ... + a_n X_{вых}(s) = \\ = b_0 s^m X_{вх}(s) + b_1 s^{m-1} X_{вх}(s) + ... + b_m X_{вх}(s). \quad (1.4.1)$$

Таким образом, применение преобразования Лапласа позволяет перейти от операций дифференцирования и интегрирования оригиналов к алгебраическим действиям по отношению к их изображениям.

1.5. Передаточные функции. Алгебра структурных преобразований

Отношение оператора воздействия к собственному оператору называют передаточной функцией.

Вынесем в левой части уравнения (1.4.1) $X_{вых}(s)$ за скобки, а в правой части – $X_{вх}(s)$. Возьмем отношение

$$\frac{X_{вых}(s)}{X_{вх}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n} = W(s). \quad (1.5.1)$$

Это отношение 2-х полиномов в теории управления носит название передаточной функции в форме изображений Лапласа.

Передаточная функция – это отношение преобразования Лапласа выходной величины к преобразованию Лапласа для величины на входе при нулевых начальных условиях.

А можно ли не при нулевых начальных условиях? Передаточная функция есть отношения двух полиномов $W(s)=\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}$. Знаменатель передаточной функции $Q_2(s)$ называется характеристическим полиномом, который характеризует свойства динамической системы (1.3.1). Уравнение

$$Q_2(s)=0 \text{ или } a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = 0 \qquad (1.5.2)$$

называется *характеристическим уравнением* системы, собственные числа которого характеризуют *собственное движение* системы. Корни уравнения (1.5.2) принято называть *полюсами.*

Однако не при нулевых начальных условиях нельзя знаменатель или характеристический полином приравнивать к нулю и находить собственные числа.

Числитель передаточной функции (1.5.1) $Q_1(s)=0$ характеризует *вынужденное движение системы.*

Итак, передаточную функцию можно записать следующим образом:

$$W(s)=\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}=\frac{X_{вых}(s)}{X_{вх}(s)}, \text{ откуда}$$

$$X_{вых}(s)=\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}X_{вх}(s) \text{ или } X_{вых}(s)=W(s)X_{вх}(s). \qquad (1.5.3)$$

Что получится, если в передаточной функции $W(s)$ динамической системы окажутся одинаковые сомножители? Например,

$W(s)=\frac{(s+1)}{(s+1)}=1=const$, т. е. как будто динамики вообще нет. Сокращения необходимо делать очень осторожно.

Формальные свойства передаточной функции реальной системы

В передаточной функции системы в виде изображений Лапласа выполняются, как правило, следующие свойства:

1) Коэффициенты в $W(s)$ всегда вещественные числа.

2) Степень полинома числителя, как правило, меньше степени полинома знаменателя $m \leq n$, с точки зрения математики – передаточная функция есть правильная дробь. Физически это означает, что реальная динамическая система всегда обладает последействием, а не упреждением.

3) Характеристический полином реальных динамических систем имеет полюса в левой полуплоскости. Физически для реальных систем это означает, что собственное движение системы при $t \to \infty$ асимптотически приближается к нулю.

В современной теории управления всегда говорят о физически реальных системах, которые описываются дифференциальными уравнениями, т. е. сигналы или функции непрерывны и дифференцируемы.

Структурирование модели динамических систем

Сложность динамической системы определяется порядком дифференциального уравнения, которым она описывается. Структурной схемой называется графическое изображение математической модели САУ в виде соединений звеньев.

Для упрощения анализа проводят декомпозицию системы, т. е. систему представляют несколькими частями, которые изображают в виде структурных схем.

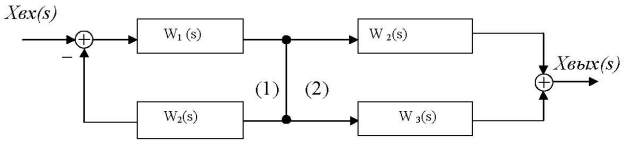


Рис. 1.16. Фрагмент структуры динамической системы

Система состоит из структурных элементов, представленных в виде прямоугольников с указанием входных и выходных переменных.

Свойства структурных элементов:

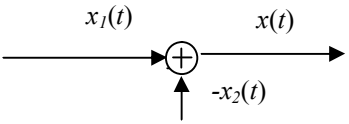
1) Элементы должны иметь однонаправленное действие, поэтому все возмущения всегда приводят к входу.

2) Элемент структурной схемы должен иметь один вход и один выход, потому что $W(s)$ по определению есть отношение одного сигнала к другому.

3) Замечание для обратной связи: в теории управления для реальных систем, как правило, применяется *отрицательная обратная связь* (крайне редко положительная).

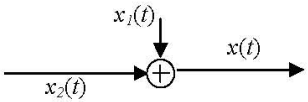
Знак плюс (+) означает узел, в котором сигналы суммируются с своим знаком, т.е. алгебраическая сумма.

Пример 1.2. Пусть имеем следующий узел:



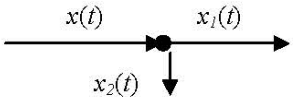
Здесь $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$.

Пример 1.3. Пусть имеем другой узел:



Здесь $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Следующее обозначение означает точку ветвления:



Элементы теории структурных схем *тождественны элементам теории графов*.

Итак, описание структурных схем представляется в виде передаточных функций и уравнений связи.

Рассмотрим фрагмент структуры динамической системы, представленный на рис. 1.16.

Задача состоит в том, чтобы составить математическое описание системы и выявить ее динамические свойства.

Алгебра структурных преобразований

Стратегия получения математического описания динамической системы следующая: необходимо выделить известные соединения или фрагменты, чтобы был один вход и один выход; найти передаточные функции $W_i(s)$ фрагментов $\forall i = \overline{1,n}$; найти передаточную функцию W(s) всей системы; используя равенство (1.5.3), следует получить $X_{вых}(s)$; затем используют обратное преобразование Лапласа $L^{-1}\{Xвых(s)\} = L^{-1}\{W(s)Xвх(s)\}$, чтобы получить математическое описание во временной области $Xвых(t) = f(Xвх(t), P)$.

1. Определение передаточной функции замкнутого контура

Рассмотрим фрагмент структуры системы, представленный на рис. 1.17.

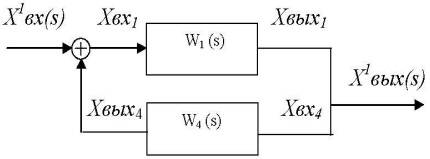


Рис. 1.17. Фрагмент структуры динамической системы

а) Передаточные функции: $W_1(s) \overset{\Delta}{=} \dfrac{X_{вых_1}(s)}{X_{вх_1}(s)}$;

$W_4(s) \overset{\Delta}{=} \dfrac{X_{вых_4}(s)}{X_{вх_4}(s)}$.

б) Уравнения связи: $X_{вых_1}(s) = X_{вх_4}(s) = X^1_{вых}(s)$;

$$X_{вх_1}(s) = X^1_{вх}(s) + X_{вых_4}(s);$$

Отсюда

$$X^1_{вх}(s) = X_{вх_1}(s) - X_{вых_4}(s).$$

в) Общая передаточная функция для этого фрагмента (первого)

$$W^1(s) = \frac{X^1_{вых}(s)}{X^1_{вх}(s)} = \frac{X_{вых_1}(s)}{X_{вх_1} \mp X_{вых_4}(s)}.$$

Разделим и числитель, и знаменатель на $X_{вх_1}(s)$, а затем умножим одно из слагаемых на $\frac{X_{вых_1}}{X_{вх_4}} \equiv 1$, т. е.

$$\frac{\frac{X_{вых_1}(s)}{X_{вх_1}(s)}}{1 \mp \frac{X_{вых_4}(s)}{X_{вх_1}(s)} * \frac{X_{вых_1}(s)}{X_{вх_4}(s)}} = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_4(s)} = W^1(s) \cdot$$

Правило

Передаточная функция замкнутого контура системы равна передаточной функции прямой части, деленной на единицу плюс-минус произведения передаточной функции прямой части системы $W_{пр}(s)$ на передаточную функцию $W_{ос}(s)$ обратнойсвязи.

$$W_{зам}(S) = \frac{W_{пр}(s)}{1 \pm W_{пр}(s)W_{ос}(s)}. \qquad (1.5.4)$$

2. Рассмотрим следующий фрагмент (рис. 1.18).

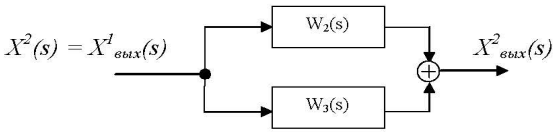


Рис. 1.18. Фрагмент структуры динамической системы

Рассматриваемая система линейная, поэтому выполняется

принцип суперпозиции.

Правило

Передаточная функция параллельного соединения нескольких звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев, входящих в цепочку:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s) \ . \qquad (1.5.5)$$

В нашем случае $W^2(s) = W_2(s) + W_3(s)$.

3. Следующий фрагмент системы представляет собой последовательное соединение звеньев (рис. 1.19).

Правило

Передаточная функция последовательного соединения нескольких звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев, входящих в цепочку:

$$W(s) = \prod_{j=1}^{m} W_j(s). \qquad (1.5.6)$$

Рис. 1.19. Фрагмент структуры динамической системы

В нашем случае $W(s) = W^1(s)W^2(s)$.

Итак, получено математическое описание динамической системы в виде передаточной функции W(s):

$$W(s) = \frac{W_1(s)[W_2(s) + W_3(s)]}{1 \pm W_1(s)W_4(s)} \ .$$

Существует много различных правил преобразования структурных схем: перенос узла, перенос точки приложения и т. п.; следует в явном виде выделять три фрагмента:

- *контур с обратной связью;*
- *параллельное соединение;*
- *последовательное.*

Затем, используя соответствующие правила, получать передаточную функцию всей системы в целом. Элементы теории структурных схем тождественны элементам теории графов.

Видимо, чтобы провести *декомпозицию динамической системы на элементы*, необходимо провести их классификацию по какому-либо признаку. В качестве признака возьмем собственные числа характеристического уравнения или матрицы A, так как именно они определяют свойства системы.

Будем различать четыре типа корней:

1) нулевые корни, например, $Q_2(s) = Ts = 0;\ s \equiv 0$;

2) вещественные, например, $Q_2(s) = Ts + 1 = 0;\ s = -1/T$;

3) комплексно-сопряженные, например,
$Q_2(s) = T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0;\ 0 < \xi < 1;\ s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$;

4) мнимые, например, $Q_2(s) = T^2 s^2 + 1 = 0;\ s_{1,2} = \pm j\beta$.

В соответствии с этими четырьмя типами корней далее рассматриваются четыре типа звеньев: интегрирующие; апериодические; колебательные; консервативные.

1.6. Типовые динамические звенья

Звеном принято называть математическую модель элемента, соединения элементов или любой части системы. Динамическую систему можно представить как соединения типовых или элементарных звеньев, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго.

I. *Интегрирующее звено*

Звено описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{d\theta_{вых}}{dt} = K\theta_{вх}(t) \quad \text{или} \quad T\dot{\theta}_{вых} = K\theta_{вх}(t). \qquad (1.6.1)$$

Передаточная функция этого звена: $W(s) = \dfrac{K}{Ts}$, где $K > 0; T > 0$.

Характеристическое уравнение: $Q_2(s) = Ts = 0$, $T \neq 0$. Следовательно, единственное решение: $s \equiv 0$.

Свойство этого звена: запоминать бесконечно долго (системыс памятью).

Пример: интегратор без обратной связи.

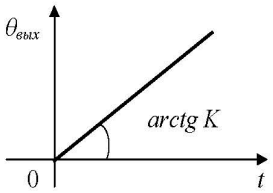


Рис. 1.20. Изменения выходной координаты интегрирующего звена

В пространстве состояний интегрирующее звено описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = bu \\ y = cx \end{cases}, \qquad (1.6.1a)$$

где $b = K/T$, $c = 1$.

II. *Апериодическое звено первого порядка*

Апериодическое звено первого порядка описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$T\dot{\theta}_{вых} + \theta_{вых}(t) = K\theta_{вх}(t), \qquad (1.6.2)$$

где $K > 0$; $T > 0$.

Передаточная функция этого звена: $W(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$.

Характеристическое уравнение: $Q_2(s) = Ts + 1 = 0$; следовательно, $s = -\dfrac{1}{T}$.

Время переходного процесса $(3 \div 4)T$, где T – постоянная интегрирования.

Пример: интегратор с обратной связью.

Решение однородного дифференциального уравнения:

$$\theta_{вых}(t) = c_1 e^{-t/T},$$

где $c_1 = const.$

В пространстве состояний апериодическое звено первого порядка описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}, \qquad (1.6.2\ а)$$

где $A = \left| -\frac{1}{T} \right|;\ b = \frac{K}{T};\ C = 1.$

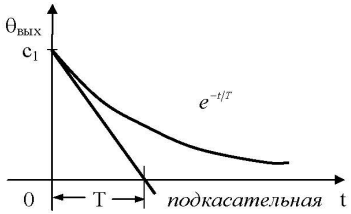


Рис. 1.21. Изменения выходной координаты апериодического звена

III. *Колебательное звено*

Колебательное звено описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$T^2 \ddot{\theta}_{вых} + \xi T \dot{\theta}_{вых} + \theta_{вых}(t) = K\theta_{вх}(t) \cdot \qquad (1.6.3)$$

$$0 < \xi < 1 \cdot$$

Передаточная функция: $W(s) = \dfrac{K}{T^2 s^2 + \xi T s + 1}$.

Характеристическое уравнение: $Q_2(s) = T^2 s^2 + \xi T s + 1 = 0$.

Полюса:

$0 < \xi < 1;\quad S_{1,2} = -\alpha \pm j\beta;\quad S_{1,2} = -\dfrac{\xi}{T} \pm \dfrac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T}$ (комплекс

но-сопряженные).

Аналитическое решение:

$$\theta_{вых}(t) = C_2 e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \varphi),\quad \text{где } \varphi = arctg\frac{\beta}{\alpha};\ c_2 = const.$$

Характеристики звена:

1) Темп затухания $e^{-\alpha t}$;

2) Период (частота) колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$.

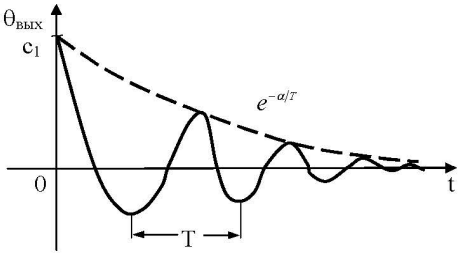


Рис. 1.22. Изменения выходной координаты колебательного звена

В пространстве состояний математическое описание колебательного звена имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}, \qquad (1.6.3\ а)$$

где $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T^2} & -\dfrac{\xi}{T} \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{K}{T^2} \end{vmatrix}$; $C = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Пример: RCL – цепочки с параметрами, обеспечивающими затухающий колебательный процесс.

Следует отметить, что если параметр колебательности ξ в уравнении (1.6.3) изменяется строго в пределах $0 < \xi < 1$, то это уравнение описывает колебательное звено; если $\xi = 1$, то уравнение (1.6.3) является математическим описанием апериодического звена второго порядка, свойства которого будут

рассмотрены ниже; и наконец, если $\xi = 0$, то уравнение (1.6.3) является математическим описанием консервативного звена.

IV. *Консервативное звено*

Консервативное звено описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$T^2\ddot{\theta}_{вых} + \theta_{вых}(t) = K\theta_{вх}(t). \qquad (1.6.4)$$

Передаточная функция звена: $W(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$;

Характеристическое уравнение: $Q_2(s) = T^2 s^2 + 1 = 0$;

Корни характеристического уравнения: $s_{1,2} = \pm j\beta$;

$s_{1,2} = \pm j\dfrac{1}{T}$.

$\theta_{вых}(t) = c_3 \cos\omega t$, где c_3 = *const.*

Математическое описание звена в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}, \qquad (1.6.4\text{ а})$$

где $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T^2} & 0 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{K}{T^2} \end{vmatrix}$; $C = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

*Пример:*RCL – цепочки с параметрами, характеризующими не затухающий колебательный процесс.

С помощью выше представленных типовых звеньев можно описать любую динамическую систему.

Рассмотрим входные воздействия, которые используются в теории управления.

Принято различать детерминированные и случайные входные воздействия.

Детерминированные типовые возмущения (воздействия) и реакция системы на них

1. *Скачок*

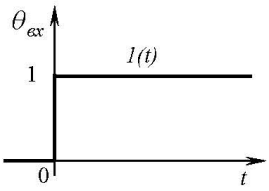


Рис. 1.23. Единичная ступенчатая функция

Математическое описание этого входного сигнала имеет следующий вид:

$$\theta_{вх}(t)=\begin{cases} 1(t), & при \quad t \geq 0; \\ 0, & в\ противном\ случае \end{cases} \tag{1.6.5}$$

Такое входное воздействие называется *единичной ступенчатой функцией*.

Практически – это мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное изменение нагрузки на валу двигателя и т. д.

Реакцией на единичную ступенчатую функцию *1(t)*является переходная функция $h(t)$. Физически, *переходная функция* $h(t)$ представляет собой переходной процесс на выходе звена, возникающий при подаче на его вход скачкообразного воздействия при величине скачка, равной единице при нулевых начальных условиях.

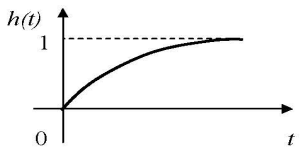


Рис. 1.24. Переходной процесс на выходе апериодического звена

Изображение единичной ступенчатой функции 1*(t)* по Лапласу:

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{s}.$$

Изображение переходной функции *h(t)* по Лапласу:

$$L\{h(t)\} = H(s).$$

Передаточная функция звена (системы) по определению есть

$$W(s) \overset{\Delta}{=} \frac{\theta_{вых}(s)}{\theta_{вх}(s)}.$$

Откуда $\theta_{вых}(s) = W(s)\theta_{вх}(s)$ или (в случае) $\theta_{вх}(s) = 1(t)$, $H(s) = W(s)\frac{1}{s}$.

Математически, *переходная функция* определяется как решение дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях.

2. *Импульсное воздействие*

Единичная импульсная функция или *дельта-функция δ(t)*представляет собой производную от единичной ступенчатой функции, т. е. $\delta(t) \overset{\Delta}{=} 1'(t)$; дельта-функция является обобщенной функцией.

Дельта-функция тождественно равна нулю повсюду, кроме точки *t = 0*, где она стремится к бесконечности.

Математическое описание дельта – функции имеет следующий вид:

$$\theta_{вх}(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & при\ \ t \neq 0 \\ \infty, & в\ противном\ случае \end{cases}. \qquad (1.6.6)$$

Дельта-функция есть функция, которая обладает

следующим свойством: $\int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1$, т. е. это очень узкий сигнал, ограничивающий единичную площадь. Это свойство позволяет применять $\delta(t)$ в математике, электронике, теории управления и т. д.

Примеры импульсного воздействия: воздушная "яма" (встречный ветер вверх, попутный вниз); кратковременный ток короткого замыкания, кратковременный удар нагрузки на валу и т. д.

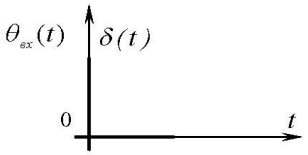


Рис. 1.25. Единичная импульсная функция

Изображение дельта-функции по Лапласу:

$$L\{\delta(t)\} = 1.$$

Физически реакцией системы на импульсное воздействие δ-функцию является *весовая функция* при нулевых начальных условиях.

Математически весовая функция равна производной от переходной функции, т.е.

$$K(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{dh(t)}{dt}. \qquad (1.6.7)$$

Изображение по Лапласу от дельта-функции равно константе, поэтому $K(s) = W(s) \cdot 1$.

Это важное свойство используется в теории управления. В задаче идентификации экспериментально, подав на вход δ-функцию, получают весовую функцию $K(s)$, а затем, подставив $W(s) = K(s)$ и, использовав обратное преобразование Лапласа, получают дифференциальное уравнение ОУ, т.е.

$$\theta_{вых}(s) = W(s)\theta_{вх}(s);\ L^{-1}\left[\theta_{вых}(s)\right] = L^{-1}\left[W(s)\theta_{вх}(s)\right].$$

Переходную и весовую (импульсную переходную) характеристики называют временными характеристиками.

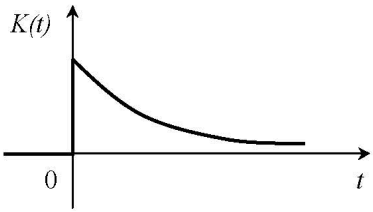


Рис. 1.26. Весовая функция

3. *Гармоническое воздействие (синусоидальное)*

Математическое описание входного воздействия имеет вид

$$\theta_{вх}(t) = a\sin\omega t. \qquad (1.6.8)$$

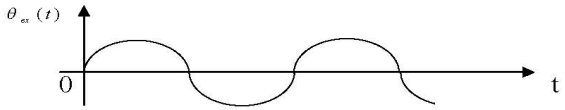


Рис. 1.27. Гармоническое воздействие

Реакция системы на гармоническое воздействие рассматривается в *установившемся режиме* (после окончания переходного процесса) и называется *обобщенной частотной характеристикой.*

Ее можно получить, применив к временной характеристике (1.6.8) преобразование Фурье.

Обобщенную частотную характеристику формально можно получить из передаточной функции $W(s)$ подстановкой $s = j\omega$.

$$W(s)\big|_{s=j\omega} = W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (1.6.9)$$

где $A(\omega)\overset{\Delta}{=}|W(j\omega)|$ – модуль комплексного коэффициента передачи и называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ);

$\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ) звена.

В то же время (1.6.9) можно расписать иначе, т. е.

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}W(j\omega) + j\,\mathrm{Im}W(j\omega).$$

Здесь

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\,(W(j\omega)) + \mathrm{Im}^2\,(W(j\omega))};$$

$$\varphi(\omega)\overset{\Delta}{=}arctg\frac{\mathrm{Im}(W(j\omega))}{\mathrm{Re}(W(j\omega))}.$$

Вывод: рассмотрены три основных типа детерминированных воздействий на входе системы и реакция системы на них. *Свойства системы определяются соотношением временных характеристик ОУ с временными характеристиками входных сигналов.*

Частотные характеристики

1) Рассмотрим *обобщенную частотную характеристику* на комплексной плоскости (рис.1.28).

АФЧХ:

$$W(s)\Big|_{s=j\omega} = W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}W(j\omega) + j\,\mathrm{Im}W(j\omega).$$

Эту характеристику еще называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ). Она представляет собой *геометрическое место концов векторов (годограф)*, соответствующих частотной передаточной функции (1.6.9) при изменении частоты от нуля до бесконечности. По оси абсцисс откладывается вещественная часть $\mathrm{Re}W(j\omega)$, а по оси ординат – мнимая часть $\mathrm{Im}W(j\omega)$ при $0 \le \omega \le +\infty$; при изменении

частоты $-\infty \le \omega < 0$ получают зеркальное отображение характеристики, так как характеристика симметричная.

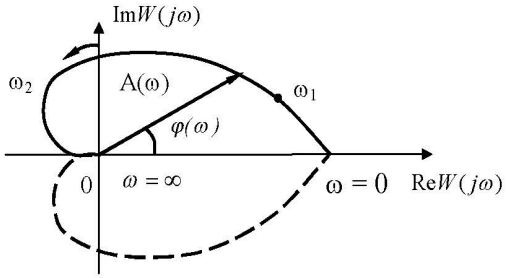


Рис. 1.28. Амплитудно-фазовая характеристика

2) *Амплитудно-частотная характеристика* (рис. 1.29)

АЧХ показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты.

По определению АЧХ:

$$A(\omega) \stackrel{\Delta}{=} |W(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(W(j\omega)) + \mathrm{Im}^2(W(j\omega))}\,.$$

$A(\omega)$ – число, которое характеризует отношение амплитуд выходной и входной $\frac{A_{вых}(\omega_i)}{A_{вх}(\omega_i)}$; $\omega_{ср}$ – частота среза; $0 \le \omega \le \omega_{ср}$ – полоса пропускания частот.

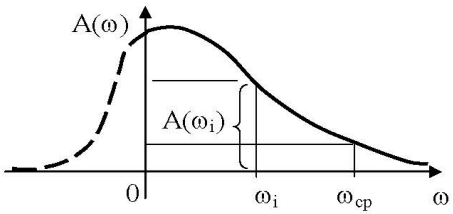


Рис. 1.29. Амплитудно-частотная характеристика

Строят АЧХ при изменении частоты $0 \le \omega \le +\infty$; характеристика симметричная, поэтому при изменении частоты $-\infty \le \omega < 0$ получают ее зеркальное отображение.

3) *Фазочастотная характеристика* (рис. 1.30)

ФЧХ показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах.

По определению ФЧХ равна следующему:

$$\varphi(\omega) \stackrel{\Delta}{=} arc\ tg \frac{\mathrm{Im} W(j\omega)}{\mathrm{Re} W(j\omega)}.$$

Как правило, $\varphi(\omega)$ – всегда задержка (величина отрицательная), причем запаздывание по фазе, естественно, растет.

Строят ФЧХ при изменении аргумента $0 \le \omega \le +\infty$, а при изменении частоты $-\infty \le \omega < 0$ получают зеркальное отображение характеристики. В теории управления договорились, что для этой единственной характеристики отрицательный сдвиг по фазе откладывать вверх, положительный – вниз.

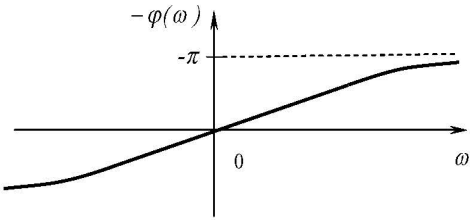


Рис. 1.30. Фазочастотная характеристика

3) *Логарифмические частотные характеристики* (рис. 1.31, 1.32, 1.33)

Прологарифмируем выражение частотной передаточной функции (1.6.9):

$$\ln W(j\omega) = \ln\left\{A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\right\} = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega).$$

Для практических целей удобнее пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАХ) и логарифмическую фазо-частотную характеристику (ЛФХ).

Для построения ЛАХ находится величина $L(\omega) \overset{\Delta}{=} 20\lg\left|W(j\omega)\right| = 20\lg A(\omega)$.

Единицей измерения $L(\omega)$ является децибел, а единицей измерения логарифма частоты – декада (десять).

Строится ЛАХ в следующих координатах:

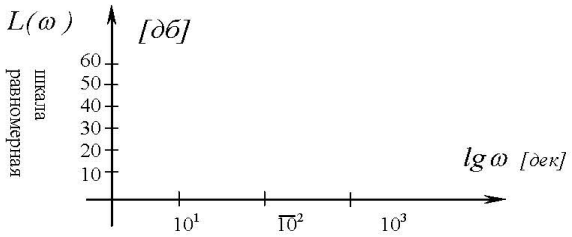


Рис. 1.31. Координаты ЛАХ

Примечания:

1) по оси абсцисс откладывают частоту ω в логарифмическом масштабе, а не логарифм частоты $\lg\omega$;

2) так как $\lg(0) = -\infty$, то вертикальная ось может быть проведена в любом месте (“плавает”); она проводится таким образом, чтобы вся характеристика ЛАХ находилась правее от нее.

Единица приращения логарифма соответствует одной декаде, т. е. удесятерению частоты. Асимптотическая ЛАХ строится из ломанных прямых. Частоту излома $\omega_i = \dfrac{1}{T_i}$, соответствующую точке излома этой характеристики, называют сопрягающей частотой $(\forall i = \overline{1,n})$.

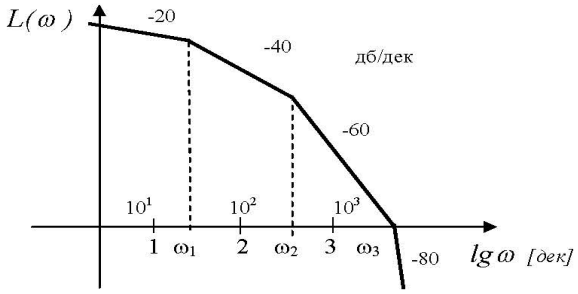


Рис. 1.32. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

Следует отметить следующие *свойства ЛАХ*:

а) компактность изображения;

б) простота аппроксимации линейных характеристик.

Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФХ) – зависимость $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты. Так как эта характеристика повторяет ФЧХ, то ее не строят и не используют на практике для характеристики звена (системы).

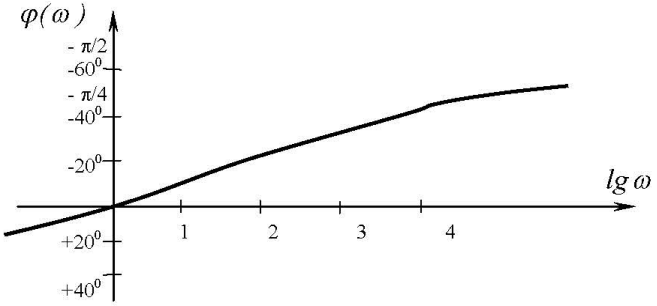


Рис. 1.33. Логарифмическая фазочастотная характеристика

Ниже представлены временные и частотные характеристики одного из типовых звеньев, а именно: апериодического звена второго порядка.

Апериодическое звено второго порядка

Математическое описание звена имеет следующий вид:

$$T^2\ddot{\theta}_{вых} + 2T\dot{\theta}_{вых} + \theta_{вых}(t) = K\theta_{вх}(t).$$

Передаточная функция имеет вид:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2Ts + 1} = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}.$$

Характеристическое уравнение:

$$(1+T_1 s)(1+T_2 s) = 0$$

Полюса: $s_1 = -\frac{1}{T_1}$, $s_2 = -\frac{1}{T_2}$.

Временные характеристики звена

Переходная функция:

$$h(t) = K[1 - (c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t})] = 1 - (c_1 e^{-\frac{1}{T_1}t} + c_2 e^{-\frac{1}{T_2}t})$$

при $K \equiv 1$.

Значения переходной характеристики *h(t)* в контрольных точках (рис. 1.34):

t	*h*(*t*)
0	*K*(*1*-(c_1+c_2); $K \neq 0$; c_1+c_2 = *1*
T_i	<*1*;
∞	1;

Весовая функция (рис. 1.35): $K(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{dh}{dt} = \frac{c_1}{T_1} e^{-\frac{1}{T_1}t} + \frac{c_2}{T_2} e^{-\frac{1}{T_2}t}$.

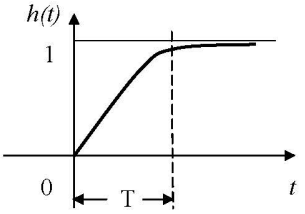


Рис. 1.34. Переходная функция звена

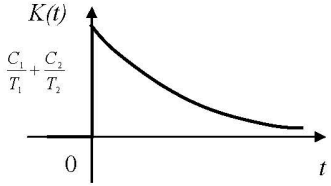


Рис. 1.35. Весовая функция звена

Частотные характеристики звена

Амплитудно-частотная характеристика звена АФХ (рис. 1.36):

$$W(j\omega)=W(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{K}{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}=\frac{K(1-jT_1\omega)(1-jT_2\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}=$$

$$=\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}-j\frac{K(T_1+T_2)\omega}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

ω	$ImW(j\omega)$	$ReW(j\omega)$
0	0	K
$\frac{1}{T_i}$	$-\frac{K}{2}$	0
∞	0	0

АЧХ (рис.1.37):

$$A(\omega)\overset{\Delta}{=}\sqrt{\mathrm{Re}^2\,W(j\omega)+\mathrm{Im}^2\,W(j\omega)}=\frac{K\sqrt{(1-T_1T_2\omega^2)^2+\omega^2(T_1+T_2)^2}}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}.$$

Фазочастотная характеристика звена (рис. 1.38)

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega)\overset{\Delta}{=}arctg\frac{\mathrm{Im}W(j\omega)}{\mathrm{Re}W(j\omega)}=arctg\left(-\frac{\omega(T_1+T_2)}{1-T_1T_2\omega^2}\right).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика. ЛАХ (рис. 1.39):

$$L(\omega) \stackrel{\Delta}{=} 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left|\frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}\right|_{s=j\omega}.$$

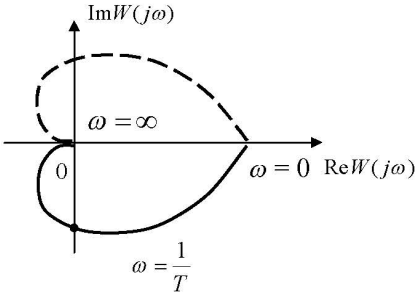


Рис. 1.36. Амплитудно-фазовая характеристика звена

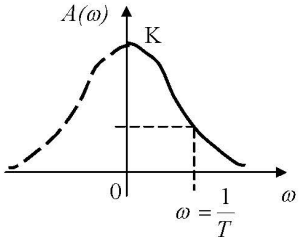


Рис. 1.37. Амплитудно-частотная характеристика звена

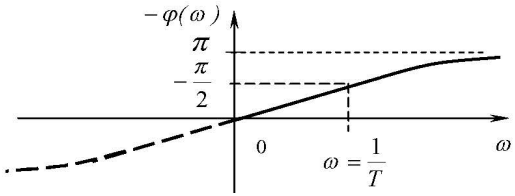


Рис. 1.38. Фазочастотная характеристика звена

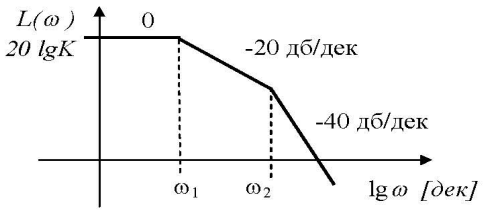


Рис. 1.39. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена

Сопрягающие частоты равны: $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ так как $T_1 > T_2$, то $\omega_1 < \omega_2$.

Правило построения асимптотической ЛАХ: Асимптотическая ЛАХ строится из ломаных прямых с наклоном ± 20n [дб/дек], где n – порядок степени переменной s в передаточной функции $W(s)$ разомкнутой системы.

В заключение следует отметить, что с помощью типовых динамических звеньев (соединенных последовательно, параллельно и т. д.) можно представить любую динамическую систему. Используя правила алгебры структурных преобразований, получают передаточную функцию всей системы.

Свойства системы не есть сумма свойств отдельных звеньев, входящих в систему, хотя, естественно, каждое звено обязательно вносит свою лепту в общие свойства системы. В этом проявляется целостность системы.

Вопросы, задачи

1. Получить математическое описание корректирующего устройства, схема которого задана (рис. 1.40).

Рис. 1.40. Схема корректирующего устройства

Конструктивные параметры устройства считать постоянными и заданными; за вход взять сигнал $e_1(t)$, за выход – $e_2(t)$.

2. Получить передаточную функцию системы, если заданы передаточные функции отдельных звеньев (рис. 1.41).

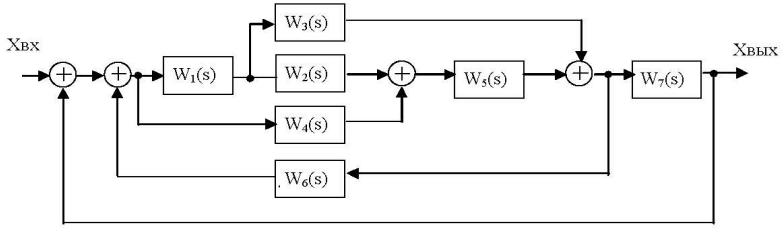


Рис. 1.41. Структура системы

3. Чему равно общее решение дифференциального уравнения *n*-го порядка? Что оно характеризует в теории управления?

4. Чему равно частное решение дифференциального уравнения *n*-го порядка? Что оно характеризует в теории управления?

5. Дать определение передаточной функции динамической системы. Перечислить формальные свойства передаточной функции динамической системы.

6. Что характеризует переходной процесс динамической системы?

7. Что характеризует вынужденное движение динамической системы?

8. Охарактеризовать прямое преобразование Лапласа. Привести пример его использования для анализа динамических систем.

9. Перечислить воздействия на систему, принятые типовыми в системах автоматического регулирования. Дать характеристику единичной ступенчатой функции и реакции на нее.

10. Перечислить воздействия на систему, принятые типовыми в системах автоматического регулирования. Дать характеристику дельта-функции и реакции системы на нее.

11. Перечислить воздействия на систему, принятые типовыми в системах автоматического регулирования. Дать характеристику гармонического воздействия на систему; привести реакцию системы на гармоническое воздействие.

12. Перечислить основные правила структурных преобразований. Чему равна передаточная функция замкнутой системы? Привести пример.

13. Чему равна передаточная функция последовательно соединенных звеньев? Привести пример.

14. Чему равна передаточная функция параллельно соединенных звеньев? Привести пример.

15. Чему равна передаточная функция системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью? Привести пример.

16. Записать характеристическое уравнение динамической системы, если математическое описание системы задано в виде дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

17. Какие корни характеристического уравнения Вы знаете? Показать их расположение на плоскости корней.

18. По какому признаку проводится классификация типовых звеньев динамической системы?

19. Какое звено в теории управления соответствует вещественным корням? Привести его основные характеристики.

20. Какое звено в теории управления соответствует комплексно-сопряженным корням? Привести его основные характеристики.

21. Какое звено в теории управления соответствует нулевым корням? Привести его основные характеристики.

22. Какое звено в теории управления соответствует мнимым корням? Привести его основные характеристики.

23. Привести один из вариантов классификации САУ по основным внутренним признакам системы.

24. Какому основному принципу подчиняются только линейные системы?

25. Сформулировать принцип суперпозиции.

26. Что представляет собой математическое описание объекта управления с сосредоточенными параметрами?

27. Что представляет собой математическое описание объекта управления с распределенными параметрами?

2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Понятие устойчивости. Устойчивость по А. М. Ляпунову

Понятие устойчивости системы регулирования связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния. Если система неустойчива, то она не возвращается в состояние равновесия, из которого его вывели. Чтобы наглядно представить устойчивость равновесия, можно представить шар, лежащий в некотором углублении.

При всяком отклонении шара от положения равновесия он будет стремиться возвратиться к нему точно (при отсутствии сил трения) или к некоторой конечной области равновесия (при наличии сил трения). Такое положение шара будет устойчивым.

а

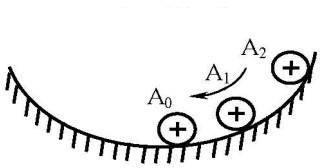


Рис. 2.1а. Устойчивое равновесие

в

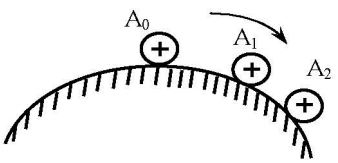


Рис. 2.1в. Неустойчивое положение равновесия

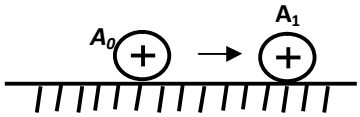


Рис. 2.1с. Безразличное положение равновесия

Введем понятие о невозмущенном состоянии равновесия, соответствующем точке A_0, и возмущенном состоянии равновесия A_2. После прекращения действия внешних сил шар

возвратится в точку A_0 или A_1 (рис. 2.1а, 2.1в, 2.1с). Условие устойчивости здесь можно сформулировать так: система называется устойчивой, если из возмущенного состояния равновесия она перейдет в некоторую конечную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

Понятие устойчивости можно распространить и на динамическую систему [1, 3].

В общем случае, рассматривая нелинейные системы, вводят понятия *устойчивости "в малом", "в большом" и "в целом"*. *Система устойчива "в малом"*, если констатируют лишь факт наличия области устойчивости, но не определяют каким-либо образом ее границы. Систему называют *устойчивой "в большом"*, когда определяют границы области устойчивости, т. е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и выяснено, что реальные начальные отклонения принадлежат этой области. В том случае, когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, систему называют *устойчивой "в целом"*.

Понятие устойчивости распространяется на более общий случай, когда в качестве невозмущенного состояния рассматривают не положение равновесия системы, а ее движение.

Пусть состояние динамической системы определяется независимыми координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Движение системы определяется некоторым законом изменения координат: $x_{10}(t)$, $x_{20}(t)$, ..., $x_{n0}(t)$. Заданное движение называется *невозмущенным движением*. Приложение внешних сил к рассматриваемой системе вызовет отклонение действительного движения от заданного:

$$x_1(t) \neq x_{10}(t),\ x_2(t) \neq x_{20}(t),\ \ldots,\ x_n(t) \neq x_{n0}(t).$$

Действительное движение системы называют *возмущенным движением.*

Определение. Заданное невозмущенное движение будет *устойчивым*, если в результате приложения внешних сил,

которые затем снимаются, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область:

$$\left|x_i(t) - x_{i0}(t)\right| \le \xi_i \quad \forall \xi_i > 0, \ \xi_i = const; \ \left(i = \overline{1,n}\right) .$$

Рассмотрим вопрос устойчивости более подробно. Впервые строгое определение устойчивости было дано русским ученым А. М. Ляпуновым в 1892 году.

Пусть динамическая система описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в форме Коши:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n); \qquad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix} \quad \left(i = \overline{1,n}\right); \qquad (2.1)$$

$$\dot{x} = F(x);$$

$\dot{x} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_n \end{vmatrix}$; $F(x) = \begin{vmatrix} F_1 \\ \ldots \\ F_n \end{vmatrix}$ – нелинейные вектор-функции векторного аргумента.

Если при $t = t_0$ заданы начальные значения x_{i0}, то решение может быть представлено в виде $x_i = x_i(x_{10}, \ x_{20}, \ \ldots, \ x_{n0})^T, \ i = \overline{1,n}$.

Пусть установившийся процесс (рабочий режим) в системе характеризуются координатами $x_i^0 = \left(x_1^0, \ \ldots, \ x_n^0\right)^T, \ \left(i = \overline{1,n}\right)$. Введем отклонения координат $\Delta x_i = x_i - x_i^0 \ \left(i = \overline{1,n}\right)$, характеризующие отклонения процесса от установившегося.

Систему уравнений (2.1) перепишем для отклонений:

$$\frac{d\Delta x_i}{dt} = f_i\left(\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ ...,\ \Delta x_n\right) \qquad \forall i = \overline{1,n}\ , \quad (2.2)$$

где f_i – некоторые нелинейные функции.

Уравнения (2.2) называются *уравнениями возмущенного движения*. Начальные значения отклонений $\Delta x_{i0},\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ носят названия *возмущений*. Решение возмущенного движения системы (2.2) для некоторых начальных отклонений $\Delta x_i = \Delta x_i\left(\Delta x_{10},\ \Delta x_{20},...,\ \Delta x_{n0}, t\right)$ представляет собой *возмущенное движение*.

А. М. Ляпунов дал следующие определения устойчивости.

Определение 1. Невозмущенное движение $\Delta x_i = 0$ называется *устойчивым* по Ляпунову по отношению к переменным x_i, если при всяком заданном положительном числе $\xi > 0$, как бы мало оно ни было, возможно выбрать другое положительное число $\gamma > 0$ такое, что для всех возмущений Δx_{i0}, удовлетворяющих условию

$$\left\|\Delta x_{i0}\right\| < \gamma_i \quad \forall i = \overline{1,n}\ , \quad (2.3)$$

возмущенное движение (2.2) будет для времени $t > t_0$ удовлетворять неравенству

$$\left\|\Delta x_i\right\| < \xi_i \quad \forall i = \overline{1,n}\cdot \quad (2.4)$$

Здесь под нормой будем понимать

$$\left\|\Delta x_i\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \quad \forall i = \overline{1,n}\ .$$

Определение 2. Невозмущенное движение $\Delta x_i = 0$ называется *асимптотически устойчивым* по Ляпунову, если в дополнение к первому определению выполняется условие:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta x_i(t) = 0 \quad \left(\forall i = \overline{1,n}\right). \quad (2.5)$$

Определение 3. Невозмущенное движение называется *неустойчивым* по Ляпунову, если существует какой-либо момент времени $t = t_1 > t_0$, при котором нарушается условие (2.4), т. е.

$$\|\Delta x_i\| \geq \xi_i \quad (i = \overline{1,n}).$$

Геометрическая интерпретация

a

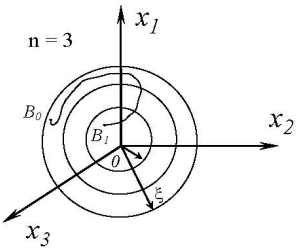


Рис. 2.2a. Движение системы устойчиво

b

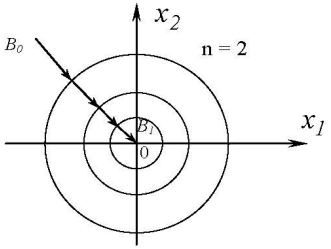


Рис. 2.2b. Движение системы асимптотически устойчиво

c

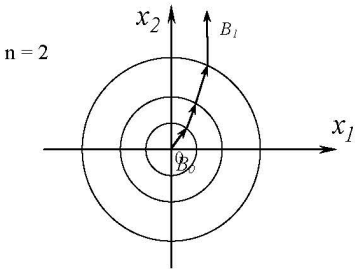


Рис. 2.2c. Движение системы неустойчиво

d

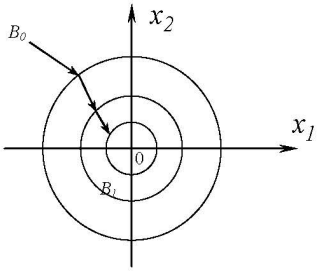


Рис. 2.2d. Движение системы устойчиво

Физическое понятие устойчивости. Устойчивость является одним из необходимых условий, обеспечивающих нормальное функционирование динамической системы управления. Линейная система устойчива, если ее реакция на любое

ограниченное воздействие также ограничена, и неустойчива, если ее реакция на ограниченное воздействие является неограниченной.

2.2. Теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Пусть САУ в пространстве состояний описывается дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right),\ \forall i = \overline{1,n}\ , \qquad (2.6)$$

здесь $\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ – вектор отклонений.

Движение динамической системы:

– *устойчиво по Ляпунову*, если $\left\|x_{i0}\right\| < \gamma_i;\ \left\|x_i\right\| < \xi_i$;

– *асимптотически устойчиво*, если $\lim\limits_{t\to\infty}^{x_i(t)=0}$;

– *неустойчиво*, если $x_i \geq \xi_i \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Геометрическая трактовка условия устойчивости по Ляпунову в пространстве трех переменных: если при возмущениях, не выведших точку $B_0\left(x_{10},x_{20},x_{30}\right)$ за границу сферы γ, возмущенное движение будет таково, что точка не выйдет за границу сферы ξ, то оно устойчиво (рис. 2.3).

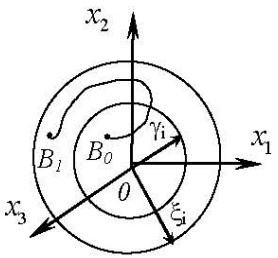


Рис. 2.3. Движение системы устойчиво

Пусть динамической системе соответствует система уравнений (2.1). Если нелинейные функции $F_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ *допускают разложение в степенные сходящиеся ряды*, то уравнения вида (2.6) после этого разложения принимают следующий вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + R_i(x_1,\ ...,\ x_n), \quad \forall i = \overline{1,n}, \quad (2.7)$$

где $R_i(x_1,\ ...,\ x_n)$ – функции, не содержащие членов ниже второго порядка отклонений. Если отклонения достаточно малы, то пренебрегая R_i, получаем *линеаризованные уравнения*, называемые *уравнениями первого приближения*:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \qquad \forall i = \overline{1,n}\,.$$

В матричной форме $\dot{X} = AX$. А почему не $\dot{X} = AX + BU$? Речь идет об устойчивости, следовательно, $U(t) \equiv 0$.

Характеристическое уравнение системы:

$$det(A - \lambda I) = 0, \quad (2.8)$$

где λ – собственные числа матрицы A или корни характеристического уравнения

$$det\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & ... & a_{2n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0;\ \lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i.$$

Для исследования устойчивости принципиально важны следующие две теоремы А. М. Ляпунова.

ТЕОРЕМА 1. Если вещественные части всех корней $\lambda_i\ (i = \overline{1,n})$ характеристического уравнения (2.8) первого

приближения (2.7) отрицательны, то невозмущенное движение $\Delta x_i = 0$ *асимптотически устойчиво*, т. е. если $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$, то $\lim_{t\to\infty} \Delta x_i(t) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если среди корней λ_i характеристического уравнения (2.8) первого приближения (2.7) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение *неустойчиво*, т. е. если $\mathrm{Re}\,\lambda_k(A) > 0$, $k \neq i$, хотя $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$ и $\left\|\Delta x_{i0}\right\| < \varepsilon_i \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Замечание. Если среди корней характеристического уравнения имеется один или несколько *нулевых корней*, а вещественные части остальных корней отрицательны, то этот случай называется *критическим*.

Система уравнений в критическом случае называется *нейтрально устойчивой* системой.

В критическом случае устойчивость невозмущенногодвижения не можетбыть оценена по первому приближению (2.7).

Итак, в соответствии с теоремами А. М. Ляпунова:

1) Движение линейной системы устойчиво, причем *устойчиво асимптотически*, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то есть $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$.

2) Движение линейной системы *неустойчиво*, если среди корней ее характеристического уравнения есть хотя бы один корень с вещественной положительной частью $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1,n-1};\ \mathrm{Re}\,\lambda_k(A) > 0; k \neq i.$

3) Движение линейной системы *нейтрально устойчиво*, если среди ее корней характеристического уравнения один нулевой, а у остальных – отрицательные вещественные части $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0 \quad \forall i = \overline{1,n-1};\ \mathrm{Re}\,\lambda_k(A) = 0,\ i \neq k$.

Теоремы А.М. Ляпунова имеют огромное значение, так как они позволяют судить об устойчивости нелинейных систем по

их линеаризованным уравнениям (уравнениям первого приближения). Это *первый метод* А. М. Ляпунова, позволяющий судить об устойчивости систем.

2.3. Алгебраические критерии устойчивости

Перейдем к вопросу устойчивости линейных, а точнее, *линеаризованных динамических систем* управления (для этого раскладывают математическое описание в ряд Тейлора, отбрасывают нелинейности выше второго порядка).

Пусть динамическая система описывается дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами в терминах “вход – выход”:

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n x_{вых}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{вых}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x_{вых}(t) = \\ & = b_0 \frac{d^m x_{вх}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{вх}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m x_{вх}(t) \quad (m \le n) \end{aligned} . \qquad (2.9)$$

Характеристическое уравнение системы (2.9) имеет следующий вид:

$$Q_2(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0 . \qquad (2.10)$$

Корни его s_1, s_2, …, s_n определяют характер переходного процесса. Следует отметить, что в характеристическом уравнении буква s означает уже не символ дифференцирования, а некоторое комплексное число.

