ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. № 3 (57). С. 84–95*

УДК 517.927

Ж.Х. Жунусова

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
050040, Алматы, проспект аль-Фараби, 71, e-mail: zhzhkh@mail.ru

ПОВЕРХНОСТЬ К ОДНОСОЛИТОННОМУ РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрено нелинейное уравнение Шредингера. Найдена поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда, соответствующая односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности.
Ключевые слова: *нелинейное уравнение, иммерсия, конечная плотность, односолитонное решение.*

1 Введение

За последние двадцать лет большое количество исследований посвящено изучению нелинейных уравнений. Некоторые нелинейные волновые уравнения могут появляться в различных задачах физики [1]-[5]. Например, такими уравнениями являются хорошо известные уравнения Кортевега де Вриза, Шредингера, sin-Гордона.

Теория солитонов является мощным аппаратом для изучения нелинейных уравнений, включая их геометрический смысл. С геометрической точки зрения солитонные системы рассматриваются, как иммерсии бесконечномерных пространств. Другими словами, иерархия солитонных уравнений рассматривается как система, определяющая иммерсию (или погружение) многообразия V^n в пространство V^m, где $n < m$. Связь между

Keywords: *nonliner equation, immersion, finite density, onesoliton solution*
2010 Mathematics Subject Classification: 34A34

теорией солитонов и теорией поверхностей устанавливается введением эволюционных уравнений, ассоциированных с алгеброй. Связь (1+1)-мерных солитонных уравнений с теорией поверхностей дается уравнением Гаусса-Кодацци-Майнарди. В этом случае солитонные уравнения рассматриваются, как некоторые интегрируемые редукции уравнения Гаусса-Кодацци-Майнарди.

В данной работе мы рассматриваем простейшие аспекты солитонных иммерсий в многомерном пространстве в смысле Фокаса-Гельфанда [1]. В современной литературе понятие иммерсии достаточно широко распространено и относится не только к теории солитонов. Переход от исходной задачи к более простой задаче называется иммерсией. Слово "иммерсия" происходит от латинского слова immersio и переводится на русский язык, как "погружение" [6]. Строгого определения данного понятия нет.

Согласно работе Фокаса-Гельфанда [1] приведем описание солитонной иммерсии. В (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

где $[U, V] = UV - VU$, матрица U задана, а матрица V выражается в терминах элементов матрицы U. Также нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются условием совместности системы линейных уравнений

$$\phi_x = U\phi, \phi_t = V\phi.$$

В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией $P(x,t)$, определяемая следующими формулами:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1} X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1} Y\phi.$$

Поверхность, определенная посредством $P(x,t)$, идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве, определенной координатами $x_j = P_j(x,t),\ j = 1, 2, 3$ [1]. Репер на поверхности дается тройкой [1]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1} X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1} Y\phi, \quad N = \phi^{-1} J\phi,$$

где $J = \frac{[X,Y]}{|[X,Y]|}$, $\mid X \mid = \sqrt{< X, X >}$. Здесь по определению

$$< X, Y >= -\frac{1}{2} tr(XY),$$

где X, Y являются некоторыми матрицами. Первая и вторая фундаментальные формы в смысле Фокаса-Гельфанда даются как [1]

$$I =< X, X > dx^2 + 2 < X, Y > dxdt + < Y, Y > dt^2, \tag{1}$$

$$II =< \frac{\partial X}{\partial x} + [X, U],\ J > dx^2 + 2 < \frac{\partial X}{\partial t} + [X, V],$$
$$J > dxdt + < \frac{\partial Y}{\partial t} + [Y, V],\ J > dt^2. \tag{2}$$

Как показано в работе [1], функция иммерсии P может быть определена, как

$$P = \gamma_0 \phi^{-1} \phi_\lambda + \phi^{-1} M_1 \phi = \sum_{j=1}^{3} P_j f_j,$$

где M_1 является матричной функцией, определенной по λ, x, t. Здесь $f_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$ является базисом соответствующей алгебры, σ_j являются матрицами Паули и $[f_i, f_j] = f_k$. В этом случае X, Y можно записать, как

$$X = \gamma_0 U_\lambda + M_{1x} + [M_1, U], Y = \gamma_0 V_\lambda + M_{1t} + [M_1, V].$$

