

ИДЕАЛЫ БЕЗ МИНИМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛУРЕШЁТКАХ РОДЖЕРСА

А. А. ИСАХОВ

В работе изучаются обобщённо вычислимые семейства всюду определённых функций и их обобщённо вычислимые нумерации, а так же принимаются попытки найти элементарные свойства соответствующих полурешёток Роджерса, которые отличаются от свойств классических полурешёток Роджерса для семейств вычислимых функций. Рассматриваются семейства всюду определённых A -вычислимых функций, где $\varnothing' \leq_T A$.

Сюръективное отображение множества натуральных чисел ω на исследуемый класс конструктивных объектов (т. е. объектов, допускающих формальное описание в каком-нибудь языке, снабжённом гёделевской нумерацией формул, [1]) называется *нумерацией* данного класса. Пусть S — произвольное семейство вычислимо перечислимых (далее в. п.) множеств, тогда нумерация $\alpha : \omega \rightarrow S$ называется *вычислимой*, если $G_\alpha \equiv \{(x, m) \mid x \in \alpha(m)\}$ является в. п. множеством. Отождествляя функции с их графиками, мы можем утверждать, что для семейства F частично вычислимых функций нумерация $\alpha : \omega \rightarrow F$ вычислима, если бинарная функция $g_\alpha \equiv \lambda x \lambda y [\alpha(x)](y)$ частично вычислима. Пусть $\alpha : \omega \rightarrow S$ и $\beta : \omega \rightarrow S$ — две нумерации одного и того же множества S . Будем говорить, что нумерация α *сводится* к нумерации β , если существует вычислимая функция f , такая что $\alpha = \beta f$; будем символически записывать это как $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются *эквивалентными* ($\alpha \equiv \beta$). Обозначим через $\deg(\alpha)$ степень нумерации α , т. е. совокупность нумераций $\{\beta \mid \beta \equiv \alpha\}$. Отношение сводимости нумераций

является предпорядком на множестве всех вычислимых нумераций семейства S , которое мы обозначаем через $\text{Com}(S)$. Это отношение индуцирует частичный порядок на множестве степеней нумераций из $\text{Com}(S)$, которое также будем обозначать через $\leq$. Частично упорядоченное множество $\mathcal{R}(S) = \langle \{\deg(\alpha) \mid \alpha \in \text{Com}(S)\}, \leq \rangle$ является верхней полурешёткой, которая называется *полурешёткой Роджерса семейства S* .

Нумерация α множества S называется *минимальной*, если для любой нумерации β множества S из $\beta \leq \alpha$ следует, что $\alpha \leq \beta$. Вычислимая взаимно однозначная нумерация называется *фридберговой*. Нумерационная эквивалентность θ_α нумерации α определяется как $\theta_\alpha = \{(x, y) \mid \alpha(x) = \alpha(y)\}$. Эквивалентность ε называется *позитивной*, если ε в. п. Через $[W]_\varepsilon$ обозначается множество всех чисел, ε -эквивалентных некоторому элементу из W .

Данные сведения, а также оставшиеся не определёнными понятия и обозначения из теории нумераций см. в [1, 2].

Пусть F — семейство всюду определённых функций, вычислимых относительно оракульного множества A . Нумерация $\alpha : \omega \rightarrow F$ называется *A -вычислимой*, если бинарная функция $\alpha(n)(x)$ является A -вычислимой, [3]. Семейство F называется *A -вычислимым*, если оно имеет A -вычислимую нумерацию. Если A — рекурсивное множество, то мы имеем дело с семейством вычислимых функций и его классическими вычислимыми нумерациями. Частично упорядоченное множество $\mathcal{R}_A(F) = \langle \{\deg(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C}_A(F)\}, \leq \rangle$, где $\mathcal{C}_A(F)$ — совокупность всех A -вычислимых нумераций семейства F , называется *полурешёткой Роджерса семейства F* , [3, 4].

Известно, что в классическом случае полурешётка Роджерса вычислимого семейства F либо состоит из одного элемента, либо бесконечна, [5]. В нетривиальном случае она не является решёткой, не имеет наибольшего элемента и содержит либо один, либо бесконечно много минимальных элементов, [6].

