ISSN 1606-146X

№ 1 (27)
2008

Қазақстан Республикасы
Ұлттық инженерлік академиясының

ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК

Национальной инженерной академии
Республики Казахстан

УДК: 519.6

Ш. А. ДЖОМАРТОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ СКЛАДСКИМ ПРЕДПРИЯТИЕМ

Переход к рыночным отношениям в экономике Казахстана вызвал интенсивное развитие экономической науки. Одно из направлений экономики – логистика или задачи управления запасами в данное время является одной из широко изучаемых.

Моделирование процессов управления запасами позволит, минуя дорогостоящие натурные эксперименты, наиболее экономным путем заранее оценить возможные последствия различных административно-хозяйственных решений.

Целью исследования является нахождение оптимальной стратегии по управлению количеством товаров на складе. В статье рассматривается система управления запасами (многопродуктовая модель из n-продуктов), которая описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A(t) * x + B(t) * u, \qquad (1)$$

где $A(t)$ – nxn-матрица, элементы которой являются непрерывными функциями времени; $B(t)$ – nxm-матрица; $x(t)$ – n-мерный вектор состояния системы (количество товаров на складе); $u(t)$ – m-мерный вектор управления (необходимое количество товаров).

Предполагается, что известен $g(t)$ – n-мерный вектор – задающее воздействие (ожидаемый спрос на товары), которое удовлетворяет условию $g(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1]$.

Исходя из практической постановки задачи на управления $u(t)$ накладываются следующие ограничения:

$$0 \leq u_i(t) \leq u^i_{\max}, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, t_1]. \qquad (2)$$

Ограничение (2) имеет вполне естественный смысл: завозимый (приобретаемый на склад) товар не может иметь отрицательного значения и имеет реальное ограничение сверху (т.е. не может быть бесконечным).

На емкость склада накладываются условия (фазовые ограничения)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) \leq C, \quad t \in [t_0, t_1]. \qquad (3)$$

Любое складское помещение имеет естественное ограничение. В предлагаемой модели это ограничение характеризуется параметрами C и $a_i, i=\overline{1,n}$.

Кроме условия (3) на количество товара накладываются ограничения

$$x_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_1]. \qquad (4)$$

Считается известным состояние системы в начальный момент времени (начальное состояние – количество товара на складе в начальный момент времени

$$x(t_0) = x_0 .$$

В соответствии с условиями (3) и (4) предполагается, что x_0 удовлетворя условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{0i} \le C \quad \text{и} \quad x_0 \ge 0 .$$

Желаемое состояние в конечный момент времени t_1 может быть описано ка фиксированное

$$x(t_1) = x_1$$

или подвижное (удовлетворяющее некоторым условиям в случае, когда некоторы виды товаров являются взаимозаменяемыми и могут быть объединены в группы)

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t_1) \le d_i, i = \overline{1,k} .$$

Для оценки качества работы системы (склада) может быть использован следующи критерий (функционал):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[u^*(t) R_0 u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1 (x(t) - g(t)) \right] dt ,$$

где R_0 – положительно-определенная mxm-матрица; R_1 – неотрицательно-определенна nxn-матрица.

Составим множество допустимых управлений:

$$U = \left\{ u \middle| 0 \le u_i(t) \le u^i_{\max}, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [t_0, t_1] \right\} .$$

Это задача оптимального управления с ограничениями на управление (2), с фазовым ограничениями (3), (4), с закрепленными концами (5), (6) или подвижными концам (5), (7). Момент времени t_1 считается заданным (фиксированным). В настоящее врем решение подобных задач содержит ряд математических затруднений. Поэтом рассмотрим ряд задач оптимального управления при некоторых допущениях.

Составим функцию Гамильтона

$$H\left(x(t), u, \psi(t), \psi_0\right) = u^*(t) R_0 u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1 (x(t) - g(t)) + \\ +(A(t)x(t) + B(t)u(t))^* \psi$$

и сопряженную систему дифференциальных уравнений:

$$\psi(t) = -A^*(t)\psi(t) - 2R_1(x(t) - g(t)), \quad t \in [t_0, t_1] .$$

Определим оптимальное управление из уравнения (2) и максимума гамильтониан (9):

$$u = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad R_0^{-1}B\psi < 0; \\ R_0^{-1}B\psi & \text{если} \quad 0 \le R_0^{-1}B\psi \le u_{\max}; \\ u_{\max} & \text{если} \quad R_0^{-1}B\psi > u_{\max}. \end{cases} \tag{11}$$

1. Задача оптимального управления с закрепленным правым концом. Рассматривается задача минимизации функционала (8) при ограничениях (1), (2), (5), (6).

Теорема 1. Пусть пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ является решением поставленной задачи. Тогда необходимо существуют вектор-функция $\psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и параметр ψ_0 такие, что:

1) $\psi_0 \le 0$, $|\psi_0| + |\psi(t)| \ne 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

2) при этом $x(t), \psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1) и соответствующей сопряженной системы дифференциальных уравнений (10) при краевых условиях (5) и (6) и управлении (11).