2. Солитонные иммерсии в (1+1)-измерении

Пусть матрицы X, Y, J имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В этом случае элементы матрицы J выражаются через элементы матриц X и Y в соответствии со следующими формулами:

$$c_{11} = \frac{a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}}{\mid [X, Y] \mid}, \quad c_{21} = \frac{a_{21}(b_{11} - b_{22}) + b_{21}(a_{22} - a_{11})}{\mid [X, Y] \mid},$$

$$c_{12}=\frac{b_{12}(a_{11}-a_{22})+a_{12}(b_{22}-b_{11})}{|\,[X,Y]\,|},\quad c_{22}=\frac{a_{21}b_{12}-b_{21}a_{12}}{|\,[X,Y]\,|}. \tag{4}$$

Тогда первая фундаментальная форма (1) двумерной поверхности будет

$$I=Edx^2+2Fdxdt+Gdt^2,$$

где

$$E=-\frac{1}{2}(a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+a_{22}^2),\quad F=-\frac{1}{2}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}), \tag{5}$$

$$G=-\frac{1}{2}(b_{11}^2+2b_{12}b_{21}+b_{22}^2). \tag{6}$$

В качестве примера солитонного уравнения, приводящего к такой иммерсии, рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t+\psi_{xx}+2\beta|\psi|^2\psi=0,$$

где $\beta=+1$, ψ является комплексной функцией. В этом случае матрицы U,V имеют вид [3]

$$U=\frac{\lambda\sigma_3}{2i}+U_0,\ U_0=i\begin{pmatrix}0&\bar q\\ q&0\end{pmatrix},$$

$$V=\frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3+i|q|^2\sigma_3-i\lambda\begin{pmatrix}0&\bar q\\ q&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\bar q_x\\ -q_x&0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Вторая фундаментальная форма в смысле Фокаса-Гельфанда, соответствующая солитонному решению q нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности, имеет вид*

$$II=Ldx^2+2Mdxdt+Ndt^2, \tag{8}$$

где

$$L=-\frac{1}{2}\{a_{11x}c_{11}+a_{12x}c_{21}+a_{21x}c_{12}+a_{22x}c_{22}-\lambda i(a_{21}c_{12}-a_{12}c_{21})+$$

$$+iq(a_{12}c_{11}+a_{22}c_{12}-a_{11}c_{12}-a_{12}c_{22})+$$

$$i\bar{q}(a_{21}c_{22}+a_{11}c_{21}-a_{22}c_{21}-a_{21}c_{11})\}, \tag{9a}$$

$$M=-\frac{1}{2}\{a_{11t}c_{11}+a_{12t}c_{21}+a_{21t}c_{12}+a_{22t}c_{22}+i(\lambda^2+2|q|^2)(a_{21}c_{12}-a_{12}c_{21})+$$

$$+(q_x+\lambda iq)(a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}-a_{12}c_{11}-a_{22}c_{12})+$$

$$+(\bar{q}_x-\lambda i\bar{q})(a_{11}c_{21}+a_{21}c_{22}-a_{21}c_{11}-a_{22}c_{21})\}, \tag{9b}$$

$$N=-\frac{1}{2}\{b_{11t}c_{11}+b_{12t}c_{21}+b_{21t}c_{12}+b_{22t}c_{22}+i(\lambda^2+2|q|^2)(b_{21}c_{12}-b_{12}c_{21})+$$

$$+(q_x+\lambda iq)(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}-b_{12}c_{11}-b_{22}c_{12})+$$

$$+(\bar{q}_x-\lambda i\bar{q})(b_{11}c_{21}+b_{21}c_{22}-b_{21}c_{11}-b_{22}c_{21})\}, \tag{9c}$$

Доказательство. Подставляем матрицы (3), (7) в (2). После некоторых вычислений получим (8), (9). Лемма доказана.

3. Односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера, соответствующее поверхности

Рассмотрим частный случай иммерсии при $\gamma_0=1,\ M_1=0$. В данном случае имеем

$$X=U_\lambda=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ Y=V_\lambda=-i\begin{pmatrix}-\lambda&\bar{q}\\q&\lambda\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}0&-\frac{\bar{q}}{\sqrt{q\bar{q}}}\\\frac{q}{\sqrt{q\bar{q}}}&0\end{pmatrix} \tag{10}$$

и $P=\phi^{-1}\phi_\lambda$. Чтобы вычислить явные выражения для функций иммерсии P, рассмотрим односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности, которое имеет вид

$$q(x,t)=\rho\frac{1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}, \tag{11}$$

где $v=-\omega cos\frac{\theta}{2}$, $x_0=\frac{1}{\nu_1}lni\gamma_1;\ \ \omega,\theta,\gamma_1,\nu_1$ являются некоторыми параметрами модели.