Для A -вычислимых нумераций семейств всюду определённых функций, где $\emptyset' \leq_T A$, справедливы следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F — бесконечное A -вычислимое семейство всюду определённых функций. Тогда F имеет бесконечное число попарно неэквивалентных A -вычисляемых фридберговых нумераций.

ТЕОРЕМА 2. Существуют A -вычислимое семейство F и A -вычисляемая нумерация α семейства F , такие что никакая A -вычисляемая фридбергова нумерация семейства F не сводится к α .

ТЕОРЕМА 3. Если A -вычислимое семейство F содержит по крайней мере две функции, то F не имеет A -вычислимую главную нумерацию.

Доказательства этих утверждений получаются очевидными обобщениями доказательств соответствующих результатов из [7, 8], изначально анонсированных в [9], где теоремы 1–3 были доказаны для конкретных оракулов $A = \emptyset^{n+1}$, $n \in \omega$.

Хорошо известны примеры бесконечных семейств в. п. множеств, чьи полурешётки Роджерса содержат идеалы без минимальных элементов, к примеру, семейство всех в. п. множеств, [10]. Более того, существует вычислимое семейство в. п. множеств, чья полурешётка Роджерса не имеет минимальных элементов, [11, 12].

В отличие от случая семейств в. п. множеств, для каждой вычислимой нумерации α бесконечного семейства вычисляемых функций F существует фридбергова нумерация семейства F , которая сводится к α , [5]. Это означает, что полурешётка Роджерса любого вычислимого семейства вычисляемых функций не содержит идеалов без минимальных элементов.

Ниже мы покажем, что этот результат неверен в обобщённом случае при $\emptyset' \leq_T A$, когда вместо вычисляемых семейств и их нумераций рассматриваются A -вычисляемые семейства и их A -вычисляемые нумерации. На самом деле, для любого A -вычислимого семейства F существует A -вычисляемая нумерация F , не имеющая под собой минимальных нумераций. Для этого мы сначала расширим критерий Бадаева для минимальных нумераций до критерия для нумераций, к которым не сводятся минимальные нумерации. Отметим, что эти критерии справедливы для произвольных нумераций произвольных множеств, а не только для вычисляемых ну-

мераций семейств функций.

ТЕОРЕМА 4 [12]. Пусть $\alpha : \omega \rightarrow S$ — нумерация произвольного множества S . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- (а) α является минимальной нумерацией;
- (б) для любого в. п. множества $R \subseteq \omega$, такого что $[R]_{\theta_\alpha} = \omega$, существует вычислимая функция $G(x)$, такая что $(x, G(x)) \in \theta_\alpha$ и $G(x) \in R$ для любых $x \in \omega$;
- (в) для любого в. п. множества $R \subseteq \omega$, такого что $[R]_{\theta_\alpha} = \omega$, существует позитивная эквивалентность $\varepsilon \subseteq \theta_\alpha$, такая что $[R]_\varepsilon = \omega$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть α — нумерация произвольного множества S . Множество S имеет минимальную нумерацию, сводящуюся к α тогда и только тогда, когда существует в. п. множество W , для которого выполняются следующие условия:

- (а) $\alpha(W) = S$;
- (б) для любого в. п. множества $V \subseteq W$, где $\alpha(V) = S$, существует позитивная эквивалентность ε , такая что $\varepsilon \upharpoonright W \subseteq \theta_\alpha$ и $W \subseteq [V]_\varepsilon$.

Здесь $\varepsilon \upharpoonright W$ — отношение эквивалентности, определяемое по правилу

$$(x, y) \in \varepsilon \upharpoonright W \Leftrightarrow (x \notin W \ \& \ y \notin W \ \& \ x = y) \vee (x \in W \ \& \ y \in W \ \& \ (x, y) \in \varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Предположим, что W — в. п. множество, для которого $\alpha(W) = S$ и выполняется условие (б). Пусть f — вычислимая функция, перечисляющая множество W , т. е. $\text{rng}(f) = W$. Достаточно показать, что $\beta = \alpha f$ нумерует множество S и является минимальной нумерацией. Первое непосредственно следует из равенств

$$\beta(\omega) = \alpha f(\omega) = \alpha(W) = S.$$

Для доказательства минимальности зафиксируем нумерацию γ множества S , такую что $\gamma \leq \beta$. Пусть $\gamma = \beta g$ для некоторой вычислимой функции g . Теперь достаточно указать вычислимую функцию h , такую что $\beta \leq \gamma$ посредством h .