Доказательство. Так как для сформулированной задачи оптимального управления выполнены все условия принципа максимума Понтрягина [1], то отсюда следует справедливость теоремы.

2. Задача оптимального управления с подвижным правым концом. Рассматривается задача минимизации функционала (8) при ограничениях (1), (2), (5), (7).

Теорема 2. Пусть пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ является решением поставленной задачи. Тогда необходимо существуют вектор-функция $\psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и параметр ψ_0 такие, что

1) $\psi_0 \le 0$, $|\psi_0| + |\psi(t)| \ne 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

2) $\psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – решение сопряженной системы дифференциальных уравнений (10), удовлетворяющая условию: существуют числа $\beta_1, \dots, \beta_k$ такие, что

$$\psi_i(t_1) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j c_{ji}, i = \overline{1,n}, \quad \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t_1) - d_i \right) = 0, \beta_i \ge 0, i = \overline{1,k};$$

3) при каждом $t \in [t_0, t_1]$ функция $H(x(t), u, \psi(t), \psi_0)$ по переменной u достигает своей верхней грани на множестве U при $u = u(t)$, т.е.

$$\sup_{u \in U} H(x(t), u, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), \psi(t), \psi_0).$$

Доказательство. Так как для сформулированной задачи оптимального управления выполнены все условия принципа максимума Понтрягина [1], то отсюда следует справедливость теоремы.

3. Численный алгоритм решения задачи оптимального управления с закрепленными концами и фазовыми ограничениями. Для практического решения задачи оптимального управления запасами используем метод штрафных функций и градиентный метод.

Для учета ограничений (6), (7) введем функцию штрафа

$$\varPhi_{1k} = M_{k1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\max\{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t) - C);0\}\right]^2 dt + M_{k2}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[\max\{-x_i(t);0\}\right]^2 dt .$$

Для учета ограничений на конце траектории введем функцию штрафа

$$\varPhi_{2k} = M_{k3}\sum_{i=1}^{n}\left[x(t_1) - x_1)\right]^2 .$$

Объединяя обе функции штрафа в одну, получаем

$$S_k = \varPhi_{1k} + \varPhi_{2k} .$$

В функционалах (12) $\{M_{k1}\},\{M_{k2}\},\{M_{k3}\}$ – некоторые заданные положительн последовательности, стремящиеся к бесконечности.

Построим новый функционал

$$J_k = J + S_k = \int_{t_0}^{t_1} \{u^*(t)R_0u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1(x(t) - g(t)) +$$

$$+M_{k1}[\max\{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t) - C);0\}]^2 + M_{k2}\left[\max\{-x_i(t);0\}\right]^2\}dt + M_{k3}\sum_{i=1}^{n}\left[x(t_1) - x_1)\right]^2$$

Заменим исходную задачу следующей: для заданного k найти оптимальное управлен минимизирующее функционал J_k при ограничениях (2), (5). Полученная задача являе задачей оптимального управления со свободным правым концом и ограничением управления. Для нее составим функцию Гамильтона

$$H_k = u^*(t)R_0u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1(x(t) - g(t)) + M_{k1}[\max\{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t) - C);0\}]^2 +$$

$$+M_{k2}\left[\max\{-x_i(t);0\}\right]^2 + (A(t)x(t) + B(t)u(t))^*\psi_k .$$

Предлагается следующий алгоритм решения.

Шаг 1. Пусть $k = 0$.

Шаг 2. Вычисляется оптимальное управление для k-й итерации

$$u_k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad R_0^{-1}B\psi_k < 0; \\ R_0^{-1}B\psi_k, & \text{если} \quad 0 \le R_0^{-1}B\psi_k \le u_{\max}; \\ u_{\max}, & \text{если} \quad R_0^{-1}B\psi_k > u_{\max}. \end{cases}$$

где ψ_k – решение сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\psi_k = -A(t)^*\psi_k - 2R_1(x_k(t) - g(t)) + 2M_{k1}[\max\{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{ki}(t) - C);0\}] +$$

$$+ M_{k2}\left[\max\{-x_{ki}(t);0\}\right]$$

$$y_2 = \int_0^T f(\tau)\bar{v}\, d\tau ,$$

где y_2 – интервальный вектор.

Теорема 3. Для того чтобы система (1), (2), (6) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы вектор y_1 принадлежал интервальному вектору y_2.

Доказательство аналогично приведенному в [4].

Таким образом, на основе математической теории оптимального управления решена проблема оптимального заказа, предложены численный алгоритм задачи оптимального управления и критерий управляемости динамической системы с ограничением на управление.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 400 с.

2. *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1986. 224 с.

3. *Джомартова Ш.А.* «Практические» интервальные вычисления // Вестник НАН РК. 2002. №2. С. 41-46.

4. *Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А., Жанабаев Е.З.* Критерий управляемости нестационарных линейных систем // Вестник МОН и НАН РК. 2003. №1. С. 106-110.