Теорема 1. *Односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности соответствует поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда со следующими коэффициентами первой фундаментальной формы:*

$$E=\frac{\nu_1^2exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}[\frac{4\rho^2x^2}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4}(2-e^{i\theta}-e^{-i\theta})+$$

$$+\frac{4(e^{i\theta}-1)^2[1+\nu_1x(1-e^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\})]^2}{(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}], \tag{12a}$$

$$F=\frac{2\rho^2\nu_1^2vxexp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2)}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^3}+$$

$$+\frac{4\nu_1^3vxexp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}-1)^2(e^{i\theta}-exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}-1)}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^2(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}\times$$

$$\times(1+\nu_1x-\nu_1xe^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}), \tag{12b}$$

$$G=\frac{v^2\nu_1^2exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}[\rho^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^2(1+$$

$$+2exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^2+\rho^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta}-2)^2+$$

$$+\frac{4\nu_1^2x^2(e^{i\theta}-1)^2(e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}-1)^2}{(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}], \tag{12c}$$

где $\lambda_1=const$.

Доказательство. Решение линейной системы найдем в виде

$$\psi=\phi e^{-(\frac{\lambda\sigma_3}{2i}x+\frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3t)}. \tag{13}$$

Учитывая (13) и применяя (7), имеем

$$\psi_x=(\frac{\lambda\sigma_3}{2i}+U_0)\psi-\psi\frac{\lambda\sigma_3}{2i}=\frac{\lambda\sigma_3}{2i}\psi-\psi\frac{\lambda\sigma_3}{2i}+U_0\psi=[\frac{\lambda\sigma_3}{2i},\psi]+U_0\psi. \tag{14}$$

Возьмем

$$\psi=I-\frac{\tilde{A}}{\lambda-\lambda_1^*},\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{a}&\tilde{b}\\ \tilde{c}&\tilde{d}\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \lambda_1^*-const. \tag{15}$$

Подставим (15) в (14), получим

$$\psi_x = U_0 - \frac{U_0\tilde{A}}{\lambda-\lambda_1^*} - \frac{1}{2i}[\sigma_3,\tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda-\lambda_1^*)}[\sigma_3,\tilde{A}]. \tag{16}$$

С другой стороны, из (15) следует

$$\psi_x = -\frac{\tilde{A}_x}{\lambda-\lambda_1^*}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) имеем

$$-\frac{\tilde{A}_x}{\lambda-\lambda_1^*} = U_0 - \frac{U_0\tilde{A}}{\lambda-\lambda_1^*} - \frac{1}{2i}[\sigma_3,\tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda-\lambda_1^*)}[\sigma_3,\tilde{A}]. \tag{18}$$

Таким образом,

$$\tilde{A}_x = U_0\tilde{A} + \frac{\lambda_1^*}{2i}[\sigma_3,\tilde{A}], U_0 = \frac{1}{2i}[\sigma_3, A]. \tag{19}$$

Заметим, что

$$[\sigma_3,\tilde{A}] = \sigma_3\tilde{A} - \tilde{A}\sigma_3 = 2\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Затем, подставляя (20) в (35), получим

$$U_0 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (19), имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_x & \tilde{b}_x \\ \tilde{c}_x & \tilde{d}_x \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \tilde{b}\tilde{c} & \tilde{b}\tilde{d} \\ -\tilde{c}\tilde{a} & -\tilde{c}\tilde{b} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1^*}{i}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Из (7) и (21) получим

$$i\begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\bar{q} = \frac{1}{i}b \\ iq = -\frac{1}{i}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\bar{q} \\ c = q. \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, мы нашли матрицу $\tilde{A}$ в явном виде с компонентами (22). Используя (11), получим

$$\tilde{a} = -\frac{i\nu_1 x exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}(e^{i\theta} - 1)}{(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})(1 + e^{i\theta} exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})} - \lambda_1^*. \quad (24)$$