Пусть $V = \text{rng}(f \circ g)$. Тогда V является в.п. множеством и $V \subseteq \text{rng}(f) = W$. Поскольку γ нумерует S и $\gamma = \beta g = \alpha f g$, то

$$S = \gamma(\omega) = \beta(\text{rng}(g)) = \alpha(\text{rng}(f \circ g)) = \alpha(V).$$

Из условия (б) следует существование в.п. отношения эквивалентности ε , такого что $\varepsilon \upharpoonright W \subseteq \theta_\alpha$ и $W \subseteq [V]_\varepsilon$. Отсюда, из $W = \text{rng}(f)$ и $V = \text{rng}(f \circ g)$ вытекает, что для любого числа x существует число y , для которого $(f(x), f(g(y))) \in \varepsilon$. Поскольку ε является в.п. отношением, а функции f и g вычислимы, существует вычислимая функция h , для которой $(f(x), f(g(h(x)))) \in \varepsilon$. Так как $\varepsilon \upharpoonright \text{rng}(f) = \varepsilon \upharpoonright W \subseteq \theta_\alpha$, то $\alpha(f(x)) = \alpha(f(g(h(x))))$. Из $\beta = \alpha f$ и $\gamma = \alpha f g$ следует, что $\beta(x) = \gamma(h(x))$ для всех x . Следовательно, $\beta \leq \gamma$ посредством h .

Необходимость. Предположим, что β — минимальная нумерация множества S , которая сводится к заданной нумерации α . Зафиксируем вычислимую функцию f , такую что $\beta = \alpha f$. Пусть W — область значений функции f . Тогда W обладает необходимыми свойствами. В самом деле, W — в.п. множество. Поскольку β является нумерацией S , справедливо

$$S = \beta(\omega) = \alpha f(\omega) = \alpha(W).$$

Значит, условие (а) выполняется. Для проверки условия (б) зафиксируем произвольное в.п. множество V , такое что $V \subseteq W$ и $\alpha(V) = S$. Достаточно определить в.п. отношение эквивалентности ε , для которого $\varepsilon \upharpoonright W \subseteq \theta_\alpha$ и $W \subseteq [V]_\varepsilon$.

Пусть h — вычислимая функция, перечисляющая множество V , и γ — нумерация, сводящаяся к α посредством h . Так как $\alpha(V) = S$, то $\gamma(\omega) = \alpha h(\omega) = \alpha(V) = S$. Значит, γ является нумерацией S . Кроме того, $V \subseteq W$, а h и f — вычислимые функции. Следовательно, функция g , определённая как $g(x) = \mu_y (h(x) = f(y))$, всюду определена и вычислима. Так как $\gamma(x) = \alpha(h(x)) = \alpha(f(g(x))) = \beta(g(x))$, то $\gamma \leq \beta$ посредством g . Учитывая то, что β является минимальной нумерацией множества S , мы можем утверждать, что $\beta \leq \gamma$. Следовательно, $\beta = \gamma \hat{g}$ для некоторой

вычислимой функции $\hat{g}$. Тогда

$$\alpha(f(z)) = \beta(z) = \gamma(\hat{g}(z)) = \alpha(h(\hat{g}(z))) \quad (1)$$

для всех z .

Пусть ε является рефлексивным и транзитивным замыканием отношения $\hat{\varepsilon}$, которое определено по правилу

$$x \hat{\varepsilon} y \Leftrightarrow \exists z ([x = f(z) \& y = h(\hat{g}(z))] \vee [x = h(\hat{g}(z)) \& y = f(z)])$$

(т. е. $x \varepsilon y$, если $x = y$ или существуют числа $n \geq 1$ и $x_0, \dots, x_n$, такие что $x = x_0$, $x_i \hat{\varepsilon} x_{i+1}$ для $i < n$ и $x_n = y$).