В общем случае корни характеристического уравнения имеют вид: $s_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ $(i = \overline{1,n})$; $j = \sqrt{-1}$. На рис. 2.4 показаны возможные положения корней в комплексной *плоскости корней S*при

$$s_1 = \alpha_i;\ s_2 = \alpha_2 + j\beta_2;\ s_3 = \alpha_2 - j\beta_2;$$
$$s_4 = 0;\ s_5 = -\alpha_5;\ s_6 = -\alpha_6 + j\beta_6;\ s_7 = -\alpha_6 - j\beta_6.$$

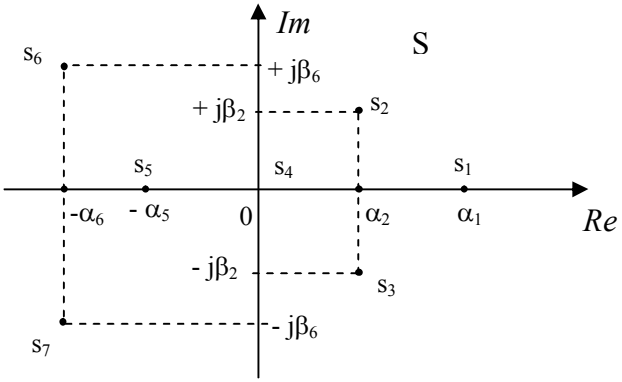


Рис. 2.4. Положения корней в комплексной плоскости

Если все *корни* разные, то их называют простыми. Если среди корней есть одинаковые, то их называют *кратными.*

Обычно *корни* с отрицательными вещественными частями принято называть *левыми* (слева от мнимой оси *Im*), а корни с положительными вещественными частями – *правымикорнями*.

Условие устойчивости линейной системы формулируется следующим образом: для того, чтобы линейная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (2.10) были левыми.

Однако чтобы определить, устойчива динамическая система или нет, можно не решать характеристическое уравнение, т. е. не определять его корни.

Предложены правила, с помощью которых можно судить об устойчивости динамической системы непосредственно по коэффициентам характеристического уравнения. Эти правила называются критериями устойчивости. *Критерии устойчивости* могут быть разделены на *алгебраические и частотные.* Рассмотрим сначала алгебраические критерии устойчивости. Из алгебраических критериев устойчивости наибольшее распространение получили

критерии устойчивости Э. Рауса и А. Гурвица. Следует отметить, что *необходимым условием устойчивости* системы являются положительные коэффициенты характеристического уравнения: $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; … $a_n > 0$.

Рассмотрим характеристическое уравнение линеаризованной динамическойсистемы (2.10)

$$Q_2(s) = a_0 s^n + a_2 s^{n-1} + ... + a_n = 0.$$

Критерий устойчивости Рауса (1877 г.)

Английский математик Э. Раус предложил некоторый алгоритм. Для того чтобы система была устойчива, *необходимо и достаточно*, чтобы все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительны, т. е. $c_{v1} > 0, \quad v = \overline{1,n}$.

Если хотя бы один из них отрицателен, то система является неустойчивой.

Коэффициенты первого столбца таблицы Рауса определяются как следующие отношения:

$$c_{v1} = \frac{\Delta_{v-1}}{\Delta_{v-2}},$$

где $\Delta_v (v = 3,\ 4,\ ...,\ n)$ – диагональные определители, получаемые из матрицы Гурвица размерности $\Delta(n \times n)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & ... & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & ... & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & ... & a_n \end{vmatrix}.$$

Матрица Гурвица составляется следующим образом: первая строка заполняется постоянными коэффициентами

характеристического уравнения (2.10) с нечетными индексами, вторая – с четными, затем сдвигается вправо на один элемент, затем на два и т. д.

Критерий устойчивости Гурвица (1895 г.)

Немецкий математик А. Гурвиц предложил следующий критерий. Для того, чтобы *замкнутая система* была устойчива, *необходимо и достаточно*, чтобы при положительном $a_0 > 0$ все миноры определителя Гурвица, составленные из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы и расположенные вдоль главной диагонали, были строго положительны, т. е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

и т. д.

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости динамической системы, характеристическое уравнение которой 1-й или 2-й степени, является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

Последний определитель включает в себя всю матрицу. Но так как в последнем столбце матрицы все элементы кроме нижнего, равны нулю, то последний определитель Гурвица выражается через предпоследний следующим образом:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \qquad (2.11)$$

Так как в устойчивой системе предпоследний определитель тоже должен быть положительным $\Delta_{n-1} > 0$, следовательно, $a_n > 0$.

Принято различать три типа границы устойчивости.

Условия нахождения системы на границе устойчивости можно получить, приравнивая нулю последний определитель:

$\Delta_n = 0$, при положительности всех остальных определителей. Как следует из неравенства (2.11), это условие распадается на два условия: $a_n = 0$, $\Delta_{n-1} = 0$.

Условие $a_n = 0$ соответствует *границе устойчивости первого типа* –нулевой корень или *апериодическая* граница устойчивости; условие $\Delta_{n-1} = 0$ соответствует *границе устойчивости второго типа* – *колебательная* граница устойчивости; *граница устойчивости третьего типа* – бесконечный корень, т. е. $S_k = \infty$.

2.4. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости динамических систем по виду их частотных характеристик. Рассмотрим два частотных критерия: А. В. Михайлова и Г. Найквиста. Обобщенную частотную характеристику получают формально из передаточной функции $W(s) = \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}$ подстановкой $s = j\omega$, т. е. $W(j\omega) = \frac{Q_1(j\omega)}{Q_2(j\omega)}$.

Свойства динамической системы определяет характеристический полином $Q_2(s)$ или $Q_2(j\omega)$.

Критерий устойчивости Михайлова

В 1938 г. русским ученым А. В. Михайловым был сформулирован следующий частотный критерий устойчивости для линейных систем любого порядка.

Для устойчивости *замкнутой системынеобходимо и достаточно*, чтобы годограф вектора $D(j\omega)$, описывающий кривую Михайлова, начинался на положительной вещественной оси, последовательно проходил n – квадрантов и имел угол поворота годографа $\varphi = n\frac{\pi}{2}$ – при изменении ω частоты от нуля до бесконечности и уходил в бесконечность в n–том квадранте, где n – порядок характеристического уравнения.

a

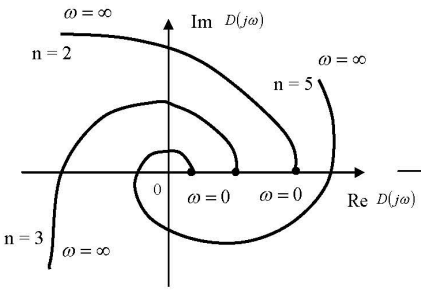


Рис. 2.5a. Годографы устойчивых САУ

b

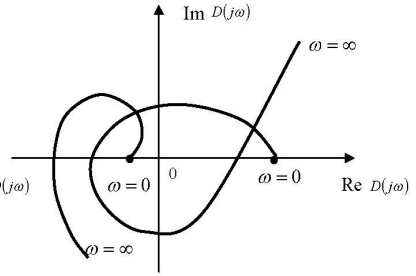


Рис. 2.5b. Годографы неустойчивых САУ

Кривая Михайлова $D(j\omega)$ – это характеристический полином *замкнутой* динамической системы.

Если мы имеем передаточную функцию разомкнутой системы следующего вида $W(j\omega)=\dfrac{Q_1(j\omega)}{Q_2(j\omega)}$, то для замкнутой единичной обратной связью системы передаточная функция будет выглядеть следующим образом:

$$W_з(j\omega)=\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}=\frac{Q_1(j\omega)}{Q_1(j\omega)+Q_2(j\omega)}$$

(единичная обратная отрицательная связь, $W_{oc}(s)=1$).

Отсюда

$$D(j\omega)=Q_1(j\omega)+Q_2(j\omega).$$

Описание кривой Михайлова разбивают на вещественную и мнимую части:

$$D(j\omega)=X(\omega)+jY(j\omega)=\mathrm{Re}\,D(j\omega)+\mathrm{Im}\,D(j\omega),$$

изменяя частоту ω от 0 до ∞, строят годограф Михайлова, по которому судят об устойчивости замкнутой системы. Следует обратить внимание на следующее: так как годограф Михайлова для устойчивой системы проходит последовательно n квадрантов, то корни уравнений $X(\omega)=0$ и $Y(\omega)=0$ должны чередоваться,

начиная с вещественной оси: $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < ... < \omega_n$ при изменении частот от 0 до ∞.

Разбирая алгебраические критерии устойчивости, были отмечены три типа границы устойчивости:

– нулевой корень – *апериодическая граница устойчивости* $a_n = 0$;

– *колебательная граница устойчивости*: $\Delta_{n-1} = 0$;

– *бесконечный корень*, $S_k = \infty$.

Наличие границы устойчивости всех трех типов может быть определено по кривой Михайлова следующим образом.

1) В случае *границы устойчивости 1-го типа* (нулевой корень) отсутствует свободный член характеристического полинома $a_n = 0$, и кривая Михайлова идет из начала координат (рис. 2.6 а).

a

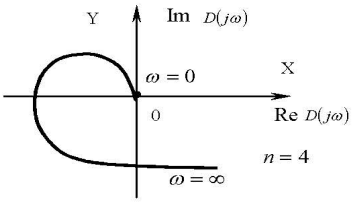


Рис. 2.6a. На границе устойчивости 1-го типа

b

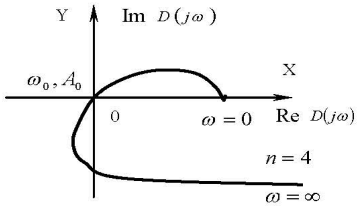


Рис. 2.6b . На границе устойчивости 2-го типа

2) При *границе устойчивости 2-го типа* (колебательная граница устойчивости) $D(j\omega_0) = 0$, а, следовательно, $X(\omega_0) = 0$, $Y(\omega_0) = 0$. Это значит, что точка $\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ A = A_0 \end{cases}$, на кривой Михайлова попадает в начало координат (рис. 2.6b).

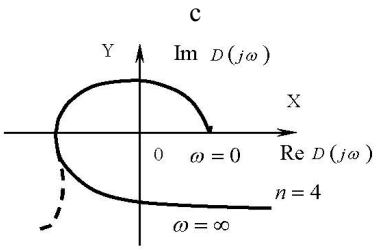


Рис. 2.6c. На границе устойчивости 3-го типа

3) Для *границы устойчивости третьего типа* (бесконечный корень) конец кривой Михайлова перебрасывают следующим образом (рис. 2.6c).

Критерий устойчивости Найквиста

Американский ученый Г. Найквист сформулировал частотный критерий устойчивости, с помощью которого можно по амплитудно-фазовой характеристике (АФХ) *разомкнутой* динамической системы судить об *устойчивости замкнутой* системы. Это большое достоинство критерия Найквиста.

Формулировка критерия: Если АФХ разомкнутой устойчивой динамической системы не охватывает особой точки с координатами $(-1, j0)$ на комплексной плоскости, то замкнутая система устойчива.

Это является *необходимым и достаточным условием* устойчивости динамической системы, замкнутой единичной обратной связью (рис. 2.7a. 2.7b, 2.7c).

a

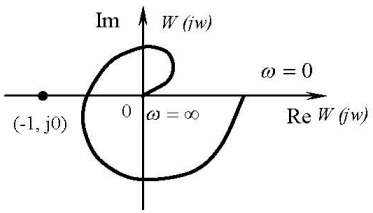


Рис. 2.7a. АФХ разомкнутой системы

b

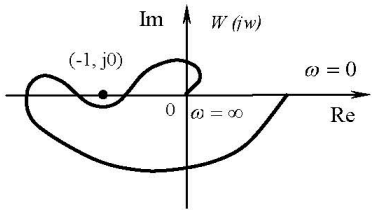


Рис. 2.7b. Годограф устойчивой системы

Итак, сформулирован критерий Найквиста, когда динамическая система охвачена единичной обратной отрицательной связью. Откуда взялась особая точка $(-1, j0)$? Как правило, в математике особые точки, точки разрыва функций в нуле 0 и в бесконечности ∞. Почему же здесь координаты особой точки таковы $(-1, j0)$?

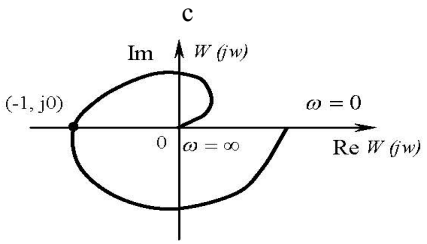


Рис. 2.7c. Годограф устойчивой системы

Нормированный критерий Найквиста, когда отрицательная обратная связь не единичная, а имеет коэффициент усиления k_0.

Пусть *W(s)* – передаточная функция разомкнутой системы (рис. 2.8).

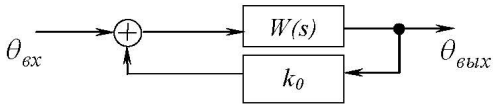


Рис. 2.8. Схема системы

Передаточная функция замкнутой системы равна $W_з(s) = \dfrac{W(s)}{1 + k_0 W(s)}$.

Нормированный критерий Найквиста отличается определением особой точки: $W_з(s) = \dfrac{\dfrac{1}{k_0} W(s)}{\dfrac{1}{k_0} + W(s)}$.

Особая точка определяется координатами $\left(-\dfrac{1}{k_0}, j0\right)$.

a

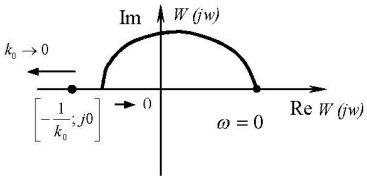


Рис. 2.9a. АФХ разомкнутой системы

b

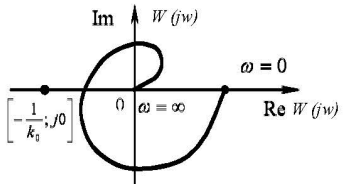


Рис. 2.9b. Годограф системы

При уменьшении коэффициента k_0 *обратной связи увеличивается устойчивость системы и наоборот*.

Интерпретация критерия Найквиста очень полезна. Для систем 1-го и 2-го порядков k_0 может быть любым. А вот для системы 3-го порядка и выше всегда имеется *критический коэффициент усиления.* Все реальные системы описываются дифференциальными уравнениями, как правило, выше 3-го порядка. Отсюда *все реальные динамические системы имеют критический коэффициент усиления*.

Критерий Найквиста сформулирован для *устойчивой разомкнутой* системы. А если разомкнутая система неустойчива, можно ли с помощью обратной связи сделать систему устойчивой (теперь уже замкнутая система)? Естественно можно.

При *неустойчивой разомкнутой системе* для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф (АФХ) разомкнутой САУ охватывал особую точку k раз, где k *– число корней в правой полуплоскости* для разомкнутой системы.

Основные выводы интерпретации критерия Найквиста:

– по АФХ разомкнутой системы можно судить об устойчивости замкнутой системы;

– для устойчивости замкнутой системы следует уменьшать коэффициент обратной связи k_0.

Ниже представлен критерий, в основе которого лежит критерий Найквиста.

Критерий устойчивости по виду ЛАХ

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика вычисляется следующим образом:

$$\text{ЛАХ: } L(\omega) \stackrel{\Delta}{=} 20\lg A(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg\left|W(s)\right|_{s=j\omega}$$

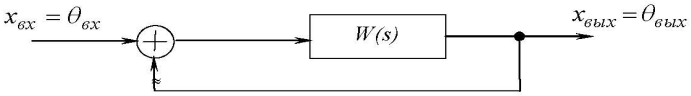


Рис. 2.10. Схема системы (знак ≈ мысленно разомкнуть)

$$\text{Пусть } W(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{T_i s} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{T_j s + 1} \cdot \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{T_l^2 s^2 + 2\xi T_l s + 1}.$$

Тогда ЛАХ для заданной системы будет иметь следующий вид:

$$L(\omega) \stackrel{\Delta}{=} \lg|W(j\omega)| = \sum_{i=1}^{n} -20\lg(T_i\omega_i) + \sum_{j=1}^{m} -20\lg\left(\sqrt{1+T_j^2\omega_j^2}\right) +$$

$$+ \sum_{e=1}^{k} -20\lg\left(\sqrt{\left(T_l^2\omega_l^2 - 1\right) + 4\xi^2 T_l^2\omega_l^2}\right).$$

Асимптотические ЛАХ строятся из ломанных прямых с наклоном *±20n* [дб/дек], где *n*– показатель степени *s*в сомножителях передаточной функции.

Существует следующая связь ЛАХ с видом ФЧХ:

ЛАХ:ФЧХ:

$-20 \times n$ [дб/дек] $\qquad \varphi(\omega) = -n\dfrac{\pi}{2}$;

Если порядок звена равен единице *n* = 1, то

– 20 [дб/дек]; $\qquad \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Если порядок звена равен двум *n*= 2, то

– 40 [дб/дек]; $\varphi(\omega) = -\pi$.

a

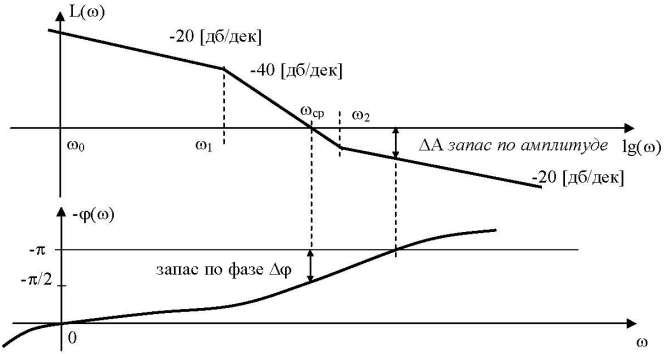


Рис. 2.11a. ЛАХ устойчивой САУ

Критерий устойчивости по виду ЛАХ

Формулировка критерия: Динамическая система, замкнутая единичной обратной отрицательной связью, будет *устойчива*, если ЛАХ разомкнутой системы пересекает уровень “0” децибел раньше, чем ФЧХ уровень $-\pi$.

Примечание. ЛАХ должна пересекать нуль “0” децибел с наклоном –20 [дб/дек]. Это гарантия устойчивости САУ, замкнутой единичной обратной связью.

b

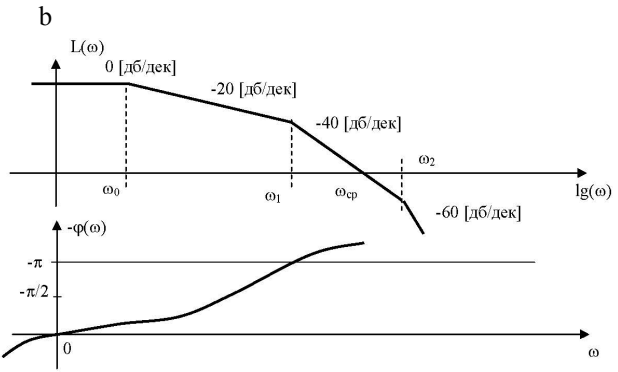


Рис. 2.11b. ЛАХ неустойчивой САУ

Сравнение критериев устойчивости

Если математическое описание (МО) САУ получено (задано) в терминах “вход-выход”, то для проверки устойчивости системы применяются критерии А.Гурвица, А.В.Михайлова, Г.Найквиста и критерий ЛАХ. Если МО САУ получено (задано) в пространстве состояний, то для проверки устойчивости системы применяются теоремы А. М. Ляпунова.

Если порядок системы $n \le 4$, то целесообразно применять критерий А. Гурвица. При порядке системы $n > 4$ целесообразно применять критерий Э. Рауса. Критерий устойчивости Михайлова целесообразно применять при исследовании сложных многоконтурных систем.

Критерий Найквиста целесообразно применять при исследовании сложных систем с запаздыванием, при анализе систем, описываемых аналитическими функциями, или когда характеристики звеньев заданы экспериментально.

Устойчивость системы проверяют по Ляпунову, когда описание системы задано в пространстве состояний.

Все приведенные критерии устойчивости дают возможность при заданных параметрах системы делать заключение о том, устойчива система или нет.

Однако нередко приходится решать задачу, когда один или два параметра системы могут в определенных пределах изменяться, и требуется выбрать оптимальные их значения, обеспечивающие наилучшие динамические показатели системы регулирования.

Оказалось, что можно проследить влияние некоторых параметров на устойчивость системы. Для этого разработаны специальные методы, которые будут рассмотрены ниже.

2.5. Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы

Рассмотрение влияния параметров системы на ее устойчивость производится двумя методами:

1) Путем анализа перемещения корней характеристического уравнения в плоскости корней – метод корневых годографов.

2) Путем анализа числа корней характеристического уравнения, лежащих в правой полуплоскости, в пространстве параметров системы – *метод D-разбиения* пространства параметров.

Понятие о D-разбиении пространства параметров (Ю. И. Неймарк)

Пусть математическое описание динамической САУ задано в виде дифференциального уравнения (2.9) в терминах “вход – выход”.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид (2.10):

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0,$$

в котором все коэффициенты, кроме двух a_0 и a_n, заданы. Предположим, что уравнение (2.10) имеет в плоскости корней k *корней*, лежащих *справа* от мнимой оси, и $(n-k)$ *корней*, лежащих *слева*, n – порядок системы.

Отражение мнимой оси в виде *D-кривой* в плоскости двух параметров имеет вид, представленный на рис. 2.12.

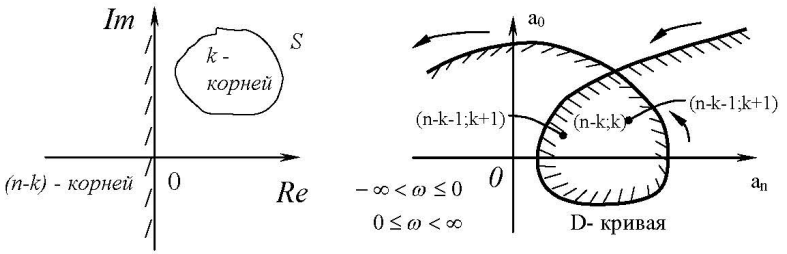


Рис. 2.12. Кривая D-разбиения

При изменении в определенных пределах значений a_0 и a_n всегда существует кривая, ограничивающая на плоскости a_0, a_n такую область, все точки которой определяют *частные*

значения рассматриваемого характеристического уравнения системы, при которых *система устойчива*. Такую кривую называют *D-кривой*, а область $-D(n-k,k)$.

Метод разбиения пространства коэффициентов на области устойчивости и неустойчивости носит название *метода D-разбиения.*

На рис. 2.13 приведен пример применения метода D-разбиения в области двух параметров коэффициента усиления K и постоянной времени T (здесь n – порядок системы; k – число правых корней).

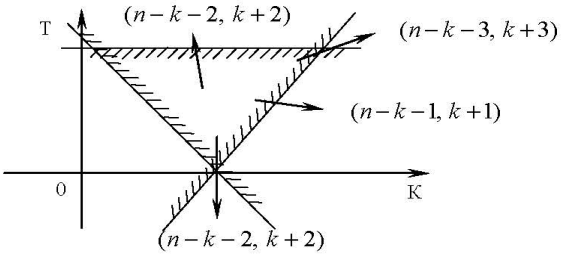


Рис. 2.13. Кривая D-разбиения в области двух параметров

Метод D – разбиения в области одного параметра

Система попадает на *апериодическую границу* устойчивости, если кривая Михайлова проходит через нуль и выражается следующим образом:

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = 0. \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} X(\omega) = 0, \\ Y(\omega) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Стратегия использования метода:

1) Замкнуть систему единичной отрицательной обратной связью (*ЕООС*) и записать аналитическое выражение *D-кривой.*

$$D(j\omega) \overset{\Delta}{=} Q_1(s) + Q_2(s)\ ,\ s = j\omega\ . \tag{2.14}$$

2) Получить аналитическую зависимость искомого параметра от аргумента частоты ω и от заданных параметров системы:

$$T = f_1(K, \omega) \text{ или } K = f_2(T, \omega).$$

3) Определить координаты контрольных точек, по которым построить *кривую D-разбиения* в соответствующих координатах.

ω	*Re K*	*Im K*
0		
$1/T_i$		
∞		

4) Использовать правило штриховки для установления области устойчивости (с заштрихованной стороны располагаются области устойчивости).

Правило штриховки:

необходимо идти вдоль *D-кривой* при изменении частоты ω от $-\infty$ до нуля и от нуля до $+\infty$, штрихуя кривую *слева.*

5) Затем осуществляется проверка любой точки указанного пространства на устойчивость системы по любому критерию устойчивости.

Примеры использования метода D-разбиения

Пример 2.1

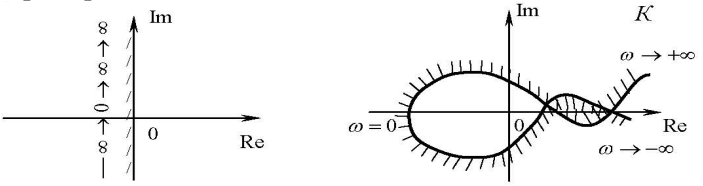


Рис. 2.14. Кривая *D-разбиения* в области параметра *K*

Пример 2.2

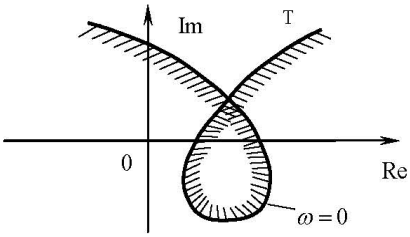


Рис. 2.15. Кривая *D-разбиения* в области параметра T

Пример 2.3

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы имеет следующий вид:

$$T_1T_2s^2 + (T_1 - T_2)s - 1 + K = 0,$$
$$\text{где } K = 10\ [1/c];\ T_2 = 0{,}1[c].$$

Построить кривую *D-разбиения* по параметру T_1.

Решение:

1) $T_1 0{,}1s^2 + T_1 s - 0{,}1s + 9 = 0$

2) $$T_1 \frac{0{,}1s - 9}{0{,}1s^2 + s}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{j0{,}1\omega - 9}{-0{,}1\omega^2 + j\omega} = \frac{(-9 + j0{,}1\omega)(-0{,}1\omega^2 - j\omega)}{(-o{,}1\omega^2 + j\omega)(-o{,}1\omega^2 - j\omega)} =$$

$$= \frac{0{,}9\omega^2 + j9\omega - j0{,}01\omega^3 + 0{,}1\omega^2}{0{,}01\omega^4 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2(1 + 0{,}01\omega^2)} + j\frac{\omega(9 - 0{,}01\omega^2)}{\omega^2(1 + 0{,}01\omega^2)} =$$

$$= \frac{1}{1 + 0{,}01\omega^2} + j\frac{9 - 0{,}01\omega^2}{\omega(1 + 0{,}01\omega^2)}.$$

3)

ω	Im T_1	Re T_1
0	∞	1
$\omega = \frac{1}{T_2}$; (ω=10)	0,4	0,5
∞	0	0

4)

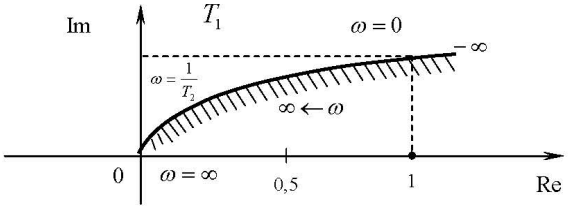


Рис. 2.16. Кривая *D-разбиения* в области параметра T_1

5) Проверку осуществим по критерию А. Гурвица.

$T_2 = 0{,}1[c];\ K = 10\ [1/c]$.

а) Пусть $T_1 = 1[c]$.

$\underset{a_0}{0{,}1}s + \underset{a_1}{0{,}9}s + \underset{a_2}{9} = 0;\ \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 9 \end{vmatrix} = 8{,}1 - 0{,}1 = 8 > 0$, т.е. система устойчива.

b) Пусть $T_1 = 10[c]$.

$\underset{a_0}{s^2} + \underset{a_1}{9{,}9}s + \underset{a_2}{9} = 0;\ \begin{vmatrix} 9{,}9 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 81 > 0$.

c) Пусть $T_1 = T_2 = 0{,}1[c]$.

$\underset{a_0}{0{,}01}s^2 + \underset{a_2}{9} = 0;\ \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}01 & 9 \end{vmatrix} = 0$, т. е. система находится на *границе устойчивости* при $T_1 = T_2$.

Вывод: Параметр T_1 надо выбирать из условия $T_1 > T_2$.

Общая теория выделения областей устойчивости была разработана ученым Ю. И. Неймарком, названная им *методом D-разбиения* плоскости параметров.

Заметим, что построение областей по критерию Найквиста приводит к тому же уравнению, когда АФХ проходит через точку $(-1; j0)$.

Метод D – разбиения в области двух параметров

Пусть в характеристическое уравнение (2.10), а, следовательно, и в уравнение (2.14) входят параметры *K* и *T,* влияние которых на устойчивость системы необходимо определить.

Укрупненный алгоритм

1) $D(j\omega)=0$.

2) $\begin{cases} X(K,T,\omega)=0 \\ Y(K,T,\omega)=0 \end{cases}$. (2.15)

3) Рассматривая частоту ω как заданную величину, решают систему уравнений (2.15) относительно двух параметров системы *K* и *T*. Если система (2.15) совместна, то можно записать аналитические зависимости искомых параметров

$$K=f_1(\omega);\ T=f_2(\omega).$$

Придавая аргументу ω различные значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, строят семейство кривых, называемых *кривыми D-разбиения*.

4) Чтобы *выделить область устойчивости, применяют штриховку*. При этом руководствуются следующими правилами:

a

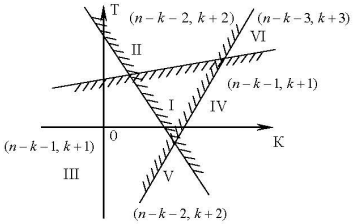


Рис. 2.17a. Кривая *D-разбиения* в области двух параметров

b

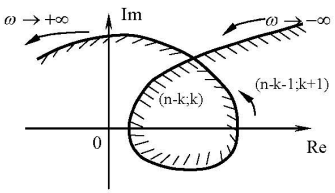


Рис. 2.17b. Кривая *D-разбиения* в области одного параметра

а) Если в области одного параметра, то при движении вдоль кривой в направлении изменения частоты ω от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$, кривую штрихуют *слева*.

Здесь k – число *правых корней*; n – общее число корней; $(n-k)$ – число *левых корней*. Если переход от одной точки к другой в пространстве параметров связан с пересечением *кривойD-разбиения* из устойчивой области в неустойчивую, то число *правых корней* увеличивается на один $(k+1)$, если штриховка одинарная, и на два $(k+2)$ – если штриховка двойная.

б) Если в области двух параметров, то, перемещаясь вдоль *кривой D-разбиения* при изменении частоты ω от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$, штрихуют ее с *левой* стороны, если якобиан положительный:

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial K} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial K} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} > 0$$

и штрихуют *справакривую D-разбиения*, если якобиан отрицательный:

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial K} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial K} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} < 0 .$$

Итак, построение области устойчивости *методом D-разбиения* можно разбить на 3 этапа:

1) Составление системы уравнений (2.15) и решение ее относительно двух параметровK и *T, если параметры K и T входят линейно.*

2) Нанесение штриховки в соответствии с правилами штриховки (однократная и двукратная штриховка).

3) Проверка с помощью любого из критериев устойчивости любой точки внутри области устойчивости. Если окажется, что в данной точке система устойчива, то она будет устойчива и для любой другой точки внутри заштрихованной области.

Выделяют так называемые *особые прямые*, уравнения которых получают подстановкой (*) в выражение $D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$.

Значениям (*) $\left\{ \begin{array}{c} \omega = 0 \\ \omega = \infty \\ \omega = \omega_i = \dfrac{1}{T_i} \end{array} \right\}$ всегда соответствуют *особые прямые*, что соответствует либо $a_n = 0$, либо $a_0 = 0$.

Особые прямые штрихуются по особому.

Пример 2.4 [13]

Пусть передаточная функция разомкнутой САУ задана следующего вида:

$$W_ç(s) = \frac{K(1+T_2 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_3 s)};\ T_1 > T_2 > 0.$$

Построить *кривую D – разбиения* в области двух параметров K и T_3.

Решение:

1) $W_з(s) = \dfrac{K(1+T_2 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_3 s) + K(1+T_2 s)}$.

2) $D(j\omega) = K - (T_1 + T_3)\omega^2 + j[(1+KT_2 s)\omega - T_1 T_3 \omega^3]$;

$$\begin{cases} X(K, T_3, \omega) = 0 \\ Y(K, T_3, \omega) = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} K - (T_1 + T_3)\omega^2 = 0 \\ (1+KT_2 s)\omega - T_1 T_3 \omega^3 = 0 \end{cases}.$$

3) $T_3 = \dfrac{KT_2 + 1}{T_1 \omega^2}$; $K - T_1 \omega^2 - \dfrac{(KT_2 + 1)\omega^2}{T_1 \omega^2} = 0$;

$KT_1 - KT_2 = T_1{}^2 \omega^2 + 1$;

а) $T_3 = \dfrac{\dfrac{(T_1^2\omega^2+1)T_2}{T_1-T_2}+1}{T_1\omega^2} = \dfrac{(T_1^2\omega^2+1)T_2+(T_1-T_2)}{(T_1-T_2)T_1\omega^2} = \dfrac{T_1^2\omega^2+1}{(T_1-T_2)\omega^2}$;

$K = \dfrac{T_1^2\omega^2+1}{T_1-T_2}$; $T_3 = \dfrac{T_1^2\omega^2+1}{(T_1-T_2)\omega^2}$.

4) Значения координат контрольных точек:

ω	K	T_3
0	$\dfrac{1}{T_1-T_2}$	∞
$\omega = \dfrac{1}{T_i}$	$\dfrac{2}{T_1-T_2}$	$\dfrac{1}{T_1}$
∞	∞	*0*

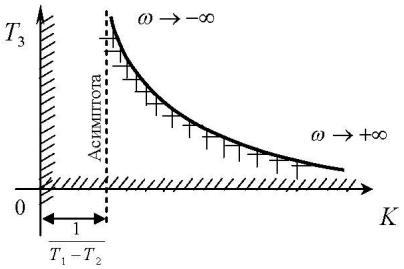


Рис. 2.18. Кривая D-разбиения

Особые прямые:

$a_n = 0$, т. е. $K = 0$ – граница устойчивости I-го типа, т. е. апериодическая;

$a_0 = 0$, т. е. $T_3 = 0$ – граница устойчивости III-го типа, т. е. бесконечность.

Чтобы заштриховать *кривую D-разбиения*, необходимо определить знак якобиана:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial K} & \dfrac{\partial X}{\partial T_3} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial K} & \dfrac{\partial Y}{\partial T_3} \end{vmatrix};$$

$$sign\Delta = ?\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\omega^2 \\ T_2\omega & -T_1\omega^3 \end{vmatrix} = -T_1\omega^3 + T_2\omega^3 = \omega^3(T_2 - T_1).$$

По условию заданы соотношения $T_1 > T_2 > 0$; таким образом,

1) при $-\infty \le \omega < 0$ знак якобиана положительный $\Delta > 0$ и, следовательно, *D-кривая* штрихуется *слева* (рис. 2.18);

2) при $0 \le \omega < +\infty$ знак якобиана отрицательный $\Delta < 0$ и, следовательно, *D-кривая* штрихуется *справа* (рис. 2.18).

Вопросы, задачи

1. Проверить динамическую систему на устойчивость по критерию Гурвица, если передаточная функция разомкнутой САУ имеет следующий вид:

$$W(s) = \frac{K}{T_1 s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},\ \textit{где}\ K > 0,\ T_i > 0,\ i = \overline{1,3}.$$

2. Проверить динамическую систему на устойчивость по критерию Михайлова, если передаточная функция разомкнутой САУ имеет следующий вид:

$$W(s) = \frac{K}{T_1 s(T_2^2 s^2 + 1)},\ \textit{где}\ K > 0,\ T_i > 0,\ i = \overline{1,2}.$$

3. Проверить динамическую систему на устойчивость по критерию Найквиста, если передаточная функция разомкнутой САУ имеет следующий вид:

$$W(s) = \frac{K(T_3 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},\ \textit{где}\ K > 0,\ T_i > 0,\ i = \overline{1,3}.$$

4. Построить кривую *D*-разбиения в области одного параметра K для системы с передаточной функцией (разомкнутой) следующего вида:

$$W(s)=\frac{K}{T_1 s(T_2 s+1)},\ \textit{где}\ \ K>0,\ T_i>0,\ i=\overline{1,2};$$

$$T_i-\textit{заданные const}.$$

5. Построить кривую *D*-разбиения в области двух параметров K и T_2для системы с передаточной функцией (разомкнутой) следующего вида:

$$W(s)=\frac{K(T_2 s+1)}{T_1 s(T_3 s+1)^2},\ \textit{где}\ K>0,\ T_i>0,\ i=\overline{1,3};$$

$$T_1,\ T_3-\textit{заданные const.}$$

6. Построить кривую *D*-разбиения в области двух параметров K и T_1для системы с передаточной функцией (разомкнутой) следующего вида:

$$W(s)=\frac{K(T_3 s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\ \textit{где}\ \ K>0,\ T_i>0,\ i=\overline{1,3};$$

$$T_3,\ T_2-\textit{заданные const}.$$

7. Построить кривую *D*-разбиения в области одного параметра T_1для системы с передаточной функцией (разомкнутой) следующего вида:

$$W(s)=\frac{K(T_2 s+1)}{(T_1 s+1)(T_3 s+1)},\ \textit{где}\ K>0,\ T_i>0,\ i=\overline{1,3};$$

$$K,T_2,T_3-\textit{заданные const.}$$

8. Дать определение устойчивости движения динамической системы по А. М. Ляпунову. Показать геометрическую интерпретацию определения. Привести пример.

9. Дать определение асимптотической устойчивости движения динамической системы по А. М. Ляпунову. Показать геометрическую интерпретацию определения. Привести пример.

10. Дать определение неустойчивости движения динамической системы по А. М. Ляпунову. Показать геометрическую интерпретацию определения. Привести пример.

11. Какие корни характеристического уравнения Вы знаете? Показать их расположение на плоскости корней.

12. Сформулировать алгебраический критерий устойчивости Гурвица для динамических систем. Привести пример устойчивой системы.

13. Сформулировать частотный критерий устойчивости Михайлова для динамических систем. Привести пример устойчивой системы.

14. Сформулировать частотный критерий устойчивости Найквиста для динамических систем. Привести пример устойчивой системы.

15. Сформулировать нормированный частотный критерий устойчивости Найквиста для динамических систем. Привести пример устойчивой системы.

16. Сформулировать частотный критерий устойчивости по виду ЛАХ для динамических систем. Показать запас устойчивости по амплитуде, запас устойчивости по фазе.

17. Привести описание динамической системы в пространстве состояний. Дать описание системы по первому приближению. Привести пример.

18. Записать характеристическое уравнение линейной динамической системы, описание которой задано в пространстве состояний. Привести пример.

19. Сформулировать теорему А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости движения динамической системы по первому приближению. Привести пример.

20. Сформулировать теорему А. М. Ляпунова о неустойчивостидвижения динамической системы по первому приближению. Привести пример.

21. Система описывается в пространстве состояний дифференциальными уравнениями первого приближения. Вещественная часть одного из корней характеристического уравнения равна нулю, вещественные части остальных корней -

строго отрицательны. Что можно сказать об устойчивости движения этой системы?

22. Математическое описание системы задано в пространстве состояний:

$$\dot{X} = AX + BU,$$

где $A = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$, $U(t) \equiv 0$.

Определить устойчивость движения заданной системы по А. М. Ляпунову. Привести геометрическую интерпретацию.

23. Математическое описание системы задано в пространстве состояний:

$$\dot{X} = AX + BU,$$

где $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix}$, $U(t) \equiv 0$.

Определить устойчивость движения заданной системы по А. М. Ляпунову. Привести геометрическую интерпретацию.

3. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА

Устойчивость САУ является *необходимым*, но *недостаточным условием* ее работоспособности. Так, устойчивая система может оказаться недостаточно точной при отработке различных воздействий; недостаточно быстродействующей при выходе на заданную величину (задание) или не может обеспечить требуемую плавность изменения выходной координаты и т. п. Таким образом, при исследовании САР приходится решать задачи обеспечения требуемых показателей качества переходногопроцесса: быстродействия, колебательности, перерегулирования, характеризующих точность и плавность протекания процесса.

Качество работы любой динамической системы в конечном счете определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительными значениями регулируемой величины.

Для определения качества показателей динамической системы используются критерии качества, которые можно разбить на 4 группы.

К первой группе относятся критерии, использующие величину ошибки в различных типовых режимах. Эту группу называют *критериями точности* динамических систем регулирования.

Ко второй группе относятся критерии, определяющие *величину запаса устойчивости*, то есть критерии, устанавливающие, насколько далеко от границы устойчивости находится система регулирования.

Почти всегда опасной для динамической системы является колебательная граница устойчивости. Это определяется тем, что стремление повысить общий коэффициент усиления в системе, как правило, приводит к приближению системы именно к колебательной границе устойчивости и затем – к возникновению незатухающих автоколебаний.

Третья группа критериев качества определяет *быстродействие системы регулирования*. Под быстродействием понимается быстрота реагирования системы регулирования на появление управляющих и возмущающих воздействий. Наиболее просто

быстродействие может оцениваться по времени затухания переходного процесса системы.

К четвертой группе критериев качества относятся *интегральные критерии*, дающие оценку некоторых обобщенных свойств, которые могут учитывать точность, запас устойчивости и быстродействие одновременно.

3.1. Оценка качества регулирования в типовых режимах

Реально оценка точности динамических систем регулирования использует величину ошибки в различных типовых режимах.

Рассмотрим первую группу критериев, то есть проведем анализ ошибок, возникающих при управлении динамическими системами. Будем предполагать, что САР описывается системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами. На входе системы подается единичная ступенчатая функция. На выходе получаем переходной процесс.

Рассмотрим различные типовые режимы.

I. Статический режим (все производные равны нулю)

Пусть задана система, представленная на рис. 3.1a. Можно здесь говорить о статической ошибке?

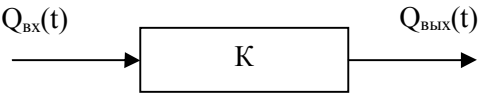


Рис. 3.1a. Разомкнутая система

Все значения $Q_{вых} = const$, $W(s)\big|_{s=0} = W(0) = K$, где K – статический коэффициент.

$$Q_{вых}(t)\big|_{t\to\infty} = Q_{вых}(s)\big|_{s\to 0}.$$

Конечно, нет. В рассматриваемой системе не может быть статической ошибки.

Если (рис. 3.1b) рассматриваем динамическую систему с возмущением, то ошибка, конечно, будет.

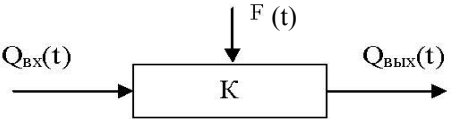


Рис. 3.1b. Разомкнутая система с внешним возмущением

При этом можно говорить о статической ошибке по входу *F(t)*(по возмущению).

Следовательно, надо всегда смотреть на причину ошибки.

Можно ли говорить о статической ошибке в системе, представленной на рис. 3.1c?

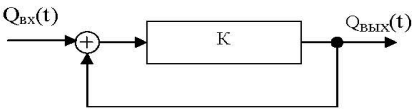


Рис. 3.1c. Замкнутая система

Можно. Почему? Да потому, что на вход $Q_{вх}(t)$ поступает сигнал отрицательной обратной связи, то есть ошибка из-за обратной связи.

Влияние единичной отрицательной обратной связи на статическую ошибку (при $Q_{вых}(t) = 1(t)$*).*

Пусть задана следующая система, в которой все звенья статические и действуют два внешних возмущения F_1 и F_2 (рис. 3.2).

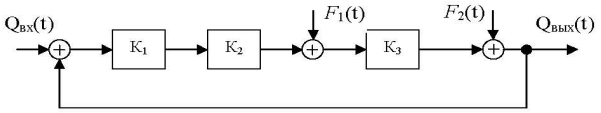


Рис. 3.2. Замкнутая система

а) Рассмотрим систему без внешних возмущений.

$$W(s) \overset{\Delta}{=} \frac{Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)};\ W_з(s) = \left.\frac{K_1K_2K_3}{1+K_1K_2K_3}\right|_{K_0>>1} \Rightarrow 1, \text{ т. е. } \approx 1,$$

где $K_0 = K_1K_2K_3$, K_0 – общий коэффициент усиления системы.

Поэтому всегда в этом случае говорят (при конечном значении K_0) о статической ошибке по управляемому входу.

Утверждение

Чем больше общий коэффициент усиления системы $K_0 >> 1$, тем меньше статическая ошибка.

Здесь наблюдается скрытое возмущение по каждому из звеньев K_i, $K_0 = \prod_{i=1}^{n} K_i$, $0 < K_0 < K_{гр}$. Докажем утверждение.

Основной принцип управления заключается в следующем: сравнить выходную величину с заданием и рассогласование (разность между заданием и выходной величиной) с обратным знаком подать на вход.

В данном случае $\varepsilon(t) = Q_{вх}(t) - Q_{вых}(t)$.

Передаточная функция по ошибке $W_\varepsilon(s)$ равна следующему:

$$W_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{Q_{вх}(s)} = \frac{Q_{вх}(s) - Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)} =$$

$$1 - \frac{Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)} = 1 - \frac{K_0}{1+K_1} = \frac{1}{1+K_0}$$

при $Q_{вх}(s) = 1(t)$.

Статическая ошибка равна

$$\varepsilon = \frac{1}{1+K_0}. \qquad (3.1)$$

Чем больше общий коэффициент усиления системы, тем меньше статическая ошибка ε (3.1), что и требовалось доказать.

Стремясь повысить статическую точность динамической системы, увеличивают K_0, но необходимо всегда помнить об устойчивости, т. е. $K_0 < K_{гр}$.

b) Рассмотрим систему с *внешними возмущениями*.

Запишем передаточные функции $W(s)$ по трем каналам:

$$W(s) = \frac{Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)} = \frac{K_0}{1+K_1} \quad \text{– по управляемому каналу;}$$

$$W_{F_1}(s) = \frac{Q_{вых}(s)}{F_1(s)} = \frac{K_3}{1+K_0} \quad \text{– по возмущению } F_1;$$

$$W_{F_2}(s) = \frac{Q_{вых}(s)}{F_2(s)} = \frac{1}{1+K_0} \quad \text{– по возмущению } F_2.$$

Принцип суперпозиции для системы запишется следующим образом:

$$Q_{вых}(s) = \frac{K_0}{1+K_0} Q_{вх}(s) + \frac{K_3}{1+K_0} F_1(s) + \frac{1}{1+K_0} F_2(s).$$

Два последних слагаемых показывают вклад в статическую ошибку каждого из внешних возмущений.

Рассмотрим случай, когда $K_0 >> 1$. Легко видеть, что на выходе будет

$$Q_{вых}(s)\Big|_{K_0>>1} = Q_{вх}(s) + \frac{K_3}{K_0} F_1(s) + \frac{1}{K_0} F_2(s).$$

Следовательно, статическая ошибка уменьшается с увеличением общего коэффициента усиления системы K_0 и при внешних возмущениях.

3.2. Оценка качества регулирования в установившемся режиме

Рассмотрим ошибку системы управления при непрерывно меняющемся входном сигнале; передаточную функцию по ошибке; *разложение ошибки в ряд*.

Рассмотрим систему, представленную на рис 3.3.

Здесь ошибка $\varepsilon(t) = \mathrm{Q}_{вх}(t) - \mathrm{Q}_{вых}(t)$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке равна следующему:

$$W_{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{\mathrm{Q}_{вх}(s)} = \frac{1}{W(s)+1}.$$

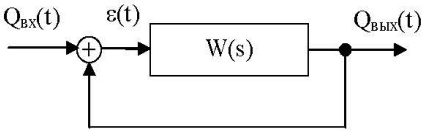


Рис. 3.3. Схема замкнутой системы

Что является источником ошибки в таких системах?

Во-первых, *запаздывание*. Покажем это. Пусть передаточная функция прямой части системы равна передаточной функции апериодического звена первого порядка при $K = 1$ и $T \neq 0$, т. е. $W(s) = \frac{1}{Ts+1}$. Математическое описание рассматриваемой части системы во временной области запишется следующим образом:

$$T\dot{\mathrm{Q}}_{вых} + \mathrm{Q}_{вых}(t) = \mathrm{Q}_{вх}(t).$$

Но так как $\varepsilon(t) = \mathrm{Q}_{вх}(t) - \mathrm{Q}_{вых}(t)$, то получим $\varepsilon(t) = T\dot{\mathrm{Q}}_{вых}$.

Вывод: ошибка является функцией скорости изменения выходной координаты, а это есть *последействие*.

Вторым источником ошибки являются *характеристики возмущений входного воздействия* (отличие от “0” всех производных *(n-1))*.

Передаточная функция по ошибке равна следующему:

$$W_{\varepsilon}(s)=\frac{\varepsilon(s)}{\mathrm{Q}_{вх}(s)}=\frac{1}{1+W(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{N(s)}{M(s)}}=$$

$$\frac{M(s)}{M(s)+N(s)}=\frac{M(s)}{M_1(s)}=\sum_{i=0}^{\infty}c_i s^i$$

Запишем в виде ряда Маклорена:

$$\sum_{i=0}^{\infty}c_i s^i = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_3 s^n + \ldots .$$

Используя последнее выражение и то, что $\varepsilon(s)=W(s)\mathrm{Q}_{вх}(s)$, запишем ошибку, перейдя от комплексной переменной s к переменной t (от изображения к оригиналу), следующим образом:

$$\varepsilon(t)=c_0\mathrm{Q}_{вх}(t)+c_1\dot{\mathrm{Q}}_{вх}(t)+c_2\ddot{\mathrm{Q}}_{вх}(t)+\ldots+c_n\mathrm{Q}^{(n)}{}_{вх}(t)+\ldots . \quad (3.2)$$

Таким образом, ошибка системы определяется параметрами системы $c_i\,(i=0,1,2,...)$ и характером входного воздействия $\mathrm{Q}_{вх}(t)$. Коэффициенты в выражении (3.2) принято называть *коэффициентами ошибок*: c_0 – коэффициент статической ошибки; c_1 – коэффициент кинетической ошибки (физический смысл – характеризует скорость); c_1 вводится, когда $c_0=0$; c_2 – коэффициент динамической ошибки или ошибки по ускорению и т.п.

Выражение (3.2) есть разложение ошибки в ряд в установившемся режиме, где

$$c_i=\left.\frac{\partial^i W(s)}{\partial s^i}\right|_{s=0} \quad \forall i=\overline{1,n}\,.\; c_0=W_{\varepsilon}(s)\big|_{s=0}\,.$$

2. Понятие астатизма (отсутствие статической ошибки). Астатическая система управления

Астатизм определяется числом первых коэффициентов ошибок, равных нулю, в ряде (3.2).

Если $c_0 = 0$ – астатическая система первого порядка; $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ – астатическая система второго порядка и т. д.

Если хотя бы один из первых коэффициентов не равен нулю, то понятие астатизма исключается ($c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$), т. е. это статическая система.

Простейшим примером астатического звена является интегрирующее звено. В частности, электрический двигатель также является примером астатического звена.

Увеличение числа интегрирующих звеньев в системе приводит к нулевым значениям нескольких коэффициентов ошибок (следовательно, ошибка стремится к нулю $\varepsilon(t) \to 0$), но при этом усложняется обеспечение устойчивости системы.

Итак, *статизм* – это величина относительной статической ошибки. В некоторых системах статическая ошибка нежелательна. Тогда переходят к регулированию, в котором она в силу структуры системы равна нулю, т.е. к астатическому регулированию.

3.3. Прямой метод оценки качества регулирования

Будем считать, что система описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть на вход системы подана единичная ступенчатая функция

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 \ \textit{при}\ t > 0 \\ 0 \ \textit{при}\ t \le 0 \end{cases}.$$

Заданы нулевые начальные условия.