Из (22) следует: $\tilde{a} = -\frac{i\tilde{c}_x}{c} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{a} = -\frac{1}{i}\int \bar{q}q dx$. Используя (11), получим

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{i}\tilde{b}\tilde{c} \Rightarrow \tilde{a}_x = \frac{1}{i}(-\bar{q})q. \quad (25)$$

Тогда

$$\tilde{a} = -\frac{iq_x}{q} - \lambda_1^*. \quad (26)$$

Поэтому, из (22), (23) следует

$$\tilde{d} = \frac{i\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i(-\bar{q})_x}{(-\bar{q})} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i\bar{q}_x}{\bar{q}} - \lambda_1^*. \quad (27)$$

Используя (11), получим

$$\tilde{d} = \frac{i\nu_1 x exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}(e^{-i\theta} - 1)}{(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})(1 + e^{-i\theta} exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})} - \lambda_1^*. \quad (28)$$

Из (22), (23) следует

$$\tilde{d}_x = -\frac{1}{i}\tilde{c}\tilde{b}, \quad (29)$$

Более того, из (28), (29) следует

$$\tilde{d} = \frac{1}{i}\int q\bar{q}dx. \quad (30)$$

Учитывая (30), получим (25) в виде

$$\tilde{d} = -\tilde{a}. \quad (31)$$

Таким образом, матрица $\tilde{A}$ для односолитонного решения (11) нелинейного уравнения Шредингера принимает вид

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c} -\frac{i\nu_1 x exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}-1)}{(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})(1+e^{i\theta} exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})} - \lambda_1^* \\ \rho\frac{1+e^{i\theta} exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}} \end{array} \right.$$

$$\left. \frac{-\rho\frac{1+e^{-i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}}{\frac{i\nu_1 xexp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{-i\theta}-1)}{(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})(1+e^{-i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})} - \lambda_1^*} \right). \quad (32)$$

Теперь возьмем $\phi = I - \frac{A}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^2}$, где λ_1 является постоянной, тогда из (10) имеем

$$P = \phi^{-1}\phi_\lambda = (I + \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1})\frac{\tilde{A}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}. \quad (33)$$

С другой стороны, получим

$$P = \sum_{j=1}^{3} P_j f_j = -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{3} P_j\sigma_j = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}P_3 & -\frac{i}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 \\ -\frac{i}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 & \frac{i}{2}P_3 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Из (33), (34) посредством (29) имеем $P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^2}$. Теперь с помощью (31) найдем P_3 в явном виде для решения нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности:

$$P_3 = \frac{2\nu_1 xexp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}(e^{i\theta} - 1)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})(1 + e^{i\theta}exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})} - $$
$$- \frac{2i\lambda_1^*}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}. \quad (35)$$

Из (33), (34) имеем $P_2 = \frac{\tilde{c}-\tilde{b}}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^2}$. Таким образом,

$$P_1 = \frac{i(\tilde{c} + \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_2 = \frac{(\tilde{c} - \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}.$$

Из (33), (11), используя известные формулы

$$sh\zeta = \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2};\ ch\zeta = \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2};\ cos\zeta = \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{2};\ sin\zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}, \quad (36)$$

где $\zeta = \nu_1(x - vt - x_0)$, получим явные значения P_1, P_2, P_3 матрицы P:

$$P_1 = \frac{i\rho(e^{i\theta} - e^{-i\theta})exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})}, \quad (37a)$$

$$P_2=\frac{\rho(2+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}+e^{-i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^2(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})}. \qquad (37b)$$

Теперь вычислим коэффициенты первой фундаментальной формы, т.е.

$$E=P_{1x}^2+P_{2x}^2+P_{3x}^2. \qquad (38)$$

Для этого вычислим P_{1x},P_{2x},P_{3x}. Теперь возводим в квадрат первые производные и подставим в (38), тогда

$$E=\frac{\nu_1^2exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}[\frac{4\rho^2x^2}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4}(2-e^{i\theta}-e^{-i\theta})+$$

$$+\frac{4(e^{i\theta}-1)^2[1+\nu_1x(1-e^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\})]^2}{(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}].$$

Подобным образом, согласно формулам

$$F=P_{1x}P_{1t}+P_{2x}P_{2t}+P_{3x}P_{3t}, \quad G=P_{1t}^2+P_{2t}^2+P_{3t}^2,$$