Очевидно, что $\hat{\varepsilon}$ — вычислимо перечислимое симметричное отношение. Эти свойства сохраняются при рефлексивном и транзитивном замыкании, поэтому ε является позитивной эквивалентностью. Более того, поскольку θ_α является отношением эквивалентности и справедливы соотношения (1) и $\hat{\varepsilon} \upharpoonright W \subseteq \theta_\alpha$, то $\varepsilon \upharpoonright W \subseteq \theta_\alpha$. Для проверки того, что $W \subseteq [V]_\varepsilon$, зафиксируем произвольное $x \in W$. Для однозначно определённого z , такого что $f(z) = x$, выполняется $x \hat{\varepsilon} y$ для $y = h(\hat{g}(z)) \in V$. $\square$

ТЕОРЕМА 6. Пусть F — бесконечное A -вычислимое семейство всюду определённых функций, где $\emptyset' \leq_T A$. Тогда его полурешётка Роджерса $\mathcal{R}_A(F)$ содержит идеал без минимальных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5 достаточно построить A -вычисляемую нумерацию α семейства F , удовлетворяющую следующему условию:

$$\begin{aligned} & \forall i (\alpha(W_i) = \alpha(\omega) \rightarrow \\ & \rightarrow \exists V_i \subseteq W_i (\alpha(V_i) = \alpha(\omega) \& \forall \varepsilon_j (\varepsilon_j \upharpoonright W_i \not\subseteq \theta_\alpha \vee W_i \not\subseteq [V_i]_{\varepsilon_j}))), \end{aligned} \quad (2)$$

где $W_0, W_1, W_2, \dots$ и $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — стандартные нумерации семейств всех в. п. множеств и всех позитивных эквивалентностей соответственно, а $V_0, V_1, V_2, \dots$ — некоторая последовательность в. п. множеств, которую будем строить и для которой будут выполняться включения $V_i \subseteq W_i$ при всех $i \in \omega$.

Сначала построим нумерацию $\hat{\alpha}$ семейства $\hat{F}$ константных функций, удовлетворяющую условию (2).

Для краткости будем обозначать через $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ значения $2\langle i, j \rangle$ и $2\langle i, j \rangle + 1$ соответственно, где $\langle i, j \rangle$ — канторовский номер пары (i, j) . Для фиксированного i и произвольного $j = 0, 1, 2, \dots$ будем последовательно задавать оракулу $\mathcal{O}'$ вопросы о принадлежности чисел $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ множеству W_i .

(а) Если $a_{i,j} \notin W_i$ и $b_{i,j} \notin W_i$ для некоторого j , то строим

$$\hat{\alpha}(a_{i,j})(x) = 3i, \quad \hat{\alpha}(b_{i,j})(x) = 3i, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

(б) Если $a_{i,j} \in W_i$ и $b_{i,j} \notin W_i$ для некоторого j , то строим

$$\hat{\alpha}(a_{i,j})(x) = 3i + 1, \quad \hat{\alpha}(b_{i,j})(x) = 3i, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

(в) Если $a_{i,j} \notin W_i$ и $b_{i,j} \in W_i$ для некоторого j , то строим

$$\hat{\alpha}(a_{i,j})(x) = 3i, \quad \hat{\alpha}(b_{i,j})(x) = 3i + 1, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

(г) Наконец, если $a_{i,j} \in W_i$ и $b_{i,j} \in W_i$ для некоторого j , то строим $\hat{\alpha}(a_{i,j})$ и $\hat{\alpha}(b_{i,j})$ следующим образом.

