[1,2] М.Дж. Минглибаев, [1] Г.М. Маемерова

Вековые возмущения в протопланетной задаче трех тел с переменными массами

([1] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан)*

([2] *Астрофизический институт имени В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан)*

Рассмотрены вековые возмущения задачи трех тел с переменными массами, изменяющимися изотропно в одинаковом темпе. Получены аналитические выражения вековых возмущений в протопланетной задаче трех тел с переменными массами с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica.

Введение

Реальные космические тела – нестационарные. Со временем изменяются их массы, размеры, формы и структура распределения масс внутри тел [1-3]. Эти процессы особенно интенсивно происходят в двойных и кратных системах [4]. В связи с этим рассматривается задача трех тел с массами, изменяющимися в одинаковом темпе изотропно. Тела предполагаются как материальные точки. На основе теории возмущений на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5] исследуются вековые возмущения протопланетной задачи трех тел-точек с переменными массами.

Постановка задачи

Рассмотрим движения взаимогравитирующих трех тел, изотропно изменяющиеся в одинаковом темпе массами

$$m_0 = \frac{m_{00}}{\varphi(t)}, \quad m_1 = \frac{m_{10}}{\varphi(t)}, \quad m_2 = \frac{m_{20}}{\varphi(t)}, \tag{1}$$

в системе координат Якоби [?]–[?]

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{\varphi(t)} grad_{\vec{r}_1} \tilde{U}, \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{\varphi(t)} grad_{\vec{r}_2} \tilde{U}, \tag{2}$$

где

$$\mu_1 = \frac{m_{10} m_{00}}{m_{00} + m_{10}} = const, \quad \mu_2 = \frac{m_{20}(m_{10} + m_{00})}{m_{00} + m_{10} + m_{20}} = const,$$

$$\tilde{U} = f \left(\frac{m_{00} m_{10}}{r_{01}} + \frac{m_{00} m_{20}}{r_{02}} + \frac{m_{10} m_{20}}{r_{12}} \right),$$

здесь f - гравитационная постоянная,

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2,$$

$$r_{02}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2,$$

$$r_{12}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2,$$

$$\nu_1 = \frac{m_{10}}{m_{00} + m_{10}} = const, \quad \nu_0 = \frac{m_{00}}{m_{00} + m_{10}} = const.$$

Исследуем задачу, которая описывается уравнениями движения (2) используя теорию возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5].

Уравнения движения (2) в аналогах канонических элементов Делоне

$$L, \quad G, \quad H, \quad l, \quad g, \quad h$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &= \frac{\partial R^*}{\partial l_i}, & \dot{G}_i &= \frac{\partial R^*}{\partial g_i}, & \dot{H}_i &= \frac{\partial R^*}{\partial h_i}, \\ \dot{l}_i &= -\frac{\partial R^*}{\partial L_i}, & \dot{g}_i &= -\frac{\partial R^*}{\partial G_i}, & \dot{h}_i &= -\frac{\partial R^*}{\partial H_i}, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$R^* = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\varphi^2(t)} \left(\frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i^2} \right) + R, \tag{4}$$

$$R = \frac{f}{\varphi(t)} \left[\frac{m_{00} m_{20}}{r_{02}} + \frac{m_{10} m_{20}}{r_{12}} - \frac{m_{20}(m_{00} + m_{10})}{r_2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} [\mu_1 r_{01}^2 + \mu_2 r_2^2],$$

Вековые возмущения определяются уравнениями (3), если осреднить возмущенную функцию (4) по средним аномалиям l_1, l_2

$$R_{\textit{век}} = \tilde{R}^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* dl_1 dl_2.$$

Тогда

$$\dot{L}_1 = 0, \quad \dot{L}_2 = 0,$$

поэтому, вековые возмущения в рассматриваемой задаче определяются системой дифференциальных уравнений восьмого порядка

$$\dot{G}_i = \frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial g_i}, \qquad \dot{g}_i = -\frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial G_i},$$
$$\dot{H}_i = \frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial h_i}, \qquad \dot{h}_i = -\frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial H_i}, \quad (i = 1, 2)$$

Как и в классическом случае, в нашей задаче предпочтительны аналоги второй системы элементов Пуанкаре [?]–[?]