Реакция системы на единичную ступенчатую функцию *1(t)* будет переходная функция *h(t)* или переходной процесс.

Переходные процессы, возникающие в системах при скачкообразном воздействии, принято делить на три группы: а) – *монотонные*, б) – *апериодические*, в) – *колебательные* (рис. 3.4).

Рассмотрим наиболее общий вид переходного процесса, представленный на рис 3.5. Переходной процесс в отклонениях представлен на рис. 3.6.

К прямым оценкам качества, определяемым по кривой переходного процесса (рис. 3.5), относятся следующие: *время регулирования*, *перерегулирование*, *число колебаний*, *декремент затухания*, установившееся рассогласование, определяющее *статическую точность системы*.

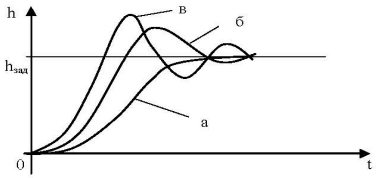


Рис. 3.4. Виды переходных процессов

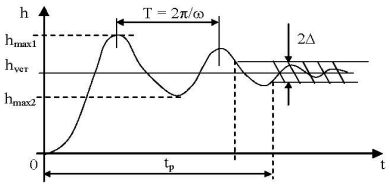


Рис. 3.5. Колебательный переходной процесс

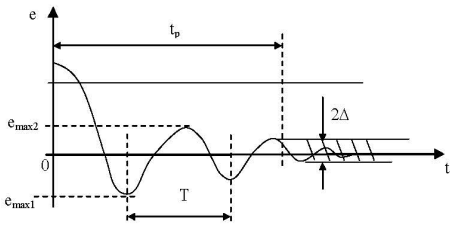


Рис. 3.6. Колебательный переходной процесс для отклонения

Рассмотрим определение прямых оценок качества переходного процесса:

1) Время регулирования t_P, характеризующее *быстродействие системы*. Время регулирования t_P – это минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью:

$$\left|h(t)-h_{УСТ}\right| \le \Delta, \qquad (3.3)$$

где Δ – заранее заданная величина, характеризующая допустимую ошибку (на практике обычно берут 5 % от установившегося значения $h_{уст}$).

Время регулирования вычисляется при выполнении условия (3.3):

$$t_p = k\,dt\ ,$$

где dt – интервал дискретизации непрерывного сигнала;

k – количество отсчётов.

2) *Перерегулирование* σ– это максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или в процентах:

$$\sigma = \frac{h_{MAX1} - h_{УСТ}}{h_{УСТ}} * 100\% . \qquad (3.4)$$

Если получена характеристика в отклонениях, то

$$\sigma = \frac{|e(t)|_{MAX1}}{|e(0)|} * 100\% , \qquad (3.4а)$$

где $e(0) = \Delta$.

Допустимое значение перерегулирования обычно составляет в реальности σ = 10 ÷ 30 %, но в некоторых случаях допускается и до 70 %. Однако есть объекты, которые не допускают перерегулирования вообще, т. е. σ = 0.

3) *Число колебаний*, которое имеет переходная характеристика $h(t)$, за время регулирования t_P.

При проектировании систем автоматического управления чаще всего допускают количество колебаний m =1÷2, реже m=3÷4, но в некоторых случаях колебания в системе недопустимы.

4) *Декремент затухания*μ равен отношению модулей двух смежных перерегулирований:

$$\mu = \frac{|h_{MAX1} - h_{УСТ}|}{|h_{MAX2} - h_{УСТ}|} = \frac{|e_{MAX1} - e(0)|}{|e_{MAX2} - e(0)|}, \qquad (3.5)$$

где $e(0) = \Delta$.

5) Установившееся рассогласование, определяющее статическую точность системы, вычисляется следующим образом:

$$\delta_{УСТ} = \frac{\Delta}{h_{зад}} * 100\% = \frac{\Delta}{h_{УСТ} - \Delta} * 100\%, \qquad (3.6)$$

где $h_{зад}$ – величина задания регулируемой величины.

Перечисленные показатели качества переходного процесса могут быть дополнены другими, но это обусловлено спецификой конкретной системы.

Опыт проектирования качественных систем управления изложен в работах [18–20, 24, 32, 33].

3.4. Корневой метод оценки качества регулирования

Известно, что вид корней характеристического уравнения определяет характер переходных процессов в системе. Поэтому можно сформулировать требования по запасу устойчивости и быстродействию системы, не рассматривая системы, т. е. переходных процессов, а накладывая определенные условия на корни характеристического уравнения.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_n = 0. \qquad (*)$$

Среднегеометрический корень Ω_0 будет равен по определению следующему:

$$\Omega_0 \overset{\Delta}{=} \sqrt[n]{|s_1 * s_2 * ... * s_n|} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \qquad (3.7)$$

и может служить *мерой быстроты протекания* переходных процессов, т. е. давать оценку быстродействия системы. Для увеличения величины Ω_0, как следует из формулы (3.7), необходимо увеличивать свободный член характеристического уравнения a_n. *В статических системах* свободный член характеристического уравнения равен $a_n = 1 + K_0$; в

астатических – $a_n = K_0$, где K_0 – общий коэффициент усиления по разомкнутой части системы.

Следовательно, повышение быстродействия может осуществляться за счет увеличения общего коэффициента усиления, который равен $K_0 = \prod_{i=1}^{n} k_i$, где k_i – коэффициент усиления отдельных звеньев системы.

При этом надо всегда помнить об устойчивости, т. е. $K_0 < K_{гр}$, где $K_{гр}$ – граничный коэффициент усиления.

Для оценки быстродействия системы может использоваться понятие *степени устойчивости*.

Под степенью устойчивости η понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня, т.е. $\eta = |\mathrm{Re} s_{мин}|$ (рис. 3.7).

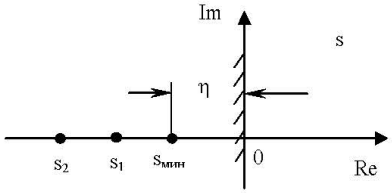


Рис. 3.7. Вещественный корень

Величина степени устойчивости η определяет быстроту затухания переходного процесса, так как переходной процесс можно считать закончившимся тогда, когда “затухнет” член, определяемый ближайшим к мнимой оси корнем.

Отсюда выводится приближенная зависимость между степенью устойчивости и временем переходного процесса:

$$t_{пер} \approx \frac{1}{\eta} * \ln \frac{1}{\Delta},$$

где $\Delta = (0{,}01 \div 0{,}05) h_{УСТ}$, как правило, задается.

Здесь могут быть различные случаи: когда ближайший корень является вещественным или когда к мнимой оси ближе всего расположена пара комплексных корней.

Первый случай. Ближайший к мнимой оси корень вещественный, т.е. $s = -\alpha$.

В этом случае надо учитывать два корня $s_{мин}$ и s_1 (рис. 3.8a); тогда $T = \dfrac{1}{|s_{мин}|}$, где T – постоянная времени; $\tau = \dfrac{1}{|s_1|}$ – время выхода на согласованные начальные условия. При этом время переходного процесса равно $t_{пер} \approx (3 \div 4)T$ (рис. 3.8b).

a

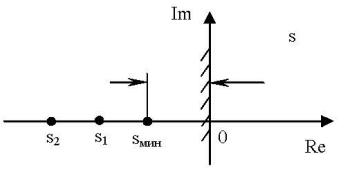


Рис. 3.8a. Вещественный корень

b

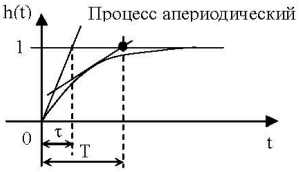


Рис. 3.8b. Переходной процесс

Второй случай. Ближайшие к мнимой оси корни комплексно-сопряженные, т. е. $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, *причем влияние обеих составляющих корней равнозначны.*

a

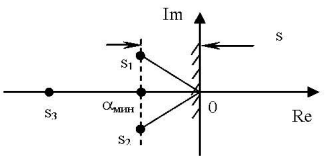


Рис. 3.9a. Комплексные корни

b

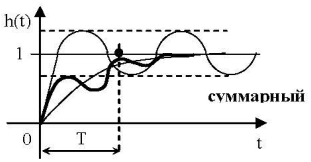


Рис. 3.9b. Переходной процесс

Время переходного процесса $t_{пер} = \dfrac{1}{|\alpha_{мин}|}$.

Степень устойчивости характеризует быстродействие системы. Понятие степени устойчивости введено Я. З. Цыпкиным и П. В. Бромбергом. Важным обстоятельством является то, что степень устойчивости можно найти без вычисления значений корней характеристического уравнения. Для этой цели переходят к переменой $z = s + \eta$. Подставляя в характеристическое уравнение (*) $z = s - \eta$, получаем смещенное уравнение

$$a_0(z-\eta)^n + a_1(z-\eta)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z-\eta) + a_n = 0 .$$

Раскрывая скобки и группируя подобные члены, получаем (смещенное влево на величину η) уравнение следующего вида:

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0 , \qquad (3.8)$$

где $A_n = a_n - a_{n-1}\eta + a_{n-2}\eta^2 - a_{n-3}\eta^3 + \ldots$(знаки чередуются).

Для вычисления степени устойчивости необходимо применить к уравнению (3.8) любой критерий устойчивости и определить, при каком значении η получается граница устойчивости. Напомним, что апериодической границе устойчивости соответствует равенство нулю свободного члена характеристического уравнения A_n=0, колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица.

Третий случай. Ближайшие к мнимой оси корни комплексно-сопряженные, т. е. $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, *где наибольшее влияние оказывает вторая составляющая.*

Здесь $\gamma = \beta / \alpha$ – колебательность системы, где α, β – вещественная и мнимая части соответственно ближайшего к мнимой оси комплексного корня (рис. 3.10а).

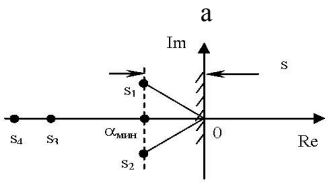


Рис. 3.10a. Комплексные корни

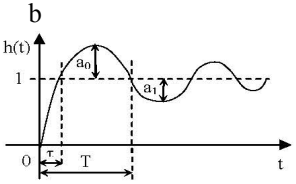


Рис. 3.10b. Переходной процесс

Колебательность системы связана с другим корневым показателем запаса устойчивости, а именно с затуханием. Затухание за период равно $T = \frac{2\pi}{\beta}$, где β – мнимая часть ближайшего к мнимой оси корня.

Декремент затухания определяется следующим образом:

$$\mu = \frac{a_0 - a_1}{a_0} = 1 - \frac{a_1}{a_0};$$

выражается в процентах % (рис. 3.10b).

Обычно в системах автоматического регулирования допускается затухание за период не менее чем 90 ÷ 98 %.

Задание определенной колебательности заставляет ограничивать область расположения корней двумя лучами, которые составляют с вещественной осью угол, равный

$$\varphi = arctg\frac{\beta}{\alpha} = arctg\ \gamma\ ,$$

где α, β–вещественная и мнимая части соответственно ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения. Колебательность системы также можно определить без нахождения корней характеристического уравнения подобно тому, как это было сделано по отношению к степени устойчивости.

Переходной процесс будет таким, каковы требования к нему:

если $\varphi_{\min} \leq \varphi_{доп}$, то переходной процесс *h(t)* будет монотонной функцией; можно пренебречь комплексными корнями и т. д. (рис. 3.11a, 3.11b).

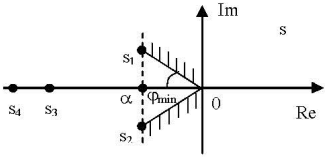


Рис. 3.11a. Область допустимых значений корней

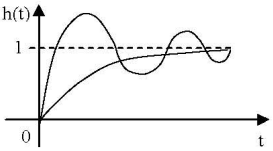


Рис. 3.11b. Переходные процессы

Использование корней характеристического уравнения для оценки качества управления является не совсем полной, так как вид переходного процесса определяется не только левой, но и правой частью дифференциального уравнения. *Корни левой части* характеристического уравнения (знаменатель передаточной функции) – *полюса*; *корни правой части* характеристического уравнения (числитель передаточной функции) – *нули*.

Задание области расположения полюсов и нулей позволяет более полно оценивать вид переходного процесса. Нули оказывают ускорение на переходной процесс. Отметим следующее. Использование нулей числителя для уменьшения запаздывания динамической системы возможно в установившемся режиме, если расположить нули передаточной функции в окрестности полюсов этой функций, начиная с ближайшей точки к мнимой оси.

3.5. Интегральные оценки качества регулирования

К четвертой группе критериев качества относятся интегральные критерии, дающие оценку некоторых обобщенных свойств, которые могут учитывать точность, запас устойчивости и быстродействие.

Интегральные оценки имеют целью дать общую оценку быстроты затухания и величины отклонения регулируемой величины в совокупности, без определения того и другого в отдельности. Простой интегральной оценкой может служить следующая величина:

$$J_1 = \int_0^\infty \varepsilon(t)dt\,, \qquad (3.9)$$

где $\varepsilon(t)$ – отклонение регулируемой величины от установившегося значения.

В устойчивой системе $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$ этот интеграл имеет конечную величину.

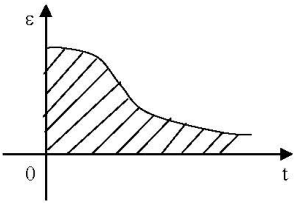


Рис. 3.12. Монотонный переходной процесс

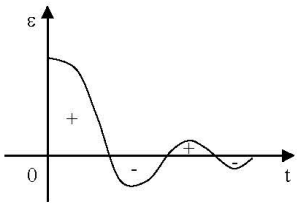


Рис. 3.13. Колебательный переходной процесс

Геометрически это будет площадь под кривой переходного процесса, построенного для отклонения. Площадь будет тем меньше, чем быстрее затухает переходный процесс и чем меньше величина отклонения. Поэтому параметры системы рекомендуется выбирать таким образом, чтобы добиваться минимума интегральной оценки.

Неудобством интегральной оценки вида (3.9) является то, что она годится только для монотонных процессов, когда не меняется знак отклонения $\varepsilon(t)$.

Если же имеет место колебательный процесс, то при вычислении интеграла (3.9) площади будут *складываться алгебраически*, и минимум этого интеграла может соответствовать незатухающему процессу. Поэтому была предложена другая интегральная оценка следующего вида:

$$J_2 = \int_0^\infty |\varepsilon| dt \,, \tag{3.10}$$

то есть сумма абсолютных величин всех площадей под кривой переходного процесса.

Оказалось, что аналитическое вычисление интеграла (3.10) затруднительно на практике.

В связи с этим целесообразно перейти к квадратичной интегральной оценке, называемой иногда “квадратной площадью” (рис. 3.14):

$$J_3 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt \,. \qquad (3.11)$$

Площадь не зависит от знаков отклонения, а значит и от формы переходного процесса (монотонный или колебательный).

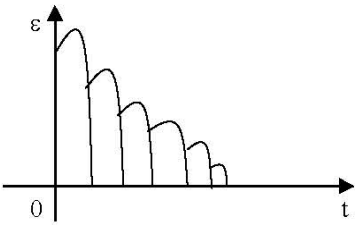


Рис. 3.14. Квадраты отклонений

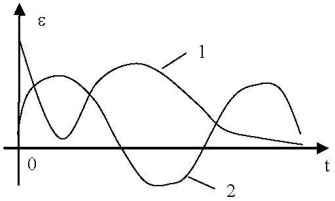


Рис. 3.15. Колебательный переходной процесс для отклонений

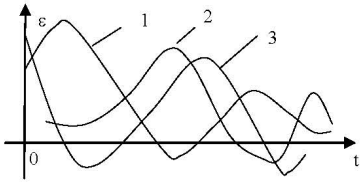


Рис. 3.16. Виды колебательных переходных процессов

Величина критерия J_3, будет тем меньше, чем меньше сумма площадей (взятых для квадратов ординат) (рис. 3.14).

Заметим, что оценку (3.11) называют также квадратичной динамической ошибкой управления. Ее можно записать в безразмерном виде следующим образом:

$$J_3 = \frac{\Omega_0}{c^2}\int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt \,, \qquad (3.12)$$

где $\varepsilon(t)$ – отклонение от установившегося значения; c – некоторая величина (const), имеющая размерность регулируемой величины; Ω_0 – среднегеометрическое значение корня характеристического уравнения (*).

Недостатком интегральных оценок является то, что здесь ничем не ограничивается форма кривой переходного процесса. Оказывается, что при совершенно различных по форме (рис. 3.16) переходные процессы имеют одно и то же значение квадратичной интегральной оценки (3.11). Часто оказывается, что выбранные по минимуму этой оценки параметры системы соответствуют слишком сильно колебательному процессу. Причиной является то, что оценка (3.11) учитывает только величину отклонения и быстроту затухания, но никак не учитывает близость системы к колебательной границе устойчивости.

Поэтому часто применяется другой вид интегральной оценки, в которой ограничение накладывается не только на величину отклонения $\varepsilon(t)$, но также и на скорость отклонения $\dot{\varepsilon}(t)$. Улучшенная квадратичная интегральная оценка имеет вид

$$J_4 = \int_0^\infty (\varepsilon^2 + T\dot{\varepsilon}^2)dt\,, \qquad (3.13)$$

где T – постоянная времени.

Переходной процесс представлен на рис. 3.17:

$$h(t) = h_0 e^{-\frac{t}{T}} + (1 - e^{-\frac{t}{T}})\,.$$

Следовательно, выбирая параметры системы по минимуму улучшенной интегральной оценки (3.13), можно приблизить переходной процесс к заданной экспоненте с постоянной времени T, которая носит в этом случае название экстремали.

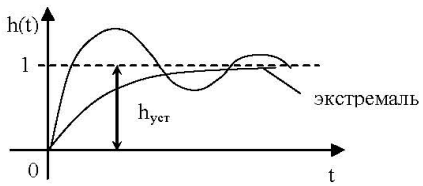


Рис. 3.17. Переходной процесс

Можно еще улучшать оценку, вводя вторую производную, третью и т. д.

$$J_4 = \int_0^\infty (\varepsilon^2 + T_1^2 \dot{\varepsilon}^2 + T_2^2 \ddot{\varepsilon}^2) dt \, .$$

Но при этом всегда надо помнить об экономической целесообразности.

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут отвечать разные формы переходного процесса, что создает недостаточную определенность решения задачи.

Вопросы, задачи

1. Дать определение качества динамической системы. Что является мерой оценки качества динамической системы?
2. Охарактеризовать прямой метод определения показателей качества динамической системы. Привести пример.
3. Что понимается под быстродействием системы? Показать определение быстродействия системы по кривой переходного процесса.
4. Что понимается под перерегулированием системы? Показать определение перерегулирования системы по кривой переходного процесса.
5. Что понимается под статической точностью системы? Показать определение статической точности системы по кривой переходного процесса.
6. Доказать утверждение, что чем больше общий коэффициент усиления системы, тем меньше статическая ошибка системы.
7. Показать влияние жесткой отрицательной обратной связи на показатели качества системы.
8. Показать влияние гибкой отрицательной обратной связи на колебательность системы.
9. Дать понятие астатизма системы. Основные отличия статических и астатических систем.

10. Охарактеризовать корневой метод оценки качества системы.

11. Каков вид переходного процесса, если корни характеристического уравнения вещественные? Основные показатели качества.

12. Каков вид переходного процесса, если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные? Основные показатели качества.

13. Что собой представляют интегральные оценки качества динамической системы?

14. Охарактеризовать квадратичный критерий качества.

4. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ

Первой проблемой, которая решалась в теории автоматического регулирования, была проблема обеспечения устойчивости динамических систем. *Устойчивость является необходимым*, но не достаточным свойством реальной автоматической системы регулирования. *Достаточность САУпридает решение задачи достижения необходимого качества регулирования.* Систематизация и обобщение накопленных знаний позволили разработать далее методы решения задачи синтеза САУ с заданными показателями качества.

В настоящей главе рассматриваются задачи и методы анализа САУ. Затем приводятся постановка задачи и методы решения параметрического синтеза САУ с заданными показателями качества в терминах “вход-выход” и в пространстве состояний.

Однако прежде чем решать задачу параметрического синтеза САУ, необходимо проверить: принципиально исследуемая динамическая система управляема ли и наблюдаема ли? Для этого в настоящей главе рассматриваются критерии управляемости и наблюдаемости Р. Калмана и Е. Гильберта.

4.1. Задачи и методы анализа САУ. Постановка задачи синтеза САУ

Проблема обеспечения требуемых свойств линейных автоматических систем является весьма сложной. В данной проблеме прежде всего выделяют следующие задачи: обеспечение устойчивости (стабилизация); повышение запаса устойчивости (демпфирование); повышение точности регулирования в установившихся режимах (уменьшение или устранение статической ошибки воспроизведения задающего воздействия); улучшение переходных процессов (увеличение быстродействия, уменьшение динамической ошибки от возмущений).

Укрупненно задачи анализа САУ выделяют в три основных раздела: анализ устойчивости, оценка собственных движений, оценка качества регулирования.

1) Анализ устойчивости САУ

Всякая система автоматического регулирования должна быть устойчивой. Анализ устойчивости САУ осуществляется с помощью критериев устойчивости, которые достаточно подробно описаны во второй главе данной книги.

Если математическое описание системы задано в терминах "вход – выход", то анализ устойчивости системы проводится по алгебраическим и частотным критериям. Если порядок системы не высокий ($n \leq 4$), то целесообразно применять алгебраический критерий устойчивости Гурвица; при $n > 4$ целесообразно – критерий устойчивости Рауса. Критерий устойчивости Михайлова целесообразно применять при исследовании сложных многоконтурных систем в частотной области; критерий Найквиста – при исследовании сложных многоконтурных систем с запаздыванием или когда характеристики звеньев заданы экспериментально.

Если математическое описание динамической системы задано в пространстве состояний, то анализ устойчивости системы следует проводить с помощью теорем А. М. Ляпунова.

Однако нередко приходится рассматривать влияние одного – двух параметров системы на ее устойчивость. При этом главе 2 настоящей книги достаточно подробно представлен метод D-разбиения пространства параметров, предложенной Ю. И. Неймарком.

2) Оценка собственных движений системы

Анализ собственных движений системы или корневой метод и построение переходной функции как основной характеристики динамической системы представлены выше.

Определение основных оценок собственных движений системы осуществляется:

– по виду переходной функции: последействие системы, колебательность, коэффициент статической ошибки;

– по интегральным критериям характеристики переходной функции; интеграл от переходной функции, интеграл от квадрата переходной функции.

В этом разделе следует выделить задачи анализа, решаемые корневым и частотным методами. При этом необходимо помнить, что *частотные характеристики всегда определяют характеристики установившегося режима*. Наблюдается однозначная зависимость между последействием и частотой среза или полосой пропускания (основной характеристики обобщенной частотной функции). Если ЛАХ (рис. 4.1) имеет наклон –40 [дб/дек] в точке $L(\omega) = 0$, то это говорит о колебательности процесса и т. п.

Характер переходного процесса является наиболее полной характеристикой динамической системы, так как это характеристика перехода системы из одного состояния в другое.

3) Оценка качества регулирования

Основной мерой определения качества системы является ошибка регулирования. Коэффициенты ошибок определяют, разлагая ошибку в ряд. С другой стороны коэффициенты ошибок можно определить по частотным параметрам динамической системы. На рис. 4.1 представлена ЛАХ разомкнутой системы, где выделены соответствующие режимы.

Здесь $\omega_{ср}$ – частота среза или полоса пропускания; от ω^* до ω^{**} –интервал, где определяется собственное движение системы; $\omega^* \approx (16\text{-}18) \lg K$, где К – определяется из допустимой статической ошибки (коэффициент усиления системы).

Если на частотах больше чем ω^{**} ослабление сигнала на выходе происходит на порядок, значит этим сигналом можно пренебречь, как и другими неучтенными факторами. Это есть мера грубости оценки исследуемой системы. Вообще говоря, характеристические числа системы располагаются от $-\infty$ до $+\infty$, но после ω^{**} характеристические числа пренебрежимо малы.

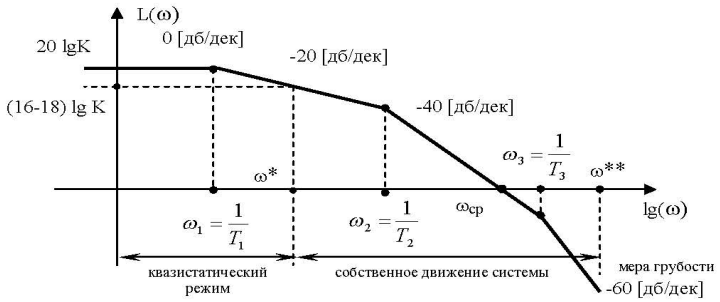


Рис. 4.1. ЛАХ разомкнутой системы

Если повышать коэффициент усиления, то прямая с наклоном–20 [дб/дек] будет опускаться и частота среза $\omega_{ср}$ будет смещаться вперед, а это значит, что повышается быстродействие системы; смещение ω* и ω** расширяет область существенного определения параметров системы. Следовательно, область пренебрежимо малых значений постоянных времени T_i $(\forall i = \overline{1,n})$ уменьшается. Вводятся все новые и новые корни, математическое описание уточняется, порядок дифференциального уравнения повышается.

Задача анализа как определение основных мер оценки собственных движений и характеристик ошибки при отработке управляющих воздействий решается только после того, как заданы:

– характеристики динамической системы;

– структура системы, то есть принцип управления и закон регулирования.

Задачи синтеза систем автоматического управления

Под задачей синтеза САУ мы будем понимать задачу определения основных параметров системы, характеризующих выбранные законы регулирования и удовлетворяющих заданным требованиям:

а) на характеристики устойчивости системы;

б) на характеристики ошибок в установившемся режиме.

Эти два требования (а) и (б) внутренне несколько противоречивы. Требования к САУ могут быть сформулированы двояко: к переходному процессу *h(t);* к ошибке $W_{\varepsilon}(s) = \dfrac{\varepsilon(s)}{\mathrm{Q}_{вх}(s)}$ в установившемся режиме.

Если требования сформулированы к ошибке, то такую задачу называют *задачей конструирования системы.*

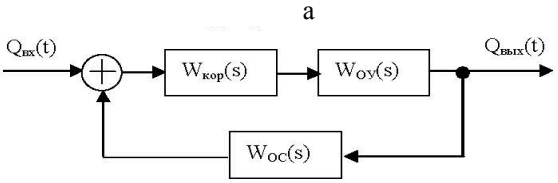


Рис. 4.2а. Замкнутая система с корректирующим устройством

При заданных параметрах ОУ, динамические свойства которого существенно принципиально нельзя изменять, необходимо, используя выбранный принцип управления по рассогласованию, ввести такое корректирующее звено $W_{кор}(s)$, чтобы ошибка регулирования была не больше заданной.

Задачу синтеза в данном случае можно рассматривать как определение параметров звеньев, введенных в прямую цепь входного сигнала и в цепь обратной связи.

Задачу синтеза как наложение определенных требований к качеству переходного процесса *h(t)* при заданном принципе управления принято называть *задачей параметрического синтеза.*

Необходимо всегда стремиться, чтобы передаточная функция замкнутой системы тождественно была равна единице:

$$W_{з}(s) \overset{\Delta}{=} \frac{Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)} = \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} \equiv 1 \text{ (при любом знаменателе } Q_2(s)).$$

Основные свойства заданы характеристиками ОУ, и воздействовать на характеристические числа в замкнутой системе можно только в ограниченных масштабах или в *предельно реализуемых*.

Зависит ли время реакции ОУ от входного сигнала? Конечно, зависит. При неограниченном входном воздействии управлением можно добиваться любого быстродействия. Но на практике это невозможно. Требования в отношении быстродействия должны соответствовать мощности исполнительного элемента регулятора.

Вычислить управление не представляет особого труда. Точность или мера оценки качества определяется априорным знанием характеристик ОУ. Если свойства ОУ изменяются, то надо отслеживать текущие состояния ОУ и упреждать (предсказывать) управлением. Отсюда появилось адаптивное управление.

Этапы решения задачи параметрического синтеза

1) Задание характеристик ОУ, выбор той или иной математической модели ОУ либо в терминах "вход – выход" в виде передаточной функции

$$W(s) = \frac{Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)}$$

либо в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}.$$

2) Проверка исходной системы на устойчивость при заданном принципе управления по рассогласованию.

3) Задание требований к качеству переходного процесса *h(t)*: быстродействие $t_р$, процент перерегулирования σ%, статическая точностьδ и т. п.

4) Определение параметров передаточной функции корректирующего устройства в прямой или обратной связи.

5) Построение переходного процесса *h(t)* – основной характеристики системы автоматического регулирования; определение показателей качества.

В результате можно получить противоречие между полученными характеристиками переходного процесса и желаемыми. Это возможно из-за некоторого несоответствия

между математической моделью ОУ неуправляемой части системы и требованиям к качеству переходного процесса.

Отсюда следующий этап.

6) Корректировка:

– математической модели ОУ неуправляемой части системы, т. е. учет отброшенных корней характеристического уравнения;

– закона регулирования САУ, т. е. учет 1-й, 2-й производной в законе регулирования;

– изменение принципа управления.

Таким образом, получена *итерационная процедура решения задачи параметрического синтеза САУ*, состоящая из шести шагов. Если процедура сходится, то задача параметрического синтеза решена. Если расходится, то, видимо, требования к переходному процессу не соответствуют возможностям математической модели ОУ.

4.2. Синтез корректирующих устройств (в прямой цепи)

Проектируя систему управления для любого ОУ, естественно необходимо создать систему *точную*, *быстродействующую* и с *большим запасом устойчивости*. При этом, прежде всего, пытаются рациональным образом и в допустимых пределах изменить параметры (коэффициенты передачи отдельных звеньев, постоянные времени и т. п.) так, чтобы удовлетворить заданным требованиям качества регулирования, которые определяются критериями качества. При невозможности решить эту задачу в рамках имеющейся системы приходится идти на изменение ее структуры. Для этой цели обычно используется введение в систему управления корректирующих средств, которые должны изменить динамику всей системы в нужном направлении. К корректирующим средствам относятся звенья с определенными передаточными функциями.

Постановка задачи параметрического синтеза

Словесная формулировка задачи. Имеется управляемый объект, задан принцип управления – по рассогласованию,

система охвачена жесткой отрицательной ОС. Определить корректирующее звено при заданной характеристике ОУ, исходя из требований, предъявляемых к системе.

b

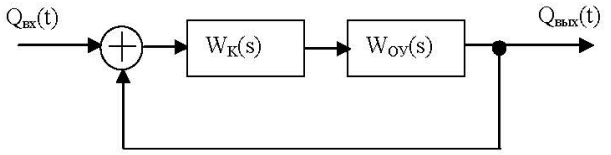


Рис. 4.2b. Замкнутая система с корректирующим устройством

Требования:

1) К переходной функции h(t) (качеству переходного процесса).

2) К ошибке в установившемся режиме.

Математическая постановка задачи

Пусть заданы:

– структура системы, т. е. принцип управления;

– ЛАХ управляемого объекта $L_{OY}(\omega) = \ln\left|W_{OY}(j\omega)\right|$;

– ЛАХ желаемая $L_*(\omega) = \ln\left|W_*(j\omega)\right|$, исходя из требований к переходному процессу.

Необходимо:

– выбрать передаточную функцию корректирующего устройства $W_k(s)$;

– определить параметры $W_K(s)$.

При ограничениях и соответствующих требованиях к показателям качества $0 < K_i < K_{гр i}\ \forall i = \overline{1,n}$;

$0 < T_i < T_{i\ доп}\ \forall i = \overline{1,n}$; $t_p \le t_{доп}$; $\delta \le \delta_{доп}$.

Решение

Частотная характеристика замкнутой системы запишется следующим образом:

$$W_3(j\omega)=\frac{W_K(j\omega)W_{OY}(j\omega)}{1+W_K(j\omega)W_{OY}(j\omega)}\ . \qquad (4.1)$$

Запишем передаточную функцию замкнутой системы $W_3(j\omega)$ через желаемую передаточную функцию. Причем, желаемая $W_*(j\omega)$ определяется свойствами разомкнутой системы

$$W_з(j\omega)=\frac{W_*(j\omega)}{1+W_*(j\omega)}. \qquad (4.2)$$

Если равны левые части (4.1) и (4.2), то и правые части уравнений (4.1) и (4.2) равны. Следовательно,

$$W_*(j\omega)=W_K(j\omega)W_{OY}(j\omega).$$

Отсюда $W_K(j\omega)=\frac{W_*(j\omega)}{W_{OY}(j\omega)}$.

Прологарифмировав последнее уравнение, получим ЛАХ корректирующего устройства:

$$\ln|W_K(j\omega)|=\ln|W_*(j\omega)|-\ln|W_{OY}(j\omega)|. \qquad (4.3)$$

Так как аппроксимирующая ЛАХ строится отрезками с наклонами ± 20 [дб/дек], то и вычитать надо отрезками до сопрягающих частот. Итак, получено правило определения ЛАХ корректирующего устройства.

Правило

Чтобы получить аппроксимирующую ЛАХ корректирующего устройства, необходимо от ЛАХ желаемой отнять ЛАХ исходного ОУ, причем вычитать надо отрезками до сопрягающих частот.

Чем характеризуется наклон ± 20 [дб/дек]? Включением в систему дифференцирующих или интегрирующих звеньев. Рассмотрим следующий пример.

Пример 4.1

Пусть ЛАХ ОУ имеет вид, представленный на рис. 4.3.

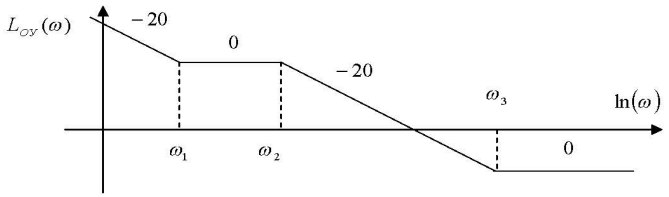


Рис. 4.3. ЛАХ объекта управления

Если ЛАХ пересекает ось частот с наклоном –20 [дб/дек], то устойчивость системы гарантирована; если –40 [дб/дек], то система может быть колебательной, необходимо проверить: не находится ли она на границе колебательности?

Желаемая ЛАХ имеет следующий вид, представленный на рис. 4.4.

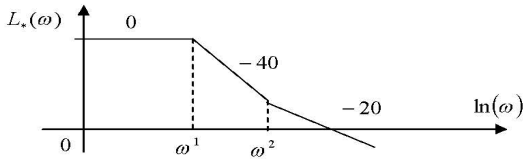


Рис. 4.4. ЛАХ желаемая

Используя правило (4.3), по которому чтобы получить аппроксимирующую ЛАХ корректирующего звена, необходимо от ЛАХ желаемого отнять ЛАХ исходного ОУ(причем вычитать надо отрезками до сопрягающих частот), получим ЛАХ корректирующего звена.

Построим обе ЛАХ $\ln|W_*(j\omega)|$ и $\ln|W(j\omega)|$ на одном графике (рис. 4.5); по правилу (4.3) получим ЛАХ корректирующего звена, представленного на рис. 4.5:

$$\ln|W_K(j\omega)| = \ln|W_*(j\omega)| - \ln|W_{OY}(j\omega)|.$$

Запишем передаточную функцию корректирующего звена:

$$W_K(s) = \frac{\tau'_0\, s \cdot 1\left(\tau'''^2 s^2 + 2\xi\tau'' s + 1\right)}{\left(\tau' s + 1\right)\left(\tau''^2 + s^2 + 2\xi\tau'' s + 1\right)\left(\tau^{iv} s + 1\right)},$$

где $\tau_0' = \frac{1}{\omega_0'}$ (+20 дб/дек, ω_0' – сопрягающая частота дифференцирующего звена);

$\tau' = \frac{1}{\omega'}$ (0 дб/дек, ω' – сопрягающая частота апериодического звена 1-го порядка, был +20-20 = 0 дб/дек);

$\tau'' = \frac{1}{\omega''}$ (-40 дб/дек, ω'' _ сопрягающая частота, поэтому апериодическое звено 2-го порядка);

$\tau''' = \frac{1}{\omega'''}$ (0 дб/дек, ω''' – сопрягающая частота апериодического звена 2-го порядка: было –40 + 40 = 0 дб/дек);

$\tau^{IV} = \frac{1}{\omega^{IV}}$ (-20 дб/дек, ω^{IV} – сопрягающая частота апериодического звена 1-го порядка).

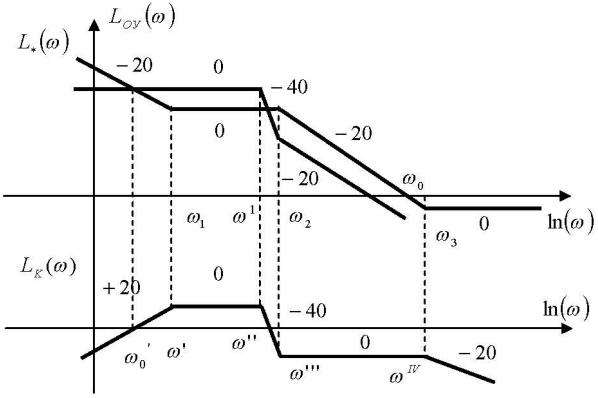


Рис. 4.5. ЛАХ корректирующего устройства

Рассмотрим реализацию корректирующего устройства на примере электрических фильтров (пассивный электрический 4-х полюсник) (рис 4.6).

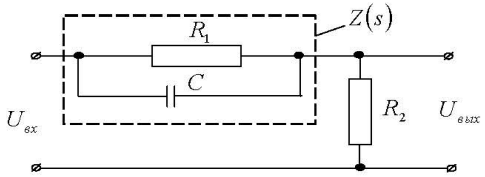


Рис. 4.6. Схема корректирующего звена

$$Z(s)=\frac{R_1\dfrac{1}{cs}}{R_1+\dfrac{1}{cs}}=\frac{R_1}{R_1cs+1}\cdot$$

$$W_K(s)\overset{\Delta}{=}\frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)}=\frac{R_2}{R_2+Z(s)}=\frac{R_2}{R_2+\dfrac{R_1\dfrac{1}{cs}}{R_1+\dfrac{1}{cs}}}=\frac{R_2(R_1cs+1)}{R_2(R_1cs+1)+R_1}=$$

$$=\frac{R_2R_1cs+1}{R_2R_1cs+(R_2+R_1)}=\frac{K_1}{K_2}\cdot\frac{T_2's+1}{T_2''s+1}=K\frac{1+\tau_1s}{1+\tau_2s};$$

Следовательно,

а) Если $\tau_1>\tau_2$, то $\omega_1>\omega_2$; $1<K<10$

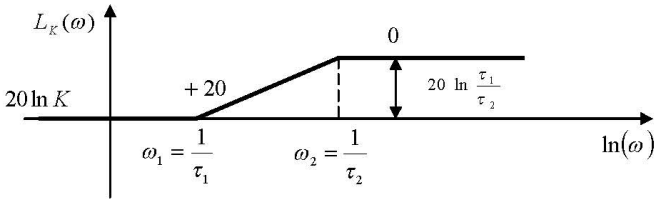


Рис. 4.7а. ЛАХ корректирующего устройства а)

Эта корректирующая цепочка может быть названа пропорционально– дифференцирующей.

б)Если $\tau_1<\tau_2$, то $\omega_1<\omega_2$; $1<K<10$.

Эта корректирующая цепочка может быть названа пропорционально– интегрирующей.

В [3] у Бесекерского В. А. приведены таблицы, где перечислены различные типы корректирующих устройств.

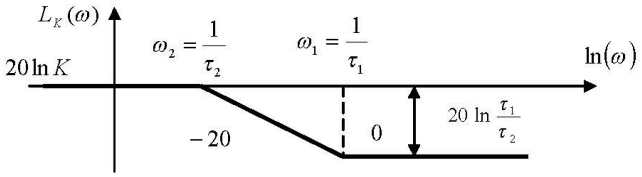


Рис. 4. 7b. ЛАХ корректирующего устройства б)

Построение желаемой ЛАХ

При синтезе корректирующего устройства необходимо построение желаемой ЛАХ. Желаемой ЛАХ называют асимптотическую ЛАХ $L_{ж}(\omega)$ разомкнутой системы, имеющей желаемые (требуемые) статические и динамические свойства. Желаемая ЛАХ (рис. 4.8) состоит из трех основных асимптот: *низкочастотной, среднечастотной и высокочастотной*.

Строится желаемая ЛАХ системы на основании требований (заданных показателей качества) к системе. *Низкочастотная асимптота ЛАХ разомкнутой системы* определяет статические свойства. *Среднечастотная асимптота ЛАХ* и ее сопряжение с низкочастотной определяют динамические свойства системы – устойчивость и показатели качества переходной характеристики.

Высокочастотная асимптота желаемой ЛАХ мало влияет на свойства системы. Поэтому ее следует выбирать так, чтобы корректирующее устройство было возможно простым. Это достигается при повторении наклонов высокочастотной асимптоты ЛАХ исходной системы, т. е. желаемая ЛАХ $L_{ж}(\omega)$ в этой части идет параллельно заданной.

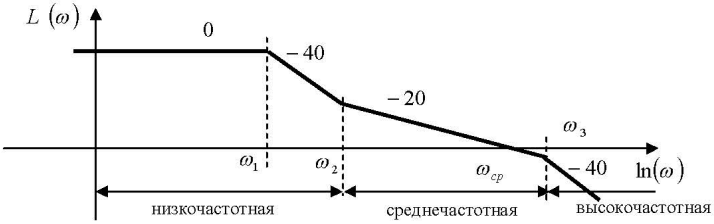


Рис. 4.8. Желаемая ЛАХ системы

Построение среднечастотной асимптоты желаемой ЛАХ начинают с выбора частоты среза $\omega_{ср}$. Для этого используется номограмма В. В. Солодовникова. Она определяет зависимость процента перегулирования и времени регулирования от максимума P_{max} вещественной частотной характеристики замкнутой системы (рис. 4.9) [2].

Номограмма используется следующим образом. По заданному значению перерегулирования σ определяют значение P_{max}. Затем по P_{max} определяют отношение между $t_р$ и $\omega_{ср}$, определив значение параметра "*c*" по номограмме (рис. 4.9).

Например, пусть задано перерегулирование 30 %, а быстродействие системы $t_р$ = 0,6 с. Тогда, как показано на рис. 4.9, по σ = 30 % определяем P_{max} = 1,27 и затем определяем *c* = 3,5. Следовательно,

$$t_p = \frac{c\pi}{\omega_{ср}} = \frac{3{,}5\pi}{\omega_{ср}}.$$

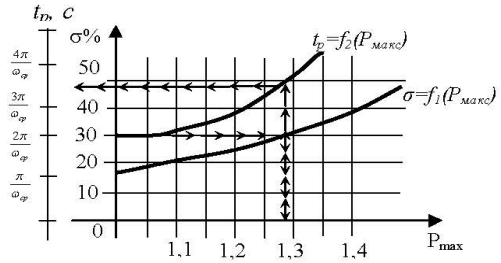


Рис. 4.9. Фрагмент номограммы В. В. Солодовникова

Отсюда $\omega_{ср} = \frac{3{,}5\pi}{t_p}$.

Таким образом вычисляется частота среза желаемой ЛАХ системы, при которой время регулирования не превысит заданного значения. Чем больше частота среза $\omega_{ср}$, тем меньше время регулирования, а следовательно, система более быстродействующая.

Среднечастотная асимптота желаемой ЛАХ проводится через точку $\omega_{ср}$ обязательно с наклоном – 20 дб/дек. При большем наклоне трудно обеспечить необходимый запас устойчивости и допустимое перерегулирование.

Протяженность среднечастотной асимптоты устанавливается, исходя из необходимого запаса устойчивости. Из этих же соображений выбирают ее сопряжение с низкочастотной асимптотой. Кроме того, сопрягающую асимптоту следует выбирать так, чтобы характеристика $L_{ж}(\omega)$ возможно меньше отличалась от ЛАХ исходной системы и корректирующее устройство было возможно более простым [7].

4.3. Методы построения переходного процесса

Приближенный метод построения переходных процессов

В инженерной практике широкое применение нашел один из приближенных методов построения переходных процессов в системе по вещественным частотным характеристикам при воздействии единичной функции *1(t)* и нулевых начальных условиях – метод трапеций. Ниже приводится краткое описание метода трапеций [1, 3, 5].

Метод трапеций, метод разложения частотной характеристикина сумму трапеций, предложил русский ученый В. В. Солодовников. Суть метода заключается в следующем. Включив корректирующие устройство в систему, находят переходную функцию замкнутой скорректированной системы. Затем строят вещественную характеристику *P(ω)* для этой

системы (рис. 4.10), приблизительно разбивают ее на несколько трапеций (рис. 4.11) с наклоном $\aleph_i = \dfrac{\omega'_i}{\omega_i} \;\; \forall i = \overline{1,n}$.

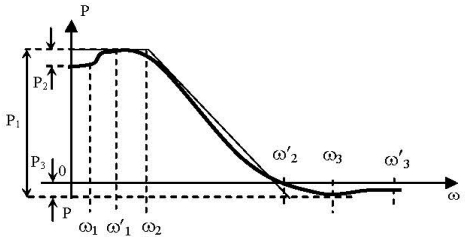


Рис. 4.10. Вещественная характеристика

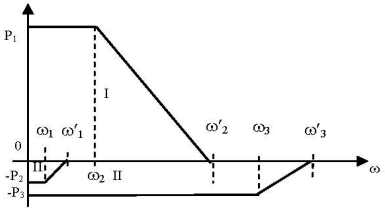


Рис. 4.11. Трапеции

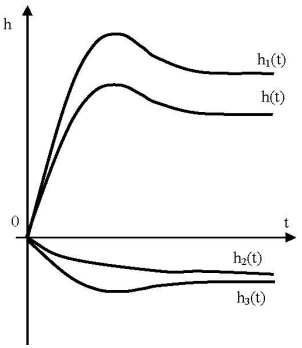


Рис. 4.12. Переходные процессы

Для каждой трапеции с наклоном $\aleph_i$ определяют соответствующие табличные значения h-функции $h_i(\tau)$. Затем переходят к реальному времени $t = \dfrac{\tau}{\omega_i}$ и, умножив каждое значение функции на высоту соответствующей трапеции, получают значения $h_i(t)$. Вычерчивая кривые $h_i(t)$ на одном графике (рис. 4.12) и, суммируя графически с учетом знака (их знаки должны совпадать со знаком ординат соответствующих трапеций), получают переходной процесс *h(t)*, который равен

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t) .$$

Построение переходного процесса с использованием разложения Хевисайда

Как известно, характер переходного процесса в системе определяется по ее реакции на единичное ступенчатое воздействие *1(t)*. Переходная характеристика *h(t)* системы может быть вычислена при помощи обратного преобразования Лапласа – по формулам *разложения Хевисайда* – следующим образом:

$$[13, 14]: h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}W_{з}(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{M(s)}{sN(s)}\right\} = L^{-1}\{F(s)\},$$

где $M(s)$, $N(s)$ – числитель и знаменатель соответственно передаточной функции замкнутой скорректированной системы.

Для вычисления обратного преобразования Лапласа $L^{-1}\{F(s)\}$ находят корни характеристического уравнения $N(s) = 0$ замкнутой САР, которые определяют полюсы функции $F(s)$. В зависимости от вида корней характеристического уравнения замкнутой системы, переходной процесс, использующий разложение Хевисайда, записывается по-разному.

Если все корни характеристического уравнения замкнутой системы вещественные, и полином N(s) не имеет кратных корней, то переходной процесс $h(t)$ запишется следующим образом:

$$h(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^{n}\frac{M(s_i)}{s_i N'(s_i)}e^{s_i t}, \qquad (4.4)$$

где s_i – корни характеристического уравнения *N(s)=0* замкнутой системы; $N'(s_i) = \left.\frac{dN(s)}{ds}\right|_{s=s_i}$ – первая производная характеристического полинома $N(s)$ по s при $s = s_i \quad (i = \overline{1,n})$.

Если корни характеристического уравнения $N(s) = 0$ замкнутой системы комплексно – сопряженные

$(s_i = -\alpha_i \pm j\beta_i) \quad \forall i = \overline{1,n}$, то переходной процесс $h(t)$ можно записать следующим образом:

$$h(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^{m} R_i e^{s_i t} \cos(\beta_i t + \varphi_i), \qquad (4.5)$$

где α_i, β_i – вещественные и мнимые составляющие комплексных корней характеристического уравнения замкнутой системы; $R_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$; $\varphi_i = arctg\dfrac{\alpha_i}{\beta_i} \quad \forall i = \overline{1,m}$.

Если корни характеристического уравнения *N(s) = 0* замкнутой системы содержат нулевой корень, "*n*" корней вещественных и "*m*" комплексно- сопряженных, то переходной процесс *h(t)* можно записать следующим образом:

$$h(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{M(s_i)}{s_i N'(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{K=1}^{m} R_K e^{s_i t} \cos(\beta_k t + \varphi_k), \qquad (4.6)$$

где обозначения полностью совпадают с обозначениями в уравнениях (4.4) и (4.5).

Из (4.4), (4.5) и (4.6) видно, что на характер переходного процесса влияют и числитель (нули) и знаменатель (полюсы) передаточной функции замкнутой системы $W_з(s)$. Если же числитель $W_з(s)$ не имеет нулей, т. е. представляет собой постоянную величину, то характер переходных процессов оценивается по ее полюсам, т. е. корням характеристического уравнения замкнутой системы $N(s)$.

Построив переходной процесс *h(t)*, определяют показатели качества системы.

4.4. Принципы управления и законы регулирования

Зная статические и динамические свойства системы управления, можно построить математическую модель системы

и найти такой алгоритм управления, который обеспечивал бы заданный алгоритм функционирования при известных воздействиях. Однако математическая модель приближенно выражает свойства оригинала, поэтому алгоритм управления следует увязать не только со свойствами системы, но и с фактическим функционированием системы.

В настоящее время используются три фундаментальных принципа: принцип разомкнутого управления, управление по рассогласованию (или обратной связи), управление по возмущению (или принцип компенсации) [1, 3].

Принцип разомкнутого управления заключается в том, что алгоритм управления выбирается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами – возмущениями или выходными факторами. Кроме того, общих правил построения разомкнутых систем можно выделить немного, которые все равно зависят от частных свойств конкретных устройств. Поэтому в данной книге этот метод не будет представлен подробно, зато достаточно подробно будет представлено комбинированное управление по возмущению и отклонению.

4.4.1. Управление по рассогласованию

Принцип управления по рассогласованию или принцип управления по отрицательной обратной связи Н. Винер сравнивал с посохом для слепого.

Пусть задана система следующего вида:

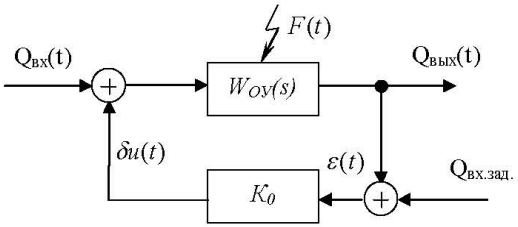


Рис. 4.13. Схема замкнутой системы

Здесь $\varepsilon(t) = \mathrm{Q}_{вх.зад.} - \mathrm{Q}_{вых}(t);\ \delta u(t) = K_0 \varepsilon(t)$.