Задаём оракулу $\mathcal{O}'$ вопросы о принадлежности пар чисел $(a_{i,j}, b_{i,j})$ эквивалентности ε_j :

если $(a_{i,j}, b_{i,j}) \in \varepsilon_j$, то определяем

$$\hat{\alpha}(a_{i,j})(x) = 3i + 1, \quad \hat{\alpha}(b_{i,j})(x) = 3i + 2, \quad x = 0, 1, 2, \dots;$$

если $(a_{i,j}, b_{i,j}) \notin \varepsilon_j$, то определяем

$$\hat{\alpha}(a_{i,j})(x) = 3i + 1, \quad \hat{\alpha}(b_{i,j})(x) = 3i + 1, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь положим $V_i = (W_i \setminus U_i) \cup \{b_{i,j} \mid (a_{i,j}, b_{i,j}) \in \varepsilon_j\}$, где $U_i = \{x \mid x = a_{i,j}, j \geq 1 \vee x = b_{i,j}, j \geq 0\}$ является вычислимым множеством.

Проверим условие (2) для нумерации $\hat{\alpha}$.

Для фиксированного i в (2) возможны два случая.

С л у ч а й 1. Пусть для некоторого j одно из чисел $a_{i,j}$ или $b_{i,j}$ не принадлежит множеству W_i , т. е. $\hat{\alpha}(a_{i,j}) = 3i$ или $\hat{\alpha}(b_{i,j}) = 3i$. По конструкции нумерации $\hat{\alpha}$ только на номерах, которые не принадлежат множеству W_i ,

строится константная функция $3i$, поэтому $\hat{\alpha}(W_i) \neq \hat{\alpha}(\omega)$. Значит, не требуется проверять условие (2) для таких i (или формально считать, что условие (2) выполнено для i).

С л у ч а й 2. Пусть условие случая 1 неверно для всех j (т. е. для всех j числа $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ принадлежат множеству W_i). Для каждого такого j в (2) возможны два случая.

С л у ч а й 2.1. Пусть $(a_{i,j}, b_{i,j}) \in \varepsilon_j$. Тогда по конструкции $\hat{\alpha}(a_{i,j}) = 3i + 1 \neq 3i + 2 = \hat{\alpha}(b_{i,j})$, и значит $(a_{i,j}, b_{i,j}) \notin \theta_{\hat{\alpha}}$. Следовательно, $\varepsilon_j \upharpoonright W_i \not\subseteq \theta_{\hat{\alpha}}$.

С л у ч а й 2.2. Пусть $(a_{i,j}, b_{i,j}) \notin \varepsilon_j$. По построению имеем $\hat{\alpha}(a_{i,j}) = 3i + 1 = \hat{\alpha}(b_{i,j})$. Множество V_i содержит единственный $\hat{\alpha}$ -номер $a_{i,0}$ константной функции $3i + 1$, т. е., $\hat{\alpha}(z) \neq 3i + 1$ для всех $z \in V_i \setminus a_{i,0}$. Так как ε_j является отношением эквивалентности и $(a_{i,j}, b_{i,j}) \notin \varepsilon_j$, то $a_{i,j} \notin [a_{i,0}]_{\varepsilon_j}$ или $b_{i,j} \notin [a_{i,0}]_{\varepsilon_j}$. Если $a_{i,j} \in [V_i \setminus a_{i,0}]_{\varepsilon_j}$ или $b_{i,j} \in [V_i \setminus a_{i,0}]_{\varepsilon_j}$, то $\varepsilon_j \upharpoonright W_i \not\subseteq \theta_{\hat{\alpha}}$. Если $a_{i,j} \notin [V_i \setminus a_{i,0}]_{\varepsilon_j}$ и $b_{i,j} \notin [V_i \setminus a_{i,0}]_{\varepsilon_j}$, то $a_{i,j}$ из W_i или $b_{i,j}$ из W_i не принадлежат $[V_i]_{\varepsilon_j}$, а это значит, что $W_i \not\subseteq [V_i]_{\varepsilon_j}$.

Следовательно, условие (2) выполняется в любом случае и легко заметить, что построенная нумерация $\hat{\alpha}$ является A -вычислимой, если $\emptyset' \leq_T A$.

Теперь заменим константные функций из семейства $\hat{F}$ функциями семейства F и построим нумерацию α семейства F , удовлетворяющую условию

$$\alpha(x) = \alpha(y) \Leftrightarrow \hat{\alpha}(x) = \hat{\alpha}(y) \quad (3)$$

для всех $x, y \in \omega$.