$$\Lambda, \quad \lambda, \quad \xi, \quad \eta, \quad p, \quad q,$$

которые определяются формулами

$$\Lambda = L, \qquad \lambda = l + g + h,$$
$$\xi = \sqrt{2(L - G)} \cos(g + h), \qquad \eta = -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + h),$$
$$p = \sqrt{2(G - H)} \cos h, \qquad q = -\sqrt{2(G - H)} \sin h,$$

Соответственно вековые возмущения определяются уравнениями

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial \eta_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial q_i},$$
$$\dot{\eta}_i = -\frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial \xi_i}, \qquad \dot{q}_i = -\frac{\partial R_{\textit{век}}}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2) \tag{5}$$

где

$$R_{\textit{век}} = R^*_{\textit{век}} = \frac{1}{\varphi^2(t)} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i^2} \right) + \frac{f}{\varphi^2(t)} \left[F_{\textit{век}} \right] - \frac{1}{2} \ddot{\varphi} \varphi \left[F_{\rho \textit{век}} \right]. \tag{6}$$

$$[F_{\textit{век}}] = \left[\frac{m_{00} m_{20}}{\rho_{02}} + \frac{m_{10} m_{20}}{\rho_{12}} - \frac{m_{20}(m_{00} + m_{10})}{\rho_2} \right]_{\textit{век}}, \tag{7}$$

$$[F_{\rho \textit{век}}] = [\mu_1 \rho_{01}^2 + \mu_2 \rho_2^2]_{\textit{век}}. \tag{8}$$

Необходимо вычислить вековые возмущения согласно уравнениям (5)-(8).

Разложение возмущающей функции для вычисления вековых возмущений

Как и в классическом случае, в нашей задаче, вопрос состоит в разложении главной части возмущающей функции (7)

$$[F_{\textit{век}}] = [F_{\textit{гл.часть}}] = \frac{m_{10} m_{20}}{\rho_{12}}.$$

В общем случае это достаточно сложная и трудоемкая работа. В таких случаях компьютерная алгебра может быть применена успешна, как это было сделано в работе [7]. В нашем случае также можно ожидать успешное применение компьютерной алгебры [8]. Вековая часть выражения (8) имеет достаточно простой вид [5]

$$[F_{\rho век}] = \frac{\Lambda_1^4}{\mu_1}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Lambda_1}(\xi_1^2+\eta_1^2)\right)\right] + \frac{\Lambda_2^4}{\mu_2}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Lambda_2}(\xi_2^2+\eta_2^2)\right)\right].$$

Вековые возмущения в двух протопланетной задаче трех тел с переменными массами

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением двух протопланетной задачи трех тел с переменными массами, предполагая

$$m_{10} << m_{00}, \quad m_{20} << m_{00}.$$

Также допустим, что элементы e_i, i_i - достаточно малые. Тогда в разложении возмущающей функции по степеням малых величин $\xi/\sqrt{\Lambda}$, $\eta/\sqrt{\Lambda}$, m_{10}, m_{20} ограничимся членами второй степени. Тогда в результате имеем хорошо известную классическую формулу [6]

$$\begin{aligned}[F_{век}] = \frac{1}{2}k^2 m_{20}m_{10}\left\{A_0 + \frac{1}{4}B_1\left(\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{\Lambda_1} + \frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{\Lambda_2}\right) - \right.\\ \left. -\frac{1}{2}B_2\left(\frac{\xi_1\xi_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} + \frac{\eta_1\eta_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\right) - \frac{1}{4}B_1\left(\frac{p_1^2+q_1^2}{\Lambda_1} + \frac{p_2^2+q_2^2}{\Lambda_2} - \frac{2(p_1p_2+q_1q_2)}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\right)\right\},\end{aligned} \tag{9}$$

в формуле (9) $k^2 = f$, остальные обозначения соответствуют обозначениям работы [**?**]. Переходя к новым переменным

$$\xi_i = \sqrt{\Lambda_i}e_i\cos\pi_i = \sqrt{\Lambda_i}r_i, \qquad \eta_i = -\sqrt{\Lambda_i}e_i\sin\pi_i = -\sqrt{\Lambda_i}s_i,$$