Этот принцип управления предполагает, что точка приложения возмущения неизвестна, т. е. не важно, где она приложена, возможно, кроме внешнего возмущения присутствует возмущение от природы самого ОУ. Суть метода заключается в следующем.

В каждый момент времени измеряется регулируемая (выходная) координата и сравнивается с заданием (желаемым значением):

$$\varepsilon(t) = \mathrm{Q}_{вх.зад.} - \mathrm{Q}_{вых}(t).$$

Рассогласование $\varepsilon(t)$ используется для формирования управляющих воздействий $\delta u(t)$:

$$\delta u(t) = K_0 \varepsilon(t).$$

Причем регулятор, вырабатывающий управляющее воздействие $\delta u(t)$, образует по отношению к выходу объекта отрицательную обратную связь, которую называют *главной обратной связью* (кроме нее, могут быть и другие местные обратные связи).

Используя этот принцип управления, можно, ничего не зная о возмущении, управлять объектом достаточно точно.

Рассмотрим принцип управления по рассогласованию или по отрицательной обратной связи более подробно.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы (рис. 4.13)

$$W_з(s) = \left.\frac{K_0 W_{оу}(s)}{1 + K_0 W_{оу}(s)}\right|_{K_0 W_{оу}(s) \to \infty} \to 1.$$

Для управляемой системы с заданной передаточной функцией объекта управления $W_{ОУ}(s)$ необходимо стремиться к тому, чтобы передаточная функция замкнутой системы стремилась к единице, т. е. $W_з(s) \to 1$.

Цель может быть достигнута, если произведение коэффициентов усиления всех звеньев системы будет стремиться к бесконечности

$$K = \prod_{i=1}^{n} k_i \to \infty .$$

Чем больше $\prod_{i=1}^{n} k_i$, тем качественнее система, так как резко повышается точность и быстродействие системы, но всегда надо помнить об устойчивости. ОУ может стать неустойчивым при общем коэффициенте усиления K равном критическому. Отсюда компромисс *между качеством управления* $\varepsilon(t) \equiv 0$ *и устойчивостью системы* $K < K_{кр}$.

Таким образом, чем жестче требования к качеству управления, тем труднее реализовать такой принцип управления (золотое правило механики).

Качественная причина неустойчивости при большом K объясняется следующим: отрицательная ОС становится положительной (из-за инверсии сигнала), так как при этом наблюдается сдвиг фазы больше чем на π (180^o).

Далее посмотрим: где надо изменять коэффициент усиления в прямой части системы или в обратной связи?

Предположим, что коэффициент усиления K прямой части системы изменяется на порядок (в качестве ОУ – усилитель): можно ли стабилизировать такой ОУ?

Можно, охватив отрицательной обратной связью (рис. 4.14).

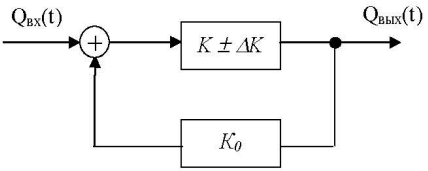


Рис. 4.14. Замкнутая система без внешних возмущений

Здесь $Q_{зад} \equiv 0$; $W_З(s) = \dfrac{Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)} = \dfrac{K \pm \Delta K}{1 + K_0(K \pm \Delta K)}\Big|_{(K \pm \Delta K) >> 1} = \dfrac{1}{K_0}$;

$$Q_{вых}(s) = \frac{1}{K_0} Q_{вх}(s) \cdot$$

Вывод: Регулируемая координата $Q_{вых}(t)$ не зависит от изменения коэффициента передачи в прямой части системы.

В общем случае достижение поставленной цели всегда возможно, но ограничивает устойчивость, так как всегда надо помнить, что общий коэффициент усиления системы K должен быть строго меньше $K_{гр.}$, т. е. $K<K_{гр}$.

Достоинства и недостатки принципа управления по рассогласованию.

Достоинства: принцип работает в условиях полной априорной неопределенности объекта управления ОУ о возмущениях.

Недостатки:

а) Чтобы управлять по этому принципу, всегда должно быть рассогласование; всегда имеется статическая ошибка $\varepsilon(t) \neq 0$; если нет ошибки $\varepsilon(t) = 0$, то управляющие воздействие $\delta u(t) = 0$, т. е. если $\varepsilon(t) \neq 0$, то и $\delta u(t) \neq 0$, а если $\varepsilon(t) = 0$, то и $\delta u(t) = 0$.

b) Плохой компромисс с устойчивостью.

4.4.2. Принцип управления по возмущению или принцип компенсации

Пусть задана система следующего вида:

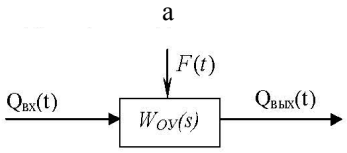


Рис. 4.15а. Разомкнутая система с внешним возмущением

В данной системе:

– известны точка приложения $F(t)$ возмущения, свойства возмущения;

– два управляющих входа.

Следовательно, можно систему представить следующим образом:

b

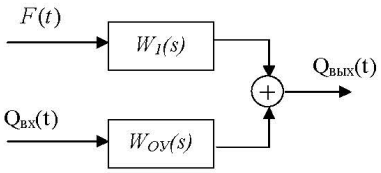


Рис. 4.15b. Разомкнутая система с двумя входами

Рассматривается линейная система, следовательно, для нее выполняется принцип суперпозиции. Запишем принцип суперпозиции для системы (рис. 4.15b):

$$Q_{вых}(s) = W_{оу}(s)Q_{вх}(s) + W_F(s)F(s).$$

Мы хотим, естественно, чтобы регулируемая координата $Q_{вых}(t)$ не зависела от возмущения, т. е.

$$\begin{matrix} W_F(s) \to 0 \\ W_{оу}(s) \to 1 \end{matrix} \quad или \quad \begin{matrix} \dfrac{Q_{вых}(s)}{F(s)} \to 0 \\ \dfrac{Q_{вых}(s)}{Q_{вх}(s)} \to 1 \end{matrix}.$$

Для достижения этой цели необходимо включить в систему компенсирующее звено с передаточной функцией *K(s)* (рис. 4.16).

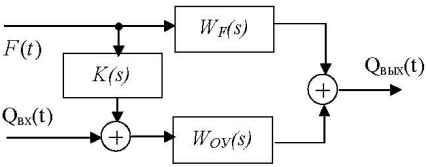


Рис. 4.16. Схема компенсации внешнего возмущения

Тогда принцип суперпозиции для системы (рис.4.16) запишется следующим образом:

$$Q_{вых}(s) = W_{оу}(s)Q_{вх}(s) + W_F(s)F(s) + K(s)W_{оу}(s)F(s).$$

Поставим условие

$$K(s)W_{оу}(s) = -W_F(s).$$

Отсюда найдем, что передаточная функция компенсирующего звена равна следующему:

$$K(s) = -\frac{W_F(s)}{W_{оу}(s)}. \qquad (4.7)$$

Следовательно, $Q_{вых}(s) = W_{оу}(s)Q_{вх.зад.}(s)$.

Таким образом, достигли цели включением звена с передаточной функцией, равной (4.7): регулируемая величина $Q_{вых}(t)$ не зависит от любого $F(t)$ возмущения.

Сравним, в чем преимущества этого принципа управления по сравнению с управлением по рассогласованию.

При управлении по рассогласованию можно управлять с заданной точностью, включая отрицательную ОС с коэффициентом K_0 (рис. 4.13).

Причем, значение K_0 зависит от точки приложения $F(t)$ возмущения: если возмущение $F(t)$ на входе, то уменьшая K_0 можно компенсировать $F(t)$; если возмущение $F(t)$ на выходе, то ослабление $F(t)$ при любом K_0 невозможно. Именно поэтому все возмущения приводят к входу системы.

При управлении по возмущению можно компенсировать любое возмущение, подобрав передаточную функцию $K(s)$ по условию (4.7). Иногда принцип управления по возмущению называют *управлением по разомкнутому контуру*.

Зная возмущение $F(t)$, следует предугадывать управление, подобрав отклик системы, чтобы нейтрализовать $F(t)$ (отсюда наличие второго входа).

Преимущества и недостатки принципа управления по возмущению

При реализации принципа компенсации отмечают следующие *недостатки:*

а) Необходимо "точное" знание о месте приложения возмущающего воздействия $F(t)$ и его передаточную функцию $W_F(s)$; компенсация возмущения возможна с точностью этого знания.

b) Задача компенсации возможна при условии "точного" знания характеристик ОУ ($W_{oy}(s)$), так как

$$K(s) = -\frac{W_F(s)}{W_{oy}(s)}.$$

Главный недостаток: *принцип управления не реализуется при незнании свойств возмущений* $(W_F(s))$.

Преимущества:

а) Для реализации управления принципиально *не требуется рассогласование*, т. е. управление производят, если рассогласование $\varepsilon(t) \equiv 0$, то управление $\delta u(t) \neq 0$.

b) *Хороший компромисс с устойчивостью.*

С точки зрения информации, при управлении по возмущению необходимо знать гораздо больше и о возмущении, и об ОУ (раз необходимо предугадывать направление управления), чем при управлении по рассогласованию. При управлении по отрицательной обратной связи измеряется рассогласование $\varepsilon(t)$ и в зависимости от рассогласования вырабатывается управляющее воздействие $\delta u(t)$.

4.4.3. Принцип комбинированного управления

Принцип комбинированного управления возникает при рассмотрении двух предыдущих принципов:

По *рассогласованию* – инвариантность к точке приложения возмущения; принципиальное наличие рассогласования.

По *возмущению* – отсутствие рассогласования; необходимость "точного" знания характеристик ОУ и "точного" знания точки приложения возмущения и его характеристик $W_F(s)$.

Оба эти принципа не противоречат друг другу, а дополняют друг друга.

a

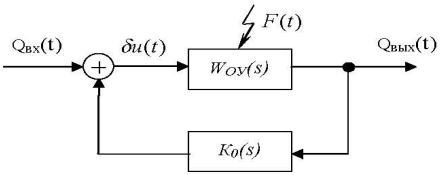


Рис. 4.17a. Принцип управления по отрицательной обратной связи

b

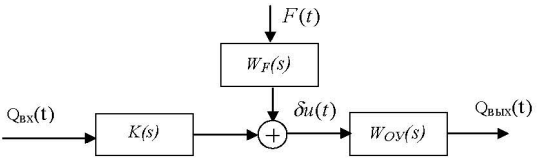


Рис. 4.17b. Принцип управления по возмущению

Структура комбинированного управления:

c

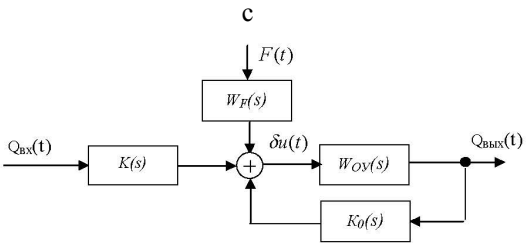


Рис. 4.17c. Принцип комбинированного управления

Структура (рис. 4.17c) показывает, что подбор параметров осуществляется независимо.

4.4.4. Законы регулирования

Законы регулирования при управлении по рассогласованию и по возмущению в общем виде записываются следующим образом:

$$\delta u(t) = f\left(\mathrm{Q}_{вх.зад.},\ \mathrm{Q}_{вых},\ \dot{\mathrm{Q}}_{вых},\ \ddot{\mathrm{Q}}_{вых},\ \ldots\right).$$

I. Законы регулирования при управлении по рассогласованию

а) Установившийся режим (статический)

Пусть $\mathrm{Q}_{вх} = const$. Тогда передаточная функция ОУ равна

$$W(s) = \frac{\Delta \mathrm{Q}_{вых}(s)}{\mathrm{Q}_{вх}(s)}\bigg|_{s=0} = K,$$

т. е. объект управления – усилитель.

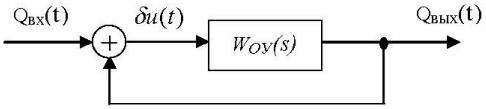


Рис. 4.18. Динамическая система, замкнутая единичной ОС

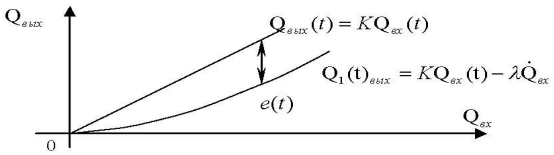


Рис. 4.19. Зависимость выходной координаты

Разность идеального и реального выходов равна следующему:

$$e(t) = \mathrm{Q}_{вых}(t) - \mathrm{Q}_{1\ вых}(t) = \lambda \dot{\mathrm{Q}}_{вх\ зад.}(t).$$

Следовательно, управляющие воздействие

$$\delta u = e(t);\ \delta u = \lambda \dot{\mathrm{Q}}_{вх\ зад.}(t),$$

т.е. очень малы изменения вариации $\mathrm{Q}_{вх}$.

Вывод: в установившемся режиме управляющее воздействие равно $\delta u(t) = \lambda \dot{Q}_{вх\,зад.}(t)$.

б) Квазистатический режим

Пусть система, представленная на рис. 4.18, имеет ОУ – апериодическое звено первого порядка, т. е.

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1};\ W(s)\big|_{K=1,\ s=0} = W(0) = 1.$$

Управляющее воздействие равно

$$\delta u(t) = K\left(Q_{вх.зад.} - Q_{вых}(t)\right) = KQ_{вх.зад.} - KQ_{вых}(t).$$

Следовательно, добавив в систему статическое звено в прямую и обратную связь, компенсируем рассогласование с точностью $\delta = \dfrac{1}{1+K_{общ}}$, где $K_{общ} = \prod_{i=1}^{k} k_i$.

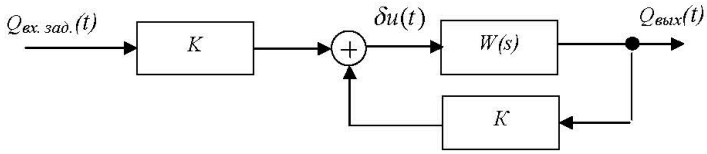


Рис. 4.20. Структурная схема с жесткой обратной связью

Такая связь называется *жесткой отрицательной обратной связью (ОС)*.

1) *Влияние жесткой отрицательной ОС на динамическую систему*

Сравним свойства разомкнутой и замкнутой динамических систем. Посмотрим, как изменяется с введением ОС переходной процесс.

Пусть задано апериодическое звено:

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}.$$

Характеристическое уравнение: $Q_2(s) = Ts + 1 = 0$, $s = -\dfrac{1}{T}$, переходной процесс монотонный, $t_p = (3 \div 4)T$ – быстродействие системы.

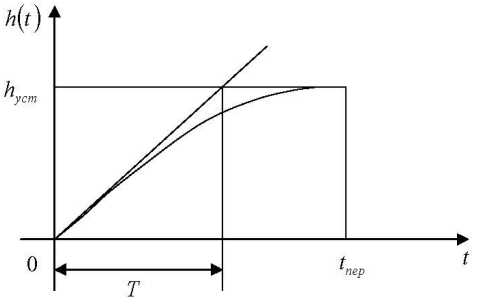


Рис. 4.21. Переходной процесс исходной системы

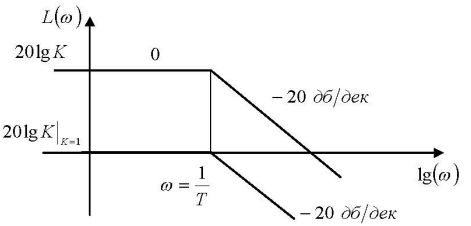


Рис. 4.22. ЛАХ исходной системы

Замкнем систему единичной отрицательной обратной связью (ОС).

Для замкнутой системы (единичной отрицательной ОС) получим передаточную функцию и разделим числитель и знаменатель на одну и ту же константу:

$$W_3(s) = \frac{K}{(Ts+1)+K} = \frac{\dfrac{K}{1+K}}{\dfrac{T}{1+K}s + \dfrac{1+K}{1+K}} = \frac{K'}{T's+1}.$$

Посмотрим, какими будут параметры системы?

$$W_3(s)\big|_{s=0} = W(0) = K'.$$

Коэффициент передачи замкнутой системы $K'<1$, так как $K'=\frac{K}{1+K}$; постоянная времени замкнутой системы меньше постоянной времени разомкнутой системы $T'<T$, так как $T'=\frac{T}{1+K}$.

Следовательно, получим переходной процесс и ЛАХ преобразованной системы, представленные на рис. 4.23 и 4.24.

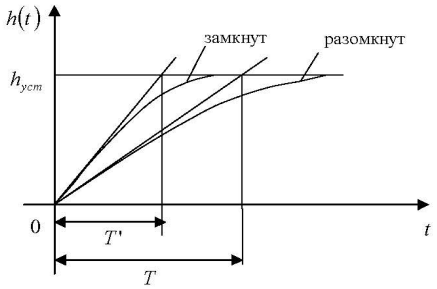


Рис. 4.23. Переходной процесс преобразованной системы

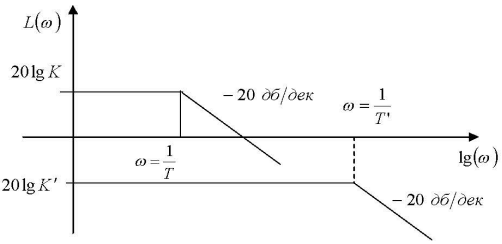


Рис. 4.24. ЛАХ преобразованной системы

Вывод: Введение жесткой отрицательной ОС не изменяет структуру апериодического звена, но увеличивает быстродействие системы, одновременно ухудшая устойчивость, так как корни характеристического уравнения приближаются к мнимой оси, передаточный коэффициент уменьшается, что показано на рис. 4.23 и 4.24.

Поэтому в закон регулирования следует включать производную, ибо производная учитывает в явном виде скорость изменения ошибки регулирования.

С введением в закон регулирования производной получают *гибкую отрицательную ОС.*

Пусть рассогласование системы $e(t) = \mathrm{Q}_{вых} - \mathrm{Q}_{вх.зад.}$; $\mathrm{Q}_{вх.зад.} \equiv 0$.

$$\delta u(t) = k_1 e(t);\ k_1 \equiv 1;\ \delta u(t) = K\mathrm{Q}_{вых}(t) + K_1\dot{\mathrm{Q}}_{вых}.$$

В форме преобразования Лапласа имеем

$$\frac{\delta u(s)}{\mathrm{Q}_{вых}(s)} = K + K_1 s. \qquad (*)$$

Выражение (*) не дифференциальное уравнение, это – *дифференциальное соотношение.*

Структурная схема управления с гибкой отрицательной ОС представлена на рис. 4.25.

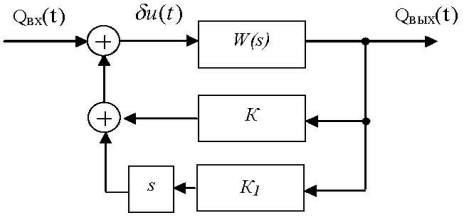


Рис. 4.25. Система с гибкой отрицательной ОС

2) *Влияние гибкой отрицательной ОС на динамическую систему*

Пусть задано колебательное звено $(0 < \xi < 1)$ с соответствующей передаточной функцией. Замкнем звено гибкой отрицательной обратной связью вида (*). Найдем передаточную функцию замкнутой системы и осуществим ту же процедуру:

$$W_э(s) = \frac{K}{T_1^2 s^2 + 2\xi T_1\ s + 1 + K_1 s} = \frac{K}{T_1^2 s^2 + (2\xi T_1\ + K_1)s + 1}.$$

Вывод: гибкая отрицательная обратная связь не изменяет структуру звена и не влияет на коэффициент передачи, но

увеличивает его инерционность. Введение гибкой отрицательной ОС приводит к уменьшению колебательности в системе.

Одновременное использование жесткой и гибкой отрицательной ОС позволяет достичь как по точности, так и по быстродействию заданного качества переходного процесса с большим запасом устойчивости системы.

Раньше уже отмечалось относительность получаемого математического описания. Реальные динамические системы описываются дифференциальными уравнениями высокого порядка, а в данной книге рассматриваются 1-го, 2-го и 3-го порядков. Это означает, что произвольно ограничивается число корней характеристического уравнения и рассматриваются только ближайшие к мнимой оси корни.

Однако, когда требования к системе управления гораздо выше, чем может дать существующая математическая модель, необходимо добавлять в рассмотрение все новые и новые корни.

Пример 4.2

Пусть задана динамическая система следующего вида:

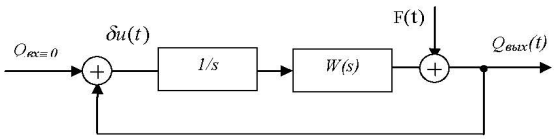


Рис. 4.26. Система с интегральным законом регулирования

Задан интегральный закон регулирования

$$\delta u(t) = \int_0^t \mathrm{Q}_{вых}(t)dt\,.$$

Пусть $W_{ОУ}(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$.

Тогда передаточная функция замкнутой системы равна

$$W_з(s) = \frac{\dfrac{1\cdot K}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{1\cdot K}{s(Ts+1)}} = \frac{K}{s(Ts+1)+K}\,.$$

Вывод: Введение интегрального закона регулирования повышает порядок системы и равносильно включению в систему интегрирующего звена.

В свою очередь, введение интегрирующего звена ухудшает свойства системы, но повышает астатизм системы. Статическая ошибка при этом равна нулю, так как коэффициент интегрирующего звена в статике равен ∞, а ошибка равна $\frac{1}{K+1} = \frac{1}{\infty} = 0$.

II. Законы регулирования при управлении по возмущению

Принято различать внутреннее и внешнее возмущения.

а) Предполагаем, что *внутреннее возмущение* – возмущение за счет запаздывания, тогда структура системы следующая:

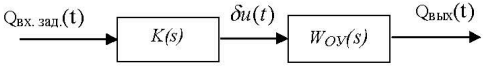


Рис. 4.27. Система с внутренним возмущением

Здесь *K(s)* – передаточная функция компенсирующего звена.

Пусть передаточная функция объекта управления задана следующего вида: $W_{ОУ}(s) = \frac{1}{\mathrm{Q}_2(s)}$.

Чтобы $\mathrm{Q}_{вых}(t) \equiv \mathrm{Q}_{вх.зад.}$, необходимо, чтобы $\frac{\mathrm{Q}_{вых}(s)}{\mathrm{Q}_{вх.зад.}(s)} \equiv 1 \equiv K(s)W_{ОУ}(s)$, так как $\mathrm{Q}_{вых}(s) = K(s)W_{ОУ}(s)\mathrm{Q}_{вх.зад}(s)$ (см. схему рис. 4.27).

Отсюда $K(s) = \frac{1}{W_{ОУ}(s)}$.

Вывод: В идеале передаточная функция компенсирующего звена должна быть равна знаменателю передаточной функции разомкнутой системы, т. е.

$$K(s) = \mathrm{Q}_2(s).$$

Пример 4.3

Пусть $Q_2(s) = Ts + 1$, т. е. апериодическое звено 1-го порядка. Для компенсации внутреннего возмущения включается звено с передаточной функцией $K(s) = T_k s + 1$, где $T_k = T$.

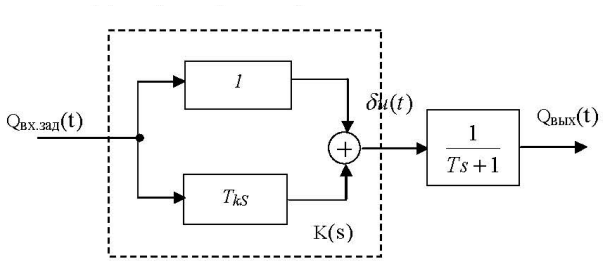


Рис. 4.28. Схема компенсации внутреннего возмущения

Закон регулирования: $\delta u(t) = (1 + T_k s) Q_{вх.зад.}(s)$ или во временной области $\delta u(t) = Q_{вх.зад.}(t) + T_k \dot{Q}_{вх.зад.}$.

В установившемся режиме, если возмущение в системе за счет самого ОУ (внутреннее возмущение), ошибка равна нулю($e(t) = 0$). Использование принципа управления по возмущению обеспечивает компенсацию ошибки с точностью знания *параметра управляемого объекта*. Характеристический полином не меняется, следовательно, устойчивость системы не изменяется.

Примечание

Введение составляющей производной от управляющего воздействия в цепь прямой связи повышает быстродействие системы или приводит к форсированию, а в цепи ОС ухудшает устойчивость.

Пример 4.4

Пусть передаточная функция объекта управления $W_{ОУ}(s)$ задана следующего вида:

$$W_{ОУ}(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}.$$

В идеальном случае для системы 2-го порядка закон регулирования должен иметь составляющую 2-го порядка, т. е.

$$\delta u(s) = (T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1)\mathrm{Q}_{вх.зад}(s).$$
$$\delta u(t) = \mathrm{Q}_{вх.зад}(t) + (T_1 + T_2)\dot{\mathrm{Q}}_{вх.зад} + T_1 T_2 \ddot{\mathrm{Q}}_{вх.зад}.$$

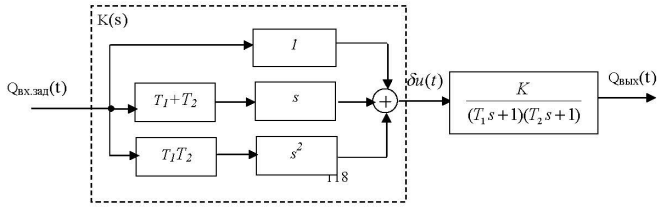


Рис. 4.29. Схема компенсации внутреннего возмущения для звена 2-го порядка

Практически имеет смысл в законе регулирования иметь наличие производной *на порядок меньше*. Этого вполне достаточно для достижения заданного качества переходного процесса.

б) Рассмотрим другой случай, когда *имеется внешнее возмущение*$F(s)$, известна точка приложения возмущения и его характеристика $W_F(s)$ (см. схемы, представленные на рис. 4.8a, 4.8b). Необходимо выработать закон регулирования, чтобы удовлетворить заданному качеству.

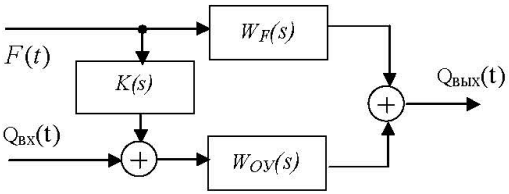


Рис. 4.30. Схема компенсации внешнего возмущения

Чтобы достичь цели, вводится компенсирующие звено с передаточной функцией, равной

$$K(s) = -\frac{W_F(s)}{W_{oy}(s)}$$

(см. уравнение (4.7)).

В этом случае определение параметров *закона регулирования* при управлении по возмущению сводится к определению параметров возмущения и ОУ. Следует отметить, что учет внешнего возмущения производится по двум каналам:

–учет возмущения $F(t)$ непосредственно по каналу возмущения;

–учет производных по управляемому каналу $\dot{Q}_{вх}$, $\ddot{Q}_{вх}$, ...

В соответствии с сказанным вырабатывается закон регулирования.

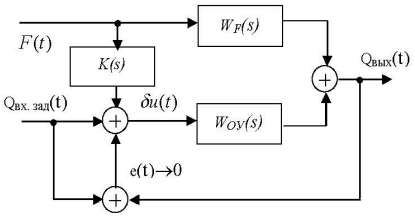


Рис. 4.31. Схема комбинированного управления

Для достижения цели необходимо ошибку регулирования минимизировать $e(t) \to 0$, подав рассогласование в отрицательную обратную связь:

$$e(t) = Q_{вх.зад}(t) - Q_{вых}(t).$$

4.5. Понятия управляемости и наблюдаемости. Критерии управляемости и наблюдаемости Р. Калмана и Е. Гильберта

1. Управляемость в линейных системах управления

При анализе и синтезе линейных систем управления важную роль играет понятие управляемости. ОУ может обладать или не обладать им. Интуитивно ясно, что если ОУ обладает свойством управляемости, то для него можно

синтезировать закон управления. Без учета свойств управляемости можно допустить ошибку в определении порядка объекта, в определении устойчивости системы, особенно если для анализа и синтеза используется аппарат передаточных функций в терминах “вход-выход”. Использование описания объекта в пространстве состояний позволяет избежать этих ошибок и, кроме того, сформулировать критерий, по которому можно заранее определить управляемость объекта [5, 6, 15].

Поясним это на примере.

Пример 4.5

Пусть задана система следующей структуры (рис. 4.32).

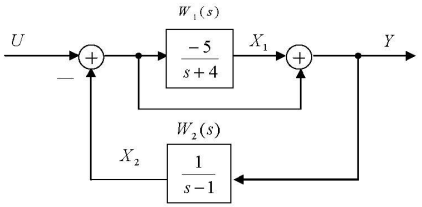


Рис. 4.32. Структурная схема исследуемой системы

Непосредственные вычисления дают следующую передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_з(s)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\left(\frac{-5}{s+4}+1\right)}{1+\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{-5}{s+4}+1\right)}=\frac{(-5+s+4)}{(s+5)}=\frac{s-1}{s+5}.$$

Анализ полученной передаточной функции системы показывает, что порядок системы равен единице, т. е. $n = 1$. Передаточная функция системы имеет полюс $s=-5$, лежащий в левой части комплексной плоскости. Следовательно, можно сделать вывод, что система является *асимптотически* устойчивой.

Однако такой вывод не верен, в чем можно убедиться, составляя описание системы в пространстве состояний x_1, x_2.

Система дифференциальных уравнений первого порядка в форме преобразования Лапласа для данной структуры (рис. 4.32) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(s) = \dfrac{-5}{s+4}(u(s) - x_2(s)) \\ x_2(s) = \dfrac{1}{s-1}(x_1(s) + (u(s) - x_2(s))) \\ y(s) = x_1(s) + (u(s) - x_2(s)) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1(s)(s+4) = -5(u(s) - x_2(s)) \\ x_2(s)(s-1) = (x_1(s) + (u(s) - x_2(s))) \\ y(s) = x_1(s) + (u(s) - x_2(s)) \end{cases}.$$

Используя обратное преобразование Лапласа к полученным уравнениям, запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + 5x_2 - 5u \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \\ y = x_1 - x_2 + u \end{cases}.$$

В матричной форме описание системы запишется в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u \cdot$$

Запишем также уравнение в матричной форме для выходной переменной:

$$y = (1,-1)\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + u \cdot$$

В общем виде в матричной форме система уравнений в пространстве состояний будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases},$$

где $A = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -5 \\ 1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix}$, $D = 1 \cdot$

Чтобы провести анализ свойств полученной системы, следует определить собственные значения матрицы А.

Характеристическое уравнение для системы запишется следующим образом:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Решив характеристическое уравнение системы, получим следующее:

$$\det\begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)\lambda - 5 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$\lambda_1 = -5; \quad \lambda_2 = 1.$$

Матрица*A* имеет собственные значения $\lambda_1 = -5; \ \lambda_2 = 1$.

Анализ полученных результатов показывает, что в действительности исследуемая система:

а) имеет порядок, равный двум, т.е. *n=2* (по передаточной функции *n=1*);

б) является неустойчивой (по передаточной функции определено, что система асимптотически устойчива).

Свойства системы не изменились. Полученные результаты не противоречат друг другу, что будет показано ниже.

Для того, чтобы избежать ошибок при синтезе САУ, введем понятие управляемости системы и сформулируем критерии управляемости.

Впервые понятие управляемости было введено американским ученым Ричардом Калманом (1960г.).

Определение управляемости

Пусть система описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \qquad (4.4)$$

(4.5)

где $x(n*1)$ – вектор состояния; $u(m*1)$ – вектор управления; $y(r\times 1)$ – вектор выходных переменных или вектор измерений; $A(n\times n)$ – матрица, характеризующая ОУ; $B(n\times m)$ – матрица, характеризующая канал управления; $C(r\times n)$ – матрица наблюдений.

Система называется *вполне управляемой*, если для нее существует ограниченный входной сигнал $u(t)$, переводящий ее из любого начального состояния X_0 в любое наперед заданное конечное состояние X_k за конечное время.

4.5.1. Критерии управляемости

Введем в рассмотрение квадратную матрицу $V(n\times n)$, образованную собственными векторами исходной матрицы A:

$$V=(V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n),$$

которая находится из уравнения

$$(A-\lambda_i I)V_i=0 \quad \forall i=\overline{1,n}$$

и называется *модальной* для матрицы A.

При помощи линейного преобразования координат $X=V\cdot X^*$, преобразуем уравнения состояния системы (4.4) и наблюдения (4.5) к диагональному виду

$$X=VX^*$$
$$V\dot{X}^*=AVX^*+BU$$
$$V^{-1}V\dot{X}^*=V^{-1}AVX^*+V^{-1}BU$$
$$\begin{cases}\dot{X}^*=\Lambda X^*+B^*U & (4.6)\\ Y^*=C^*X^* & (4.7)\end{cases}.$$

Здесь $\Lambda=V^{-1}AV$, $B^*=V^{-1}B$, $C^*=CV$, V – модальная матрица для исходной матрицы A,

Причем матрица Λ является диагональной, содержащей на главной диагонали собственные значения матрицы A. Используя

диагональную форму уравнения системы, можно дать следующий критерий управляемости.

Критерий 1. Критерий управляемости Е. Гильберта. Формулировка критерия. Если матрица B^* не содержит нулевых строк, то система (4.6), (4.7) является вполне управляемой, в противном случае – неуправляемой.

Действительно, если матрица B^* содержит нулевые строки, то управление $U(t)$ не оказывает воздействия на те компоненты вектора X^*, которые расположены на этих строках. Это приводит физически к тому, что при помощи ограниченного управления нельзя попасть в любую заданную точку пространства состояний, т. е. система неуправляема.

Пример 4.6

Пусть задано математическое описание системы в виде уравнений (4.6):

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^* \\ x_1^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}.$$

Определить управляемость исследуемой системыпо критерию Гильберта.

Решение

По критерию управляемости Е. Гильберта система неуправляема, так как матрица B^* содержит нулевую строку. Запишем исследуемую систему в скалярной форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = -x_1^* \\ \dot{x}_2^* = 3x_2^* + 2u_1 + u_2 \end{cases}.$$

Из системы уравнений следует, что на переменную $\dot{x}_1^*$ действительно не действуют управления u_1 и u_2. Следовательно, система является неуправляемой. Кроме того, движение данной системы неустойчиво по Ляпунову, так как $Re\ \lambda_2 (A) > 0$.

Рассмотрим другой критерий управляемости, не требующий преобразования системы уравнений к диагональному виду.

Критерий 2. Критерий управляемости Р. Калмана

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

где u – скалярное управление, т. е. $u \in R^1$.

В начальный момент времени $t = 0$ состояние системы задано $x(0)$. Желаемое конечное состояние системы в конечный момент времени $t = t_k \quad (t_k > 0)$ обозначим как $x(k)$.

Управляемость определяет условия, при которых управление переводит систему из начального состояния $x(0)$ в конечное $x(k)$. Это означает, что для $t = 0, 1, 2, ..., k$ справедливы следующие соотношения:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k),$$

$$x(1) = Ax(0) + bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + bu(1) = A(Ax(0) + bu(0)) + bu(1) = A^2x(0) + Abu(0) + bu(1)$$

т.е. $x(3) = Ax(2) + bu(2) = A\left(A^2x(0) + Abu(0) + bu(1)\right) + bu(2) =$.

$$= A^3x(0) + A^2bu(0) + Abu(1) + bu(2)$$

……

$$x(k) = A^kx(0) + A^{k-1}bu(0) + A^{k-2}bu(1) + ... + A^0bu(k-1).$$

Естественно, что $A^0 = A^{k-k}$.

Систему уравнений можно записать следующим образом:

$$x(k) - A^kx(0) = \left(A^{k-1}b,\ A^{k-2}b,\ ...,\ b\right) \cdot \begin{vmatrix} u(0) \\ u(1) \\ ... \\ u(k-1) \end{vmatrix}. \qquad (**)$$

Для того, чтобы система уравнений (**) имела решение относительно переменных управления $u(0),\ u(1),\ ...,\ u(k-1)$, матрица $\left(A^{k-1}b,\ A^{k-2}b,\ ...,\ b\right)$ должна иметь ранг, равный k. Отсюда следует другой критерий управляемости.

Формулировка критерия управляемости Калмана

Для полной управляемости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы ранг блочной матрицы управляемости

$$K_u = \left(b,\ Ab,\ A^2b,\ ...,\ A^{n-1}b\right)$$

был равен порядку системы, т. е. $rang\, K_u = n$.

Сформулированный критерий легко распространить на системы с векторным управлением. Пусть $u(l \times l)$ – вектор управления. Тогда матрица управляемости K_u размера $(n \times \ln)$ имеет следующий вид:

$$K_u = \left(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right),$$

где $B(n \times l)$ – матрица. Если из столбцов матрицы управляемости K_u составить все возможные матрицы размера $(n \times n)$ и среди них будет хотя бы одна, ранг которой равен порядку системы *n*, то система с векторным управлением является вполне управляемой, в противном случае – неуправляемой.

Пример 4.7

Пусть задано математическое описание САУ в виде системы уравнений (4.4), где матрицы *A*, *B* равны:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Определить управляемость исследуемой системы по критерию Калмана.

Алгоритм и решение

Следует построить блочную матрицу управляемости и определить ее ранг.

1) МатрицаA(2*2), следовательно, порядок системы равен двум, т.е.n = 2. Записывается матрица управляемости для данной системы:

$$K_u = (B, AB).$$

2) Определяется ранг матрицы управляемости:

$$AB = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix};$$

$$K_u = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \; \Delta_1 = -3 \neq 0; \; \Delta_2 = -23 \neq 0; \; rang \; K_u = 2.$$

Вывод: исследуемая система *вполне управляема*, так как ранг блочной матрицы управляемости равен порядку системы.

Согласно введенному определению управляемости можно сделать следующие выводы:

Во-первых, если система вполне управляема, то описание ее в терминах “вход-выход” посредством передаточных функций и уравнениями состояний эквивалентны.

Во-вторых, если система неуправляема, то ее описание уравнениями состояния является более полным, так как оно учитывает управляемую и неуправляемую части системы, а описание системы посредством передаточных функций в терминах “вход-выход” учитывает только ее управляемую часть.

Именно поэтому в приведенном примере 4.5 не наблюдается противоречий.

Заключение

Математические аппараты исследования динамики САУ в пространстве состояний и в терминах “вход – выход” в виде передаточных функций дополняют друга, углубленно представляя динамические свойства систем автоматического управления.

2. Наблюдаемость в линейных системах управления

Методы синтеза различных законов управления требуют в общем случае для своей реализации полного вектора состояния.

Если некоторые компоненты вектора состояния недоступны измерению, то непосредственная реализация законов управления невозможна. В этих случаях возникает необходимость в способах, которые позволили бы косвенно оценить компоненты вектора состояния малодоступные или вовсе недоступные прямому измерению [30]. В современной теории управления такие способы существуют. Они основаны на использовании уравнений движений объекта, которые считаются известными. Устройства для измерения координат объекта, в основу которых положены уравнения самого объекта, называются *наблюдающими устройствами (НУ)*.

Пусть исследуемая САУ описывается системой уравнений (4.4), (4.5).

В случае, когда измерению доступен лишь выходной вектор Y вместо полного вектора состояния X, необходимо найти разумную замену (оценку) вектора состояния системы. Для оценки вектора состояния естественно воспользоваться информацией о входных и выходных переменных системы и ее структуре (размерностях матриц *A, B, C*). Если ранг матрицы наблюдений *C* равен порядку системы $rang(C) = n$, т. е. $r = n$, то возможно определение вектора состояния X через алгебраические операции с использованием *лишь мгновенных значений вектора выхода.* В этом случае

$$\hat{X} = C^{-1}Y,$$

где $\hat{X}(n \times 1)$ – оценка вектора состояния системы.

В случае, когда $r < n$ такой метод использовать нельзя, так как матрица наблюдений *C* вырождена $(\det C = 0)$ и для нее не существует обратной матрицы. В реальных условиях, как правило, $r << n$.

Введем понятие наблюдаемости.

Определение. Система (4.4), (4.5) называется вполне наблюдаемой, если начальное состояние $x(0)$ может быть определено через значения вектора выходных переменных $y(t)$, измеряемого на конечном интервале времени $0 \le t \le T$.

4.5.2. Критерии наблюдаемости

Введем критерий наблюдаемости, который позволит на основе значений матриц A и C определить наблюдаемость системы. Для этого приведем систему (4.4), (4.5) к диагональной форме при помощи линейного преобразования.

Используя представление системы в диагональной форме (4.6), (4.7), можно сформулировать следующий критерий наблюдаемости.

Критерий наблюдаемости Е. Гильберта

Если матрица C^* не содержит нулевых столбцов, то система (4.6), (4.7) является вполне наблюдаемой, в противном случае – ненаблюдаемой.

Из критерия следует, что вектор выходных переменных вполне наблюдаемой системы должен содержать *полный вектор состояния [29, 34]*.

Пример 4.8

Пусть математическое описание САУ задано в виде системы уравнений (4.6), (4.7), где матрицы Λ, B^* и C^* равны следующему:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix},\ B^* = \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \end{vmatrix},\ C^* = \begin{vmatrix} 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Определить наблюдаемость исследуемой системы.

Анализ показывает, что исследуемая система вполне наблюдаема, так как матрица C^* не содержит ни одного нулевого столбца. Кроме того, движение системы асимптотически устойчиво по Ляпунову, так как $\operatorname{Re}\lambda_i < 0\ \ \forall i = \overline{1,n}$.

Запишем систему в скалярной форме и еще нагляднее увидим

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = -3x_1^* + u_1 \\ \dot{x}_2^* = -4x_2^* + 2u_2 \\ y^* = 5x_1^* + 6x_2^* \end{cases},$$

что исследуемая система вполне наблюдаема, так как вектор выходных координат содержит полный вектор состояния.

Существует другой критерий наблюдаемости, не требующий преобразований уравнений системы к диагональной форме, который использует исходные матрицы A и C.

Формулировка критерия наблюдаемости Р. Калмана

Для того, чтобы система (4.4), (4.5) была вполне наблюдаемой необходимо и достаточно, чтобы ранг блочной матрицы наблюдаемости

$$K_н^T = \left(C^T, A^T C^T, \left(A^T\right)^2 C^T, ..., \left(A^T\right)^{n-1} C^T\right)$$

был равен порядку системы, т. е. $rang\, K_н^T = n$.

Из вида матрицы наблюдаемости следует, что ее размер равен $(n \times nr)$, т. е. она имеет n строк и nr столбцов. Если из столбцов матрицы наблюдаемости $K_н^T$ можно составить хотя бы одну матрицу размера $(n \times n)$, ранг которой равен порядку системы n, то система является вполне наблюдаемой.

Пример 4.9

Пусть математическое описание САУ задано в виде системы уравнений (4.4), (4.5), где матрицы A, B и C равны следующему:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Определить наблюдаемость исследуемой системы.

Алгоритм и решение

Следует построить блочную матрицу наблюдаемости и определить ее ранг.

1) Матрица A (2*2), следовательно, n = 2. Записывается матрица наблюдаемости для данной системы следующим образом:

$$K_н^T = \left(C^T, A^T C^T\right).$$

2) Определяется ранг блочной матрицы наблюдаемости:

$$A^T C^T = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 8 \end{vmatrix};$$

$$K_н^T = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}; \; \Delta_1 = 1 \neq 0; \; \Delta_2 = 0; \; rang\, K_н^T = 1 \neq n.$$

Вывод: исследуемая система не наблюдаема, так как ранг блочной матрицы наблюдаемости не равен порядку системы.

Чтобы оценить наблюдаемость системы при $r<<n$, необходимо построить наблюдающее устройство (НУ).

Пусть $\hat{X}$ представляет собой оценку вектора состояния X. Если некоторые компоненты вектора X недоступны измерению, то необходимо построить такую оценку вектора состояний $\hat{X}$, чтобы $\left|\hat{X} - X\right| \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим некоторую динамическую систему, входами которой являются входы исходной линейной системы, а выходы представляют собой компоненты вектора $\hat{X}$ - оценки вектора состояний. Введем следующее определение НУ.

Определение. Динамическая система, которая формирует на выходе оценку вектора состояния $\hat{X}$ по данным о входах и выходах исходной системы, называется наблюдающим устройством.

Схематически ОУ совместно с наблюдающим устройством можно представить в виде рис. 4.33.

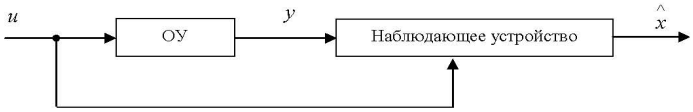


Рис. 4.33. Структурная схема системы с НУ

Наиболее простым способом построения НУ является прямое моделирование динамики управляемого объекта средствами аналоговой или цифровой вычислительной техники [15].

4.6. Постановка и решение задачи синтеза САУ с заданным качеством в пространстве состояний

4.6.1. Понятие модального закона управления

Пусть задана линейная стационарная система управления вида (4.4)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $A(n \times n)$, $B(n \times m), m \le n$.

При отсутствии управления, т. е. при $u(t) = 0$, *свободное движение* системы (4.4) определяется как

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j V_j \exp(\lambda_j t), \qquad (4.10)$$

где $\lambda_j, V_j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ представляют собой собственные значения и собственные вектора исходной матрицы A; $c_j - const$, определяемые начальными условиями дифференциальных уравнений.

Как видно из (4.10), характер свободного движения системы (4.4) определяется собственными значениями λ_j, а именно:

a) если $\lambda_j = -\alpha$, $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то все моды $V_j \exp[\lambda_j t]$ решения (4.10) монотонно затухают с постоянной времени $T_j = \dfrac{1}{\lambda_j}$, $\forall\, j = \overline{1, n}$.

b) если $\lambda_j = -\alpha \pm j\beta$, $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то моды $V_j \exp[\lambda_j t]$ затухают колебательным образом с коэффициентом колебательности, равным $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Пусть управление задано в виде

$$u = F \cdot x\,, \tag{4.11}$$

где $F(m \times n)$ – матрица, подлежащая выбору. Выражение (4.11) будем называть *законом управления*, так как оно определяет алгоритм формирования управляющего воздействия.

Рассмотрим поведение системы (4.4), замкнув ее законом (4.11).

Уравнение замкнутой системы будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BFx = (A + BF)x = Gx\,,$$

где $G(n \times n)$ – матрица замкнутой системы.

Характер движения замкнутой системы определяется матрицей следующего вида:

$$G = A + B \cdot F\,.$$

Собственные значения и собственные вектора ее зависят от матрицы F закона управления (4.11). Выбором матрицы F можно изменять собственные значения и собственные вектора матрицы замкнутой системы G и, следовательно, влиять на *характер изменения мод* замкнутой системы.

Управление, при котором осуществляется изменение мод системы, называется *модальным управлением*, а закон управления, обеспечивающий воздействие на моды системы, – *модальным законом управления*.

4.6.2. Синтез линейных стационарных систем управления с заданным спектром

Пусть задана линейная стационарная система управления вида (4.10)

$$\dot{x} = Ax + bu\,,$$

где u – скалярное управление т.е. $u \in R^1$.

Пусть закон управления выбирается в виде

$$u = -m^T x + u_0\,. \tag{4.12}$$

Характеристический полином системы:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda + a_1. \qquad (4.13)$$

Замкнем ОУ (4.10) законом управления (4.12) и исследуем поведение замкнутой системы.

$$\dot{x} = Ax + b\left(-m^T x + u_0\right) = \left(A - bm^T\right)x + bu_0$$
$$\text{или} \quad \dot{x} = Dx + bu_0, \qquad (4.14)$$

где $D = A - bm^T$.

Здесь $D(n \times n)$ – матрица замкнутой системы, имеющая характеристический полином следующего вида:

$$\det(\lambda I - D) = \lambda^n + d_n\lambda^{n-1} + ... + d_2\lambda + d_1. \qquad (4.15)$$

Множество собственных значений λ_1, λ_2, ..., λ_n матрицы D образуют ее спектр, для которого введем обозначение:

$$\Lambda = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n\}.$$

Спектр Λ матрицы D определяет ряд свойств *замкнутой* системы, такие как устойчивость, качество переходного процесса и т. д. Поэтому, если задать спектр Λ, исходя из требований к этим свойствам, и найти параметры закона управления, при заданной структуре, обеспечивающий матрице D замкнутой системы этот спектр, то можно считать, что замкнутая система будет обладать нужными свойствами.

Постановка и решение задачи параметрического синтеза САУ с заданным качеством

Словесная формулировка задачи. Для исследуемой динамической системы найти параметры закона управления заданной структуры, обеспечивающие замкнутой системе желаемый спектр.

Математическая постановка задачи

Пусть задана динамическая система следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

где $x \in R^n$, $u \in R^1$.

Задан закон регулирования:

$$u = -m^T x + u_0,$$

где u_0 – вспомогательный сигнал; $m(n \times 1)$ –вектор параметров.

Необходимо найти вектор параметров закона управления *m*при ограничениях на управление $|u| \le u_{доп}$.

Пусть система (4.10) вполне управляема, т. е.

$$rang\, K_u = n,$$

где $K_u = \left(b, Ab, A^2 b, ..., A^{n-1} b\right)$.

Тогда линейным преобразованием

$$x = L \cdot y \quad (\det L \neq 0)$$

систему (4.10) можно привести к следующему виду:

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u,$$

где $A_0 = L^{-1} AL, \quad b_o = L^{-1} b$.

Матрица A_0 и вектор b_0 имеют следующий вид:

$$A_0 = \left| \frac{O_{n-1} I_{n-1}}{-a^T} \right| \text{ или } A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & ... & -a_n \end{vmatrix};$$

$$b_0 = \left| \frac{O_{n-1}}{1} \right| \text{ или } b_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Запишем закон управления в новых координатах

$$u = -m_0^T y + u_0, \tag{4.16}$$

где $m_0^T = m^T L$.

Составим уравнение замкнутой системы в новых координатах, которое будет иметь следующий вид:

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u = \left(A_0 y - b_0 m_0^T y\right) + b_0 u_0 = D_0 y + b_0 u_0,$$

где $$D_0 = \left(A_0 y - b_0 m_0^T\right). \tag{4.17}$$

Так как невырожденное линейное преобразование не меняет спектра матриц, то матрица D_0 имеет тот же характеристический полином, что и матрица *D*. Если представить коэффициенты характеристических уравнений (4.13) и (4.15) в виде векторов:

$$a^T = (a_1, a_2, ..., a_n),$$
$$d^T = (d_1, d_2, ..., d_n),$$

то из (4.13), (4.15) и (4.17) имеем, что каждый элемент вектора коэффициентов замкнутой системы равен соответствующему элементу вектора коэффициентов разомкнутой системы плюс m_0, т. е.

$$d = a + m_o. \tag{4.18}$$

Из (4.16) и (4.18) получим *систему линейных уравнений* относительно неизвестного вектора m:

$$L^T m = d - a. \tag{4.19}$$

Существование решения системы (4.19) в следующем виде:

$$m = \left(L^T\right)^{-1}(d - a)$$

дается следующей теоремой.

Теорема. Пусть система (4.10) вполне управляема. Тогда для нее всегда существует закон управления (4.12), обеспечивающий заданный (желаемый) спектр матрицы D замкнутой системы (4.14).