получим значение F:

$$F=\frac{2\rho^2\nu_1^2vxexp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2)}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^3}+$$

$$+\frac{4\nu_1^3vxexp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}-1)^2(e^{i\theta}-exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}-1)}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^2(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}\times$$

$$\times(1+\nu_1x-\nu_1xe^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x-vt-x_0)\}),$$

$$G=\frac{v^2\nu_1^2exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{(\lambda-\bar{\lambda}_1)^4(1+exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}[\rho^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^2(1+$$

$$+2exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^2+\rho^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta}-2)^2+$$

$$+\frac{4\nu_1^2x^2(e^{i\theta}-1)^2(e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}-1)^2}{(1+e^{i\theta}exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})^4}]. \qquad (39)$$

Используя (35), (37a), (37b, найдем коэффициенты второй фундаментальной формы L,M,N. Для этого нам нужно вычислить

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_t}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \sqrt{\Lambda}=\sqrt{EG-F^2}. \qquad (40)$$

Непосредственной подстановкой значений (35), (37a), (37b) в (40) найдем компоненты вектора **n**. Вычислим с помощью (39) значение

$$\sqrt{\Lambda} = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь найдем

$$P_{1xx}, P_{2xx}, P_{3xx}.$$

Затем можем найти L. Подобным образом находим M, N. Далее можем найти гауссову и среднюю кривизны K и H. Теперь из (5), (6), используя (10), для данного случая γ_0, $M_1 = 0$ мы имеем коэффициенты первой фундаментальной формы, соответствующей (11), как

$$E = \frac{1}{4}, \quad F = -\frac{\lambda}{2}, \quad G = \lambda^2 + \bar{q}q.$$

Соответственно из (9), используя (10), мы найдем коэффициенты второй фундаментальной формы. Теперь можем вычислить

$$\Lambda = EG - F^2 = \frac{1}{4}\bar{q}q.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

Таким образом, мы исследовали солитонную иммерсию в (1+1)-измерении. В качестве примера, задающего такую иммерсию, рассмотрели (1+1)-мерное нелинейное уравнение Шредингера. Найдена первая фундаментальная форма с соответствующими коэффициентами (12) для интегрируемой поверхности, соответствующей односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности. Определена гауссова и средняя кривизны данной поверхности. Более того, предположили, что иммерсия 3- и 4-мерного многообразия, произвольно вложенного в R^{μ}, допускает интегрируемые случаи.

Литература

1 Ceyhan O., Fokas A.S., Gurses M. Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations // J. Math. Phys. – 2000. – V. 41, № 4. – P. 2551-2270.

2 Жунусова Ж.Х. О решений доменной стенки интегрируемого спинового уравнения // Вестник КазНУ, сер.мат.,мех.,инф. – 2014. – № 2(81). – С. 46-51.

3 Zhunussova Zh.Kh. Reconstruction of a soliton solution for a class of nonlinear equation // Abstr. of 6-th Int. Conf. "Inverse Problems: Modeling Simulation". Antalya, Turkey. – 2012. – P. 283.

4 Zhunussova Zh. Reconstruction of surface corresponding to domain wall solution // Proc. of 4-th Int. Conf. "Modern problems of Applied math. and information technol." – Samarkand, Uzbekistan, 2014. – P. 283.

5 Zhunussova Zh.Kh. About exact solution of the nonlinear equation // Известия НАН РК, сер. физ.-матем. – 2010. – № 3. – С. 11-13.

Статья поступила в редакцию 06.04.2014

Жунусова Ж.Х. СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУIНI2 БIРСОЛИТОНДЫҚ ШЕШIМIНЕ СӘЙКЕС БЕТ

Сызықты емес Шредингер теңдеуi қарастырылған. Сызықты емес Шредингер теңдеуiнiң бiр солитондық шешiмiне сәйкес Фокас-Гельфанд мағынасындағы бетi ақырлы тығыздық жағдайы үшiн табылған.

Zhunussova Zh.Kh. SURFACE TO ONESOLITON SOLUTION OF THE NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION

Nonlinear Schrödiner equation is considered. Surface in the sense of Fokas-Gelfand corresponding to onesoliton solution of nonlinear Schrödinger equation is found in the case of a finite density.