$$p_i = \sqrt{\Lambda_i}\sin i_i\cos\Omega_i = \sqrt{\Lambda_i}u_i, \qquad q_i = -\sqrt{\Lambda_i}\sin i_i\sin\Omega_i = -\sqrt{\Lambda_i}\upsilon_i, \quad (i=1,2)$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{dr_i}{dt} = -\frac{1}{\Lambda_i}\frac{\partial[R_{век}]}{\partial s_i}, \qquad \frac{ds_i}{dt} = \frac{1}{\Lambda_i}\frac{\partial[R_{век}]}{\partial r_i},\\ \frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\Lambda_i}\frac{\partial[R_{век}]}{\partial \upsilon_i}, \qquad \frac{d\upsilon_i}{dt} = \frac{1}{\Lambda_i}\frac{\partial[R_{век}]}{\partial u_i}, \quad (i=1,2)\end{aligned} \tag{10}$$

$$[R_{век}] = \frac{1}{\varphi^2(t)}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\beta_i^4}{\mu_i L_i}\right) + \frac{1}{\varphi^2(t)}[F_{век}] - \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\varphi\,[F_{\rho век}], \tag{11}$$

$$\begin{aligned}[F_{век}] = \frac{1}{2}k^2 m_{20}m_{00}\left(A_0 + \frac{1}{4}B_1(r_1^2+s_1^2+r_2^2+s_2^2) - \frac{1}{2}B_2(r_1r_2+s_1s_2) - \right.\\ \left. -\frac{1}{4}B_1(u_1^2+\upsilon_1^2+u_2^2+\upsilon_2^2) + \frac{1}{2}B_1(u_1u_2+\upsilon_1\upsilon_2)\right),\end{aligned} \tag{12}$$

$$[F_{\rho век}] = \frac{\Lambda_1^4}{\mu_1}\left[1 + \frac{3}{2}(r_1^2+s_1^2)\right] + \frac{\Lambda_2^4}{\mu_2}\left[1 + \frac{3}{2}(r_2^2+s_2^2)\right].$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\aleph_1 = \frac{1}{\varphi^2(t)}\frac{k^2m_{20}m_{10}}{4\Lambda_1}B_1 - \frac{3}{2}\frac{\Lambda_1^3}{\mu_1}\varphi\ddot{\varphi}, \qquad \aleph_2 = \frac{1}{\varphi^2(t)}\frac{k^2m_{20}m_{10}}{4\Lambda_1}B_2,\\ \aleph_1' = \frac{1}{\varphi^2(t)}\frac{k^2m_{20}m_{10}}{4\Lambda_2}B_1 - \frac{3}{2}\frac{\Lambda_2^3}{\mu_2}\varphi\ddot{\varphi}, \qquad \aleph_2' = \frac{1}{\varphi^2(t)}\frac{k^2m_{20}m_{10}}{4\Lambda_2}B_2,\\ E_1 = \frac{1}{\varphi^2(t)}\frac{k^2m_{20}m_{10}B_1}{4\Lambda_1}, \qquad E_1' = \frac{1}{\varphi^2(t)}\frac{k^2m_{20}m_{10}B_1}{4\Lambda_2}.\end{aligned} \tag{13}$$

то из соотношений (10)-(13) получим

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= -\aleph_1 s_1 + \aleph_2 s_2, \\ \frac{ds_1}{dt} &= \aleph_1 r_1 - \aleph_2 r_2, \\ \frac{dr_2}{dt} &= -\aleph_1' s_2 + \aleph_2' s_1, \\ \frac{ds_2}{dt} &= \aleph_1' r_2 - \aleph_2' r_1, \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= E_1(\upsilon_1 - \upsilon_2), \\ \frac{d\upsilon_1}{dt} &= E_1(-u_1 + u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= E_1'(\upsilon_2 - \upsilon_1), \\ \frac{d\upsilon_2}{dt} &= E_1'(-u_2 + u_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Решение дифференциальных уравнений вековых возмущений

При решении системы уравнений (14)-(15) можно использовать различные методы, в частности приближенные методы. Здесь мы рассмотрим один случай, когда системы дифференциальных уравнений (14)-(15) становятся автономными, следовательно, получим строгие решения. Пусть выполняются условия

$$\ddot{\varphi}\varphi^3 = \alpha = const.$$

Откуда получим

$$\varphi = \varphi(t) = \sqrt{C_1 t^2 + 2C_2 t + C_3}, \quad C_1 C_3 - C_2^2 = \alpha \tag{16}$$