Здесь L – матрица линейного преобразования. Структура матрицы L задается, исходя из того, что

$$L = K_u \cdot K_0,$$

где матрица $K_u = \left(b, Ab, A^2b, ..., A^{n-1}b\right)$, а матрица K_0 имеет следующий вид:

$$K_0 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & ... & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & ... & 1 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \det K_0 \neq 0; \det L \neq 0.$$

В работах [27, 28, 35, 36, 39, 40] показаны весьма привлекательные методы и системы проектирования высокоточных качественных систем автоматического управления.

Вопросы, задачи

1. Перечислить задачи анализа динамических систем в теории управления.
2. Перечислить принципы автоматического управления. Охарактеризовать принцип управления по рассогласованию. Привести закон управления.
3. Перечислить принципы автоматического управления. Охарактеризовать принцип управления по возмущению. Рассмотреть внутреннее и внешнее возмущения; законы управления.
4. Перечислить принципы автоматического управления. Охарактеризовать комбинированный принцип управления.

5. Дать понятие управляемости линейных динамических систем. Сформулировать критерий управляемости Р. Калмана. Привести пример вполне управляемой системы по Р. Калману.

6. Дать понятие наблюдаемости линейных динамических систем. Сформулировать критерий наблюдаемости Р. Калмана. Привести пример вполне наблюдаемой системы по Р. Калману.

7. Дать понятие управляемости линейных динамических систем. Сформулировать критерий управляемостиЕ. Гильберту. Привести пример вполне управляемой системы по Е. Гильберту.

8. Дать понятие наблюдаемости линейных динамических систем. Сформулировать критерий наблюдаемостиЕ. Гильберта. Привести пример вполне наблюдаемой системы по Е. Гильберту.

9. Математическоеописание системы задано в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}, \text{ где } A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix};\ C = \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}.$$

Проверить заданную систему на управляемость и наблюдаемость по критериям Е. Гильберта и Р. Калмана.

10. Математическое описание системы задано в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}, \text{ где } A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix};\ C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Проверить заданную систему на полную управляемость и наблюдаемость по критериям Е. Гильберта и Р. Калмана.

11. Показать влияние жесткой отрицательной обратной связи на динамическую систему.

12. Показать влияние гибкой отрицательной связи на динамическую систему.

13. Дать постановку задачи параметрического синтеза САУ с желаемым качеством в терминах “вход-выход” и в пространстве состояний.

14. Разобрать укрупнений алгоритм решения задачи параметрического синтеза САУ частотными методами.

15. Разобрать укрупненный алгоритм решения задачи параметрического синтеза САУ в пространстве состояний при заданном модальном законе управления; привести решение задачи.

16. Показать суть проектирования наблюдающих устройств для динамических систем.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ

Использование нелинейных систем является потребностью наиболее полно отобразить действительность. К нелинейным системам относят все системы, которые не могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Для нелинейных систем не удовлетворяется принцип суперпозиции, т. е. нельзя суммировать реакции системы на различные воздействия. В данной главе рассмотрен один класс нелинейных систем, характеризуемый следующими особенностями: систему можно представить в виде соединения двух частей (рис. 5.1) – линейной части ЛЧ, описываемой системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и нелинейной части НЧ, содержащей нелинейный элемент. Нелинейный элемент является безынерционным, и его входная $y(t)$ и выходная $u(t)$величины связаны между собой уравнениями (5.2). Таким образом, нелинейность рассматриваемых систем обусловлена нелинейностью статической характеристики одного из ее элементов. Ниже представлены типовые нелинейные элементы САУ (рис. 5.3–5.9) и их математическое описание.

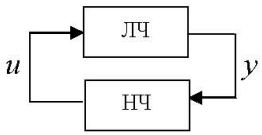


Рис. 5.1. Представление нелинейной системы

Математическое описание нелинейных САУ можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & (5.1) \\ u = f(y) & (5.2) \end{cases}$$

где $x(n\times 1)$ – вектор состояния; $u(m\times 1)$ – вектор управления или вектор входных координат; $y(r\times 1)$ – вектор выходных

координат. В данной книге рассматривается подкласс нелинейных систем, имеющий один вход и один выход.

На рис. 5.2 представлены характеристики нелинейных систем, где в явном виде выделены линейная и нелинейная части системы.

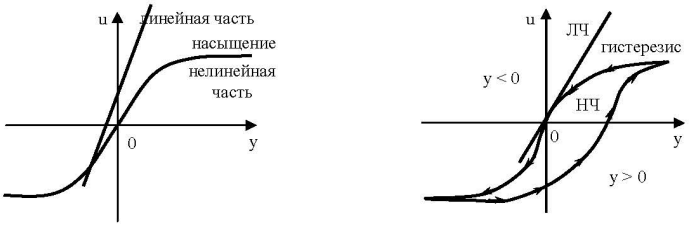


Рис. 5.2. Примеры характеристик нелинейных САУ

5.1. Основные типы нелинейностей в системах

В практике часто встречаются элементы, характеристики которых кусочно-линейны или аппроксимируются кусочно-линейными. Рассмотрим статические характеристики типовых нелинейных элементов САУ (рис. 5.3 ÷5.9) и их математическое описание в виде

$$u = f(y).$$

Математическое описание:

$$u = M\operatorname{sign} y;$$
$$M - const,\ M > 0.$$

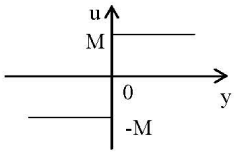
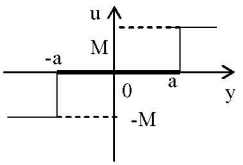


Рис. 5.3. Идеальное реле двухпозиционное

Математическое описание:

$$u = \begin{cases} +M, & y > a \\ 0, & -a \le y \le a \\ -M, & y < -a \end{cases};$$



здесь *a, M* – const.

Рис. 5.4. Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности

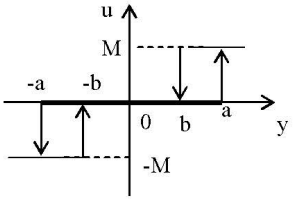


Рис. 5.5. Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности с гистерезисом

Математическое описание:

$$\frac{dy}{dt} > 0 \qquad\qquad \frac{dy}{dt} < 0$$

$$u = \begin{cases} +M, & y > a \\ 0, & -b \le y \le a \\ -M, & y < -b \end{cases} \quad u = \begin{cases} +M, & y > b \\ 0, & -a \le y \le b \\ -M, & y \le -a \end{cases};$$

здесь *a, b, M* – const.

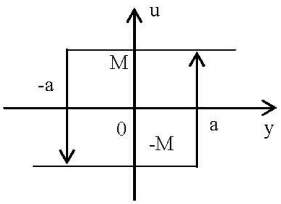


Рис. 5.6. Двухпозиционное реле с гистерезисом

Математическое описание:

$$\text{при } \frac{dy}{dt} > 0 \; u = \begin{cases} +M, & y \geq a \\ -M, & y < a \end{cases}; \text{ при } \frac{dy}{dt} < 0 \; u = \begin{cases} +M, & y \geq -a \\ -M, & y < -a \end{cases},$$

где a, M – const.

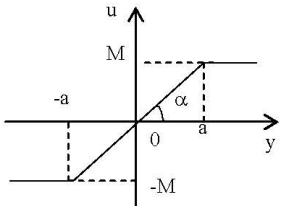


Рис. 5.7. Реле с насыщением

Математическое описание:

$$u = \begin{cases} +M, & y \geq a \\ ky, & -a < y < a \\ -M, & y \leq -a \end{cases},$$

где $k = \text{tg}\alpha = M/a$, k – коэффициент наклона; a, M – const.

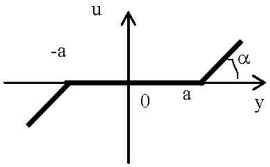


Рис. 5.8. Реле с зоной нечувствительности без насыщения

Математическое описание:

$$u = \begin{cases} k(y-a), & y \geq a \\ 0, & -a < y < a \\ k(y+a), & y \leq -a \end{cases},$$

где $k = \text{tg}\alpha$, a – const.

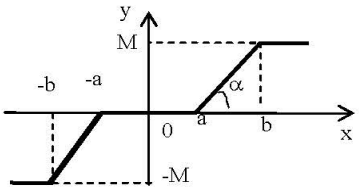


Рис. 5.9. Реле с насыщением и с зоной нечувствительности

Математическое описание:

$$u = \begin{cases} +M, & y > b \\ k(y-a), & \text{a} < \text{y} < \text{b} \\ 0, & -a < y < a \\ k(y+a), & \text{-b} < \text{y} < -a \\ -M, & y < -b \end{cases},$$

где $k = \text{tg}\alpha$; a, b, M – const.

Здесь приведены наиболее распространенные типы нелинейных характеристик НЭ, используемых в САУ.

Следует отметить, что нелинейные САУ могут иметь:

– неоднозначные характеристики;
– несколько точек покоя;
– автоколебания.

Автоколебания – это периодическое движение нелинейных систем, параметры которых не зависят от начальных условий.

К настоящему времени разработаны точные и приближенные методы исследования нелинейных САУ. В данной книге будут рассмотрены следующие точные методы исследования САУ [1, 10]:

– метод фазовой плоскости, предложенный А. А. Андроновым;
– второй (прямой) метод А. М. Ляпунова.

5.2. Исследование нелинейных САУ в фазовой плоскости. Системы с переменной структурой

Метод фазовой плоскости разработан русским ученым А. А. Андроновым.

Метод предназначен для исследования линейных и нелинейных САУ 2-го порядка, но это не является ограничением, так как всегда можно понизить порядок уравнений математического описания системы.

Что представляет собой фазовое пространство или пространство состояний? Пусть задана система следующего вида:

$$T\dot{x} + x(t) = u(t),\ u(t) = 0.$$

Поведение этой системы соответствует решению однородного дифференциального уравнения:

$$T\dot{x} + x(t) = 0.$$

В фазовом пространстве используют две фазовые переменные: основную координату $x(t)$ и скорость ее изменения $\dot{x}(t)$. В данном случае это будет прямая линия с углом наклона $\alpha = \frac{1}{T}$ (рис. 5.10).

Координаты $\dot{x}$, x в этом случае называются *фазовыми координатами*. *Фазовой траекторией* называется линия, показывающая перемещение изображающей точки по фазовой плоскости. Любая точка на фазовой траектории называется *изображающей точкой* – М. Пересечение фазовой траектории с началом координат называют *особой точкой – точкой покоя.*

Совокупность фазовых траекторий называется *фазовым портретом* системы. Он характеризует свойства системы. Отличительные особенности фазовых траекторий:

– фазовые траектории нигде не пересекаются, кроме как в особых точках, точках покоя;

– фазовые траектории можно строить качественно;

– направления фазовых траекторий обязательно указываются стрелками;

– фазовые траектории занимают все фазовое пространство.

В фазовом пространстве исключается параметр время. Косвенно оно отражается так: каждому моменту t_k соответствует фиксированные значения координат $x(t_k)$ и $\dot{x}(t_k)$, изображаемое точкой на фазовой траектории (рис. 5.10).

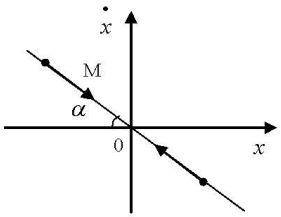


Рис. 5.10. Пример фазовой траектории

Запишем в скалярной форме уравнения системы 2-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}.$$

Разделим второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad \text{или} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = F(x_1, x_2) \qquad (5.3)$$

дифференциальное уравнение фазовых траекторий (5.3).

Решение дифференциального уравнения фазовых траекторий имеет вид

$$x_2 = f(x_1). \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) называется *уравнением фазовой траектории.*

Пример 5.1

Пусть задана система следующего вида:

$$T_1 \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = 0, \qquad (*)$$

где $T_i > 0,\ i = \overline{1,2};\ T_i$ – заданные постоянные.

Необходимо получить уравнение фазовой траектории

$$\frac{dx_2}{dx_1} = F(x_1 x_2);\ x_2 = f(x_1)$$

при ограничениях $T_i \le T_{i\ \text{доп.}} \quad \forall \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}$.

Алгоритм и решение.

1) Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \end{cases}.$$

2) Тогда уравнение (*) перепишется следующим образом:

$$T_1 \dot{x}_2 + T_2 x_2 + x_1 = 0.$$

3) Разделим каждое слагаемое предыдущего уравнения на $\frac{dx_1}{dt} = x_2 \neq 0$.

Получим следующее:

$$T_1 \frac{dx_2}{dt}\frac{dt}{dx_1} + T_2 \frac{x_2}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} = 0$$

$$T_1 \frac{dx_2}{dx_1} + T_2 + \frac{x_1}{x_2} = 0$$

4) Дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет иметь следующий вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\left(\frac{x_1}{T_1 x_2} + \frac{T_2}{T_1} \right).$$

5) Проинтегрировав последнее уравнение, можно получить уравнение фазовой траектории:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = F(x_1, x_2); \quad \int dx_2 = \int F(x_1, x_2) dx_1; \quad x_2 = f(x_1).$$

Множество фазовых траекторий или совокупность фазовых траекторий образуют *фазовый портрет*. Каждая нелинейная САУ имеет свой неповторимый фазовый портрет.

Итак, первое необходимое свойство любой САУ – устойчивость.

В нелинейной системе в зависимости от вида дифференциального уравнения фазовых траекторий $F(x_1, x_2)$ существует одно или множество решений, часть из которых могут быть устойчивыми, а часть – неустойчивыми. Поэтому в общем случае нельзя говорить об устойчивости или неустойчивости нелинейной системы, можно говорить лишь об устойчивости или неустойчивости ее конкретных движений или состояний равновесия.

Об устойчивости нелинейной САУ можно судить по характеристикам устойчивости линеаризованной системы в малой окрестности около положения равновесия или около точки покоя.

Поэтому ниже будут рассмотрены фазовые портреты линеаризованной (линейной) САУ. Признаком разделения "*на портреты*" является опять-таки положение характеристических чисел системы.

Рассмотрим фазовые портреты линейной динамической системы 2-го порядка.

Классификация точек покоя (особых точек) линейных систем на фазовой плоскости

Пусть дана линейная динамическая система 2-го порядка ($u(t) \equiv 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{5.5}$$

или в матричной форме $\dot{x} = Ax$.

Рассмотрим точку покоя, в которой скорости изменения переменных равны нулю $\dot{x} = 0$, т.е. $Ax = 0$, но $\det A \neq 0$, поэтому $x \equiv 0$, т. е.

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, координаты точки покоя равны $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

Вывод: положение равновесия для линейной системы – начало координат. Характеристическое уравнение системы (5.5) имеет вид

$$\det(A - sI) = s^2 + a_2 s + a_1 = 0.$$

Рассмотрим некоторые наиболее характерные виды фазовых траекторий, и особых точек в зависимости от вида и расположения корней характеристического уравнения системы (5.5).

I. Пусть характеристическое уравнение системы имеет вещественные корни.

1) Пусть корни характеристического уравнения системы вещественные, отрицательные (рис. 5.11):

$$S_1 = a_1;\ \ S_2 = a_2;\ a_1 < 0,\ a_2 < 0; a_1,\ a_2 - const.$$

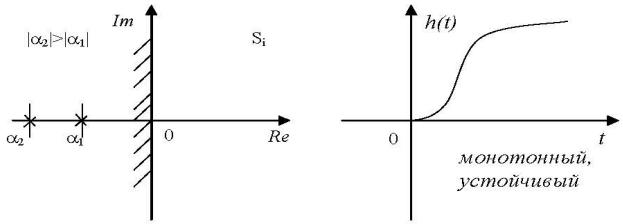


Рис. 5.11. Расположение корней и соответствующий им переходной процесс

В этом случае фазовый портрет соответствует особой точке – устойчивый узел (рис. 5.12). Здесь прямая линия – вырожденная траектория $e^{-\alpha t}$.

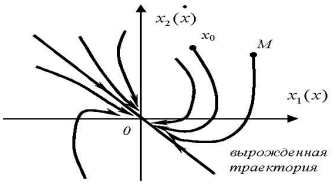


Рис. 5.12. Устойчивый узел

2) Пусть корни характеристического уравнения системы вещественные, положительные (рис. 5.13а):

$$S_1 = a_1;\ S_2 = a_2;\ a_1 > 0,\ a_2 > 0;\ a_1,\ a_2 - const.$$

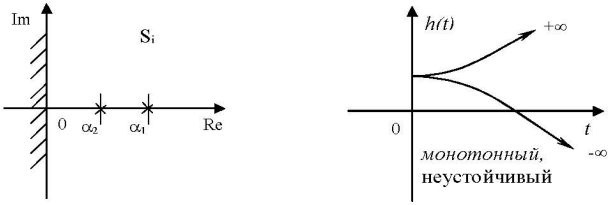


Рис. 5.13а. Расположение вещественных корней и соответствующий им переходной процесс

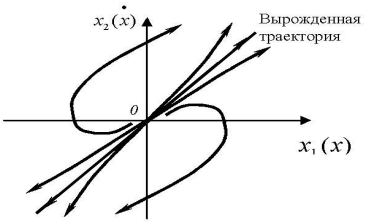


Рис. 5.13b. Неустойчивый узел

В этом случае фазовый портрет соответствует особой точке – неустойчивый узел (рис. 5.13b). Точка равновесия неустойчивая; здесь прямая линия – вырожденная траектория $e^{\alpha t}$.

3) Пусть корни характеристического уравнения системы вещественные, разных знаков (рис. 5.14a): $a_1 > 0,\ a_2 < 0;\ a_1,\ a_2 - const$

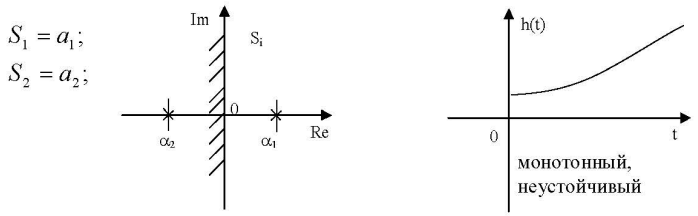


Рис. 5.14a. Расположение различных вещественных корней и соответствующий им переходной процесс

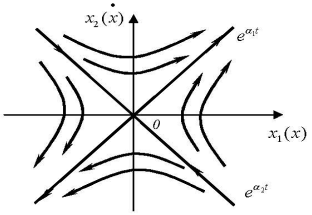


Рис. 5.14b. Особая точка типа седла

В данном случае фазовый портрет соответствует особой точке – типа седла (всегда неустойчива) (рис. 5.14b); $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}$ – вырожденные траектории.

II. Пусть корни характеристического уравнения системы комплексно-сопряженные: $s_{1,2} = +\alpha \pm j\beta$.

1) Вещественная часть корней – отрицательна (рис. 5.15a), т. е. $\alpha < 0$.

Система устойчива, так как вещественная часть корня отрицательна; фазовые траектории типа спирали, особая точка

– устойчивый фокус (рис. 5.15b).

a

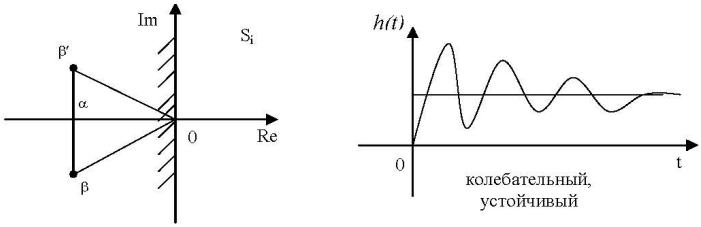


Рис. 5.15a. Расположение коплексно-сопряженных корней и соответствующий им переходной процесс

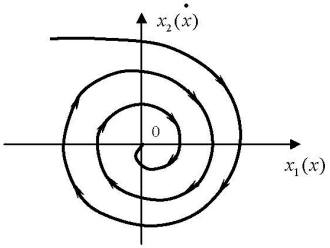


Рис. 5.15b. Устойчивый фокус

2) Вещественная часть корней – положительна (рис. 5.16a), т. е. $\alpha > 0$.

В этом случае фазовые траектории типа спирали; особая точка – неустойчивый фокус (рис. 5.16b).

a

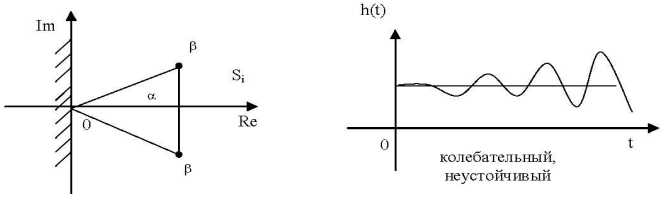


Рис. 5.16a. Расположение коплексно-сопряженных корней и соответствующий им переходной процесс

b

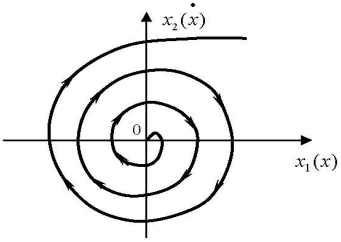


Рис. 5.16b. Неустойчивый фокус

III. Пусть корни характеристического уравнения системы чисто мнимые (рис. 5.17a): $s_{1,2} = \pm j\beta$.

a

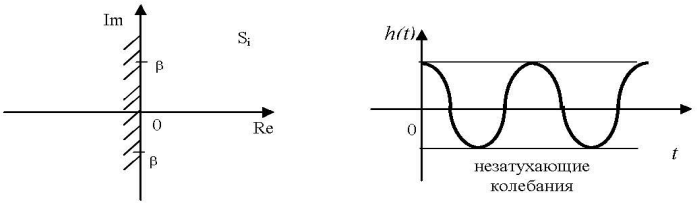


Рис. 5.17a. Расположение мнимых корней и соответствующий им переходной процесс

b

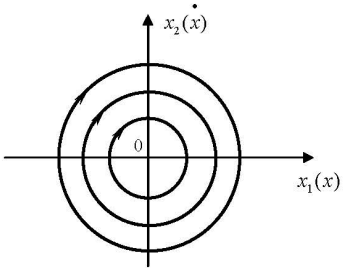


Рис. 5.17b. Особая точка типа центр

В этом случае фазовый портрет соответствует особой точке – типа центр (рис. 5.17b).

Отметим еще раз, что *особым точкам* или *точкам равновесия* системы соответствует остановка движения.

Фазовые портреты линейных систем позволяют наглядно представить совокупность возможных движений системы на фазовой плоскости. Использование фазовых портретов оказалось весьма удобным при конструировании систем с переменной структурой (СПС).

САУ с переменной структурой

К системам с переменной структурой относят системы, структурная схема которых изменяется при переходе изображающей точки через границы некоторых заранее установленных областей фазового пространства. Примерами систем с переменной структурой (СПС) являются релейные системы, замыкающие или размыкающие часть схемы при переходе через линии переключения [8].

Основная идея метода получения СПС заключается в следующем: “сшивая” фазовые портреты различных структур (при этом берутся лучшие свойства каждой из систем), получают новую систему более высокого качества, чем в любой из отдельно взятых структур – систему с переменной структурой.

Это означает, что САУ в различные моменты времени работает в соответствии с различными структурами, из которых она “сшита”.

Пример 5.2

Рассмотрим две устойчивые линейные системы, одна из которых характеризуется монотонностью переходного процесса, вторая – быстродействием. На рис. 5.18 и 5.19 представлены переходные процессы и фазовые портреты выбранных систем.

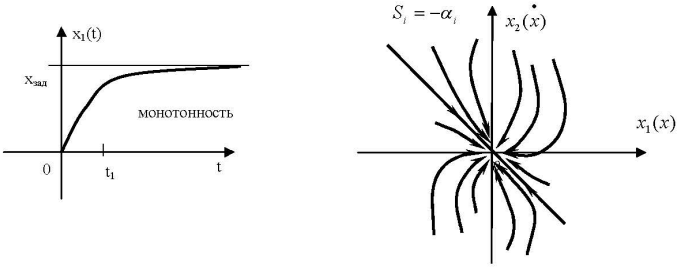


Рис. 5.18. Переходной процесс и фазовый портрет первой системы

По фазовому портрету СПС (рис. 5.20) видно, что где бы не находилась начальная изображающая точка (состояние системы) x_0, она перемещается к точке состояния равновесия сначала по фокусу, затем – по узлу.

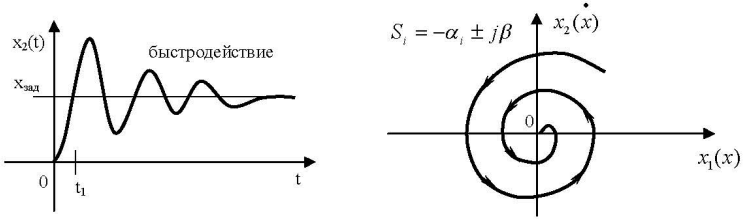


Рис. 5.19. Переходной процесс и фазовый портрет второй системы

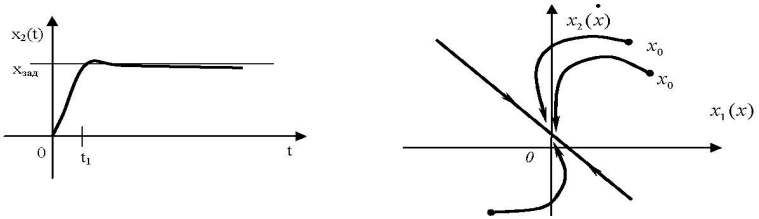


Рис 5.20. Переходной процесс и фазовый портрет СПС

Пример 5.3

Рассмотрим две неустойчивые линейные системы, обе из которых имеют правые полюса. Фазовые портреты выбранных

структур представлены на рис. 5.21: а) типа седло (всегда неустойчиво), б) неустойчивый фокус.

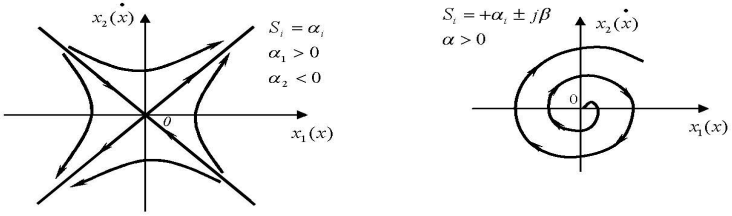


Рис. 5.21. Фазовые портреты фиксированных неустойчивых структур

Сшиванием фазовых портретов можно получить устойчивую систему с нелинейной структурой, фазовый портрет которой представлен на рис. 5.22.

Если движение началось в точке M_0, то движение идет сначала по неустойчивой фазовой траектории седла, затем при пересечении оси $x_2(\dot{x})$ ординат переходит на траекторию неустойчивого фокуса и, попав на устойчивую вырожденную траекторию, проходит по ней до точки равновесия.

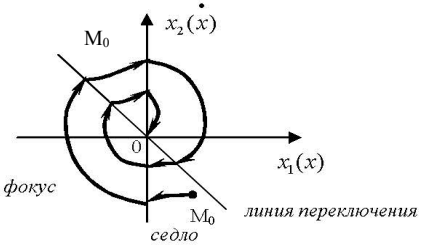


Рис. 5.22. Фазовый портрет СПС

В работе А. А. Воронова приведены примеры реальных систем с переменной структурой, в которых переход от одной структуры к другой обусловлен внутренними физическими законами, действующими в системе. Путем введения в систему переключающих логических элементов можно искусственно получить СПС с желаемыми характеристиками.

Режимы работы САУ с переменной структурой

Рассмотрим линеаризованную систему 2-го порядка следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu \ .$$

Возможны следующие виды режимов в системах с переменной структурой: 1) режим движения по вырожденным фазовым траекториям; 2) режим переключений; 3) скользящий режим.

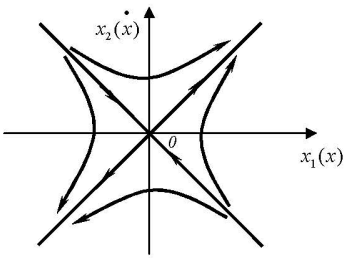
СПС составляется из двух структур. Одна из структур должна обязательно иметь вырожденные траектории (чаще всего вырожденные траектории – это прямые линии) устойчивого типа. Вторая структура должна иметь фазовый портрет, траектории которого пересекают устойчивую вырожденную траекторию.

Пусть взяты следующие структуры систем (рис. 5.23).

Система с переменной структурой будет иметь фазовый портрет, представленный на рис. 5.24.

Сшиванием фазовых портеров неустойчивых структур можно получить асимптотически устойчивую СПС, фазовый портрет которой представлен на рис. 5.24.

Первая структура (типа седло)



Вторая структура (неустойчивый фокус)

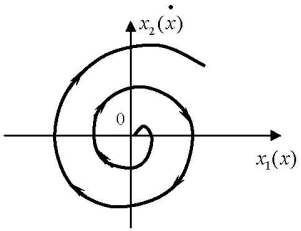


Рис. 5.23. Фазовые портеры неустойчивых структур

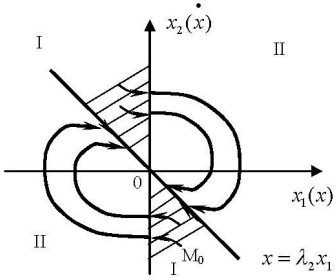


Рис. 5.24. Фазовый портрет асимптотически устойчивой СПС

1. Режим движения по вырожденным траекториям

Пусть ДС описывается дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + u \end{cases}.$$

Пусть задан закон управления:

$$u = (m^T x_1) sign\ x_2,$$

где m – вектор следующего вида:

$$m = \begin{vmatrix} m_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \text{ причем } m_1 = \begin{cases} m_1^1 \text{ - I структуры;} \\ m_1^2 \text{ - II структуры.} \end{cases}$$

Тогда СПС можно представить следующим образом (рис. 5.25); здесь БИС – блок изменения структуры.

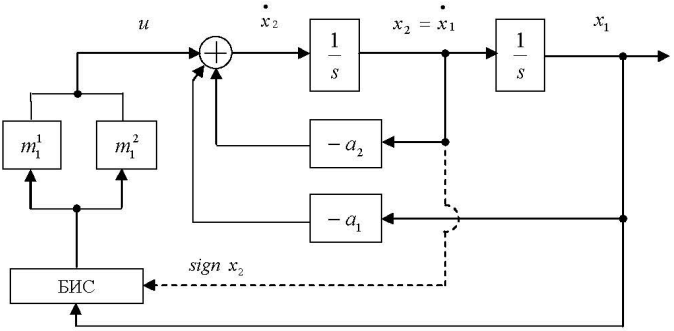


Рис. 5.25. Структура СПС

2. Режим переключений

Для этого режима характерно то, что особая точка – начало координат – достигается за большое количество переключений.

Пусть СПС состоит (“сшита”) из двух структур систем, фазовые портреты которых имеют вид типа седла (неустойчивый) и неустойчивого фокуса (рис. 5.23). “Сшиванием” фазовых портретов, получили СПС, фазовый портрет которой представлен на рис. 5.26.

Здесь уравнения вырожденных траекторий имеют вид

$$\begin{cases} x_2 = \lambda_2 x_1 \\ x_2 = c x_1 \end{cases},$$

где $|c| > |\lambda_2|$; λ_2 – отрицательный корень характеристического уравнения, ближайший к мнимой оси, $\lambda_2 < 0$; c – const.

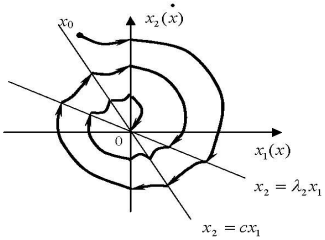


Рис. 5.26. Фазовый портрет режима переключений

Изменение уравнения движения происходит при переходе через вырожденные траектории, которые называются в этом случае *линиями переключений*, а также через ось ординат, которая в этом случае является тоже линией переключения.

3. Скользящий режим

Пусть СПС состоит (“сшита”) из двух структур систем, фазовые портреты которых имеют вид типа седла (неустойчивого) и неустойчивого фокуса (рис. 5.23). Фазовый портрет СПС представлен на рис. 5.27.

Уравнения вырожденных фазовых траекторий имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_2 = cx_1 \\ x_2 = \lambda_2 x_1 \end{cases}, \text{ но } |c| < |\lambda_2| .$$

К линии переключения $x_2 = cx_1$ фазовые траектории подходят с двух сторон. Попав на линию переключения, изображающая точка уже не сможет сойти с нее, но не может и остаться на ней (ее выталкивают с обеих сторон, так как траектории *направлены встречно* (рис. 5.27) на отрезке *AB*).

Скорость движения на *AB* не определена, но специальные исследования показывают, что она конечна и по величине колеблется вблизи значения ординаты точки. Изображающая точка будет скользить по отрезку к началу координат – точке равновесия. Отрезок *AB* называют *линией скольжения*. Режим СПС, когда изображающая точка движется вдоль прямой переключения, где изменение структуры происходит с бесконечно большой частотой, называется *скользящим*.

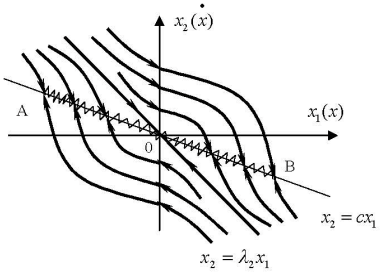


Рис. 5.27. Фазовый портрет СПС

5.3. Устойчивость в малом, большом и целом

В нелинейных системах движение или равновесие, устойчивое в малом, может оказаться неустойчивым при больших отклонениях. Тогда первый метод Ляпунова, рассмотренный в главе 2 данной книги, для исследования устойчивости на основе уравнений линейного приближения недостаточен для полного исследования устойчивости в нелинейных системах [1].

Пусть математическое описание нелинейной САУ задано в виде

$$\dot{x} = f(x),$$

где $f(0) = 0,\ t = t_0,\ x(t_0) = x_0,\ x_0 \neq 0$.

Нелинейную систему можно представить при малых отклонениях в линейной форме $(\mathrm{u(t)} = 0)$ следующим образом:

$$\dot{x} = Ax,$$

где, $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, $A(n \times n)$ – матрица коэффициентов;

координаты равновесия (покоя) $\mathrm{X} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{vmatrix}$.

Если точка равновесия $X = 0$ устойчива, то вокруг начала координат существует область притяжения траекторий – область L_0 (рис. 5.28).

Если известно лишь то, что область притяжения существует, то считают, что состояние равновесия устойчиво “в малом”.

Устойчивость “в малом” констатирует факт наличия устойчивости, но не определяет величину начальных отклонений.

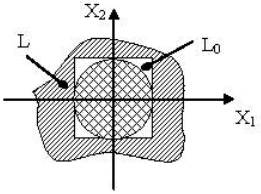


Рис. 5.28. Устойчивость “в малом”

Устойчивость “в большом”. Будем считать, что в нашей системе известна рабочая область функционирования системы L_0 (в отклонениях):

$$\dot{x} = f(x).$$

Причем $|x| \le L_0$ – в процессе функционирования, т.е. в области рабочих отклонений системы.

Если область L_0 целиком принадлежит области L равновесие устойчиво “в большом” (рис. 5.30). Если часть области находится вне области L, то равновесие устойчиво “в малом”, но неустойчиво “в большом” (рис. 5.29).

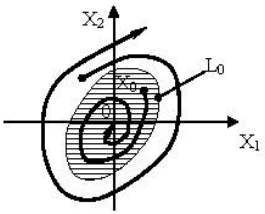


Рис. 5.29. Устойчивость “в малом”, неустойчивость “в большом”

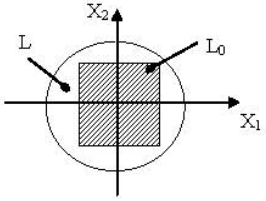


Рис. 5.30. Устойчивость “в большом”

Любая точка внутри заштрихованной области придет в начало координат.

Посмотрим это на примере.

Пример 5.5

Пусть имеется нелинейная система. Известна рабочая область функционирования системы L_0, которая содержит точку $X = 0$ (начало координат):

$$L_0 = \left\{x : \lim_{x \to 0} x(t, t_0, x_0) = 0\right\}.$$

L_0 – это множество переменных состояния, в которых при любых значениях x приводит к началу координат.

Устойчивость “в большом” будет иметь место, если $L_0 \in L$, где L_0 – область рабочих отклонений системы.

Если область L распространяется на все пространство, то равновесие называют устойчивым “в целом” (рис. 5.31).

$$\dot{x} = f(x),$$
$$f(0) = 0$$

т. е. область L обязательно включает начало координат.

Областью устойчивости L будет все пространство переменных состояния. Для *линейной* системы устойчивость “в целом” показана на рис. 5.32.

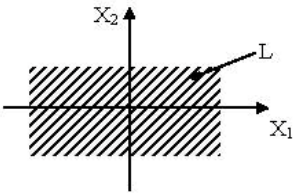


Рис. 5.31. Устойчивость “в целом”

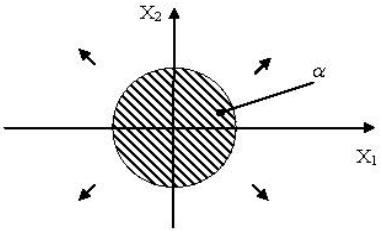


Рис. 5.32. Устойчивость линейной системы

Если $|x_0| \le \alpha$, где $\alpha = \text{const}$, то система будет *устойчива всюду*.

Для исследования устойчивости “в большом” и “в целом” используют специальные методы, из которых два будут ниже коротко рассмотрены:

– второй (прямой) А. М. Ляпунова;

– метод В. М. Пóпова для исследования абсолютной устойчивости (т. е. устойчивости в “в целом” для определенного класса нелинейностей).

5.4. Второй (прямой) метод А. М. Ляпунова

Используя второй метод Ляпунова, можно судить о свойствах системы, не зная ее решения, а имея только уравнение этой системы. Второй (прямой) метод Ляпунова основывается на построении специальных функций Ляпунова, позволяющих получить достаточные условия устойчивости равновесия “в большом”.

В дальнейшем понадобятся следующие сведения. Знакоопределенные, знакопостоянные и знакопеременные функции.

Рассмотрим вещественное n-мерное пространство R^n; вектор, принадлежащий ему, будем обозначать $x \in R^n$.

Пусть нелинейная система описывается уравнением в общем виде:

$$\dot{x} = f(x),$$

заданы начальные условия $f(0) = 0$.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $V(x)$ векторного аргумента. В пространстве R^n рассмотрим некоторую область *Д*, которая включает в себя обязательно начало координат. Область *Д* – это область нормального функционирования САУ (рис. 5.33).

Определение 1. Функция $V(x)$ называется *знакоопределенной* в области *Д*, если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) \ne 0, \text{ если } x \ne 0, \\ V(x) = 0, \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 2. Функция $V(x)$ называется *знакоопределенной положительной* в области *Д*, если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) > 0, \text{ при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 3. Функция $V(x)$ называется *знакоопределенной отрицательной* в области *Д*, если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) < 0, \text{ при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

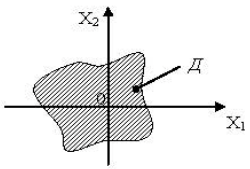


Рис. 5.33. Область нормального функционирования системы

Пример 5.6

Пусть $x \in R^2$, $V(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2$

(рис. 5.34a)

a

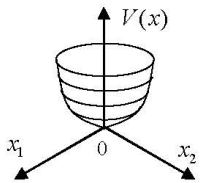


Рис. 5.34a. Функция знакоопределенная положительная

Пример 5.7

Пусть

$x \in R^2$, $V(x) = -2x_1^2 - 5x_2^2$

(рис. 5.34b)

b

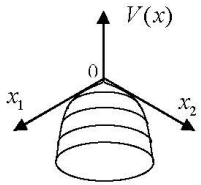


Рис. 5.34b. Функция знакоопределенная отрицательная

Определение 4. Функция $V(x)$ называется *знакопостоянной* в области Д, если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) \neq 0, \text{ при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 5. Функция $V(x)$ называется *знакопостоянной положительной* в области Д, если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) \geq 0, \text{ при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Определение 6. Функция $V(x)$ называется *знакопостоянной отрицательной* в области Д, если в этой области она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} V(x) \leq 0, \text{ при } x \neq 0, \\ V(x) = 0, \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Пример 5.8

Пусть $x \in R^1$, $V(x) = 2x^2$ (рис. 5.34c)

Пример 5.9

Пусть $x \in R^2$, $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ (рис. 5.34d)

c

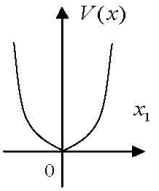


Рис. 5.34c. Функция знакоопределенная положительная

d

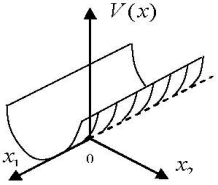


Рис. 5.34d. Функция знакопостоянная положительная

Пример 5.10

Пусть $x \in R^n$.

Функции

$V(x) = x^T x$ – знакоопределенная положительная;

$V(x) = -x^T x$ – знакоопределенная отрицательная.

Пример 5.11

Пусть $x \in R^1$ (рис. 5.34е).

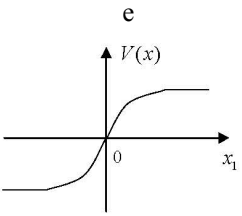


Рис. 5.34е. Функция знакопеременная

Определение 7. Функция $V(x)$ называется *знакопеременной* в области *Д*, если в этой области она может принимать значения обоих знаков $-\ a_1$, $V(x) > 0$ и $V(x) < 0$, при $x \neq 0$.

5.4.1. Теоремы второго (прямого) метода Ляпунова

Пусть нелинейная САУ описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = F(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (5.6a)$$

$$u = f(y) \qquad (5.6b)$$

$$f(0) = 0 \quad . \qquad (5.6c)$$

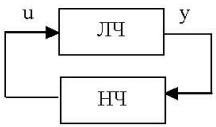


Рис. 5.1. Представление нелинейной системы

Пусть линейная часть системы описывается системой дифференциальных уравнений в форме (5.6a), заданы начальные условия $x(0)=0$; нелинейная часть системы описывается уравнением (5.6b); уравнение (5.6c) показывает, что рабочая область *Д* содержит в себе начало координат.

Здесь x – отклонение от установившегося движения, т. е. система имеет невозмущенное движение от начального условия $x=0$ или рабочий режим. Пусть $V(x)$ – функция А.М. Ляпунова.

ТЕОРЕМА 1

Если для системы (5.6a) существует знакоопределенная положительная функция $V(x)$ в области *Д*, полная производная которой по времени $\frac{dV}{dt}$, взятая в силу системы (5.6a), является функцией знакоопределенной отрицательной, то *невозмущенное движение* $x=0$ *асимптотически устойчиво* по Ляпунову.

Если функция $V(x)$ является знакоопределенной положительной:

$$\begin{cases} V(x)>0 \ \text{ при } \ x\neq 0 \\ V(x)=0 \ \text{ при } \ x=0 \end{cases},$$

а ее полная производная $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределенной отрицательной, т.е.

$$\frac{dV}{dt}<0 \ \text{ при } \ x\neq 0,$$

где $\frac{dV}{dt}\overset{\Delta}{=}(\nabla V)^T\frac{dx}{dt}=(\nabla V)^T f(x,t)$,

$\nabla V\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ – градиент скалярной функции $V(x)$,

f(x, t) – правая часть уравнения (5.6а),

то *невозмущенное движение асимптотически устойчиво* по Ляпунову, т. е. $\lim x(t) = 0$ при $t \to \infty$ (рис. 5.35).

ТЕОРЕМА 2

Если для системы (5.6а) существует в области *Д* знакоопределенная положительная функция $V(x)$, полная производная которой по времени $\frac{dV}{dt}$, взятая в силу системы (5.6а), является функцией знакопостоянной отрицательной, то *невозмущенное движение* $x = 0$ *устойчиво* по Ляпунову.

Если $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \frac{dV}{dt} \le 0 \end{cases}$, то невозмущенное движение просто устойчиво по Ляпунову (рис. 5.36), причем

$$|x_k| \ge \alpha,\ \alpha > 0,$$

где x_k – конечное значение, которое не доходит до начала координат.

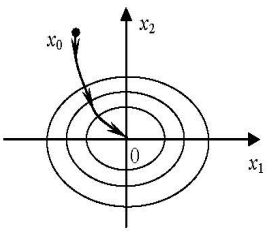


Рис. 5.35. Движение системы асимптотически устойчиво

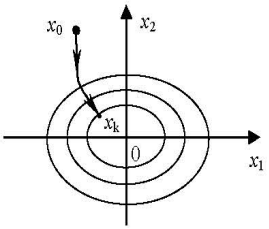


Рис. 5.36. Движение системы устойчиво

ТЕОРЕМА 3

Если для системы (5.6а) в области *Д* существует знакоопределенная положительная функция $V(x)$, полная производная которой по времени, взятая в силу системы (5.6а) в некоторой части области *Д*, содержащей в себе начало

координат, совпадает по знаку со знаком функции $V(x)$, то *невозмущенное движение* $x = 0$ *неустойчиво* по Ляпунову.

Если $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dfrac{dV}{dt} > 0 \end{cases}$, то невозмущенное движение неустойчиво по Ляпунову (рис. 5.37).

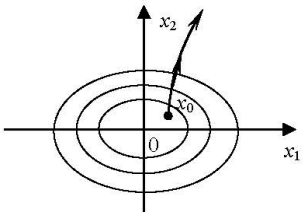


Рис. 5.37. Движение системы неустойчиво

Задача о нахождении функции Ляпунова, которая для конкретной системы дала бы необходимое и достаточное условие устойчивости, весьма сложна.

5.4.2. Построение функции Ляпунова для линейных систем

Пусть задана линейная динамическая система следующего вида: $\dot{x} = Ax + Bu$, $u(t) \equiv 0$.

Рассмотрим свободную систему вида

$$\dot{x} = Ax.$$

Выберем функцию следующего вида:

$$V = x^T Px, \tag{5.7}$$

где $P(n \times n)$ постоянная матрица; причем $P^T = P$ – симметрическая матрица, т. е. $P_{ij} = P_{ji}\ \forall i, j = \overline{1, n}$.

Квадратичную форму (вида 5.7) будем рассматривать в качестве функции Ляпунова, но прежде рассмотрим свойства квадратичной формы.

Свойства квадратичной формы

Критерии Сильвестра

Критерий 1. Квадратичная форма является *знакоопределенной положительной*, если все главные диагональные миноры матрицы P положительны.

$P > 0$ означает, что матрица P положительно определенная,

т.е. $P_{11} > 0$; $\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0$; … $\det P > 0$.

Критерий 2. Квадратичная форма является *знакоопределенной отрицательной*, если знаки главных диагональных миноров чередуются, начиная с отрицательного.

$P < 0$ означает, что матрица P отрицательно определенная, т. е.

$$P_{11} < 0;\ \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0;\ \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{ и т. д.},$$

т. е. знаки чередуются, начиная с отрицательного.

Построение функции Ляпунова для линейных систем

Рассмотрим наряду с системой (5.6а) систему, транспонированную к ней:

$$(\dot{x})^T = x^T A^T.$$

Матрицу P выберем знакоопределенной положительной, т. е. $P > 0$. Возьмем производную от функции Ляпунова вида (5.7):

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = x^T A^T Px + x^T PAx = ,$$
$$= x^T (A^T P + PA)x = -x^T Qx$$

где $Q(n \times n)$ – симметрическая матрица, т.е. $Q = Q^T$, кроме того, $Q > 0$ – знакоопределенная положительная матрица. Следовательно,

$$A^T P + PA = -Q. \qquad (5.8)$$

Итак, уравнение (5.8) есть матричное уравнение Ляпунова. Решением матричного уравнения является матрица *P*.

ТЕОРЕМА

Для того, чтобы матрица *A* была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы матричное уравнение (5.8) имело положительно-определенное решение $P > 0$ при любой положительно-определенной матрице $Q > 0$.

Матричное уравнение (5.8) сводится к системе $\frac{(n+1)n}{2}$ линейных алгебраических уравнений, где n – порядок системы.

Пример 5.12

Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -5x_2 \end{cases},$$

где $x \in R^2$.

Задана функция Ляпунова $V(x)$ следующего вида:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

или

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \frac{1}{2} x^T P x, \text{ где } P = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Определить устойчивость системы по Ляпунову.

Алгоритм и решение

1) Заданная функция $V(x)$ – знакоопределенная положительная, так как $\begin{cases} V(x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \\ V(x) = 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$.

2) Следует определить знак ее полной производной.

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -2x_1^2 - 5x_2^2 = -(2x_1^2 + 5x_2^2),$$

$$\frac{dV}{dt} \overset{\Delta}{=} (\nabla V)^T \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt};$$

$$\frac{dV}{dt} = -(2x_1^2 + 5x_2^2) < 0.$$

Следовательно, система *асимптотически устойчива* при любых значениях x_1, x_2.

Пример 5.13

Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка, следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases},$$

где $x \in R^2$.

Задана функция Ляпунова следующего вида:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > 0.$$

Определить устойчивость системы по Ляпунову.

Алгоритм и решение

1) Заданная функция $V(x)$ – знакоопределенная положительная, так как $\begin{cases} V(x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \\ V(x) = 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$.

2) Следует определить знак ее полной производной.

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad \text{при } x_2 > x_1 .$$

Следовательно, система *асимптотически устойчива* по Ляпунову при выполнении условия $x_2 > x_1$.

Этот метод был обобщен американским ученым Ричардом Калманом.

Теорема Калмана Вещественные части характеристических корней матрицы A будут меньше нуля $\alpha < 0$ тогда и только тогда, когда для любой симметрической положительно определенной матрицы Q существует симметрическая положительно определенная матрица P, которая является единственным решением уравнения следующего вида:

$$-2\alpha P + A^T P + PA = -Q ,$$

где $\text{Re}\ \lambda_i(A) \le \alpha_i;\ \alpha = const$.

Пример 5.14 Пусть задана линейная динамическая система 2-го порядка, следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x_1 - 3x_2 \\ \dot{x} = -4x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

Задана функция Ляпунова следующего вида:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) .$$

Определить устойчивость системы по Ляпунову.

Алгоритм и решение

1) Заданная функция $V(x)$ – знакоопределенная положительная, так как $\begin{cases} V(x) > 0 \ \text{ при } \ x \neq 0 \\ V(x) = 0 \ \text{ при } \ x = 0 \end{cases}$.

2) Следует определить знак ее полной производной.

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(5x_1 - 3x_2) + x_2(-4x_1 + 2x_2) < 0;$$

$$5x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 < 0;$$

$$5x_1^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{5x_1^2}{5x_1^2} - \frac{7x_1x_2}{5x_1^2} + \frac{2x_2^2}{5x_1^2} < 0.$$

3) Введем обозначение $\frac{x_2}{x_1} = z$;

$$\frac{2}{5}z^2 - \frac{7}{5}z + 1 < 0$$

$$z^2 - \frac{7 \times 5}{5 \times 2}z + \frac{5}{2} < 0;$$

$$z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{5}{2} < 0;$$

$$z_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}};$$

$$z_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}; \quad z_1 = 1, z_2 = \frac{10}{4}.$$

Следовательно, система *асимптотически устойчива* по Ляпунову при выборе значений переменных в полученном диапазоне $x_1 \in (0.4x_2, x_2)$.

5.4.3 Методы построения функций Ляпунова для нелинейных систем

Задача о нахождении функции Ляпунова для нелинейных систем весьма сложна и иногда практически неразрешима. Ниже представлены два подхода, два метода построения функции Ляпунова для нелинейных систем [3, 37].