По теореме 1 бесконечное A -вычислимое семейство F всюду определённых функций имеет A -вычислимую фридбергову нумерацию. Обозначим её через β .

Опишем конструкцию для нумерации α .

Шаг 0. Пусть $\alpha(0) = \beta(0)$.

Шаг $s + 1$. Если $\hat{\alpha}(s + 1) = \hat{\alpha}(t)$ для некоторого $t \leq s$, то $\alpha(s + 1) = \alpha(t)$ для наименьшего такого t . В противном случае $\alpha(s + 1) = \beta(k)$ для наименьшего k , такого что $\alpha(t) \neq \beta(k)$ при всех $t \leq s$.

Равенство A -вычислимых константных функций является A -вычислимым отношением, поэтому нумерация α A -вычислима. Нетрудно заметить, что нумерация α удовлетворяет условию (3), которое гарантирует, что α , как и нумерация $\hat{\alpha}$, будет удовлетворять условию (2). $\square$

В [13] было анонсировано: если A — произвольное множество, и F — бесконечное A -вычислимое семейство всюду определённых функций, то с точностью до эквивалентности в случае, когда F имеет две A -вычислимых фридберговских нумераций, F будет иметь бесконечно много таких нумераций. Кроме того, если $\emptyset <_T A <_T \emptyset'$ и A -вычислимое семейство всюду определённых функций F содержит по крайней мере две функции, то F не имеет A -вычислимой главной нумерации. В случае, когда A несравнимо по Тьюрингу с $\emptyset'$, остаётся открытым вопрос о наличии главной нумерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Гончаров, А. Сорби, Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса, *Алгебра и логика*, **36**, № 6 (1997), 621—641.
2. Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций*, М., Наука, 1977.
3. С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, Обобщенно вычислимые универсальные нумерации, *Алгебра и логика*, **53**, № 5 (2014), 555—569.
4. С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств, *Алгебра и логика*, **40**, № 5 (2001), 507—522.
5. Ю. Л. Ершов, Нумерации семейств общерекурсивных функций, *Сиб. матем. ж.*, **8**, № 5 (1967), 1015—1025.
6. С. С. Марченков, О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций, *Алгебра и логика*, **11**, № 5 (1972), 588—607.
7. Ас. А. Исахов, Нумерации Фридберга семейства всюду определенных функций в арифметической иерархии, *Изв. Нац. акад. н. Респ. Казахстан. Сер. физ.-мат.*, **293**, № 1 (2014), 8—11.
8. Ас. А. Исахов, Некоторые свойства вычислимых нумераций семейств всюду определенных функций в арифметической иерархии, *Вестник КазНУ. Сер. матем., мех., инф.*, **81**, № 2 (2014), 62—65.

9. *A. Issakhov*, Some computable numberings of the families of total functions in the arithmetical hierarchy, *Bull. Symbolic Logic*, **20**, No. 2 (2014), 230/231.
10. *А. Б. Хуторецкий*, Две теоремы существования для вычислимых нумераций, *Алгебра и логика*, **8**, № 4 (1969), 483—492.
11. *В. В. Вьюгин*, О некоторых примерах верхних полурешёток вычислимых нумераций, *Алгебра и логика*, **12**, № 5 (1973), 512—529.
12. *С. А. Бадаев*, Минимальные нумерации, в сб. *Математическая логика и теория алгоритмов* (Труды ин-та матем. СО РАН, **25**), 1993, 3—34.
13. *С. А. Бадаев, А. А. Исахов*, Об A -вычислимых нумерациях, Тез. докл. межд. конф. Мальцевские чтения, посвящ. 75-летию Ю. Л. Ершова (Новосибирск, 3-7 мая 2015 г.), Новосибирск, 2015, 61.

Поступило 6 ноября 2014 г.

Адрес автора:

ИСАХОВ Асылбек Абдиашимович, Казахский национальный ун-т им. аль-Фараби, пр. аль-Фараби, 71, Алма-Ата, 050038, КАЗАХСТАН.

e-mail: asylissakhov@mail.ru