В уравнениях (14)-(15) вводим новую независимую переменную

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varphi^2(t)}, \tag{17}$$

следовательно

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{d\tau} &= -\tilde{\aleph}_1 s_1 + \tilde{\aleph}_2 s_2, \\ \frac{ds_1}{d\tau} &= \tilde{\aleph}_1 r_1 - \tilde{\aleph}_2 r_2, \\ \frac{dr_2}{d\tau} &= -\tilde{\aleph}'_1 s_2 + \tilde{\aleph}'_2 s_1, \\ \frac{ds_2}{d\tau} &= \tilde{\aleph}_1' r_2 - \tilde{\aleph}'_2 r_1, \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \tilde{E}_1(\upsilon_1 - \upsilon_2), \\ \frac{d\upsilon_1}{d\tau} &= \tilde{E}_1(-u_1 + u_2), \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \tilde{E}_1'(\upsilon_2 - \upsilon_1), \\ \frac{d\upsilon_2}{d\tau} &= \tilde{E}_1'(-u_2 + u_1). \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь

$$
\begin{array}{ll}
\tilde{\aleph}_1 = \dfrac{k^2 m_{20} m_{10}}{4\Lambda_1} B_1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\Lambda_1^3}{\mu_1}\alpha, & \tilde{\aleph}_2 = \dfrac{k^2 m_{20} m_{10}}{4\Lambda_1} B_2, \\
\tilde{\aleph}'_1 = \dfrac{k^2 m_{20} m_{10}}{4\Lambda_2} B_1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\Lambda_2^3}{\mu_2}\alpha, & \tilde{\aleph}'_2 = \dfrac{k^2 m_{20} m_{10}}{4\Lambda_2} B_2, \\
\tilde{E}_1 = \dfrac{k^2 m_{20} m_{10} B_1}{4\Lambda_1}, & \tilde{E}'_1 = \dfrac{k^2 m_{20} m_{10} B_1}{4\Lambda_2}.
\end{array}
\qquad (20)
$$

Решения дифференциальных уравнений (18)-(19) хорошо известны [6]

$$
\begin{array}{l}
r_1 = N_1 \cos(\tilde{g}_1\tau + \tilde{\beta}_1) + N_2 \cos(\tilde{g}_2\tau + \tilde{\beta}_2), \\
s_1 = N_1 \sin(\tilde{g}_1\tau + \tilde{\beta}_1) + N_2 \sin(\tilde{g}_2\tau + \tilde{\beta}_2), \\
r_2 = N'_1 \cos(\tilde{g}_1\tau + \tilde{\beta}_1) + N'_2 \cos(\tilde{g}_2\tau + \tilde{\beta}_2), \\
s_2 = N'_1 \sin(\tilde{g}_1\tau + \tilde{\beta}_1) + N'_2 \sin(\tilde{g}_2\tau + \tilde{\beta}_2),
\end{array}
\qquad (21)
$$

и

$$
\begin{array}{l}
u_1 = M_1 \sin(-(\tilde{E}_1 + \tilde{E}'_1)\tau + \tilde{\tilde{\beta}}_1) + M_2 \sin\tilde{\tilde{\beta}}_2, \\
\upsilon_1 = M_1 \cos(-(\tilde{E}_1 + \tilde{E}'_1)\tau + \tilde{\tilde{\beta}}_1) + M_2 \cos\tilde{\tilde{\beta}}_2, \\
u_2 = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} M_1 \sin(-(\tilde{E}_1 + \tilde{E}'_1)\tau + \tilde{\tilde{\beta}}_1) + M_2 \sin\tilde{\tilde{\beta}}_2, \\
\upsilon_2 = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} M_1 \cos(-(\tilde{E}_1 + \tilde{E}'_1)\tau + \tilde{\tilde{\beta}}_1) + M_2 \cos\tilde{\tilde{\beta}}_2,
\end{array}
\qquad (22)
$$

где N_i, N'_i, M_i, $\tilde{\beta}_i$, $\tilde{\tilde{\beta}}_i$ - постоянные интегрирования, $\tilde{g}_i$ - положительные действительные корни характеристического уравнения системы (18),

$$
\begin{array}{lll}
1)\, \tau = \dfrac{1}{\sqrt{C_1C_3 - C_2^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{C_1 t + C_2}{\sqrt{C_1C_3 - C_2^2}}, & & C_1C_3 > C_2^2, \\
2)\, \tau = \dfrac{1}{2\sqrt{C_2^2 - C_1C_3}} \ln\left|\dfrac{C_1 t + C_2 - \sqrt{C_2^2 - C_1C_3}}{C_1 t + C_2 + \sqrt{C_2^2 - C_1C_3}}\right|, & & C_2^2 > C_1C_3, \\
3)\, \tau = -\dfrac{1}{C_1 t + C_2}, & & C_2^2 = C_1C_3.
\end{array}
$$