I. Метод Красовского Н. Н.

Рассмотрим нелинейную систему, математическая модель которой записана в матричной форме

$$\dot{x} = X(x), \tag{5.9}$$

где $X(x)$ – векторная функция векторного аргумента; она удовлетворяет условию $X(0)=0$, т. е. начало координат является рабочей точкой.

Выберем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы *относительно производных*:

$$V = X^T PX \,. \tag{5.10}$$

Причем, $\lambda_i(P) > 0, (i = \overline{1,n})$ – собственные значения матрицы P. Матрица P– симметрическая матрица $P^T = P$. Необходимо наложить условие на симметризованную матрицу Q, равную

$$\mathrm{Q} = \left(P\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T + \left(P\frac{\partial X}{\partial x}\right).$$

Симметризованная матрица Q должна удовлетворять второму критерию Сильвестра – условию *знакоопределенной отрицательности* (знаки главных диагональных миноров чередуются, начиная с отрицательного).

Если задана векторная функция $X(x)$, то чтобы найти ее производную, следует продифференцировать ее по правилам сложной функции:

$$\dot{X}(x) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\dot{x}\,.$$

Итак, функция Ляпунова выбрана вида (5.10), ее полная производная в силу уравнений (5.9) будет иметь следующий вид:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{X}^T PX + X^T P\dot{X} = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\dot{x}\right]^T PX + X^T P\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\dot{x} =$$

$$\dot{x}^T\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T PX + X^T P\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\dot{x}\,\Bigg|\begin{matrix}\dot{x}^T = X^T(x)\\ \dot{x} = X(x)\end{matrix}$$

Запишем последнее уравнение через производную X и вынесем за скобки влево X^T, а вправо X:

$$X^T\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T PX + X^T P\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)X = X^T\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T P + P\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right]X =$$

$$= X^T\left[\left(P\frac{\partial X}{\partial x}\right)^T + \left(P\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right]X = X^T \mathrm{Q} X.$$

Так как по условию матрица $\mathrm{Q} < 0$, то $\frac{dV}{dt} = X^T \mathrm{Q} X < 0$.

Функция Ляпунова была выбрана

$$V = X^T PX > 0.$$

Следовательно, движение системы асимптотически устойчиво по Ляпунову, так как $V > 0$, $\frac{dV}{dt} < 0$.

2. Метод переменного градиента или метод Шульца-Гибсона

Пусть нелинейная САУ описывается уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = f(x);$$

пусть $f(0) = 0$ – некоторая рабочая точка, соответствующая невозмущенному движению $x = 0$.

Задан градиент скалярной функции:

$$\nabla V(x) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^T$$

или

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \ldots\ldots \\ \nabla V_n \end{bmatrix}.$$

В результате выбора функции $V(x)$ хорошо бы получить отрицательную производную:

$$\frac{dV}{dt} < 0.$$

При этом следует учесть, что *векторное поле градиента функции Ляпунова* должно быть *потенциальным*, т.е.

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \nabla V_k}{\partial x_i} \ \forall i \neq k, \quad i,k = \overline{1,n}.$$

Эти функции задаются в виде одномерных или многомерных полиномов.

Функция Ляпунова находится тогда следующим образом:

$$V = \int (\nabla V)^T dx = \int \nabla V_1(\xi_1,0,0,...,0) d\xi_1 + \int \nabla V_2(x_1,\xi_2,0,0,...,0) d\xi_2 \qquad (*)$$

$$+ \cdots + \int \nabla V_n(x_1,x_2,...,x_{n-1},\xi_n) d\xi_n$$

Получив функцию Ляпунова, всегда можно найти ее полную производную.

Пример 5.15

Пусть уравнения динамики системы в пространстве состояний заданы следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2^{\,2} + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^{\,3} \end{cases}; \qquad x \in R^2.$$

Исследовать систему на устойчивость по Ляпунову.

Алгоритм и решение

1) Записывается градиент функции Ляпунова в форме Шульца – Гибсона следующим образом:

$$\nabla V = \begin{vmatrix} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \end{vmatrix}. \qquad (**)$$

2) Определяется полная производная функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} = \nabla V^T \dot{x} = \nabla V_1 \dot{x}_1 + \nabla V_2 \dot{x}_2 =$$

$$(\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2)(-x_1 x_2^2 + x_2) - (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2) x_1^3 =$$

$$= -\alpha_{11} x_1^2 x_2^2 + \alpha_{11} x_1 x_2 - \alpha_{12} x_1 x_2^3 + \alpha_{12} x_2^2 - \alpha_{21} x_1^4 - \alpha_{22} x_1^3 x_2 < 0$$

3) Необходимо определить такие *значения* α_{ij}, чтобы полная производная функции Ляпунова была строго отрицательная, т.е. $\dot{V}(x) < 0$.

Пусть $\alpha_{11}=1$; $\alpha_{12}=-\alpha_{21}$; $\alpha_{12}=-1$; $\alpha_{21}=1$.

Тогда

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 (1 + x_2^2) - x_2^2 - x_1^4 - \alpha_{22} x_1^3 x_2 < 0.$$

Слагаемые $-x_1^2 x_2^2 < 0$ и $-(x_1^2 + x_2^4) < 0$ отрицательные при любых $x_i \neq 0$ $(i=1,2)$.

Следовательно, надо чтобы

$$x_1 x_2 (1 + x_2^2 - \alpha_{22} x_1^2) = 0.$$

Так как $x_1 \neq 0$; $x_2 \neq 0$, то $1 + x_2^2 - \alpha_{22} x_1^2 = 0$.

Отсюда $$\alpha_{22} = \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

При таком выборе коэффициентов α_{ij} получим следующее:

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^4 < 0.$$

4) Чтобы определить функцию Ляпунова $V(x)$, подставим найденные коэффициенты в градиент (**):

$$\nabla V = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + \dfrac{x_2}{x_1^2} + \dfrac{x_2^3}{x_1^2} \end{vmatrix}.$$

5) Используя выражение (*), получим функцию Ляпунова следующего вида:

$$V(x) = \int_0^x \nabla V^T dx =$$

$$\int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi_1, 0)\, d\xi_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi_2) d\xi_2 =$$

$$= \int_0^{x_1} \xi_1 d\xi_1 + \int_0^{x_2} (x_1 + \frac{\xi_2}{x_1^2} + \frac{\xi_2^3}{x_1^2}) d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2 x_1^2} + \frac{x_2^4}{4 x_1^2} > 0$$

Функция Ляпунова *V(x)* – знакоопределенная положительная, а ее полная производная – знакоопределенная отрицательная, следовательно, исходная система *асимптотически устойчива* по Ляпунову.

Существуют различные формы функции Ляпунова, предложенные А. И. Лурье, Г. Сеге, В. И. Постниковым.

Следует еще раз подчеркнуть *основные выводы*:

а) $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases}$ – функция должна быть знакоопределенной положительной;
– производная должна быть знакоопределенной отрицательной, что обеспечит движению системы асимптотическую устойчивость по Ляпунову.

b) $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) \le 0 \end{cases}$ – функция должна быть знакоопределенной положительной;
– ее полная производная может быть знакопостоянной отрицательной, что обеспечит движению системы устойчивость по Ляпунову.

c) $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) > 0 \end{cases}$ – обе функции знакоопределенные положительные, что принесет движению системы неустойчивость по Ляпунову.

5.4.4. Параметрический синтез нелинейных законов управления прямым методом Ляпунова

Пусть задана линейная САУ следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5.11}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^1$, A, B – матрицы постоянных коэффициентов соответствующих размерностей.

Выберем закон управления

$$u = -mx + u_0, \tag{5.12}$$

где u_0 – дополнительный сигнал, m – вектор параметров закона управления.

Замкнув заданную систему выбранным законом управления

$$\dot{x} = Ax - Bmx + Bu_0 = Cx + Bu_0,$$

где $C = A - Bm$,

можно вложить какие-то определенные свойства в замкнутую систему (см. главу 4).

Это возможно, когда амплитуда управляющего сигнала ограничена:

$$|u_i| \le u_{i_{\max}}, i = \overline{1, l}.$$

Во многих случаях нелинейный синтез позволяет улучшить динамические характеристики линейной системы.

Пример 5.16

Пусть математическое описание системы задано уравнениями (5.11), (5.12).

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные $\alpha < 0$; пусть $x \in R^2$. На рис. 5.38 показаны фазовые портреты линейной и нелинейной систем. Вполне

очевидно, что нелинейная система более быстродействующая, чем линейная.

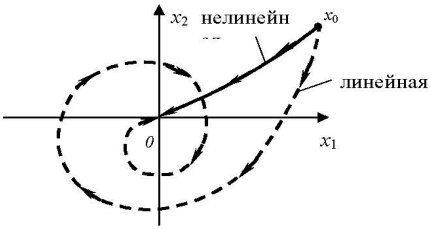


Рис. 5.38. Фазовый портрет

Решим задачу параметрического синтеза нелинейной САУ, использовав второй (прямой) метод Ляпунова.

Наряду с уравнением (5.11) рассмотрим транспонированную систему:

$$\dot{x}^T = x^T A^T + u^T B^T. \qquad (5.13)$$

Пусть матрица A системы (5.11) устойчивая, т. е. собственные значения матрицы имеют отрицательные вещественные части:

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A) < 0, \quad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}.$$

Выберем функцию Ляпунова в квадратичной форме следующего вида:

$$V = x^T P x,$$

где $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{P} > 0$, т. е. P симметрическая и положительно определенная матрица.

Запишем полную производную функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}. \qquad (5.14)$$

Подставим (5.11) и (5.13) в (5.14). Тогда полная производная функции Ляпунова будет равна следующему:

$$\frac{dV}{dt} = \left(x^T A^T + u^T B^T\right)Px + x^T P\left(Ax + Bx\right) =$$
$$= x^T A^T Px + u^T B^T Px + x^T PAx + x^T PBu =$$
$$= \left(x^T A^T Px + x^T PAx\right) + \left(u^T B^T Px + x^T PBu\right) =$$
$$= -x^T \mathrm{Q}x + 2u^T B^T Px = -x^T \mathrm{Q}x + 2u^T \left(Cx\right)$$

где $C = B^T P$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^T$ – симметрическая матрица, $\mathrm{Q} > 0$ – знакоопределенная положительная.

Следовательно, полная производная функции Ляпунова равна следующему:

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Qx + 2u^T \left(Cx\right). \qquad (5.15)$$

Выберем управление $u = u_{\max}\mathrm{sign}(Cx)$.

При таком выборе функции управления второе слагаемое в уравнении (5.15) будет всегда отрицательным (первое и так отрицательное). Следовательно, $\frac{dV}{dt} < 0$, что обеспечит движению системы асимптотическую устойчивость по Ляпунову.

Таким образом, процедура параметрического синтеза нелинейной САУ распадается на два следующих этапа:

1) Необходимо решить матричное уравнение Ляпунова следующего вида:

$$A^T P + PA = -\mathrm{Q}.$$

Задавшись $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}} > 0$, находят решение матричного уравнения – матрицу P, причем $P = P^{\mathrm{T}}$; $P > 0$.

2) Следует определить матрицу C, равную

$$C = B^T P.$$

Ниже представлена (рис. 5.39) матричная структурная схема системы с заданным типом нелинейности (система 1).

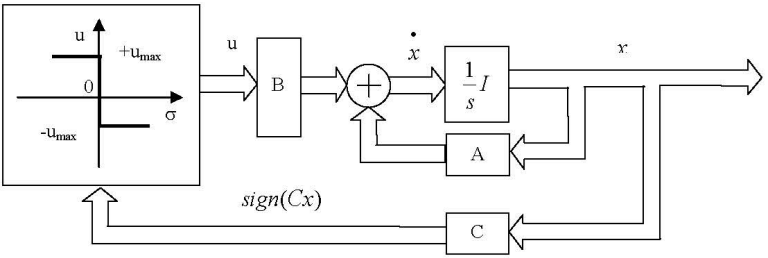


Рис. 5.39. Матричная структурная схема системы 1

Каждая компонента вектора управления должна проходить через нелинейность такого типа. Поэтому в системе должно быть l штук релейных характеристик.

Этот же подход позволяет реализовать другие законы управления. *Например:u = -sat* (*Cx*), где *sat* – функция насыщения, т.е. другая нелинейность рис. 5.40 (система 2).

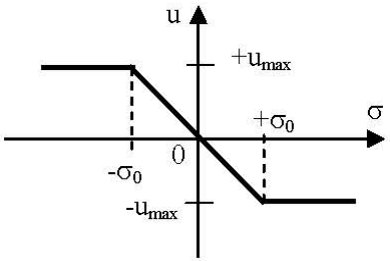


Рис. 5.40. Нелинейность с насыщением

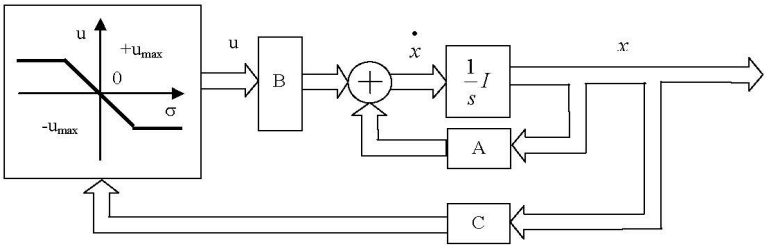


Рис. 5.41. Матричная структурная схема системы 2

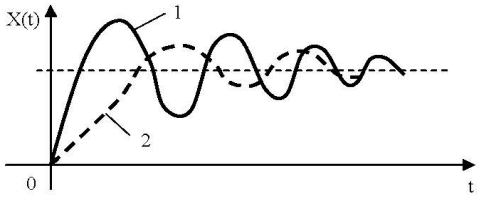


Рис. 5.42. Переходные процессы

Реакция второй системы несколько замедлена по сравнению с первой системой, т. е. быстродействие меньше, но перерегулирование у 2-й системы меньше, чем у первой, что наглядно показывают переходные процессы систем (рис. 5.42).

5.5. Абсолютная устойчивость. Критерий В. М. Попова

Большие возможности для исследования устойчивости и даже качества нелинейных систем открыл критерий абсолютной устойчивости, предложенный румынским ученым В. М. Поповым (1960). Особенно его геометрическая трактовка, позволяющая привлечь частотные методы к исследованию рассматриваемого класса нелинейных систем [1].

Пусть задана нелинейная система следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{5.16}$$

$$u = f(y) \tag{5.17}$$

$$y = C^T x \tag{5.18}$$

$$f(0) = 0 \tag{5.19}$$

$$0 \le \frac{f(y)}{y} \le k\,. \tag{5.20}$$

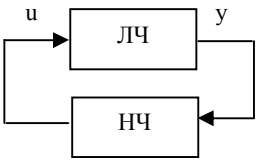


Рис. 5.1 Представление нелинейной системы

Уравнения (5.16)–(5.18) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bf(y) \\ y = C^T x \end{cases}.$$

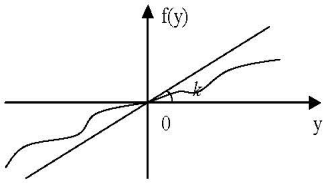


Рис. 5.43. Нелинейная характеристика

Уравнения (5.19), (5.20) обозначают, что нелинейность проходит через начало координат и нелинейная характеристика должна располагаться внутри линейного угла (0, k) (рис. 5.43).

Определение

Абсолютная устойчивость – это устойчивость “в целом” при любых нелинейных характеристиках уравнения (5.17), удовлетворяющих условиям (5.19) и (5.20).

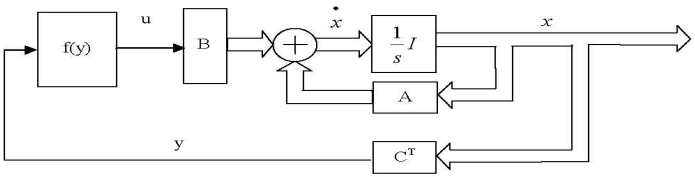


Рис. 5.44. Матричная структурная схема системы

5.5.1. Исследование абсолютной устойчивости методом В. М. Попова

Перейдем к преобразованию Лапласа в уравнении (5.16):

$$sx = Ax + bu(s)$$

$$(sI - A)x = bu(s) \cdot$$

$$x = (sI - A)^{-1} bu$$

Получим матричную передаточную функцию по всем переменным состояния. Для этого запишем уравнение (5.18) в форме преобразования Лапласа:

$$y = C^T (sI - A)^{-1} bu .$$

Определим скалярную передаточную функцию по входу

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C^T (sI - A)^{-1} b . \qquad (*)$$

Причем $\mathrm{Re}\, s_i(A) < 0, \ \forall i = \overline{1,n}$.

Тогда нелинейную САУ представим следующим образом (рис. 5.45):

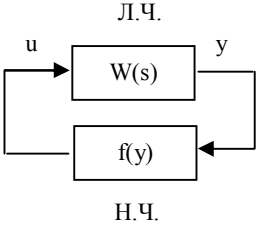


Рис. 5.45. Укрупненная структура нелинейной САУ

К такой структуре применима методика Попова через его функцию:

$$П(j\omega) = (1 + jq\omega)W(j\omega) + \frac{1}{k},$$

где $\mathrm{Re}\, s_i(A) < 0, \ \forall i = \overline{1,n}$ – вещественные части корней характеристического полинома матрицы A обязательно отрицательные.

Для того чтобы положение равновесия нелинейной системы с устойчивой линейной частью было устойчиво, достаточно выполнение условий, сформулированных в следующей теореме.

Теорема Попова

Если вещественные части корней характеристического полинома матрицыA отрицательны, то *достаточным условием абсолютной устойчивости* системы в угле *(0, k)* является

существование такого вещественного конечного числа q, что при всех $\omega > 0$ выполняется условие:

$$\operatorname{Re} \Pi(j\omega) = \operatorname{Re}\left[(1 + jq\omega)W(j\omega) + \frac{1}{k}\right] > 0, \qquad (5.21)$$

т. е. вещественная часть функции Попова должна быть положительной.

Замечание 1. Если передаточная функция имеет один нулевой полюс, то дополнительно должно выполняться следующее условие:

$$\lim_{w \to 0} \operatorname{Im} W(j\omega) = -\infty.$$

Замечание 2. Если передаточная функция имеет два нулевых полюса, то дополнительно должны выполняться два следующих условия:

$$a) \lim_{w \to 0} \operatorname{Re} W(j\omega) = -\infty;$$
$$b) \operatorname{Im} W(j\omega) < 0 \text{ при малых } \omega.$$

Для проверки абсолютной устойчивости по Попову строят *видоизмененную частотную характеристику* линейной части системы.

Особенности видоизмененной характеристики: действительная ее часть равна действительной части исходной характеристики, мнимая равна мнимой части исходной, умноженной на ω.

Частотная характеристика исходной системы:

$$W(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) + \operatorname{Im} W(j\omega).$$

Видоизмененная частотная характеристика системы равна:

$$N(j\omega) = \operatorname{Re} N(j\omega) + \operatorname{Im}\ N(j\omega),$$

где $\operatorname{Re} N(j\omega) = \operatorname{Re}\ W(j\omega) = X$, $\operatorname{Im} N(j\omega) = \omega\ \operatorname{Im}\ W(j\omega) = Y$.

Геометрическая интерпретация теоремы Пóпова

Для абсолютной устойчивости системы (5.16), (5.17), (5.18) достаточно, чтобы в плоскости (X, Y) через точку

действительной оси с координатами $(-\frac{1}{k}, j0)$ можно было провести негоризонтальную прямую так, чтобы видоизмененная частотная характеристика $N(j\omega)$ не пересекала этой прямой (она может иметь с ней общие точки).

a

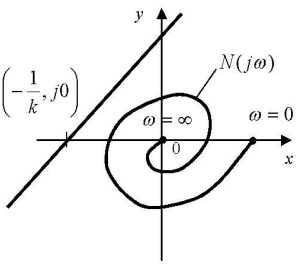


Рис. 5.46a. Система абсолютно устойчива

b

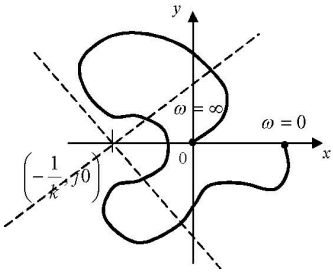


Рис. 5.46b. Абсолютной устойчивости нет

5.5.2. Исследование абсолютной устойчивости прямым методом Ляпунова

Между критерием абсолютной устойчивости В. М. Попова и вторым (прямым) методом А. М. Ляпунова существует глубокая связь. В. А. Якубовичем было доказано (1962), что если выполняются условия абсолютной устойчивости В. М. Попова, то во многих случаях существует функция Ляпунова, равная "квадратичной форме плюс интеграл от нелинейности" вида:

$$V(x) = X^T PX + b\int_0^{\sigma} f(\xi)d\xi\,. \qquad (5.22)$$

Причем *условие (5.21) является необходимым и достаточным.*

Рассмотрим нелинейную систему *непрямого* регулирования. Пусть система задана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu & (5.23) \\ u = f(\sigma) & (5.24) \\ \dot{\sigma} = m^T x - \rho u & (5.25) \end{cases}$$

$$y = c^T x .$$

Выполняются следующие условия:

$$f(0) = 0 ,$$

$$0 \le \frac{f(\sigma)}{\sigma} \le k ,$$

т. е. рабочая область включает начало координат, и нелинейность $f(\sigma)$ лежит в угле (0, k) и проходит через начало координат (рис. 5.47). Нелинейность обусловлена введением в линейную систему одного нелинейного элемента (НЭ).

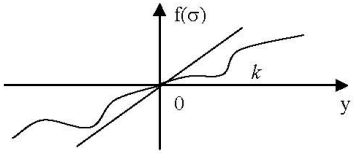


Рис. 5.47. Нелинейность

Принято *нелинейные задачи управления* классифицировать на следующие типы:

– задачи регулирования прямого типа;
– задачи непрямого регулирования.

В данной книге рассмотрена система непрямого регулирования.

Осуществим переход от координат (x, u) к координатам (y, σ):

$$y = c^T x, \; \dot{y} = \dot{x} ,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ \dot{\sigma} = m^T x - \rho u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = A_1 x + bf(\sigma) \\ \dot{\sigma} = m_y^T - \rho f(\sigma) \end{cases} . \quad (5.26) \; (5.27)$$

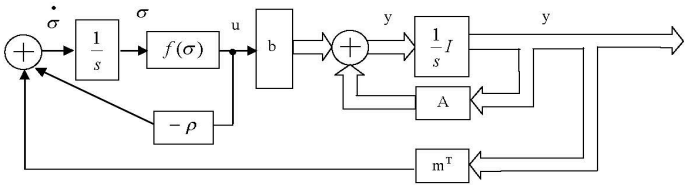


Рис. 5.48. Матричная схема системы непрямого регулирования

Функцию Ляпунова для системы (5.26), (5.27) выберем в следующем виде:

$$V(y,\sigma) = y^T P y + \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma ,$$

где $P=P^{\mathrm{T}}$, $P>0$ симметричная знакоопределенная положительная матрица. Функция должна обращаться в нуль только в нуле и быть положительной в остальных.

Функция Ляпунова состоит из 2-х слагаемых и удовлетворяет знакоопределенным положительным условиям в силу (5.26), (5.27). Вычислим полную производную функции Ляпунова.

$$\frac{dV}{dt} = -y^T Q y + 2 f(\sigma) d^T y - \rho f^2(\sigma) ,$$

где вектор *d*равен следующему выражению:

$$d = \rho b + \frac{m}{2} .$$

ТЕОРЕМА

Если вещественные части корней характеристического полинома матрицы A отрицательны

$$\mathrm{Re}\, S_i(A) < 0, \ \forall i = \overline{1,n} ,$$

то нулевое решение системы (5.23), (5.24), (5.25) является абсолютно устойчивым при выполнении условия

$$\rho > d^T \mathrm{Q}^{-1} d ,$$

где $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}} > 0$.

На рис. 5.48 представлена матричная схема нелинейной системы непрямого регулирования.

Таким образом, как теорема Попова, так и функции Ляпунова вида (5.22) охватывают как критерии абсолютной устойчивости совокупность нелинейных систем с одной (или приводимых к одной) безынерционной нелинейностью, характеристика которой принадлежит классу (0, K).

Вопросы, задачи

1. Привести некоторые характеристики типовых нелинейных элементов.
2. Дать основные понятия метода фазовой плоскости; показать ее особенности.
3. Привести примеры уравнений фазовых траекторий.
4. Привести классификацию точек покоя линейных систем на фазовой плоскости.
5. Привести примеры фазовых портретов динамических систем; отметить особенности фазовых портретов в нелинейных САУ.
6. Охарактеризовать подход к конструированию систем с переменной структурой (СПС).
7. Привести примеры СПС. Режимы работы СПС.
8. Дать определения знакоопределенных, знакопостоянных и знакопеременных функций.
9. Квадратичная форма, ее свойства. Критерии Сильвестра.
10. Дать определения и теоремы второго (прямого) метода А. М. Ляпунова.
11. Построить алгоритм формирования функции Ляпунова на базе метода Н. Красовского.
12. Построить алгоритм формирования функции Ляпунова на базе метода переменного градиента.
13. Исследовать на устойчивость вторым (прямым) А. М. Ляпунова линейную САУ, описание которой задано в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_1 + 3X_2 \\ \dot{X}_2 = 2X_1 - X_2 \end{cases}.$$

Функция Ляпунова задана вида:

$$V(X) = \frac{1}{4}(X_1^4 + X_2^4).$$

14. Исследовать на устойчивость вторым (прямым) А. М. Ляпунова линейную САУ, описание которой задано в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -2X_1 + 2X_2 \\ \dot{X}_2 = -7X_1 + 3X_2 \end{cases}.$$

Функция Ляпунова задана вида:

$$V(X) = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2).$$

15. Исследовать на устойчивость вторым (прямым) А. М. Ляпунова линейную САУ, описание которой задано в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -8X_1 + 3X_2 \\ \dot{X}_2 = 2X_1 - 5X_2 \end{cases}.$$

Функция Ляпунова задана вида:

$$V(X) = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2).$$

16. Дать определения устойчивости динамической системы “в малом”, “в большом”, “в целом”; абсолютной устойчивости.

17. Построить алгоритм исследования абсолютной устойчивости методом В. М. Пóпова.

18. Привести геометрическую интерпретацию метода В. М. Пóпова.

19. Построить алгоритм исследования абсолютной устойчивости вторым (прямым) методом А. М. Ляпунова.

6. ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Интенсивное развитие современных средств вычислительной техники привело к широкому распространению цифровых систем управления, которые в настоящие время используются в различных отраслях промышленности. Внедрению цифровых систем управления в значительной степени способствовало создание микропроцессоров и построение на их основе микро-ЭВМ. Методы проектирования подобных систем существенно отличаются от классических методов, применяемых при анализе и расчете систем непрерывного типа. Во-первых, это связано с тем, что основой математического аппарата проектирования цифровых САУ являются разностные схемы, которые заменяют дифференциальные уравнения, описывающие непрерывные системы. Соответственно методы, связанные с использованием преобразования Лапласа, заменяются различными формами *z*-преобразования. Во-вторых, алгоритмы, применяемые при расчете цифровых систем, в частности построение дискретных моделей, зачастую могут быть реализованы только с помощью ЭВМ [9, 11, 12].

Дискретность (следовательно, разрывность) сигналов обусловлена их квантованием по уровню и по времени.

Квантование сигналов по времени делает систему дискретной, а квантование сигналов по уровню – нелинейной. Вдальнейшем изложении в книге рассматриваются сигналы, дискретные только во временной области [21–23, 25, 26]. Они представляют собой последовательности импульсов, появляющихся в определенные моменты времени.

6.1. Математический аппарат описания цифровых САУ

Решетчатая функция

Эффективный математический метод описания дискретных функций основывается на замене последовательности импульсов сигнала решетчатой функции, состоящей из идеальных импульсов.

Введем понятие *решетчатой функции* $f[nT]$ или в сокращенной записи $f[n]$. Это функция, значения которой определены в дискретные моменты времени $t = nT$, где n – целое число, T – период повторения. Операция замены непрерывной функции решетчатой (рис. 6.1, 6.2) записывается следующим образом:

$$f[n] = f(t)\big|_{t=nT} .$$

Значения решетчатой функции называются *дискретами*. Дискреты могут быть определены для смещенных моментов времени (рис. 6.2b).

$$t = nT + \Delta T = (n + \xi)T , \; T = const ,$$
$$\Delta T > 0 \;\; или \;\; \Delta T < 0 .$$

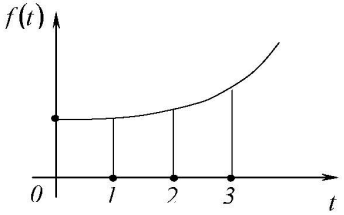


Рис. 6.1. Непрерывная функция

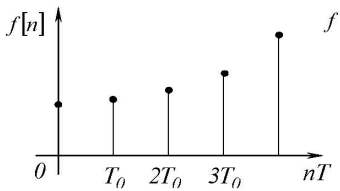


Рис. 6.2a. Дискретная функция

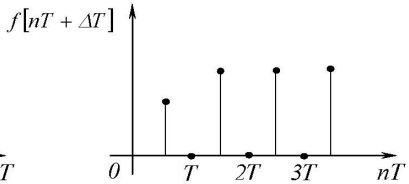


Рис. 6.2b. Дискретная функция для смещенных моментов

В дальнейшем будем считать, что в решетчатой функции $f[n, \xi]$ аргумент $n \geq 0$ и параметр $\xi \geq 0$.

Решетчатая функция не обязательно должна формироваться из некоторой исходной непрерывной. *Любая числовая последовательность* некоторой величины, определенная в дискретные равноотстоящие моменты времени, может быть представлена в виде решетчатой функции.

Заметим, что обратная задача – формирование непрерывной функции из решетчатой – *не может быть решена однозначно*, так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать *бесконечное множество* непрерывных функций (рис. 6.2с).

Непрерывные функции, совпадающие с заданными дискретами, называются *огибающими.*

Выделяют *основные огибающие*. Под основной огибающей понимают непрерывную функцию, совпадающую с заданными дискретами, которая может быть получена как результат решения *дифференциального уравнения, порядок которого наименьший по сравнению* с другими возможными огибающими. Для периодических решетчатых функций, кроме того, должно выполняться требование минимальности значений частот гармоник.

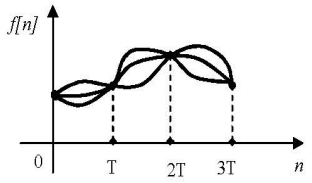


Рис. 6.2с. Решетчатая функция

Аналогом первой производной непрерывной функции для решетчатой функции является первая разность:

$$\Delta f[n] \overset{\Delta}{=} f[n+1] - f[n] \text{ или } \Delta f_n = f_{n+1} - f_n .$$

Аналогом второй производной непрерывной функции для решетчатой функции служит вторая разность:

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] =$$
$$f[n+2] - f[n+1] - f[n+1] + f[n] =$$
$$= f[n+2] - 2f[n+1] + f[n].$$

Для вычисления k – й разности имеем

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n].$$

Таким образом, в качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать разностные уравнения или уравнения в конечных разностях.

Свойства конечных разностей

(Если бы длительность импульса $h \to 0$, то был бы дифференциал, но $h - const$, $k << T_0$, где T_0 – период квантования, $T_0 - const$).

1. Конечная разность от константы равна нулю:

$$\Delta\alpha = 0 \quad (\alpha - const).$$

2. Конечная разность от произведения функции на константу $(const)$ равна следующему:

$$\Delta(\alpha f_k) = \alpha \Delta f_k .$$

3. Конечная разность суммы равна сумме разностей:

$$\Delta(f_k + g_k) = \Delta f_k + \Delta g_k .$$

4. Конечная разность произведений двух функций равна следующему:

$$\Delta(f_k g_k) = f_{k+1} g_{k+1} - f_{k+1} g_k + f_{k+1} g_k - f_k g_k =$$
$$= (f_{k+1} g_{k+1} - f_{k+1} g_k) + (f_{k+1} g_k - f_k g_k) = f_{k+1} \Delta g_k + g_k \Delta f_k .$$

5. Конечная разность от степенной функции равна следующему:

$$\Delta(K^m) \overset{\Delta}{=} (K+1)^m - K^m = mK^{m-1} + (m(m-1)/2)K^{m-2} + \ldots .$$

6.1.1. Математический аппарат цифровых САУ

$F\left(t, x(t), \dot{x}, ..., x^{(k)}(t)\right)$ – описание непрерывной системы;

$F_1\left(n, y[n], \Delta y[n], ..., \Delta^k y[n]\right)$ – описание дискретной системы.

Непрерывная САУ описывается уравнениями *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0 \frac{d^{n_x} x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + ... + a_n x = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + ... + b_m u \ .$$

a b

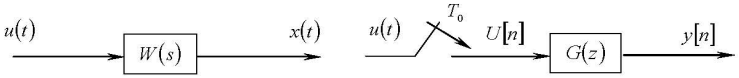


Рис. 6.3a. Непрерывная система Рис. 6.3b. Дискретная система

Дискретная САУ описывается разностными уравнениями следующего вида:

$$y_{n+k} = f\left(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k-1}\right). \qquad (6.1)$$

Порядок разностного уравнения равен разности между наибольшим и наименьшим значениями аргумента.

Например:

$y_{n+2} = a y_n$ – уравнение второго порядка, так как $(n+2)-n=2$;

$y_{n+3} = b y_{n+2}$ – уравнение первого порядка, так как $(n+3)-(n+2)=1$.

Итак, имея "k" начальных условий $y_0(0), y_1(0), ..., y_{k-1}(0)$ из уравнения (6.1) можно найти y_1, полагая при $n=1 \to y_{k+1}$, при $n=2 \to y_{k+2}$ и т. д.

Такой способ решения уравнения получил название *пошаговый*. Он дает автоматически:

–способ решения;

–существование решения;

–единственность решения.

Но, решая дифференциальное уравнение, можно аналитически получить его решение. А здесь? Нельзя ли для ряда простых функций (выделить класс таких функций) найти аналитическое решение? Можно.

1. Линейное разностное уравнение первого порядка

Пусть уравнение имеет вид:

$$y_{n+1} = qy_n + \varphi_n, \tag{6.2}$$

где $q - const$; заданы начальные условия $y(0) = y_0 \neq 0$; φ_n – заданная функция, $n = 0,1,2,...$.

Решение:

$$y_1 = qy_0 + \varphi_0$$

$$y_2 = qy_1 + \varphi_1 = q^2 y_0 + \varphi_1 + q\varphi_0$$

$$y_3 = qy_2 + \varphi_2 = q^3 y_0 + \varphi_2 + q^2\varphi_0 + q\varphi_1$$

……

$$y_n = q^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k}\varphi_k \ .$$

2. Линейное разностное уравнение "k "- го порядка

Пусть уравнение имеет вид:

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + ... + a_k y_n = \varphi_n \ . \tag{6.3}$$

где $a_i - const \ \forall i = \overline{0,k}$; $\varphi_n -$ заданная функция; заданы начальные условия.

Решение:

Начинаем с однородного уравнения $\varphi_n \equiv 0$.

Тогда решение ищется в следующем виде:

$$y_n = \gamma^n .$$

Характеристическое уравнение для (6.3) будет

$$a_0\gamma^{n+k} + a_1\gamma^{n+k-1} + ... + a_k\gamma^n = 0 .$$

Так как $\gamma^n \neq 0$, то предыдущее уравнение можно сократить на этот сомножитель:

$$a_0\gamma^k + a_1\gamma^{k-1} + ... + a_k = 0,$$

где γ – корни характеристического уравнения.

Пусть корни характеристического уравнения $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ – различны, тогда решением будет линейная комбинация следующего вида:

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i\gamma_i^n, \quad n = 1, 2, ..., \qquad (6.4)$$

где c_i находятся из начальных условий при однородном уравнении ($i = \overline{1,k}$).

3. Линейные системы разностных уравнений

Пусть уравнение имеет вид:

$$z_{n+1} = Bz_n + \varphi_n, \qquad (6.5)$$

где заданы начальные условия – вектор $z_0 \neq 0$; φ_n – заданная вектор-функция;матрица B – постоянная матрица; z_n – вектор.

Решение

$z_1 = Bz_0 + \varphi_0$

$$z_2 = Bz_1 + \varphi_1 = B\left(Bz_0 + \varphi_0\right) + \varphi_1$$
$$z_3 = Bz_2 + \varphi_2 = B\left(B\left(Bz_0 + \varphi_0\right) + \varphi_1\right) + \varphi_2$$
……

$$z_n = B^n z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} B^k \varphi_{n-k-1} \ . \qquad (6.6)$$

Итак, (6.6) есть решение системы разностных уравнений на каждом шаге $n = 1, 2, \ldots$

Структура матрицы B и вектор функции φ_n имеют следующий вид:

$$B = \left|\frac{-a^T}{I_{n-1}}\right|; \varphi_n = \left|\begin{matrix} f_n \\ 0_{n-1} \end{matrix}\right| \text{ или } B = \left|\begin{matrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}\right|; \varphi_n = \left|\begin{matrix} f_n \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix}\right|.$$

z-преобразование

В непрерывных системах использование преобразования Лапласа

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

облегчает анализ и синтез автоматических систем управления.

Задача анализа дискретных систем также может быть облегчена в результате применения *z*-преобразования.

Дискретное преобразование Лапласа записывается следующим образом:

$$F\left(s\right) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f\left[n\right] e^{-snT} \ .$$

Здесь как и в случае непрерывного преобразования Лапласа комплексная переменная $s = c + j\omega$, $c < \infty$; $f\left[n\right]$ – решетчатая функция.

Аналогом преобразования Лапласа для дискретных систем является z-преобразование. Под z-преобразованием понимается изображение решетчатой функции, определяемое следующей формулой:

$$F(z) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} . \qquad (6.7)$$

Обозначается прямое и обратное z-преобразование следующим образом:

$$z\{f[n]\} = F(z); \; z^{-1}\{F(z)\} = f[n].$$

В формуле (6.7) введено новое обозначение

$$z = e^{sT},$$

где T – период решетчатой функции.

Следовательно, z-преобразование практически совпадает с дискретным преобразованием Лапласа и отличается только обозначением аргумента изображения.

Формула $F(z) = z\{f[n]\}$ для непрерывной производящей функции

$$F(z) = z\{f(t)\}\Big|_{t=nT} \; t = nT; \; n = 0,1,2,... .$$

Методика получения z-преобразования

Пусть на входе ОУ имеется импульсный сигнал $x[nT]$. Получим z-преобразование импульсного сигнала $x[nT]$ по определению (6.7):

$$z\{x[nT]\} = x(z)$$

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + ... \qquad (*)$$

Бесконечный ряд сходится , если все члены его $|x[nT]| < \infty$, т. е. ограничены, и если справедливо условие $|z| > 1$.

Пример 6.1

Пусть дана ступенчатая функция следующего вида:

$$x[nT] = 1[nT_0], \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

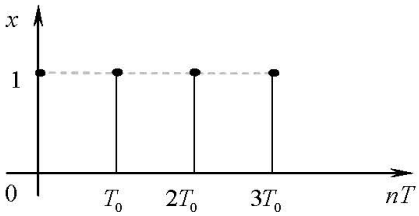


Рис. 6.4. Дискретная функция $1[nT]$

В соответствии с определением (6.7) или (*) z-преобразование для этой функции имеет вид

$$x(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots.$$

Сумму полученной бесконечной геометрической прогрессии можно записать в явном виде следующим образом:

$$x(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \text{ при } |z| > 1.$$

Пример 6.2

Пусть дана экспоненциальная функция вида (6.5)

$$x[nT] = e^{-anT_0} \qquad a \in R^1; \quad a > 0.$$

z-преобразование этой функции

$$x(z) = 1 + \left[e^{aT_0} z\right]^{-1} + \left[e^{aT_0} z\right]^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - \left[e^{aT_0} z\right]^{-1}} = \frac{z}{e^{aT_0} z} = \frac{z}{z + a_1}.$$

Этот ряд сходится при $\left|e^{aT_0} z\right| > 1$.

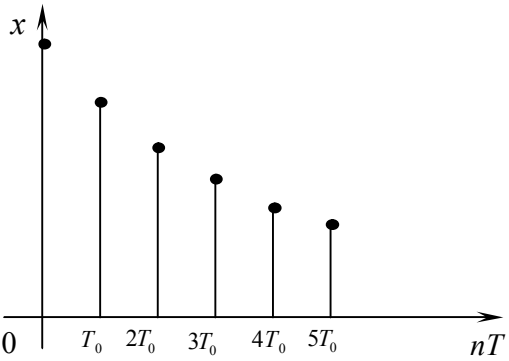


Рис. 6.5. Дискретная функция *x[nT]*

Приведенные примеры иллюстрируют методику *z*-преобразования для некоторых простейших функций. Аналогичным способом составляются таблицы, содержащие наиболее часто употребляемые функции, которые приведены в приложениях книг А. А. Воронова и других авторов.

Ниже рассмотрены кратко основные правила и теоремы применительнок *z*-преобразованию.

1) *Свойство линейности.* Это свойство заключается в том, что изображение линейной комбинации функции равно линейной комбинации их изображений:

$$z\{\alpha x_1[nT_0]+bx_2[nT_0]\}=az\{x_1[nT_0]\}+bz\{x_2[nT_0]\}.$$

2) Теорема запаздывания и упреждения (или сдвиг по времени вправо и влево):

– запаздывание:

$$z\{x[nT_0-dT_0]\}=z^{-d}x(z),\quad d\geq 0;$$

– упреждение:

$$z\{x[nT_0-dT_0]\}=z^{d}\left[x(z)-\sum_{k=0}^{d-1}x[kT_0]z^{-k}\right],\quad d\geq 0.$$

3) Начальное и конечное значения:

– начальное:

$$x[+0] = \lim_{z\to\infty} x(z);$$

– конечное:

$$\lim_{n\to\infty} x[nT_0] = \lim_{z\to 1}\left\{\left(\frac{z-1}{z}\right)x(z)\right\} = \lim_{z\to 1}(z-1)x(z).$$

4) Свертка решетчатых функций:

Пусть известны (заданы) z-преобразования двух решетчатых функций

$$z\{f_1[n]\} = F_1(z) \text{ и } z\{f_2[n]\} = F_2(z).$$

Можно показать, что произведение изображений равно следующему:

$$F_1(z)F_2(z) = z\left\{\sum_{m=0}^{n} f_1[m]f_2[n-m]\right\} = z\left\{\sum_{m=0}^{n} f_1[n-m]f_2[m]\right\}.$$

Что проще вычислить? Сумму произведений оригиналов или одно произведение изображений $F_1(z)$, $F_2(z)$? Это правило нашло широкое применение в практике.

5) Формула обращения: нахождение оригинала по изображению

$$x[nT_0] = z^{-1}\{x(z)\}.$$

Заметим, что аргумент изображения обладает свойством $z = e^{sT} = e^{(sT+j2\pi k)}$, где k – произвольное целое число.

6.1.2. Дискретная передаточная функция

Дискретная передаточная функция $G(z)$, как и в случае непрерывных функций, есть отношение z-преобразования выходной величины к z-изображению входной при нулевых начальных условиях:

$$G(z) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y(z)}{x(z)}.$$

Как определяется дискретная передаточная функция? Входной сигнал $x(t)$ подается в дискретные моменты времени $t = nT$ (рис. 6.6); зная решетчатую весовую функцию ω_n (приведенную), можно определить реакцию цифровой САУ $y[nT_0]$ на входную величину $x[nT_0]$.

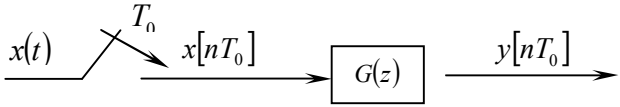


Рис. 6.6. Схема квантования непрерывного сигнала

Заметим, что *приведенная весовая функция* отличается от обычной весовой функции непрерывного фильтра как своим видом, так и размерностью. Приведенная весовая функция содержит дополнительный множитель, имеющий размерность времени.

Очевидно, что реакция системы на дискрету $x[0]$ будет $\omega_n(t)x[0]$, реакция системы на дискрету $x[1]$ будет $x[1]\omega_n(t-T)+\omega_n(t)x[0]$; $x[m]\to\omega_n(t-mT)x[m]$ и т. д. Для дискретных моментов времени реакция линейной системы на входные дискреты равна следующему:

$$y[n]=\sum_{m=0}^{n}x[m]\omega_n[n-m].$$

Здесь произведены следующие замены: $t=nT$, $t-mT=(n-m)T$ – единица времени, $\omega_n(t-mT)=\omega_n[n-m]$.

Запишем z-преобразование от левой и правой частей последнего выражения:

$$z\{y[n]\}=z\left\{\sum_{m=0}^{n}x[m]\omega_n[n-m]\right\}.$$

На основании формулы *свертки* имеем

$$y(z)=G(z)x(z),$$

где дискретная передаточная функция $G(z)$ есть z-преобразование от приведенной решетчатой весовой функции следующего вида:

$$G(z) \stackrel{\Delta}{=} z\{\omega_n[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n[n] z^{-n} . \qquad (6.8)$$

Ниже приведены примеры получения дискретной передаточной функции для линейных систем [12, 31].

Пример 6.3

Пусть задано апериодическое звено первого порядка. На входе дискретный сигнал (импульс). Определить дискретную передаточную функцию $G(z)$ без экстраполятора на входе (рис. 6.7а).

Запишем передаточную функцию апериодического звена следующим образом:

$$W(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K'}{a+s},$$

где $a = \frac{1}{T}$, $K' = \frac{K}{T}$.

Переходная функция $h(t) = K' e^{-at}$. Подставив в это выражение $t = nT$, получим

$$y[nT_0] = K' e^{-a\,nT_0} .$$

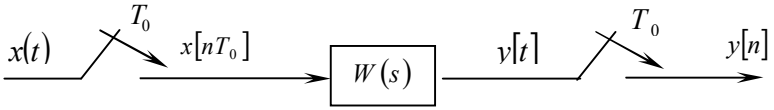


Рис. 6.7а. Схема без экстраполятора

По определению дискретная передаточная функция равна следующему:

$$G(z) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y(z)}{x(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} y[nT_0] z^{-n} . \qquad (6.9)$$

Отсюда дискретная передаточная функция для данного звена равна:

$$G(z)=\frac{K'e^{-anT_0}}{x[nT_0]};\ G(z)=K'\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{aT_0}z\right)^{-n}=\frac{K'z}{z-e^{-aT_0}}=\frac{K'}{1-a_1z^{-1}},$$

где $x[nT_0]=1[nT_0];\ K'=K/T;\quad a_1=e^{-aT_0}$.

Процесс преобразования непрерывного сигнала без преобразователя приведен на рис.6.7b.

Если на входе непрерывной системы стоит экстраполятор нулевого порядка (фиксатор), то дискретная передаточная функция изменится.

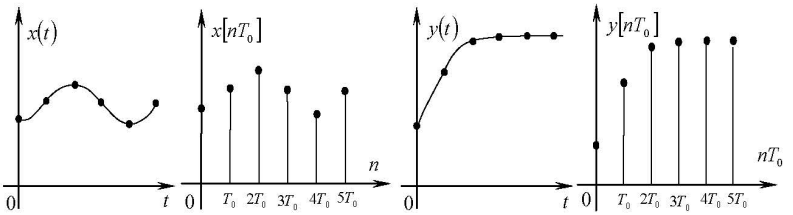


Рис. 6.7b. Процесс преобразования непрерывного сигнала без экстраполятора

Пример 6.4

Пусть задано апериодическое звено первого порядка. На входе дискретный сигнал (импульс). Определить дискретную передаточную функцию $G(z)$ с экстраполятором на входе (рис. 6.8а).

На входе непрерывной системы стоит экстраполятор нулевого порядка, передаточная функция которого равна следующему:

$$\Phi(s)=\frac{1-e^{-sT_0}}{s}. \qquad (6.10)$$

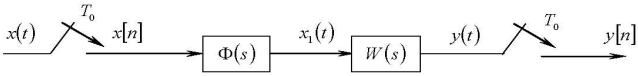


Рис. 6.8а. Схема с экстраполятором

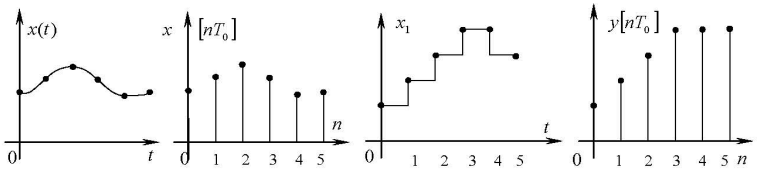


Рис. 7.8b. Процесс преобразования непрерывного сигнала с экстраполятором

Дискретная передаточная функция с экстраполятором (6.10) будет равна следующему:

$$z\{\Phi(s)W(s)\} = z\left\{\frac{1-e^{-sT_0}}{s} * \frac{K}{1+Ts}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)z\left\{\frac{K}{s(1+Ts)}\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z}z\left\{\frac{K'}{s(a+s)}\right\} = \frac{z-1}{z} * \frac{\left(1-e^{-aT_0}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-aT_0}\right)} * \frac{K'}{a} =$$

$$= \frac{\left(1-e^{-aT_0}\right)}{\left(z-e^{-aT_0}\right)} * \frac{K'}{a} = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}},$$

где $a_1 = -e^{-aT_0}; a = 1/T; b_1 = \left(1-e^{-aT_0}\right)\frac{K'}{a}$; $K' = \frac{K}{T}$; $z = e^{sT_0}$.

Процесс преобразования непрерывного сигнала с экстраполятором приведен на рис. 6.8.

Динамические свойства линейной стационарной системы с сосредоточенными параметрами полностью определяются его дифференциальным уравнением:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + ay = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 u(t),$$

где $m \le n$.

Передаточная функция системы:

$$W(s) = \frac{\mathrm{Q}_1(s)}{\mathrm{Q}_2(s)}.$$

Аналогичным образом, имея разностное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} & y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_k y_{n-k} = \\ & = b_0 x_m + b_1 x_{m-1} + \ldots + b_k x_{m-k} \end{aligned}, \qquad (6.11)$$

можно получить дискретную передаточную функцию системы $G(z)$, используя теорему о сдвиге вправо ($m \le n$):

$$\begin{aligned} & y(z)\left(1 + az^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_k z^{-k}\right) = \\ & = x(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-k}\right) \end{aligned}.$$

Тогда передаточная функция системы равна:

$$G(z) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-k}} = \frac{\mathrm{Q}_1\left(z^{-1}\right)}{\mathrm{Q}_2\left(z^{-1}\right)}. \qquad (6.12)$$

Свойства дискретной передаточной функции

Статические системы

Если объект управления (ОУ) является статическим, то коэффициент усиления дискретной системы можно определить, воспользовавшись теоремой о конечном значении.

$$K = \frac{y[n \to \infty]}{x[n \to \infty]} = \lim_{z \to 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_m}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}; \quad m \le n.$$

Системы с астатизмом

Если в дискретном ОУ содержится "чистый" интеграл, то передаточная функция системы $G(z)$ имеет полюс при $z = 1$:

$$G(z) = \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-(k+1)}}.$$

"Установившаяся" скорость изменения выходного сигнала такой системы при подаче на ее вход ступенчатого сигнала u_0 равна

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1} = \frac{b_0 + b_1 + ... + b_m}{1 + a'_1 + ... + a'_n} u_0 .$$

Если $b_0 \neq 0$, то выход объекта претерпевает скачок при $n = 0$. Однако для большинства реальных систем коэффициент b_0 равен нулю, поскольку при синхронной работе квантователей скачки невозможны, хотя бы в силу инерционности исполнительных устройств и датчиков.