Решения (21) и (22) дают возможность анализировать движения долготы перицентра ω, наклонности i и изменения эксцентриситета e в зависимости от закона изменения масс (1), (16). В результате имеем

$$
\begin{array}{l}
e_1^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2N_1N_2 \cos[(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2)\tau(t) + \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2], \\
e_2^2 = N'^2_1 + N'^2_2 + 2N'_1N'_2 \cos[(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2)\tau(t) + \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2],
\end{array}
$$

$$
\sin^2 i_1 = u_1^2 + \upsilon_1^2, \quad \sin^2 i_2 = u_2^2 + \upsilon_2^2,
$$

$$
\operatorname{tg}\pi_1 = s_1/r_1, \quad \operatorname{tg}\pi_2 = s_2/r_2,
$$

$$
\omega_1 = \pi_1 - \Omega_1, \quad \omega_2 = \pi_2 - \Omega_2.
$$

Из выражений (21) следуют известные соотношения [?]–[?]

$$
\Omega_1 = \Omega_2 + 180^0, \quad \frac{d\Omega_1}{d\tau} = -(\tilde{E}_1 + \tilde{E}'_1).
$$

Последнее уравнение с учетом (16) перепишем в виде

$$
\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{(\tilde{E}_1 + \tilde{E}'_1)}{\varphi^2(t)} = -\left(\frac{m_{00}}{m_0}\right)^2 (\tilde{E}_1 + \tilde{E}'_1). \qquad (23)
$$

Таким образом, в отличие от классической задачи[6], в нашем случае движение линии узлов имеет переменную скорость. Система (19) решена отдельно от системы уравнений (18).

Следовательно, в уравнении (23) $\varphi^2(t)$ могут быть рассмотрены как произвольные функции, описывающие закон изменения масс (1).

Заключение

Анализ вековых возмущений в рассмотренной задаче показывает, что эффекты изменения масс существенно влияют на изменения орбитальных элементов. В связи с этим, представляет интерес изучения вековых возмущений в общем случае, когда $m_0(t)$, $m_1(t)$ и $m_2(t)$ сравнимые по величине и изменяются в различных темпах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Омаров Т. Б. Динамика гравитирующих систем Метагалактики. - Алматы: Наука, 1975. - 143 с.

2. Omarov T. B. Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. - New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002. – 248 c.

3.Bekov A. A., Omarov T. B. The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. and Astrophys. Transactions. 2003. -№22.- C. 145.

4. Лукьянов Л. Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. журнал. 2008. -№8.- С.755-768.

5. Минглибаев М.Дж. Динамика нестационарных гравитирующих систем -Алматы: изд. Казахского НациональногоУниверситета, 2009. - 209 с.

6. Шарлье К. Небесная механика. - М.: Наука, 1966. - 628 с.

7. Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики. - М.: МАКС Пресс, 2010. - 256 с.

8. Прокопеня А.Н. Решение физических задач с использованием системы MATHEMATICA. - Брест: Издательство БГТУ, 200. - 260 с.

Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М.

Массалары айнымалы протопланеталық үш дене мәселесінің ғасырлық ұйытқулары

Массалары айнымалы, бірқалыпты қарқында өзгеретін үш дене мәселесінің ғасырлық ұйытқулары қарастырылған. Mathematica компьютерлік алгебра жүйесінің көмегімен массалары айнымалы протопланеталы үш дене мәселесінің ғасырлық ұйытқуларының аналитикалық түрлері келтірілді.

Minglibaev M.D., Maemerova G.M.

The secular perturbations in the protoplanetary three-body problem with variable masses

The secular perturbations of the three-body problem with variable masses changing at the same specific rate are considered. The analytical expressions of the secular perturbations in the protoplanetary three-body problem with variable masses are obtained, with the computer algebra system Mathematica.

Поступила в редакцию 14.09.12

Рекомендована к печати 26.10.12