6.2. Анализ устойчивости дискретных систем

В примере 6.3 была получена дискретная передаточная функция, соответствующая апериодическому звену первого порядка без экстраполятора:

$$G(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{K'}{1 - a_1 z^{-1}}; \; Y(z)\left(1 - a_1 z^{-1}\right) = K' x(z);$$

$$y(z) - a_1 y(z) z^{-1} = K' x(z).$$

Итак, в разностной форме это уравнение запишется следующим образом:

$$y_n - a_1 y_{n-1} = K' x_n .$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$z - e^{-aT_0} = 0$$

с полюсом в точке $z_1 = a_l = e^{-aT_0}$, $a \in R^1$.

Разностное уравнение, описывающее эту систему, имеет вид

$$y_n - a_1 y_{n-1} = K' x_n .$$

Полагая, что $x_0 = 0; \; y_0 \neq 0; \; K' \neq 0$ приходим к однородному разностному уравнению следующего вида:

$$y_n - a_1 y_{n-1} = 0 .$$

Отсюда можно получить следующую последовательность выходных сигналов:

$$y_n = a_1 y_{n-1}$$

$$y_1 = a_1 y_0$$

$$y_2 = a_1 y_1 = a_1^2 y_0$$

……

$$y_n = a_1^n y_0 .$$

Чтобы система была устойчива, необходимо чтобы ее движение стремилось к нулю. Когда $y_n \to 0$? Видимо, при $y_0 \neq 0$, $a_1 \to 0$, так как $n \to \infty$. Зная $a_l = e^{-aT_0}$, получим. $a_1^n = e^{-nT_0}$

Вывод: переходной процесс в системе сходится к нулю, а сама система следовательно, асимптотически устойчива только при условии $|a_1| < 1$, а так как $z_1 = a_1$, то и $|z| < 1$.

Виды переходных процессов в зависимости от расположения полюсов на плоскости z

Действительные полюса

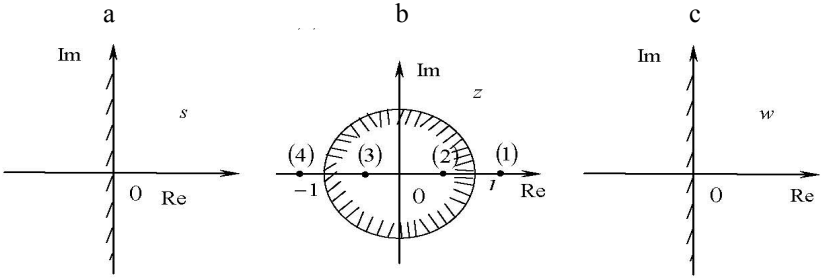


Рис. 6.9a. Плоскость полюсов s

Рис. 6.9b. Плоскость полюсов z

Рис. 6.9c. Плоскость полюсов *w*

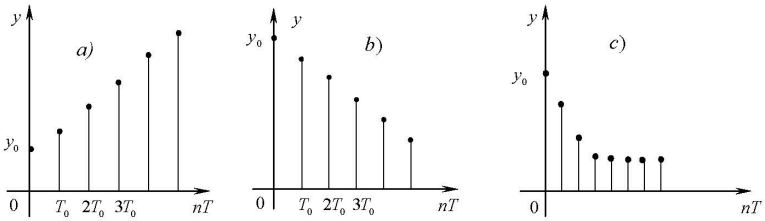


Рис. 6.10. Переходные процессы в системе с одним действительным полюсом:

a) при $a > 1,\ a > 0$ *; корень (1) рис. 6.9b;*

b) при $0 < a < 1$ *; корень (2) рис. 6.9b;*

c) при $-1 < a < 0$ *; корень (3) рис. 6.9b*

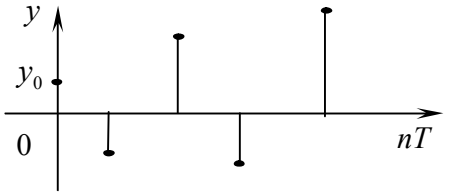


Рис. 6.11. Переходной процесс при $a < -1$, корень (4) рис. 6.9b

На рис. 6.9a, 6.9b, 6.9c представлены различные плоскости расположения полюсов характеристического уравнения системы. *Плоскость s* является плоскостью полюсов для непрерывных систем, где мнимая ось заштрихована, так как разделяет левые и правые полюса характеристического уравнения системы (рис. 6.9a).

Для дискретных систем точки, лежащие на мнимой оси плоскости *s*, переходят в точки, лежащие на *единичной окружности z*, а левая полуплоскость *s* переходит во внутренность единичного круга (рис. 6.9b).

Билинейное преобразование следующего вида:

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

переводит точки единичной окружности на плоскости *z* в точки, лежащие на мнимой оси *w*, а внутренность круга

переходит в левую полуплоскость *w*. Таким образом, *плоскостьw* в теории дискретных систем служит аналогом плоскости *s* для непрерывных систем.

Ниже рассматривается дискретная система первого порядка, разностное уравнение которой имеет вид (однородное):

$$y_n - \alpha_1 y_{n-1} = 0,$$

где $\alpha_1 = e^{-\alpha T_0}$; $T_0 > 0$, $T_0 - const.$

Переходной процесс в системе сходится к нулю, а сама система асимптотически устойчива только при условии $|\alpha_1| < 1$. Виды переходных процессов для различных положений полюса α_1 на плоскости z иллюстрируются рис. 6.10, 6.11.

Комплексно-сопряженные полюса

Система второго порядка без экстраполятора имеет дискретную передаточную функцию следующего вида:

$$G(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{b_1}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

где $z_i = \alpha_i \pm j\beta_i$; $i = 1,2$.

$z_{1,2} = \alpha[\cos\omega_1 T_0 \pm j \sin\omega_1 T_0] = \alpha e^{\pm j\omega_1 T_0} = e^{[-\alpha \pm j\omega_1 T_0]}$;

$\alpha = e^{-aT_0}$ (расположение полюсов на рис. 6.12).

Переходные процессы в системе с парой комплексно-сопряженных полюсов представлены на рис. 6.13a, 6.13b.

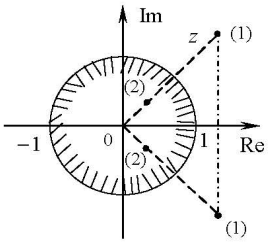


Рис. 6.12. Расположение полюсов на плоскости

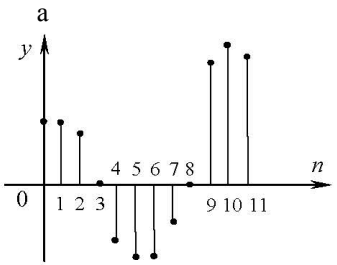


Рис. 6.13a. Переходной процесс при $\alpha > 1$, пара полюсов (1) рис. 6.12

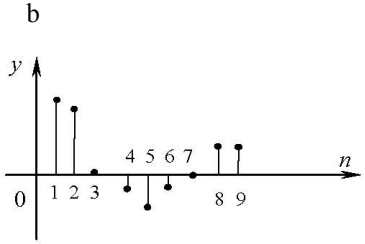


Рис. 6.13b. Переходной процесс при $\alpha < 1$, пара полюсов (2) рис. 6.12

Условие устойчивости дискретной системы

Дискретная линейная система называется *асимптотически устойчивой*, если после конечного однократного воздействия она возвращается к своему положению равновесия.

Приведенные примеры влияния расположения полюсов на переходные процессы показали, что данное условие соблюдается только в том случае, когда полюса системы находятся внутри единичного круга на плоскости *z*. Иными словами, корни характеристического уравнения следующего вида

$$(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) = 0, \qquad (6.13)$$

должны удовлетворять неравенству

$$|z_i| < 1, \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Билинейное преобразование и критерии устойчивости

Билинейное преобразование представляет собой следующее:

$$w = \frac{z-1}{z+1}.$$

Выше было показано, что плоскость *w* для дискретных систем является аналогом плоскости s для непрерывных систем. Поэтому для анализа устойчивости дискретных систем производят подстановку

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

в знаменатель дискретной передаточной функции

$$G(z) = \frac{\mathrm{Q}_1(z)}{\mathrm{Q}_2(z)}.$$

Далее для анализа устойчивости дискретных линейных систем используют *аналоги* алгебраических критериев Гурвица и Рауса, частотных критериев Михайлова и Найквиста. В данной книге аналоги критериев устойчивости не рассматриваются.

Общие признаки устойчивости остаются справедливыми и для дискретных систем, т. е. устойчивой дискретной системе с ограниченным входным сигналом должны соответствовать ограниченные выходные сигналы. Однако наличие импульсных элементов и процессов прерывания вызывает дополнительные сложности при анализе устойчивости дискретных систем.

6.3. Анализ качества цифровых САУ

В результате анализа качества выявляются конкретные показатели и характеристики процессов регулирования в дискретных системах [16].

Оценка качества линейной цифровой САУ может делаться построением кривой переходного процесса (прямой метод), а также посредством различных критериев качества (косвенные). Качественные показатели характеризуют точность и быстродействие системы. Наиболее простым является использование показателя колебательности, который может характеризовать запас устойчивости системы.

Мерой оценки качества цифровой САУ является ошибка регулирования. Установившаяся точность дискретной системы оценивается по коэффициентам ошибок. Аналогично непрерывным системам, начиная с некоторого момента времени ошибку дискретной системы можно представить в виде следующего ряда:

$$e[nT] = c_0 x[nT] + c_1 \dot{x}[nT] + c_2 \ddot{x}[n] + \ldots + c_m x^{(m)}[nT] + \ldots., \quad (6.14)$$

где $x[nT]$ – дискретный входной сигнал (решетчатая функция).

Коэффициенты ошибок c_i $(i = 0, 1, 2, ...)$ представляют собой коэффициенты разложения дискретной передаточной функции по ошибке $G(z)$ в ряд Маклорена (6.14).

Определяются коэффициенты ряда (6.14) следующим образом:

$$c_n \overset{\Delta}{=} \left[\frac{\partial^n G(z)}{\partial z^n}\right]_{z=1} \text{ или } c_n = \left[\frac{\partial^n G\left(e^{sT}\right)}{\partial s^n}\right]_{s=o};\ c_0 = G\left(e^{sT}\right)\Big|_{s=o};$$

$$c_1 = \frac{\partial G\left(e^{sT}\right)}{\partial s}\Bigg|_{s=01};\ c_2 = \frac{\partial^2 G\left(e^{sT}\right)}{\partial s^2}\Bigg|_{s=01} \text{ и т. д.}$$

В дискретных системах точно также, как и в непрерывных линейных САУ: c_0 – коэффициент статической ошибки; c_1 – кинетической и т. д. Величины, обратные множителям при производных выражения (6.14) по аналогии с непрерывными системами могут называться соответствующими добротностями. Например, добротность по скорости $K_1 = 1/c_1$, добротность по ускорению $K_2 = 1/c_2$ и т. д.

Качество дискретных линейных САУ определяется так же, как и в непрерывных линейных САУ, только необходимо учитывать квантование по времени.

Косвенными оценками качества регулирования дискретной системы, учитывающими не только длительность процесса, но и его форму, могут служить дискретные *аналоги интегральных оценок* – суммарные оценки.

Простейшая суммарная оценка (линейная) равна следующему:

$$J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (y_{уст}[\infty] - y[nT]) \cdot$$

Она представляет собой сумму значений решетчатой функции, получаемой на основе переходного процесса. Такую

оценку используют в случае монотонных переходных процессов.

В случае колебательных переходных процессов лучше пользоваться квадратичной суммарной оценкой, являющейся суммой квадратов значений решетчатой функции, соответствующей переходному процессу [17]:

$$J_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (y_{уст}[\infty] - y[nT])^2 .$$

Представление дискретных систем в пространстве состояний

Пусть задана линейная дискретная система с экстраполятором нулевого порядка на входе системы. Математическое описание системы в пространстве состояний имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + bu_k & (6.15) \\ y_k = C^T x_k & (6.16) \end{cases},$$

где $x_k \in R^n$, $y_k \in R^1$, $u_k \in R^1$, $b \in R^m$; A, C – матрицы постоянных коэффициентов соответствующих размерностей.

Ниже представлена матричная структурная схема дискретной системы (рис. 6.14), описываемой системой уравнений (6.15), (6.16).

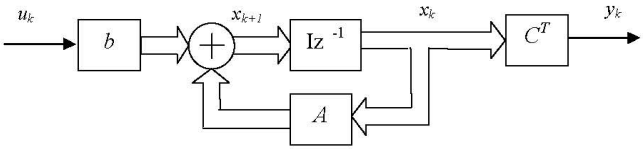


Рис. 6.14. Матричная структурная схема системы

Решение системы разностных уравнений, как уже указывалось выше, представляет собой рекуррентную процедуру для заданной последовательности входных сигналов u_k при начальных условиях $x(0) \neq 0$.

Характеристическое уравнение для системы (6.15) записывается следующим образом:

$$\det[zI - A] = 0\,, \tag{6.17}$$

где z – полюса уравнения; $I(n\times n)$ – единичная матрица.

Линейная дискретная система называется *асимптотически устойчивой*, если полюса системы находятся внутри единичного круга на плоскости z, т. е.

$$|z_i| < 1 \;\; \forall i = \overline{1,n}\,.$$

Линейная дискретная система называется *управляемой*, если существует реализуемая последовательность управляющих воздействий u_i, позволяющая перевести систему из произвольного начального состояния $x(0)$ в любое конечное $x(N)$ на ограниченном интервале времени, равном N тактов квантования.

Линейная дискретная система с выходной переменной y_k называется *наблюдаемой*, если произвольное состояние x_k можно определить, имея конечный набор выходных переменных y_k, y_{k+1}, …, y_{k+N+1}.

Критерии управляемости и наблюдаемости Р. Калмана и Е. Гильберта

Пусть математическое описание системы задано в виде системы уравнений (6.15), (6.16). Структура матриц A,B,C задана следующего вида:

$$A = \left|\begin{matrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -a^T \end{matrix}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & \ldots & -a_1 \end{vmatrix};\; b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{vmatrix};\; C = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Критерий управляемости Р. Калмана. Система (6.15), (6.16) вполне управляема, если ранг блочной матрицы управляемости равен порядку системы, т. е. $rang\, K_u = n$, где

$$K_u = (b,\ Ab,\ A^2 b,\ ...,\ A^{n-1} b).$$

Критерий наблюдаемости Р. Калмана. Система (6.15), (6.16) вполне наблюдаема, если ранг блочной матрицы наблюдаемости равен порядку системы, т. е. $rang K^T{}_н = n$, где

$$K_н^T = (C^T,\ A^T C^T,\ ...,\ (A^T)^{n-1} C^T).$$

Чтобы применить критерии Е. Гильберта, необходимо систему (6.15), (6.16) линейным преобразованием привести к канонической форме. Линейное преобразование подробно показано в главе 4 данной книги, поэтому здесь сразу записана система в канонической форме.

Пусть система (6.15), (6.16) приведена в каноническую форму следующего вида:

$$\begin{cases} x_{k+1}^* = \Lambda x_k^* + b^* u_k & (6.18) \\ y_k^* = C^* x_k^* & (6.19) \end{cases},$$

где $\Lambda = V^{-1} A V;\ b^* = V^{-1} b;\ C^* = VC$.

Критерий управляемости Е. Гильберта. Система (6.18), (6.19) вполне управляема, если матрица b^* не содержит ни одной нулевой строки.

Критерий наблюдаемости Е. Гильберта. Система (6.18), (6.19) вполне управляема, если матрица C^* не содержит ни одного нулевого столбца.

Второй (прямой) метод А. М. Ляпунова для проверки устойчивости и решения задачи параметрического синтеза линейных дискретных систем

Функция Ляпунова выбирается знакоопределенной положительной и квадратичной следующего вида:

$$V_k = x_k^T P x_k, \qquad (6.20)$$

где $P > 0;\ P = P^T$.

Вместо полной производной функции Ляпунова (для непрерывных систем) для дискретных систем записывается первая разность:

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k .$$

Если выполняются следующие условия, то движение дискретной системы считается

–*асимптотически устойчивым* по Ляпунову при

$$\begin{cases} V_k > 0 \\ \Delta V_k < 0 \end{cases}; \qquad (6.21)$$

–*устойчивым* по Ляпунову при

$$\begin{cases} V_k > 0 \\ \Delta V_k \le 0 \end{cases}; \qquad (6.22)$$

–*неустойчивым*по Ляпунову при

$$\begin{cases} V_k > 0 \\ \Delta V_k > 0 \end{cases}. \qquad (6.23)$$

Геометрический смысл второго (прямого) метода исследования устойчивости по А. М. Ляпунову заключается в том, что изучают изменение расстояния от движущейся точки по траектории до положения равновесия или изменение некоторой другой функции, имеющей общие свойства с расстоянием.

6.4. Этапы решения задачи синтеза цифровых САУ

Синтез цифровых САУ производится на основе методики параметрического синтеза линейных непрерывных САУ. Этапы синтеза линейных непрерывных САУ достаточно подробно рассмотрены в главе 4 данной книги. Кроме того, рассмотрено несколько постановок задач синтеза линейных САУ в терминах «вход-выход» (включение корректирующего устройства в прямую цепь) и в пространстве состояний (синтез систем с желаемым спектром) .

Естественно, методика параметрического синтеза непрерывных САУ с желаемыми характеристиками подходит к синтезу цифровых САУ с учетом квантования сигналов по времени. Поэтому следует грамотно составить математическое описание дискретной системы в разностных уравнениях, найти дискретную передаточную функцию, используя *z*-преобразование; далее следовать стандартной методике, разработанной для линейных непрерывных систем.

Укрупненные этапы решения задачи параметрического синтеза цифровых САУ.

1. Задание характеристик ОУ; получение математической модели в виде системы разностных уравнений; получение дискретной передаточной функции $G(z)$.

2. Исследование устойчивости исходной системы при заданной структуре.

3. Задание требований к качеству переходного процесса $y[nT]$: быстродействие, статическая точность системы и т.д.

4. Определение параметров дискретной передаточной функции корректирующего устройства $G_k(z)$; определение дискретной передаточной функции скорректированной системы $G_k(z)$.

5. Построение основной характеристики переходного процесса $y[nT]$; определение показателей качества.

Если наблюдается противоречие между полученными свойствами переходного процесса и желаемыми, то выполняется следующий этап.

6. Корректировка:

– учет отброшенных полюсов математической модели дискретной системы;

– уточнение закона регулирования.

Таким образом, представлена итерационная процедура решения задачи параметрического синтеза дискретной САУ, состоящая из шести этапов, аналогичная этапам решения задачи синтеза для непрерывных линейных систем.

Цифровые системы автоматического регулирования находят наиболее широкое применение при решении разнообразных задач, связанных с управлением технологическими процессами,

функционированием систем коммуникации и связи, с работой радиолокационных систем и т. п.

Дискретные системы обладают целым рядом полезных свойств, обусловленных дискретным характером прерываемых и преобразуемых в них сигналов. Наиболее часто дискретное преобразование сигналов используется для управления большими мощностями с высокой точностью, для разделения во времени информационных сигналов при многоканальной передаче, для согласования работы непрерывных устройств с цифровыми машинами. Кроме того, в дискретных системах имеется возможность получения высокой точности и помехозащищенности за счет цифрового представления аналоговых данных и использования процессов прерывания.

Вопросы, задачи

1. Каковы особенности цифровых систем управления?
2. Каким образом квантование непрерывного сигнала по времени и по уровню изменяет непрерывную систему.
3. Охарактеризовать свойства конечных разностей.
4. Показать пошаговый способ решения разностных уравнений.
5. Записать решение разностного уравнения "k"-го порядка.
6. Записать решение системы разностных уравнений.
7. Дать определения z-преобразованию; показать некоторые его свойства.
8. Дать определение дискретной передаточной функции.
9. Привести примеры переходных процессов в зависимости от расположения полюсов на плоскости z для дискретных систем.
10. Дать понятия устойчивости для дискретных систем. Привести пример асимптотически устойчивой системы. Критерии устойчивости дискретных систем.
11. Анализ качества дискретных систем.
12. Привести укрупненный алгоритм решения задачи параметрического синтеза цифровых САУ.

7. СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Изучение *управляемых объектов* и нахождение наилучших способов *управления* составляют основную цель всех последующих рассуждений.

7.1. Об основных направлениях в теории оптимальных процессов

Задание начального фазового состояния x_0 и управления $u(t)$ однозначно определяют дальнейшее движение объекта. Это движение заключается в том, что фазовая точка с координатами

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots , x_n(t)),$$

изображающая состояние объекта, с течением времени перемещается, описывая в фазовом пространстве некоторую линию, называемую *фазовой траекторией* рассматриваемого движения объекта (рис. 7.1а).

Пару векторных функций $(u(t), x(t))$, т.е. управление $u(t)$ и соответствующую фазовую траекторию $x(t)$, мы будем называть в дальнейшем *процессом управления* или просто *процессом.*

Таким образом, состояние *управляемого объекта* в каждый момент времени характеризуется *фазовой точкой* $x = (x_1 , x_2 , \ldots, x_n)$. На движение объекта можно воздействовать при помощи *управляющего вектора (параметра)*

$$u = (u_1 ,u_2 , \ldots , u_m).$$

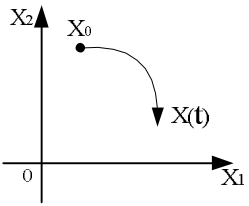


Рис. 7.1а. Траектория движения объекта

Изменение величин (u, x) с течением времени будем

называть процессом; процесс *(u(t), x(t))* составляется из *управления u(t)* и *фазовой траектории x(t)*. Процесс полностью определяется, если задано управление *u(t)* (при $t>t_0$) и начальное фазовое состояние $x_0 = x(t_0)$. Тот факт, что задание начального фазового состояния (в момент $t = t_0$) позволяет однозначно определить фазовую траекторию $x(t)$, $t>t_0$, с помощью системы (7.1) вытекает из *теоремы о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений.*

Предположим, что, зная начальное фазовое состояние x_0 и управление $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ мы определили фазовую траекторию $x(t)$ с помощью системы уравнений (7.1):

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}. \qquad (7.1)$$

Если мы изменим управление *u(t)* (сохранив то же начальное состояние x_0), то получим некоторую другую траекторию, исходящую из той же точки x_0; вновь изменим управление *u(t)* – получим еще одну траекторию и т. д. Таким образом, рассматривая различные управления *u(t)*, мы получим множество траекторий, исходящих из точки x_0 (рис. 7.1a).

Разумеется, это не противоречит теореме единственности в теории дифференциальных уравнений, так как, заменяя функции $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ другими функциями, мы переходим от системы (7.1) к другой системе дифференциальных уравнений относительно фазовых координат $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Задача оптимального быстродействия,* которую в дальнейшем мы будем рассматривать, заключается в отыскании такого управления *u(t)*, для которого соответствующая фазовая траектория *x(t)* проходит через точку x_k и переход из x_0 в x_k осуществляется за кратчайшее время. Такое управление *u(t)* будем называть *оптимальным управлением;* точно также соответствующую траекторию *x(t)*, по которой фазовая точка за кратчайшее время переходит из состояния x_0 в состояние x_k, будем называть *оптимальной траекторией* (рис. 7.1b).

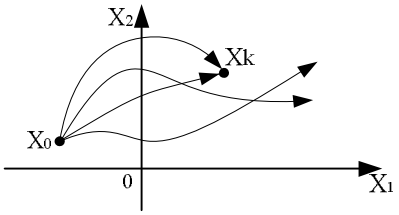


Рис. 7.1b. Траектории движения объекта

Задача оптимального перехода из начального состояния в конечное представляет собой краевую задачу, где начальные и конечные точки могут быть заданы одним из четырех способов, представленных на рис. 7.2. Фазовые портреты перехода системы из начального состояния в конечное для различных задач (рис. 7.2):

а) задача с фиксированными концами;

б) задача с фиксированным первым концом (фиксированная начальная точка и множество конечных значений);

в) задача с фиксированным правым концом;

г) задача с подвижными концами.

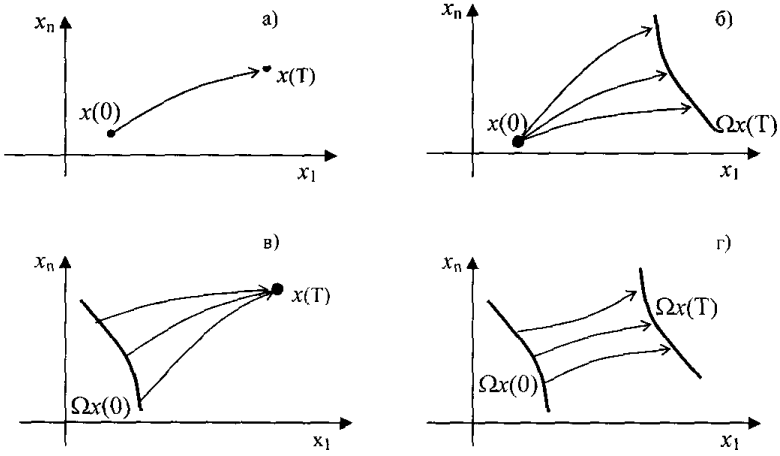


Рис. 7.2. Фазовые портреты перехода системы

Для управляемого объекта множество начальных состояний может в общем случае совпадать со всем множеством состояний либо с рабочей областью, а множество конечных состояний является подпространством множества состояний или рабочей области.

Пример 2.1

В любую ли точку пространства состояний можно перевести объект, описываемый системой уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 2u. \end{cases}$$

Алгоритм и решение:

1) Запишем уравнения статики для данного объекта:

$$\begin{cases} 2x_1^0 - x_2^0 + u = 0 \\ -x_1^0 - x_2^0 + 2u = 0. \end{cases}$$

2) Подставив во второе уравнение значение $u(t)$ из первого уравнения

$$u = x_2^0 - 2x_1^0,$$

получим

$$-5x_1^0 + x_2^0 = 0.$$

3) Получили множество конечных состояний, описываемое уравнением

$$x_2^0 = 5x_1^0.$$

Вывод: Множество конечных состояний, задаваемое для объекта (системы), должно быть реализуемым.

Допустимые управления

Обычно управляющие параметры u_1 , u_2 , … , u_m не могут принимать совершенно произвольные значения, а подчинены некоторым ограничениям. Так, ограничение $-1 \le u \le +1$ означает, что двигатель, например, может развивать силу, направленную в любую сторону, но не превосходящую единицы

по величине (ограничения всегда следуют из природы объекта). Управляющими параметрами могут быть, например, количество подаваемого в двигатель топлива, температура, сила тока, напряжение и т. п., которые не могут принимать сколь угодно больших значений.

В общем случае будем считать, что в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации задано в пространстве переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$ некоторое множество U (рис. 7.3) и управляющие параметры $u_1, u_2, \ldots, u_m$ должны в каждый момент времени принимать лишь такие значения, для которых точка $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ принадлежит множеству U. Иначе говоря, разрешается рассматривать лишь такие управления $u(t)$, что $u(t) \in U$ для любого t. Множество U будем называть *областью управления*.

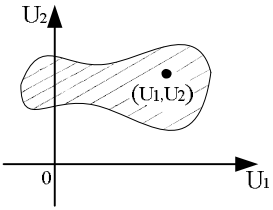


Рис. 7.3. Область управления

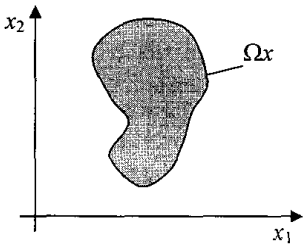


Рис. 7.4. Общий вид рабочей области пространства состояний

В дальнейшем будем предполагать, что указание области управления входит в математическое определение объекта, т. е. что для математического задания объекта (рис. 7.4) надо указать закон его движения (7.1) и область управления U (рис. 7.3). Заметим, что для технических задач особенно важен и характерен случай *замкнутого* множества U, т. е. случай, когда точка $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ может находиться не только *внутри* множества U, но и на его границе. Это условие означает, что для «рулей» допустимы и их крайние положения (рис. 7.5). Задается Ω_U – область допустимых значений управляющего воздействия. На практике область Ω_U задается также с помощью модульных соотношений:

$$|U_i| \le \overline{U}_i, \qquad i = \overline{1,n}.$$

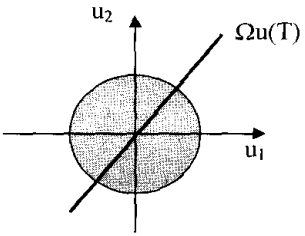


Рис. 7.5. Вид рабочей области пространства управлений, заданной модульными соглашениями

Наконец, сделаем еще одно предположение о характере управлений. Будем предполагать, что «рули», положение которых характеризуются управляющими параметрами u_1, u_2, … , u_m, *безынерционны.* Таким образом, мы можем *мгновенно* переключать эти «рули» из одного положения в другое, т. е. мгновенно менять (скачком) значения управляющих параметров u_1, u_2, … , u_m. В соответствии с этим будем рассматривать не только непрерывные, но и произвольные *кусочно-непрерывные* управления *u(t),* т. е. управления, состоящие из конечного числа непрерывных кусков (рис. 7.6).

Допустимым управлением будем называть всякую кусочно-непрерывную функцию *u(t),* $t_0 \le t \le t_1$ со значениями в области *U,* непрерывную в концах отрезка $t_0 \le t \le t_1$, на котором она задана. Задача об оптимальных быстродействиях уточняется теперь следующим образом:

Среди всех допустимых управлений u = u(t), под воздействием которых объект переходит из заданного начального состояния x_0 *в предписанное конечное состояние* x_1, *найти такое, для которого этот переход осуществляется за кратчайшее время.*

Кусочно-непрерывные управления хороши тем, что, во-первых, позволяют получить для достаточно широкого класса примеров *точное математическое решение* оптимальной задачи и, во-вторых, достаточно наглядны и удобны для технической реализации.

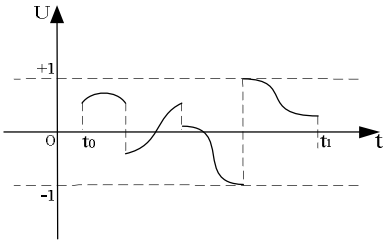


Рис. 7.6. Кусочно-непрерывное управление

Об основных направлениях в теории оптимальных процессов

В 1961 г. русский академик Л. С. Понтрягин (со своими учениками) опубликовал работу, в которой был изложен принцип, ведущий к решению общей задачи о нахождении оптимального по быстроте переходного процесса в непрерывных системах, получивший в дальнейшем название «*принцип максимума*». Принцип максимума был обоснован как необходимый и достаточный признак оптимального процесса для линейных систем и необходимый признак оптимального процесса для нелинейных систем. Кроме того, принцип максимума был обобщен на случай минимизации интеграла и на случай ограничений координат объекта. Для применения принципа максимума необходимо иметь описание динамической системы в виде дифференциальных уравнений, решить так называемые сопряженные уравнения совместно с основными уравнениями, добавить *условия трансверсальности* и найти максимальное значение функции Гамильтона.

Почти одновременно с опубликованием принципа максимума американским математиком Ричардом Беллманом (со своими учениками) был разработан метод динамического программирования. Методом динамического программирования можно исследовать системы оптимального управления значительно более широкого класса, чем системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Поэтому он применим не только к оптимальным задачам динамики, но и к весьма широкому кругу технических, медицинских и экономических задач,

в которых связи между фазовыми координатами, управлением и критерием оптимальности могут задаваться как в виде уравнений весьма произвольного вида, так и в виде экспериментально определенных графиков или таблиц численных данных. В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллмана. Формулировка принципа оптимальности Р. Беллмана: каким бы ни было начальное состояние системы x_0 и начальное оптимальное управление $u^*_\circ$ (на интервале $t_\circ \le t \le t_k$), последующее управление u_k (на интервале $t_k \le t \le T$) всегда должно быть также оптимальным относительно состояния, возникшего в результате первого этапа управления.

Далее оба основных направления в теории оптимальных процессов будут рассмотрены достаточно подробно.

7.2. Критерии оптимальности управления

Прежде чем рассмотреть критерии оптимальности управления, обратимся к истории возникновения задач оптимизации. *По своему смыслу эти задачи являются вариационными.* Годом рождения классического вариационного исчисления принято считать 1696 г., когда И. Бернулли опубликовал статью под названием “Новая задача, к решению которой приглашаются математики”. В этой статье И. Бернулли поставил следующую проблему (рис. 7.7):

В вертикальной плоскости даны две точки *A* и *B*. Определить путь *AMB*, спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести, тело, начав двигаться из точки *A,* дойдет до другой точки *B* в кратчайшее время. Поставленная задача получила название *задачи о брахистохроне*, т. е. кривой наискорейшего спуска.

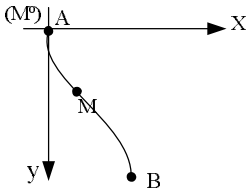


Рис. 7.7. Траектория падающего тела

Решение этой задачи было дано самим И. Бернулли, Лейбницем, Я. Бернулли, Лопиталем и Ньютоном. Как видите, в этой задаче нет никаких ограничений. Это задача классического вариационного исчисления.

Однако при построении *оптимальных процессов* необходимо учитывать различного рода ограничения типа неравенств, задающие замкнутые области допустимых изменений переменных. Такого рода ограничения были охвачены лишь новой теорией, созданной в середине XX столетия Л. С. Понтрягиным и его учениками (1961) и Р. Беллманом (1960), *теорией оптимального управления.*

7.2.1. Некоторые частные критерии оптимальности

Рассмотрим уравнение управляемой системы

$$\dot{x} = \varphi\,(x,\ u), \tag{7.2}$$

где $x(n \times 1)$ – вектор переменных состояния, в теории оптимального управления – фазовые переменные; $u(m \times 1)$ – вектор управления (параметры управления).

Соотношения вида (7.2), т. е. выражение $\dot{x} = \varphi\,(x,\ u)$, называются *дифференциальной связью*; вводятся *сопряженные переменные* $\Psi\,(x)$; соотношения $\psi = 0$ называются *граничными условиями*. В реальных задачах (задачах физики, химии, механики и др.) характер дифференциальных связей определяется законами природы, а параметры управления $u = (u_1, u_2, ..., u_к)$ характеризуют возможности человека. Эти возможности в реальных задачах не безграничны. Следовательно, необходимо накладывать ограничения типа

$$u \in U,$$

где U – замкнутое допустимое множество; произвольное, но управление $u \in R^r$.

При постановке различных задач управления обычно формулируется цель, ради которой осуществляется управление. Например, целью управления может быть перевод системы из

одного состояния X^0 в другое X^T. Эта цель может быть достигнута различными способами, т. е. может существовать несколько вариантов выбора управлений, которые обеспечивают достижение указанной цели. В этом случае возникает задача выбора из вариантов допустимых (т. е. таких, которые обеспечивают достижение поставленной цели) управлений в каком-либо смысле (например, в смысле наискорейшего достижения цели или в смысле наименьших затрат ресурсов и т. д.). Следовательно, необходимы критерии, по величине которых можно определить степень достижения цели.

Критерий оптимальности управления можно записать в следующем виде:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x,u)dt \to extr, \qquad u(t) \tag{7.3}$$

где $F(x, u)$ – скалярная функция векторных аргументов $x(t)$, $u(t)$. Управление, обеспечивающее экстремальное значение критерия, и будет оптимальным в смысле заданного конкретного критерия ($extr \to max$ либо $extr \to min$ в зависимости от физического смысла задачи).

1. Критерий максимального быстродействия

Это наиболее простой критерий, для которого

$$F(x, u) = 1, \; J_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt = (t_1 - t_0) \to \min_{u \in U}.$$

Физический смысл этого критерия: перевод системы из $x^0(t_0)$ в $x^k(t_1)$ за минимальное время.

2. Критерий качества переходных процессов

Если $F(x, u) = x_1^2$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, то

$$J_2 = \int_0^{\infty} x_1^2 \, dt \to \min_{u \in U},$$

где x_1 – отклонение одной из компонент вектора фазовых переменных X от установившегося значения. Этот критерий используется для косвенного анализа переходных процессов в замкнутых системах.

3. Обобщенный критерий качества переходных процессов

Пусть

$$F(x, u) = x^{\mathrm{T}} Qx,$$

где Q – положительно-определенная матрица, $Q > 0$. Тогда

$$J_3 = \int_0^{\infty} x^T Qx dt \to \min_{u \in U}.$$

Этот критерий минимизирует квадратичные интегральные отклонения всех компонент вектора X от установившегося движения.

4. Критерий аналитического конструирования оптимального регулятора

В этом случае

$$F(x, u) = x^{\mathrm{T}} Qx + u^{\mathrm{T}} Ru,$$

где $Q \geq 0$, $R > 0$ (т. е. матрица Q является знакопостоянной, матрица R – знакоопределенной положительной).

Тогда

$$J_4 = \int_0^{\infty} (x^{\mathrm{T}} Qx + u^{\mathrm{T}} Ru) dt \to \min_{u \in U}.$$

Разнообразие практических задач управления позволяет формулировать множество других критериев оптимальности управления, учитывающих специфику задачи или системы.

7.2.2. Общий вид критерия оптимального управления

Общий вид критерия оптимального управления записывается в общем виде следующим образом:

$$J[x(\bullet),\ u(\bullet),\ t_0,\ t_1] =$$

$$= \int_{e_0}^{e_1} F(t,\ x,\ u)\ dt + g[t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1)] \to \min_{u \in U}.$$

Функционал $J[x(\bullet),\ u(\bullet),\ t_0,\ t_1]$ состоит из двух частей. Первая называется *интегральной* составляющей, вторая – *терминальной* (конечной).

Постановка задачи оптимального управления

Пусть заданы

$$J[x(\bullet),\ u(\bullet),\ t_0,\ t_1] =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t,\ x,\ u)dt + g[t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1)] \to \inf_{u \in U}, \qquad (7.4)$$

$$\dot{x} = \varphi\ (t,\ x,\ u), \qquad (7.5)$$

$$u \in U \quad либо \quad |u| \le U_{\max}, \quad \Psi\ [t_0,\ x(t_0),\ t_1,\ x(t_1)] = 0\ , \qquad (7.6)$$

где $U_{\max}$ – возможное допустимое управление.

Функции $F,\ g,\ \varphi,\ \Psi$ непрерывны по совокупности переменных и дифференцируемы по переменным $x,\ t$. Задано множество $u \in R^r$, т. е. множество вещественных управлений.

Необходимо определить оптимальный процесс.

Допустимым процессом в задаче (7.4)÷(7.6) называют совокупность

$[x(\bullet),\ u(\bullet),\ t_0,\ t_1]$, если выполнены следующие требования:

1) вектор-функция $u(\bullet)$ определена и кусочно-непрерывна на отрезке $[t_0,\ t_1]$;

2) для всех t выполнено включение $u(t) \in U,\ t \in [t_0,\ t_1]$;

3) функция $x(\bullet)$ дифференцируема во всех точках, кроме точек, где $u(\bullet)$ терпит разрыв и во всех точках дифференцируемости $x(\bullet)$ выполнено равенство

$$\dot{x}(t) = \varphi\,[t, x(t), u(t)];$$

4) удовлетворяются граничные условия

$$\Psi\,[t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)] = 0.$$

Только среди таких допустимых процессов и будет искаться оптимальный.

Допустимый процесс $[\bar{x}(\bullet), \bar{u}(\bullet), \bar{t}_0, \bar{t}_1]$ называется *оптимальным*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого допустимого процесса $[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1]$, для которого

$$\left\|t_0 - \bar{t}_0\right\| < \varepsilon, \quad \left\|t_1 - \bar{t}_1\right\| < \varepsilon, \quad \left\|x(t) - \bar{x}(t)\right\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 \cap t_1]$$

выполняется следующее неравенство:

$$J[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] \geq J[\bar{x}(\bullet), \bar{u}(\bullet), \bar{t}_0, \bar{t}_1].$$

Для n-мерного вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ число

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad (\textit{Евклидова норма}).$$

Таким образом, здесь учитывается лишь близость фазовых переменных, но не управлений. Принято различать два класса задач теории оптимального управления.

Задача 1. Оптимизация программы управления

Этот класс задач возникает, когда процессы в управляемой системе задаются априори определенной программой изменения регулируемой величины во времени. В случае оптимизации той или иной программы управления она не задается, а отыскивается в результате расчета по выбранному критерию оптимальности ($J_1 \div J_5$). При этом находятся программы изменения оптимального управления $u_{opt}(t)$ и оптимальных фазовых траекторий $x_{opt}(t)$.

Задача 2. Оптимизация закона управления

Этот класс задач рассматривает наилучшее построение системы управления для осуществления заданной программы управления. Причем программа управления может быть заданной либо решением задачи 1, либо каким-нибудь другим способом. Смысл оптимизационной задачи 2 заключается в следующем. При реализации программы управления, найденной в результате решения задачи 1, могут возникнуть нежелательные отклонения $\Delta x(t)$ от $x_{opt}(t)$. Если в этих условиях оставить $u_{opt}(t)$ неизменной, то программа управления уже не будет оптимальной. Поэтому к $u_{opt}(t)$ необходимо добавить $\Delta u(t)$, которое будет оптимальным образом (в смысле выбранного критерия) подавлять нежелательные отклонения $\Delta x(t)$.

Следует отметить, что при решении задачи 2 удобнее рассматривать динамику системы в отклонениях от требуемых величин или программ.

7.3. Методы классического вариационного исчисления

В вариационном исчислении *критерий оптимальности* называется *функционалом*, а функция, обеспечивающая экстремум этому функционалу, называется *экстремалью.*

1. Уравнение Эйлера

Пусть необходимо найти экстремаль функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathrm{X}, \dot{\mathrm{X}})\, dt \to \min_{\mathrm{X}}. \qquad (7.7)$$

Экстремали находятся среди решений уравнений Эйлера, которые имеют вид

$$F_{\mathrm{X}} - \frac{d}{dt}[F_{\dot{\mathrm{X}}}] = 0, \qquad (7.8)$$

где $F_X = \frac{\partial F}{\partial x}$; $F_{\dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$.

Пример 7.1

Пусть задан функционал вида

$$J = \int_0^{\infty} [x^2 + T^2 \dot{x}^2]\, dt.$$

Необходимо найти экстремаль, используя уравнение Эйлера.

Алгоритм и решение:

1) Запишем подынтегральную функцию:

$$F(t, x, \dot{x}) = x^2 + T^2 \dot{x}^2,$$

где $T > 0$ – заданная постоянная.

2) Найдем соответствующие производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2T^2 \dot{x}; \qquad \frac{d}{dt}[F_{\dot{x}}] = 2T^2 \ddot{x}.$$

3) Подставив в уравнение Эйлера (7.8), получим

$$2x - 2T^2 \ddot{x} = 0 \xrightarrow{2 \neq 0} T^2 \ddot{x} - x = 0.$$

4) Запишем характеристическое уравнение

$$T^2 s^2 - 1 = 0; s_{1,2} = \pm \sqrt{1/T^2} = \pm \frac{1}{T}.$$

5) Запишем решение уравнения (7.8):

$$x(t) = c_1 \exp\left[-\frac{1}{T} t\right] + c_2 \exp\left[\frac{1}{T} t\right],$$

где c_1 постоянные интегрирования ($i = \overline{1,2}$).

6) Так как необходимо минимизировать функционал (7.7), то произвольную постоянную интегрирования c_2 положим равной нулю.

Тогда

$$x(t) = c_1 exp\,[-\frac{1}{T}t] \quad \text{при} t = 0,\ x(0) = x_0 \neq 0.$$

Следовательно, оптимальная траектория движения

$$x(t) = x_0 exp\,[-\frac{1}{T}t]$$

есть *экстремаль*.

Вывод: Это есть решение дифференциального уравнения первого порядка. Отсюда экстремаль является решением уравнения следующего вида:

$$T\dot{x} + x = 0.$$

2. Уравнение Эйлера-Пуассона

Если необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}]\,dt \to \min_{X}, \qquad (7.9)$$

то экстремали будем искать среди решений уравнения Эйлера-Пуассона, имеющего следующий вид:

$$F_X - \frac{d}{dt}[F_{\dot{X}}] + \frac{d^2}{dt^2}[F_{\ddot{X}}] - ... + [-1]^n \frac{d^n}{dt^n}[F_{X^{(n)}}] = 0, \qquad (7.10)$$

где $F_X = \frac{\partial F}{\partial x}$; $F_{\dot{X}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$; . . $F_{X^{(n)}} = \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}$.

Для затухающих процессов решение этого уравнения соответствует общему решению дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами или системе уравнений 1-го порядка в форме Коши.

3. Задачи на условный экстремум

Пусть задан функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n]\, dt \to \min_{X} \quad (7.11)$$

и дополнительные уравнения, называемые уравнениями связи:

$$\varphi_K [t, x_1, x_2, \ldots, x_n] = 0, \; k = \overline{1, m}, \; m \le n. \quad (7.12)$$

Необходимо найти экстремали для заданного функционала.

Такого рода вариационные задачи встречаются в САУ, так как обычно задается вид функционала и система уравнений, описывающих ОУ. Смысл введенных связей заключается в том, что экстремали нужно искать среди функций, удовлетворяющих уравнениям связи.

Алгоритм и решение

1) Вводят неопределенные множители Лагранжа λ_i ($i = \overline{1, m}$). Затем вводят функцию следующего вида:

$$V = F + \sum_{k=1}^{m} \lambda_K \varphi_K [t, x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

2) Для функции V записывают систему уравнений Эйлера

$$V_{X_i} - \frac{d}{dt}[V_{\dot{X}_i}] = 0 \; \forall, \; i = \overline{1, n}.$$

3) Решают систему из $(n+m)$ уравнений

$$\begin{cases} V_{X_i} - \dfrac{d}{dt}[V_{\dot{X}_i}] = 0 & (i = \overline{1, n}), \quad (k = \overline{1, m}) \\ \varphi_K [t, x_1, x_2, \ldots, x_n] = 0, \end{cases}$$

относительно $(n+m)$ неизвестных x_i $(i = \overline{1, n})$ и λ_K ($k = \overline{1, m}$) ($\lambda_K > 0$ в задачах минимизации).

Следует отметить, что в САУ уравнения связи обычно бывают дифференциальными (описание САУ), т. е. имеют вид

$$\varphi_{\text{K}}[t, x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n] = 0, \text{k} = \overline{1, m}, \text{m} \le \text{n}. \quad (7.13)$$

Пример 7.2

Пусть заданы уравнения связи

$$\dot{x} = f(x, u),$$

и функционал вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt \to \min_u,$$

Необходимо найти экстремали, доставляющие минимум заданному функционалу.

Алгоритм и решение

1) Преобразуем уравнения системы к виду

$$\varphi(x,u) = \dot{x} - f(x,u) = 0.$$

2) Записываем функцию Лагранжа: $V = F + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{\text{K}} \varphi_{\text{K}}$.

3) Составим систему уравнений Эйлера по переменным *(x, u),* которую дополним уравнениями связи:

$$\begin{cases} V_{\text{X}} - \dfrac{d}{dt}[V_{\dot{\text{X}}}] = 0 \\ V_U - \dfrac{d}{dt}[V_{\dot{U}}] = 0 \\ \varphi(x,u) = \dot{x} - f(x,u) = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему из (*2n* + *r*) уравнений, находят экстремали.

7.4. Линейные системы, оптимальные по быстродействию. Принцип максимума Л. С. Понтрягина

Рассмотрим *решение задачи 1* для линейных систем, в которой критерием оптимальности управления является время перехода системы из одного состояния в другое.

Пусть система описывается уравнением вида

$$\dot{x} = Ax + Bu = f[x(t), u(t)], \qquad (7.4.1)$$

где $A\ (n*n)$ – матрица постоянных коэффициентов, $u\ (t)$ – скалярное управление $u \in R^1$, на которое наложено ограничение

$$u \in U, \qquad |u| \le u_{\max}, \qquad (7.4.2)$$

где $u_{\max}$ – максимально допустимое отклонение управления; U – допустимое множество.

В начальный момент времени $t = t_0 = 0$ состояние системы определяется $x(t_0)=x_0 \neq 0$, в конечный момент времени $t = T$ $(T>t_0)$ система должна находиться в состоянии $x(T) = x_T$. Критерий оптимальности управления

$$J = \int_0^T F(\bullet)dt \to \min_{u \in U}. \qquad (7.4.3)$$

Для нахождения оптимального управления используется принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Рассмотрим систему уравнений, составленную относительно дополнительных переменных (*сопряженные переменные*):

$$\frac{d\psi_i}{dt} \stackrel{\Delta}{=} -\sum_{K=0}^{n} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}\psi_K,\ i=\overline{1,n}, \qquad (7.4.4)$$

Введем функцию Гамильтона

$$H(\psi, x, u) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{K=0}^{n} \psi_K f_K\ (x, u). \qquad (7.4.5)$$

Тогда уравнения (7.4.1) и (7.4.4) можно объединить в одну систему уравнений, называемую гамильтоновой системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_i} \\ \dfrac{d\psi_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} I = \overline{1, n}. \qquad (7.4.6)$$

Еще раз выпишем задачу оптимального управления, в этом случае

$$J = \int_{t_0}^{T} dt \to \min_{u \in U}. \qquad (7.4.7)$$

$$\dot{x} = Ax + bu = f(x, u) \qquad (7.4.8)$$

$$u \in U, \quad u \in R^1 ; \quad |u| \le u_{\max}, \quad \forall\, t \in [0, T]. \qquad (7.4.9)$$

Оптимальным будет процесс $[\bar{x}^*(\bullet), \bar{u}^*(\bullet), 0, T]$, если найдем такое $\bar{u}^*(\bullet)$, при котором будет выполняться неравенство

$$J[\bar{x}(\bullet), \bar{u}(\bullet), 0, T] \le J[x(\bullet), u(\bullet), 0, T]$$

при $\|x^*(t) - x(t)\| < \varepsilon$, $\|t - T\| < \varepsilon$.

Принцип максимума Л. С. Понтрягина формулируется следующим образом:

Для того чтобы управление $u(t)$ было оптимальным, необходимо, чтобы существовала такая ненулевая непрерывная сопряженная переменная вектор-функция $\psi^{\mathrm{T}}(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)]$, соответствующая в силу уравнений (7.4.6) функциям $u^{\mathrm{T}}(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)]$ u $x^{\mathrm{T}}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$, чтобы:

1) При любом t, взятом в рассматриваемом интервале

времени $0 <= t <= T$, функция Гамильтона $H[\psi(t), x(t), u]$, рассматриваемая как функция переменного $u \in U$, достигала в точке $u = u^{*}(t)$ максимума

$$H[\psi^{*}(t), x^{*}(t), u^{*}(t)] = M[\psi(t), x(t)],$$

где $M[\psi(t), x(t)] = \sup_{u \in U} H[\psi, x, u]$.

2) В конечный момент времени $t = T$ выполнялись бы соотношения следующего вида:

$$\psi(T) \le 0; \quad M[\psi(T), x(T)] = 0.$$

Укрупненный алгоритм нахождения оптимального управления, удовлетворяющего принципу максимума Л. С. Понтрягина.

1. Необходимо составить уравнения относительно вектора сопряженных переменных $\psi(n*1)$, которые имеют вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\mathrm{K}=1}^{n} \frac{\partial f_{\mathrm{K}}}{\partial x_i} \psi_{\mathrm{K}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{так как} \quad f_0(x, u) = 1 \qquad (7.4.10)$$

или в матричной форме

$$\dot{\psi} = -A^{\mathrm{T}} \psi. \qquad (7.4.10\text{а})$$

Здесь f_k есть правая часть уравнения системы, т. е.

$$\dot{x} = Ax + bu \stackrel{\Delta}{=} f(x, u) \qquad \text{или } \dot{x} = f(x, u).$$

2. Найти решение уравнений относительно ψ, которое будет выражаться через матричную экспоненту

$$\psi(t) = e^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}} t} \psi(t_0). \qquad (7.4.11)$$

3. Составим функцию Гамильтона, которая равна

$$H(\psi, x, u) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{n} \psi_{\mathrm{K}} f_{\mathrm{K}}(x, u),$$

но так как по быстродействию $f_0 \equiv 1$, то в матричной форме

$$H(\psi, x, u) = 1 + \psi^{\mathrm{T}} f(x, u) = 1 + \psi^{\mathrm{T}} (Ax + bu) =$$
$$= 1 + \psi^{\mathrm{T}} Ax + \psi^{\mathrm{T}} bu. \qquad (7.4.12)$$

4. Для того чтобы управление было оптимальным, необходимо согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина, чтобы функция Гамильтона $H(\bullet)$, достигла максимума по переменной u.

Так как переменная u входит только в последний член функции Гамильтона $H(\bullet)$, то максимума $H(\bullet)$ достигает при следующих условиях:

$$M(\psi, x, u) = \max_{u \in U} H(\psi, x, u) = 1 + \psi^{\mathrm{T}} Ax + |\psi^{\mathrm{T}} bu|.$$

5. Следовательно, оптимальное по быстродействию управление будет

$$\bar{u}^{*}(t) = u_{\max} \cdot sign[\psi^{\mathrm{T}}(t)b], \quad (7.4.13)$$

где $\psi(t) = e^{-\mathrm{A}t} \psi(t_0)$.

Таким образом, *оптимальное управление* задается кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения $u = \pm u_{\max}$ в *зависимости от выхода сопряженной системы* (рис. 7.8).

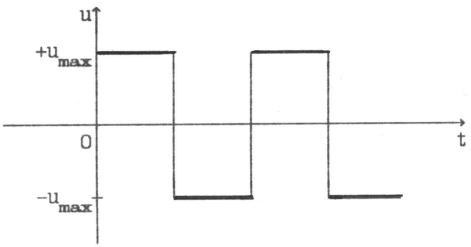


Рис. 7.8. Оптимальное управление

Из выражения оптимального управления (7.4.13) видно, что оно может быть определено точно как функция времени $u(t)$, если известны временные зависимости $\psi(t)$. Но для того, чтобы определить $\psi(t)$, необходимо знать начальное условие $\psi(t_0)$ или

конечное $\psi(T)$. А они являются *нелинейными функциями граничных условий* $x(t_0)$, $x(T)$ и не могут быть определены заранее. Это осложняет непосредственное использование полученных результатов.

Пример 3.3

Пусть задан критерий оптимальности по быстродействию

$$J = \int_0^T dt \to \min_{u \in U}.$$

Структурная схема ОУ задана следующего вида:

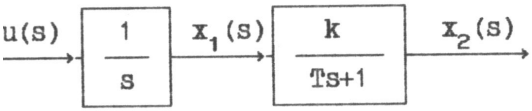


Рис. 7.9. Структурная схема ОУ

Необходимо перевести ОУ из начального состояния $t = 0$, $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ в новое состояние $x_1 = x_{1K}$, $x_2 = x_{2K}$ за минимальное время при ограничении на управление

$$|u| \le u_{\max}.$$

Алгоритм и решение:

1) Запишем уравнения ОУ в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \overset{\Delta}{=} f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{k}{T}x_1 - \dfrac{1}{T}x_2 \overset{\Delta}{=} f_2(x,u) \end{cases}.$$

2) Запишем уравнения для сопряженных переменных:

а) в векторной форме:

$$\dot{\psi} \overset{\Delta}{=} -A^T\psi; \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{k}{T} & -\dfrac{1}{T} \end{vmatrix}; \qquad A^T = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{k}{T} \\ 0 & -\dfrac{1}{T} \end{vmatrix};$$

$$\dot{\psi} = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{\mathrm{T}} \\ 0 & -\frac{1}{\mathrm{T}} \end{vmatrix}\psi \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{k}{\mathrm{T}}\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\psi_2 \end{cases};$$

в) в скалярной форме:

$$\dot{\psi}_i \overset{\Delta}{=} -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\psi_k, \quad i=\overline{1,2}; \quad k=\overline{1,2};$$

$$i=1: \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\psi_2 = -\frac{k}{\mathrm{T}}\psi_2, i=2:$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\psi_2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\psi_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{k}{\mathrm{T}}\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\psi_2 \end{cases}$$

3) Найдем из второго уравнения ψ_2:

$$\int\frac{d\psi_2}{\psi_2} = \int\frac{1}{\mathrm{T}}dt \Rightarrow ln\ \psi_2 = \frac{1}{\mathrm{T}}t + C_2;$$

Пропотенцируем

$$\psi_2 = e^{t/\mathrm{T}+C_2} = C_2\, e^{t/\mathrm{T}}, \quad C_2 = e^{C_2}.$$

Подставим ψ_2 в первое уравнение и получим ψ_1

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{kC_2}{\mathrm{T}}e^{t/\mathrm{T}}; \qquad \int d\psi_1 = \int -\frac{kC_2}{\mathrm{T}}e^{t/\mathrm{T}}dt;$$

$$\psi_1 = -\frac{kC_2}{\mathrm{T}}\int e^{t/\mathrm{T}}dt = -kC_2\, e^{t/\mathrm{T}} + C_1.$$

(правило интегрирования: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$).

4) Составим функцию Гамильтона

$$H(\psi, x, u) \overset{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{n} \psi_K f_K(x,u), \; f_0 = 1, \; \psi_0 = 1.$$

$$H = 1 + \psi^T f = 1 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = 1 + [C_1 - kC_2 e^{t/T}]u + C_2 e^{t/T}[\frac{k}{T}x_1 - \frac{1}{T}x_2].$$

5) Рассмотрим слагаемое, зависящее от управления:

$$H^0 = [C_1 - kC_2 e^{t/T}]u.$$

Для того, чтобы функция Гамильтона была максимальна, необходимо поддерживать управление, равное u_{max}, т. е.

$$H^0_{max} = [C_1 - kC_2 e^{t/T}]u_{max}.$$

Кроме того, необходимо, чтобы u_{max} меняло свой знак столько раз, сколько раз его меняет функция ψ_1, т. е.

$$\psi_1 = [C_1 - kC_2 e^{t/T}],$$

$$\bar{u}^*(t) = u_{max} \cdot sign[C_1 - kC_2 e^{t/T}].$$

Итак, оптимальное управление найдено с помощью принципа максимума Понтрягина (рис.7.10). Осталось только найти моменты переключения $u^* = \pm 1$.

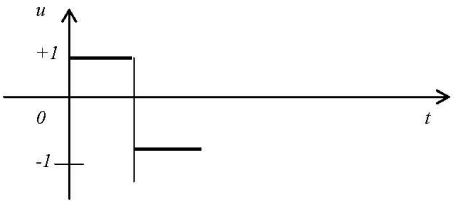


Рис. 7.10. Оптимальное управление

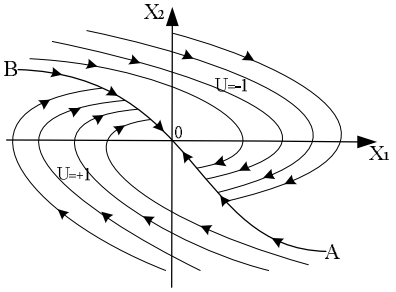


Рис. 7.11. Оптимальные траектории движения системы

Теорема А. Фельдбаума об n-интервалах

Теорема А. Фельдбаума об *n-интервалах* дает минимальное число переключений оптимального управления для достижения поставленной цели.

Пусть управляемая система описывается уравнением вида

$$\dot{x} = Ax + bu.$$

Пусть матрица A в системе такова, что ее характеристический полином

$$det\,(sI - A) = s^{n} + a_{n}\, s^{n-1} + \ldots + a_{2}\, s + a_{1}$$

имеет *вещественные отрицательные или нулевые корни.* Согласно принципу максимума, оптимальное управление имеет вид

$$u^{*} = u_{\max} sign[b^{\mathrm{T}}\, \psi],$$

где вектор $\psi(t)$ определяется как

$$\psi\,(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}} t}\, \psi\,(\mathrm{t}_{0}).$$

Тогда функция $u(t)$ может быть записана через $\phi(t)$ следующим образом:

$$u^{*}(t) = u_{\max} sign[\, b^{\mathrm{T}}\, e^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}} t}\, \psi\ \ (t_{\circ})].$$

Обозначим

$$\sigma(t) = b^{\mathrm{T}} e^{-\mathrm{A}^{\mathrm{T}} t} \psi \quad (t_{\circ}),$$

Тогда $u^{*}(t) = u_{\max} sign[\sigma(t)]$.

Так как число нулей (корней) функции $\sigma(t)$ на интервале $0 < t < \infty$ не превышает числа $(n-1)$, где nпорядок системы, то функция, модуль которой не превышает $u_{\max}$, является кусочно-постоянной функцией, имеющей на интервале $t_{\circ} < t < T$ не более $(n-1)$ точек разрыва. Отсюда следует *теорема об n-интервалах*.

Теорема А. Фельдбаума Если характеристический полином матрицы A имеет вещественные отрицательные или нулевые корни, то для оптимального управления *необходимо и достаточно n* интервалов максимального значения управления $u_{\max}$, а знаки на интервалах должны чередоваться $(n-1)$ раз.

Эта теорема значительно облегчает нахождение оптимальных управлений, так как исключает необходимость определения функцийψ_i $(i = \overline{1,n})$ и их анализа.

На рис. 7.11 представлены оптимальные траектории движения системы.

Пример 3.4

Для объекта, представленного математической моделью (7.4.14) в пространстве состояний, необходимо обеспечить переход из начальной точки $x_0(t)$ в конечную $x_k(t)$ за время $T = 1$[с.] с заданным качеством процесса

$$J = \min_{U \in \Omega_U} \int_0^T (u^T Q u) d\tau \cdot$$

Алгоритм и решение:

1) Математическая модель объекта имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}. \qquad (7.4.14)$$

Заданы начальные и конечные значения состояния объекта

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(T) = 1 \\ x_2(T) = 0 \end{cases}. \tag{7.4.15}$$

2) Записываются и вводятся переменные

$$z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} u^2 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}, \qquad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_2 \end{bmatrix}.$$

3) Составляется функция Гамильтона

$$H(\psi, z, u) = \psi_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

4) Для того чтобы управление было оптимальным, необходимо, чтобы функция Гамильтона достигла максимума по переменной *u* управления

$$\max_{U \in \Omega_U} H : \frac{\partial H}{\partial u} = 2\Psi_0 u + \Psi_2,$$

$$u^* = -\psi_2 / 2\psi_0.$$

5) Находим решение гамильтоновой системы:

$$\dot{\Psi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \psi_0 = C_0 = \text{const};$$

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial z_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \ \psi_1 = C_1 = \text{const};$$

$$\dot{\Psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial z_3} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\Psi_1 = -C_1, \qquad \psi_2 = C_1 t + C_2.$$

6) Отсюда оптимальное управление

$$u^* = -\frac{\Psi_2}{2\Psi_0} = -\frac{C_1 t + C_2}{2C_0} = b_1 t + b_2.$$

7) Для определения констант b_1, b_2 необходимо решить краевую задачу.

Запишем уравнение замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = b_1 t + b_2 \end{cases}.$$

8) Проинтегрируем

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (b_1\tau + b_2)d\tau = \frac{1}{2}b_1 t^2 + b_2 t,$$

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t (\frac{1}{2}b_1\tau^2 + b_2\tau)d\tau = \frac{1}{6}b_1 t^3 + \frac{1}{2}b_2 t^2.$$

9) Рассмотрим конечную точку $t = T = 1c$.

$$\begin{cases} x_1(T) = 1 \\ x_2(T) = 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{cases} 1 = 1/6b_1 + 1/2b_2 \\ 0 = 1/2b_1 + b_2 \end{cases}.$$

10) Получили систему уравнений, из которой находим

$$b_2 = 6,\ b_1 = -12.$$

11) Запишем закон оптимального управления

$$u^* = -12t + 6.$$

Используя теорему А. Фельдбаума об n-интервалах, получим, что оптимальное управление меняется $(n–1)$ раз (рис. 7.12). Оптимальные траектории движения системы показаны на рис. 7.13.

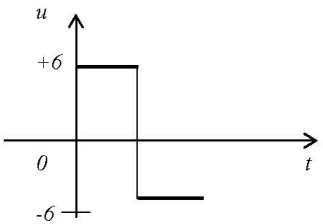


Рис. 7.12. Полученное оптимальное управление

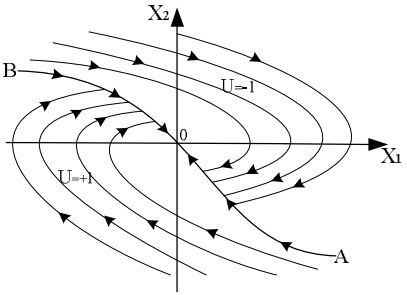


Рис. 7.13. Оптимальные траектории движения системы

7.5. Метод динамического программирования Р. Беллмана

Параграф посвящен методу динамического программирования в непрерывной и дискретной формах. Показана связь метода динамического программирования с функцией Ляпунова.

7.5.1. Формулировка принципа оптимальности

Формулировка принципа оптимальности Р. Беллмана: Каким бы ни было начальное состояние системы x_0 и начальное оптимальное управление $u^*_\circ$ (на интервале $t_\circ \le t \le t_k$), последующие управление u_k (на интервале $t_k \le t \le T$) всегда должно быть также оптимальным относительно состояния, возникшего в результате первого этапа управления.

Рассмотрим уравнение управляемой системы, представленное в отклонениях от номинального режима, т. е. уравнение возмущенного движения относительно некоторой траектории:

$$\dot{X} = f(x, u, t), f(0, 0, t) \equiv 0, \qquad (7.5.1)$$

где $x(n*1)$ – вектор отклонения фазовых переменных; $u(m*1)$ – вектор управления; $f(n*1)$ – векторная функция векторных аргументов x, u; t – время.

В начальный момент времени $t = t_0$ состояние системы

$x(t_0) = x_\circ \neq 0$. На вектор фазовых переменных x и вектор управления u могут быть наложены различные ограничения

$$x \in X, \quad u \in U.$$

Пусть критерий оптимальности управления выражен функционалом следующего вида:

$$J = \int_{t_\circ}^{T} W(x, u, t)\, dt. \qquad .(7.5.2)$$

Необходимо перевести систему из начального состояния $x(t_\circ) = x_0$ в конечное состояние $x(T) = x_T$.

В общем случае такой перевод можно осуществить неединственным образом.

Сформулируем следующую задачу. Найти функцию $u(x, t)$ (до сих пор мы находили $u(t)$; здесь же закон управления является функцией не только времени, но и текущих значений вектора фазовых переменных), доставляющую минимум критерию оптимальности (7.5.2) при любых начальных отклонениях $X_\circ$ из области

$$\|X_0\| \leq D,$$

содержащей начало координат $x = 0$.

Из постановки задачи видно, что она относится к классу задач оптимизации закона управления (т. е. к задаче 2 по классификации, показанной ранее).

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение функцию

$$V(x(t), t) = \min_{u \in U} \int_{t_\circ}^{T} W(x, u, t)\, dt. \qquad (7.5.3)$$

Если T – фиксированное число, то $V(\bullet)$ будет зависеть от начального значения $x_\circ$ и нижнего предела интегрирования $t_\circ$. В этом можно убедиться, если замкнуть систему (7.5.1) любым допустимым законом управления, проинтегрировать ее и вычислить (7.5.2).

Для получения принципа оптимальности предположим, что имеется оптимальная траектория $x_{opt}\ (t)$ (рис. 7.14).

Обозначим через $u^*_\circ(t)$ оптимальное управление, переводящее систему из $x_\circ$ в x_T, а через $u_k\ (t)$ – управление, переводящее систему из x_k в x_T, где $x_k = x(t_k),\ \ t_\circ < t_k < T, x(t_k) \in x_{opt}\ (t)$.

Соответствующие значения функции $V(\bullet)$ будут равны

$$V(x_\circ, t_\circ) = V_\circ,\ V(x_k, t_k) = V_k.$$

Из этого следует

$$u_0^*(t) : x_0 \to x_T,\ V(x_0, t_0) = V_0\ ; V_0 \neq V_k, \text{но } V_k = \min_{u \in U} \int_t^T W(\bullet) dt.$$

$$u_k(t) : x_k \to x_T,\ \ V(x_k, t_k) = V_k\ .$$

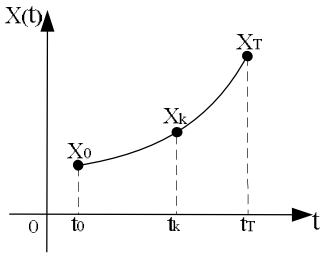


Рис. 7.14. Оптимальная траектория перевода системы из x_0 в x_T

Следовательно, на участке (t_k, T) имеем $u_k\ (t) \equiv u^*_\circ(t)$.

Принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом, сводится к следующему: Каким бы ни было начальное состояние x_0 и начальное оптимальное управление $u^*_\circ(t)$, последующее управление u_k всегда должно быть также оптимальным относительно состояния, возникшего в результате первого этапа управления. Таким образом, согласно этому принципу, оптимальное управление на интервале $t_\text{K} \le t \le T$ не зависит от того, как попала система в точку x_k, а определяется лишь ее состоянием x_k в рассматриваемый момент времени t_k.

По-другому: кусок оптимальной траектории является частью всей оптимальной траектории, т. е. отрезок экстремали также является экстремалью.

Этот принцип положен в основу метода динамического программирования.

7.5.2. Получение функционального уравнения Р. Беллмана

Для нахождения оптимального управления методом динамического программирования необходимо решить *специальное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных*, называемое функциональным уравнением Р. Беллмана. Получим это уравнение.

Пусть функция $V(\bullet)$ в выражении (7.5.3) является функцией гладкой, дифференцируемой по переменным x, t. Согласно принципу оптимальности Беллмана, независимо от того, каким было управление на отрезке $(t_\circ, t)$, на следующем отрезке (t, T) оно должно быть выбрано оптимальным.

Возьмем любое число $s > 0$, $t < s < T$.

Тогда

$$V[x(t+s), t+s] = \min_{u \in U} \int_{t+s}^{T} W[x(\tau), u(\tau), \tau]\, d\tau. \quad (7.5.4)$$

Оптимальное управление $u(\tau)$ должно доставлять минимум критерию (7.5.4) для любого $s > 0$.

Из (7.5.3) имеем

$$V[x(t), t] = \min_{u} \int_{t}^{T} W d\tau = \min_{u} \left[\int_{t}^{t+s} W d\tau + \int_{t+s}^{T} W d\tau \right] =$$

$$= \min_{u} \int_{t}^{t+s} W d\tau + \min_{u} \int_{t+s}^{T} W d\tau =$$

$$= \min_{u} \int_{t}^{t+s} W d\tau + V[\, x(t+s),\, t+s]. \qquad (7.5.5)$$

Так как было сделано предположение о гладкости функции $V(\bullet)$, то существует предел

$$lim \frac{V[x(t+s), t+s] - V[x(t), t]}{s} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} \dot{x}, \quad (7.5.6)$$

где $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ – вектор-градиент скалярной функции $V(x,\ t)$ по переменной x размера $(n*1)$:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} \stackrel{\Delta}{=} (gradV)^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right].$$

В выражении (7.5.5) сделаем следующие преобразования а) и б):

а) для интеграла используем теорему о среднем

$$V[x(t),\, t] = \min_{u} \int_{t}^{t+s} W\, d\tau + V[x(t+s),\, t+s] = \min_{u} [W^{*} s] + V[x(t+ + s),\, t+s];$$

б) вычтем и прибавим $V[x(t),\ t]$:

$$V[x(t),\, t] = \min_{u} [W^{*} s] + V[x(t+s),\, t+s] - V[x(t),\, t] + V[x(t),\, t];$$

так как $V[x(t),\ t] \neq 0$, поэтому сократим обе части полученного выражения на $V[x(t),\ t]$ и вынесем за скобки оператор s. Получим

$$0 = \min_{u} \left[W^{*} + \frac{V[x(t+s), t+s] - V[x(t), t]}{s} \right] s.$$

Сокращая на s $(s \neq 0)$ и переходя к пределу, получим

$$0 = \min_{u} \lim_{s \to 0} \left[W^* + \frac{V[x(t+s), t+s] - V[x(t), t]}{s} \right].$$

Учитывая (7.5.6), получим

$$0 = \min_{u} \left[W(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^{\mathrm{T}} f(x,u) \right]. \quad (7.5.7)$$

Получили основное функциональное уравнение Р. Беллмана. Функциональное уравнение Р. Беллмана *является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных* относительно неизвестной функции $V(x, t)$. Если для (7.5.7) существует решение $V(x, t)$, то соответствующее ему управление $u(x, t)$ будет доставлять минимум критерию (7.5.5).

7.5.3. Метод динамического программирования

Динамическое программирование можно определить как метод оптимизации многошаговых процессов принятия решений (средство отыскания экстремальных значений функции, позволяющее указать пути решения целого класса задач оптимизации в теории управления).

В основе метода динамического программирования лежат два следующих важных принципа.

1. *Принцип оптимальности* утверждает, что необходимо всегда обеспечивать оптимальное (в смысле принятого критерия) продолжение процесса относительно уже достигнутого его состояния, т. е. решение на каждом последующем шаге должно приниматься с учётом результата, достигнутого на предыдущих шагах, и в соответствии с принятыми критерием эффективности действий.

Ниже будет показано, что этот принцип имеет довольно простую математическую интерпретацию, выражающуюся в составлении определенных рекуррентных соотношений.

2. *Принцип вложения* утверждает, что природа – характер задачи, допускающий использование метода динамического

программирования, не меняется при изменении количества шагов процесса, т. е. форма такой задачи инвариантна относительно количества шагов процесса или итераций *N*. В этом смысле всякий конкретный процесс с заданным числом *N* оказывается как бы вложенным в семейство подобных ему процессов и может рассматриваться с позиции более широкого класса задач.

Реализация названных принципов дает гарантию того, что решение, принимаемое на очередном шаге, окажется наилучшим с точки зрения всего процесса в целом (а не «узких интересов» данного этапа); последовательность решения (одношаговой, двухшаговой и т. д.) задач приведет к решению исходной *N*-шаговой задачи.

Особенности построения схемы динамического программирования. Оптимальное решение находится в два прохода; причем, сначала делается обратный проход, а затем – прямой. Схема динамического программирования строится так, что первым исследуется конечный этап того реального явления, которое отражено в задаче оптимизации. Этот этап, как правило, может быть изучен и спланирован сам по себе наилучшим (в смысле принятого критерия), образом, поскольку является последним. Но сделать это можно лишь на основе предположений об ожидаемых исходах предшествующего (но еще не изученного) этапа. Такой подход позволяет определить *набор условных оптимальных решений.* После анализа конечного этапа, нужно рассмотреть аналогичную задачу применительно к предпоследнему этапу процесса, но потребовать при этом, чтобы желаемый эффект был достигнут не на этапе отдельно, а на двух последних этапах вместе. Тем самым будет найден второй набор условных оптимальных решений. Повторив подобные операции (для третьего от конца, четвертого от конца и т. д. этапов исследуемого процесса), можно найти решение задачи в целом. Осуществляя прямой проход, находят набор реальных оптимальных решений.

Рассмотрим особенности построения одной из схем динамического программирования. Пусть дано “*n*” неотрицательных известных функций вида

$f_1(x_1), f_2(x_2),...,f_i(x_i),...,f_n(x_n)$, где $0 \le x_i \le M$ – дискретные значения аргументов этих функций, на которые наложены некоторые ограничения.

Для простоты предложим, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b_n, a_i > 0 . \qquad (*)$$

Пусть для любого набора $x_1,x_2,...,x_n$ существует *аддитивный критерий*:

$$F(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) .$$

Предположим, что ограничения, наложенные на аргумент x_i, такие, что существует верхняя $\sup F(x_1;x_2;...;x_n)$ или нижняя $\inf F(x_1;x_2;...;x_n)$ граница множества аддитивных критериев, т. е.

$$\Phi_{1,2,...,n}(b_n) = extrF(x_1, x_2,...., x_n) \quad . \qquad (**)$$

Определим такой набор $x_1,x_2,...,x_n$ для соответствующих функций $f_1(x_1), f_2(x_2),...,f_i(x_i),...,f_n(x_n)$, чтобы, удовлетворив ограничению (*), получить экстремальное значение $F(x_1,x_2,...,x_n)$, т. е. найдём $\Phi_{1,2,...,n}(b_n)$ и соответствующей ей (границы) набор аргументов.

Предположим, что из совокупности $x_i, i = 1,2,...,n$ выделена и зафиксирована величина x_n. Если в этой ситуации найти экстремальное значение $F(x_1,...,x_{n-1})$ по остальным переменным, то окажется, что полученное решение будет зависеть от выбранного значения x_n. Действительно, вследствие аддитивности критерия $F(x_1,...x_n)$ справедливо следующее равенство:

$$F(x_1, x_2,..., x_n) = f_n(x_n) + extr[\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)],$$

которое подтверждает предыдущее высказывание (слагаемое можно вынести за знак *extr* экстремума, поскольку оно связано только с x_n).

При любом постоянно целом значении $x_n \geq 0$ переменные $x_1,...,x_{n-1}$ должны удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq b_n - a_n x_n,$$

вытекающему из исходного ограничения (*) и требования неотрицательности и целочисленности.

Введя обозначение

$$\Phi_{1,2,...,(n-1)}(b_{n-1}) = extr[\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)],$$

где $b_{n-1} = b_n - a_n x_n$,

можно утверждать, что

$$\Phi_{1,2,...,n}(b_n) = extr\{f_n(x_n) + \Phi_{1,2,...,(n-1)}(b_{n-1})\},$$

где x_n принимает значения $0,1,2,...,\Phi(b_n / a_n)$.

Таким образом, если известна граница заданного аддитивного критерия $\Phi_{1,2,...,(n-1)}(b_{n-1})$, первоначальная задача сводится к одномерной задаче оптимизации.

Поскольку $\Phi_{1,2,...,(n-1)}(b_{n-1})$ – верхняя (нижняя) граница множества $F(x_1,x_2,...,x_{n-1})$, то задача отыскания этой границы полностью совпадает с исходной (различие лишь в числе переменных).

Следовательно, выделив x_{n-1} и повторив все предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что

$$\Phi_{1,2,...,(n-1)}(b_{n-1}) = extr[f_{n-1}(x_{x-1}) + \Phi_{1,2,...,(n-2)}(b_{n-2})].$$

Систематизируя вышеизложенное, можно привести рекуррентные зависимости для отыскания (**)

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{1,2}(b_2) = extr[f_2(x_2) + f_1(b_n - a_2 x_2)] \\
&\Phi_{1,2,3}(b_3) = extr[f_3(x_3) + \Phi_{12}(b_n - a_3 x_3)] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi_{1,2,...,n}(b_n) = extr[f_n(x_n) + \Phi_{12...(n-1)}(b_n - a_n x_n)]
\end{aligned}\right\}.$$

В заключение следует кратко отметить *преимущества метода динамического программирования:*

– Методом динамического программирования можно исследовать системы оптимального управления значительно более широкого класса, чем системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Поэтому он применим не только к оптимальным задачам динамики, но и к весьма широкому кругу технических, медицинских и экономических задач, в которых связи между фазовыми координатами, управлением и критерием оптимальности могут задаваться как в виде уравнений весьма произвольного вида, так и в виде экспериментально определенных графиков или таблиц численных данных.

– Метод дает возможность решать задачи, которые не исследовались ранее из-за отсутствия соответствующего математического аппарата: например, вариационные задачи с ограничениями – неравенствами или конечномерные экстремальные задачи с дискретной структурой.

– Метод позволяет упростить поиск оптимальных решений в ряде случаев за счет резкого сокращения объёмов вычислений.

– Метод допускает широкое применение средств вычислительной техники, что облегчает сложные исследования.

К недостаткам можно отнести отсутствие универсального алгоритма, который был бы пригоден для решения всех задач. Дело в том, что алгоритмы в рамках динамического программирования объединены лишь общей идеей и в каждом конкретном случае должны формироваться применительно к условиям задачи. Кроме того, возникают значительные трудности при анализе задач большой размерности.

7.6. Связь метода динамического программирования с функцией А. М. Ляпунова

Рассмотрим случай, когда верхний предел в критерии оптимальности равен бесконечности, т. е.

$$J = \int_{t_\circ}^{\infty} W(x, u, t)dt \to \min_{u(x,t)}.$$

Пусть в результате решения уравнения Р. Беллмана найдена производящая функция $V(x, t)$ и соответствующее оптимальное управление $u(x, t)$. Из уравнения Р. Беллмана

$$0 = \min_{u} \left[W(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^{\mathrm{T}} f(x,u,t) \right]$$

имеем

$$0 = \min_{u} \left[W(x,u,t) + \frac{dV}{dt} \right].$$

Здесь $\frac{dV}{dt}$ – полная производная функции $V(\bullet)$.

Подставим сюда найденное оптимальное управление $u^*(x, t)$

$$W[x, u^*(x, t), t] + \frac{dV}{dt} = 0.$$

Откуда имеем

$$\frac{dV}{dt} = -W[x, u^*(x, t), t].$$

Пусть $W(\bullet)$ – знакоопределенная по x и положительная функция. Обычно для управляемой системы должно выполняться условие $x(\infty) = 0$, $u(\infty) = 0$ (здесь уравнения системы заданы в отклонениях). В рассматриваемом случае (верхний предел в критерии равен бесконечности) функция $V(\bullet)$ также должна удовлетворять граничному условию $V[x(\infty), \infty] = 0$. Все эти условия будут выполнены, если решением уравнения Беллмана будет функция $V(\bullet)$, которая будет знакоопределенной положительной. Действительно, в этом случае решение уравнения Р. Беллмана $V(\bullet)$ будет функцией А. М. Ляпунова для замкнутой системы и ее асимптотическая устойчивость гарантируется.

Связь между методом динамического программирования и функцией А. М. Ляпунова заключается в следующем. Принципу оптимальности Р. Беллмана удовлетворяет некоторое *множество производящих функций* $V(\bullet)$. Действительное же решение задачи дают лишь те из них, которые являются функцией А. М. Ляпунова для замкнутой системы. Такие функции называются *оптимальными функциями Ляпунова*.

Найденные по этим функциям законы управления обеспечивают:

– во-первых, оптимальность в смысле заданного критерия;

– во-вторых, асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Вопросы, задачи

1. Привести постановку задачи оптимального управления.
2. Перечислить некоторые частные критерии оптимальности, показав их физический смысл.
3. Показать основные характеристики методов классического вариационного исчисления.
4. Что характерно для задачи на условный экстремум?
5. Что выражают экстремали уравнения Эйлера-Пуассона?
6. Привести полную формулировку принципа максимума Л. С. Понтрягина.
7. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = C^T X \end{cases}, \text{ где } A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0{,}8 \end{vmatrix};\ C = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Необходимо перевести систему из начального состояния $x_0(t)$ в конечное $x_k(t)$ за минимальное время при ограничении на управление

$$|u| \le u_{\max}.$$

8. Сформулировать теорему А. Фельдбаума об *n*-интервалах переключения оптимального управления.
9. Математическое описание линейной динамической системы задано в пространстве состояний в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}.$$

Заданы начальные и конечные значения состояния объекта управления

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(T) = 3 \\ x_2(T) = 0 \end{cases}.$$

Необходимо обеспечить переход из начальной точки $x_0(t)$ в конечную $x_k(t)$ за время $T = 3$ [с.] с качеством процесса

$$J = \min_{U \in \Omega_U} \int_0^T (u^T Q u) d\tau .$$

10. Фирма имеет два дочерних предприятия. По каждому дочернему предприятию известен возможный прирост прибыли (табл. 7.1):

Таблица 7.1

Возможный прирост прибыли

x	$q_1(x)$	$q_2(x)$
0	0	0
20	22	18
40	30	35
60	41	45
80	55	47
100	63	69

Требуется распределить средства C = 100 [тыс. у.е.] между дочерними предприятиями так, чтобы общий прирост фирмы $\varphi_n(C)$ был максимальным

$$\varphi_n(C) = max\,[q_n(x) + \varphi_{n-1}(C-x)]$$
$$0 \le x \le C$$
$$x = 20k, \text{ где } k = 0, 1, 2,...$$

11. Сформулировать принцип оптимальности Р. Беллмана.

12. Записать основное функциональное уравнение Р. Беллмана – специальное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных.

13. Фирма имеет два дочерних предприятия. По каждому дочернему предприятию известен возможный прирост прибыли (табл. 7.2):

Таблица 7.2

Возможный прирост прибыли

x	$q_1(x)$	$q_2(x)$
0	0	0
20	15	17
40	25	22
60	33	40
80	49	45
100	60	61

Требуется распределить средства $C = 100$ [тыс. у.е.] между дочерними предприятиями так, чтобы общий прирост фирмы $\varphi_n(C)$ был максимальным

$$\varphi_n(C) = max\,[q_n(x) + \varphi_{n-1}(C-x)]$$
$$0 \le x \le C$$
$$x = 20k, \text{ где } k = 0, 1, 2,...$$

14. Сформулировать принципы оптимальности и вложения. Показать использование их в схеме динамического программирования.

15. Почему в методе динамического программирования начинают просмотр с обратного прохода и только затем осуществляют прямой проход.

16. Привести полную характеристику метода динамического программирования Р. Беллмана.

17. Показать достоинства и недостатки метода динамического программирования.

18. Показать связь метода динамического программирования с функцией А. М. Ляпунова.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Управление реальными системами осуществляется, как правило, в условиях неопределенности, обусловленной, например, наличием внешних возмущений; погрешностями при выполнении программы управления; ошибками в канале измерений; запаздыванием, вызванным конечностью времени, необходимого для получения и обработки результатов измерений и т. д. В данной работе, к сожалению, не учитываются многие из перечисленных факторов, однако в перспективе работа будет продолжена с учетом отдельных факторов неопределенности.

Данная книга охватывает широкий круг вопросов теории автоматического управления, связанных с исследованием свойств динамических систем, таких как устойчивость движения системы, наблюдаемость и управляемость, нелинейность, дискретность, возможность оптимального управления.

В первой главе излагаются основные понятия и определения систем автоматического управления; приведен один из вариантов классификации систем автоматического управления; математический аппарат описания САУ и ее элементов в терминах “вход – выход” и в пространстве состояний. Рассматриваются временные и частотные характеристики типовых звеньев САУ; алгебра структурных преобразований; прямое и обратное преобразование Лапласа. Подчеркивается, что рассмотрение свойств системы в двух пространствах не противоречит друг другу, а делает более полным представление динамической системы и ее свойств.

Проблеме устойчивости непрерывных САУ посвящена вторая глава. Дается постановка проблемы устойчивости по А. М. Ляпунову. Анализ устойчивости системы осуществляется в терминах “вход–выход” и в пространстве состояний: теоремы А. М. Ляпунова по первому приближению во временной области, алгебраические и частотные критерии; приводится построение областей устойчивости в плоскости одного и двух параметров методом, предложенным Ю. И. Неймарком.

В третьей главе подробно рассмотрены методы оценки качества линейных САУ: прямые – по виду переходного

процесса; корневые – по корням характеристического уравнения; интегральные оценки качества.

Постановке задачи параметрического синтеза и ее решению (в двух пространствах) посвящена четвертая глава книги. Изложен классический метод параметрического синтеза корректирующего устройства в прямой связи системы. Рассмотрено современное решение задачи параметрического синтеза в пространстве состояний с использованием модального закона управления.

Пятая глава посвящена нелинейным системам и их основным свойствам. Рассмотрены основные типы нелинейностей; точные методы исследования свойств нелинейных САУ. Изображение движений в фазовой плоскости. Системы с переменной структурой. Второй (прямой) метод А. М. Ляпунова поверки устойчивости движения динамической системы. Абсолютная устойчивость. Критерий В. М. Попова.

Цифровым системам управления посвящена шестая глава. Приводятся кратко математический аппарат описания дискретных САУ, z-преобразование, анализ устойчивости и оценка качества дискретных САУ. Укрупненный алгоритм параметрического синтеза дискретных САУ.

Системы оптимального управления представлены в седьмой главе. Приведены методы классического вариационного исчисления. Критерии оптимальности управления. Линейные системы, оптимальные по быстродействию. Принцип максимума Л. С. Понтрягина. Функциональное нелинейное дифференциальное уравнение Р. Беллмана в частных производных. Метод динамического программирования Р. Беллмана.

Следует отметить, что новое перспективное направление исследований в области конструктивных методов построения систем оптимального управления является решение задач, связанных с анализом чувствительности и устойчивости относительно возмущений. В последнее время интерес к этой проблематике усилился в теории оптимального управления в связи с конкретными практическими приложениями и значительными теоретическими трудностями, приводящими к новым интересным задачам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теория автоматического управления / Под ред. *А. А. Воронова.* – Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1986. – 587 с.

2. *Солодовников В. В. и др.* Основы теории и элементов систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1985. – 398 с.

3. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления.– СПб.: Профессия, 2003. – 746 с.

4. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1965.

5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 577 с.

6. *Лурье Б. Я., Энрайт Дж.* Классические методы автоматического управления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.

7.*Фатеев А. В.* Основы линейной теории автоматического регулирования. – М.: Госэнергоиздат, 1989. – 275 с.

8. *Фатеев А. В., Вавилов А. А. и др.* Расчет автоматических систем /под ред. Фатеева А.В. – М.: Высшая школа, 1983. – 290 с.

9. *Иващенко Н. Н.* Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. – М.: Машиностроение, 1983. – 421 с.

10. *Васильев Д. В., Чуич В. Г.* Системы автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1987. – 245 с.

11. *Васильев Д. В., Чуич В. Г.* Системы автоматического управления (примеры расчета). – М: Высшая школа, 1987. – 301 с.

12. *Цыпкин Я. З.* Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1987. – 293 с.

13. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 637 с.

14. *Емельянов С. В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1967. – 421 с.

15.*Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз,1986. – 629 с.

16.*Фельдбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966. – 624 с.

17.*Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1969. – 118 с.

18. *Цыпкин Я. З.* Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964. – 312 с.

19. *Бесекерский В. А.* Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1986.– 278 с.

20. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984. – 541 с.

21. *Кузин Л. Т.* Расчет и проектирование дискретных систем управления. – М.: Машгиз, 1963. – 465 с.

22. *Красовский Н. Н.* Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука, 1989. – 710 с.

23. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управлению / Под ред. *В. А. Бесекерского.* – М.: Наука, 1988. – 475 с.

24. *Топчеев Ю. И., Цыпляков А. П.* Задачник по теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1987. – 592 с.

25. *Бегдуллаев К. Б.* Анализ и синтез САУ методами пространства состояний. – Алма-Ата: КазПТИ, 1982. – 89 с.

26. *Волобуева О. П.* Основы теории управления: Учебник. – Алматы: КазНТУ, 2006. – 254 с.

27. *Волобуева О. П.* Нахождение оптимального управления линейной динамической системой методом скользящей вариации // Сб. Применение вычислительных средств в научных исследованиях и учебном процессе. – М.: МГУ, 1992. – С. 19–24.

28. *Волобуева О.П.* Исследование динамики САУ: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 1999. – 86 с.

29. *Волобуева О. П.* Исследование линейных автономных дискретных САУ. – Алматы: КазНТУ, 1995. – 28 с.

30.*Волобуева О. П., Сагнаева А. Ш.* Анализ качества процессов в линейных САУ. – Алматы: КазНТУ, 1999. – 40 с.

31. *Хисаров Б. Д., Волобуева О. П.* Руководство к лабораторным работам по ТАУ. – Алма-Ата: КазПТИ, 1987. – Ч. 3. – 30 с.

32. *Ашимов А. А., Волобуева О. П. и др.* Адаптивная система непосредственного цифрового управления процессом окисления сернистого ангидрида в контактном аппарате // III Всесоюз. симп. по “Теории информационных систем и систем управления с распределенными параметрами”. Уфа, 1976. – Ч. I. – С. 43–46.

33. *Волобуева О. П., Джарболов Ш.И. и др.* К выбору

параметров нелинейных цифровых регуляторов // Сб. “Кибернетика и автоматика”. – Алма-Ата: КазПТИ, 1977. – Вып. 6. – С. 123–128.

34. *Джарболов Ш.И., Волобуева О.П.. и др.* Математическоеобеспечение I-й очереди АСУ ТП “Кислота” // Всесоюз. науч.-техн. конф. “Математическое, программное и информационное обеспечения АСУ ТП”, II. – Черновцы, 1977. – С. 77.

35. *Джарболов Ш. И., Волобуева О. П. и др.* Опыт разработки математического обеспечения I-й очереди АСУТП “Кислота” // Сб. “Кибернетика и автоматика ”.– Алма-Ата: КазПТИ, 1977. – Вып. 6. – С. 136–141.

36. *Джарболов Ш. И., Волобуева О. П.* Опыт разработки системы автоматизированного исследования непрерывных технологических процессов (САИ ТП) // Всесоюз. науч.-техн. сем. “Опыт разработки и использования типовых проектных решений при внедрении АСУ ТП и производствами на предприятиях цвет. мет.” – М., 1979. – С. 66–67.

37. *Волобуева О. П., Наурызбаев К. Ж.* К выбору оптимального интервала дискретизации непрерывных сигналов // Сб. “Дифференциальные уравнения и задачи прикладного анализа”. – Алма-Ата: КазГУ, 1982. – С. 52–58.

38. *Волобуева О. П.* Об оптимальном интервале дискретизации двумерного случайного процесса // Реф. жур. ТК. – 1982. – № 3 (125). Рук. деп. в КазНИИНТИ 07.12.82. – Р. 298. – С.109–110.

39. *Джарболов Ш. И., Волобуева О. П.* Оценка периода квантования в системе автоматизации экспериментальных исследований // Сб. “Вычислительные системы в АНИ” (секция III) // I Республ. конф. по автоматизации научных исследований. – Алма-Ата, 1982. – С. 53–54.

40. *Цыпкин М. Г., Слуцкий И. З., Волобуева О. П.* К выбору оптимального режима процесса электролитического рафинирования алюминиевого-кремниевого сплава // Изв. вузов. Сер. “Цветная металлургия”. – 1983. – № 4. – С. 21–24.

41. *Волобуева О. П.* Оценка периода квантования сигналов в АСУ ТП // Создание и внедрение автоматизированных и автоматических систем управления непрерывными и дискретно-

непрерывными технологическими процессами // X Всесоюз. науч.-техн. совещ. – М., 1983. – Ч. II. – С. 51–52.

42. *Волобуева О. П.* К выбору оптимального периода квантования управляющего воздействия по квадратичному критерию качества // Межвуз. сб. науч. тр. "Модели, методы и системы автоматизации производственно – технологических процессов". – Алма-Ата, 1990. – С. 73–79.

43. *Волобуева О. П.* Нахождение оптимального управления методом скользящей вариации // Межвуз. сб. науч. тр. "Математическое и программное обеспечение интегрированных систем исследования и проектирования". – Алма-Ата, 1993. – С. 37–45.

44. *Волобуева О. П.* Автоматизированная процедура решения задачи параметрической идентификации при неполной информации о состоянии объекта // Межвуз. сб. науч. тр. "Модели и методы автоматизации управления производственными системами". – Алматы: КазНТУ, 1995. – Вып.1. – С. 26–32.

45. *Волобуева О. П.* Субоптимальное управление процессом превращения в контактном аппарате в условиях неполной информации о его состоянии // Межвуз. сб. науч. тр. "Модели и методы автоматизации управления производственными системами". – Алматы: КазНТУ, 1995. – Вып.1. – С. 33–39.

46. *Волобуева О. П.* Автоматизированная информационная система "Исследователь" // Межвуз. сб. науч. тр. "Модели и методы автоматизации управления производственными системами". – Алматы, 1996. – Вып.2. – С. 90–95.

47. *Волобуева О. П.* Математическое обеспечение АИС "Исследователь" // Сб. науч. тр. "Современные научно-технические проблемы и задачи обучения авиационных специалистов".– Алматы: Мин. транспорта и коммуникаций РК, 1998. – Вып. 1. – С. 70–76.

48. *Volobuyeva O. P.* Identification of the linear time-invariant dynamical systems in conditions of incomplete information according to its state // Proceedings International Conference on Informatics and Control, St. Petersburg, Russia, 1997. – V. 3. – PP. 1064–1066.

49. *Volobuyeva O. P.* Analytical Designing of System of Optimal Control for Particular Class of Objects // Proceedings of the

Second International Scientific Conference in the Republic of Kazakhstan “The Informative Technologies and Control”. – Almaty, 1999. – P. 65.

50. *Kuchkarov B. K., Volobuyeva O. P.* Correlative – Extreme System Combined Synthesis Conception for a Navigation Complex // Proceedings of the Second International Scientific Conference in the Republic of Kazakhstan “The Informative Technologies and Control”. – Almaty, 1999. – P. 63.

51. *Волобуева О. П.* Один из подходов к аналитическому проектированию системы оптимального управления // Вестн. КазНТУ, 2000, № 1. – С. 87–91.

52. *Волобуева О. П., Шукаев Д. Н.* Компьютерная технология проектирования систем // Вестн. МОН РК. – 2003. – № 1. – С. 93–96.

53. *Ashimov A., Borovsky Y.,Volobuyeva O., Kulekeev Zh.* Methods of the parametrical regulation of mechanisms market economy.Proceedings of the 15th International Conference on Systems Science “Knowledge Engineering and Intelligent Systems, Technical Applications, Non – technical Applications”, Wroclaw, Poland. – 2004. – V. III. – PP. 439 – 446.

54. *АшимовА. А., Боровский Ю. В., Волобуева О. П.* Моделирование и выбор версий сценария государственного регулирования механизма развивающейся экономики // Сб. тр. ИПУ РАН ”Управление большими системами”. – М.: ИПУ РАН, 2004. – Вып.9. – С. 27–39.

55. *Ашимов А. А., Ашимов Ас. А. и др.* О выборе эффективных законов параметрического регулирования механизмов рыночной экономики // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 3. – С.105–111.

56. *Volobuyeva O.* The computer technology of designing of system// ISAS/CITSA 2004: International Conference on Cybernetics and Information Technologies, Systems and Applications and 10h International Conference on Information Systems Analysis and Synthesis Proceedings.– 2004.–Vol. 4.–PP. 165 – 167.

СОДЕРЖАНИЕ

	Предисловие	3
	Введение	5
1	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	8
1.1	Основные термины теории управления	8
1.2	Классификация САУ по характеру внутренних динамическихпроцессов	13
1.3	Уравнения динамики. Линеаризация	21
1.4	Интегральное преобразование Лапласа	31
1.5	Передаточные функции. Алгебра структурных преобразований	34
1.6	Типовые динамические звенья	41
	Вопросы, задачи	58
2	УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	61
2.1	Понятие устойчивости. Устойчивость по А.М. Ляпунову	61
2.2	Теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению	66
2.3	Алгебраические критерии устойчивости	69
2.4	Частотные критерии устойчивости	73
2.5	Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы	81
	Вопросы, задачи	91
3	МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА	95
3.1	Оценка качества регулирования в типовых режимах.	96
3.2	Оценка качества регулирования в установившемся режиме	100
3.3	Прямой метод оценки качества регулирования	102
3.4	Корневой метод оценки качества регулирования	105
3.5	Интегральные оценки качества регулирования	110
	Вопросы, задачи	114
4	СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ	116
4.1	Задачи и методы анализа САУ. Постановка задачи синтеза САУ	116
4.2	Синтез корректирующих устройств (в прямой цепи).	122
4.3	Методы построения переходного процесса	130

4.4	Принципы управления и законы регулирования….	133
4.5	Понятия управляемости и наблюдаемости. Критерии управляемости и наблюдаемости Р. Калмана и Е. Гильберта….....	151
4.6	Постановка и решение задачи синтеза САУ с заданным качеством в пространстве состояний.....	164
	Вопросы, задачи.....	169
5	НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ.....	172
5.1	Основные типы нелинейностей в системах….....	173
5.2	Исследование нелинейных САУ в фазовой плоскости. Системы с переменной структурой..…...	177
5.3	Устойчивость в малом, большом и целом……....	193
5.4	Второй (прямой) метод А.М. Ляпунова….....	196
5.5	Абсолютная устойчивость. Критерий В.М. Попова	217
	Вопросы, задачи…….....	224
6	ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ……	226
6.1	Математический аппарат описания цифровых САУ.....	226
6.2	Анализ устойчивости дискретных систем….....	243
6.3	Анализ качества цифровых САУ…….....	248
6.4	Этапы решения задачи синтеза цифровых САУ.....	253
	Вопросы,задачи.....	255
7	СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	256
7.1	Об основных направлениях в теории оптимальных процессов….....	256
7.2	Критерии оптимальности управления……..….....	263
7.3	Методы классического вариационного исчисления	269
7.4	Линейные системы, оптимальные по быстродействию Принцип максимума Л.С.Понтрягина.....	274
7.5	Метод динамического программирования Р. Беллмана	285
7.6	Связь метода динамического программирования с функцией А.М. Ляпунова…….……	295
	Вопросы, задачи……...……...	296
	Заключение……..……..	299
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	301

Учебное издание

Волобуева Ольга Петровна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

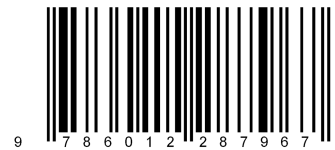
Учебник

Нач. РО УИЦ *З. А. Губайдулина*
Редактор *З. А. Губайдулина*
Компьютерная верстка *А. Б. Аришова*

Подписано в печать 12.01.2015 г.
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
Усл. п.л.17,9. Уч.- изд. л. 19,2. Тираж 300 экз. Заказ № 287.
Цена договорная.

Издание Казахского национального
технического университетаимени К.И. Сатпаева
Информационно-издательский центр КазНТУ
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-228-796-7



Ольга Петровна Волобуева

Профессор, кандидат технических наук, действительный член Международной академии информатизации (МАИН), награждена Ассоциацией вузов Республики Казахстан медалью имени А. Байтурсынова "ЛУЧШИЙ АВТОР" за написание учебной литературы нового поколения. Опубликовала свыше 120 научных и учебных работ, в том числе учебники и учебные пособия:

Системы оптимального управления (2012)
Проектирование информационных систем (2009)
Основы теории управления (2005)
Теоретические основы компьютерных систем (2001)
Исследование динамики САУ (1999)
Идентификация объектов управления (1997)

Профессор О.П.Волобуева является ПОЧЕТНЫМ РАБОТНИКОМ ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН, лауреатом премии "БІЛІМ САРДАРЫ".

050013, г. Алматы, ул. Сатпаева, 22
Учебно-издательский центр
КазНТУ имени К. И. Сатпаева
Тел.: 257 70 54

О. П. Волобуева

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