**ISSN 1563 – 0285**
**Индекс 75872**
**25872**

ӘЛ–ФАРАБИ атындағы
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

# ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

КАЗАХСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени АЛЬ–ФАРАБИ

# ВЕСТНИК КазНУ

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА

**АЛМАТЫ № 2 (77) 2013**

*Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г. (Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.)*

# ВЕСТНИК КазНУ

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА

№ 2(77) 2013

Научный редактор - Данаев Н.Т.

Ответственный секретарь - Азанова А.Н.
Компьютерная верстка - Азанов Н.П.

ИБ N 867

Подписано в печать 25.05.2013 г. Формат 70 × 108 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Заказ N .
Уч.-изд. п.л. 5,75. Тираж 500 экз. Цена договорная.

4 раза в год.

Издательство "Қазақ университетi"
Казахского национального университета им. аль-Фараби.

Отпечатано в типографии издательства "Қазақ университетi".

# МАЗМҰНЫ СОДЕРЖАНИЕ CONTENS

*УДК 517.938*

С.А. Айсагалиев, Ж.К. Айсагалиев

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz*

# Исследование по математическому программированию

Предлагается единый метод решения задач математического программирования в евклидовом пространстве. Метод основан на последовательном сужении области допустимых решений и ориентирован на применение современных компьютеров. Рассмотрены, в отдельности, результаты исследования общей задачи линейного программирования, выпуклого и нелинейного программирования.

Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи математического программирования путем замены исходных задач математического программирования на равносильные задачи с функциями цели, ограниченные снизу, в отдельности, для указанных задач.

Построены минимизирующие последовательности, предельные точки которых являются решениями общей задачи линейного программирования, выпуклого и нелинейного программирования, получены оценки скорости сходимости. Приведены решения примеров.

Научная ценность полученных результатов состоит в том, что: метод применим как к вырожденным, так и невырожденным задачам математического программирования, нет необходимости определения крайних точек и осуществить переход от одной крайней точки в другую, зачастую связанной с зацикливанием; решения задач выпуклого и нелинейного программирования не связаны с поиском седловой точки функции Лагранжа, не требуются условия существования седловых точек.

Создание новых эффективных методов решения задач математического программирования является актуальным для решения задач экономики, естественных наук, техники и информационных технологий.

*Ключевые слова*: {Математическое программирование, линейное программирование, выпуклое программирование, нелинейное программирование, оптимизационная задача, минимизирующая последовательность, предельные точки.}

*S.A. Aisagaliev, Zh.K. Aisagaliev*

**Research on mathematical programming**

Unified solving method for mathematical programming problems in Euclid space is developed. The method is based on sequential narrowing of admissible solutions set and oriented on using of modern computers. Results of investigation for a general problem of linear programming, convex programming problem and nonlinear programming problem are considered separately.

Necessary and sufficient conditions of solution existence for mathematical programming problem are obtained for mentioned problems separately by reducing of given problem to equivalent problem with bounded below target function.

Minimizing sequences such that accumulation point of them are solutions for general problem of linear programming, convex programming problem and nonlinear programming problem are constructed. Estimates of the convergence rates are obtained. Solving of examples by developed method using is adduced.

The scientific value of obtained results is the method is applicable to both confluent and nonsingular mathematical programming problems: it is not necessary to find an extreme point and to go on to the next point, which leads to circularity in most cases; convex programming problem and nonlinear programming problem solving are not related to finding saddle value of Lagrange function, saddle value existence conditions are not necessary.

Developing of new effective solution methods for mathematical programming problems is topical for solving of economics, natural sciences, engineering and information technologies problems.

*Key words*: {Mathematical programming, linear programming, convex programming, nonlinear programming, optimization problem, minimizing sequence, limit points.}

*С.Ә. Айсағалиев, Ж.К. Айсағалиев*

**Математикалық программалау бойынша зерттеу**

Евклид кеңістігінде математикалық программалау есептерін шешудің біртұтас әдісі ұсынылады. Әдіс мүмкін болатын шешімдердің жиынын біртіндеп жуықтауға негізделген және заманауи компьютерлерді қолдануға бағытталған. Сызықты программалаудың жалпы есебін, дөңес және сызықты емес программалау есептерін зерттеу нәтижелері жеке келтірілген.

Көрсетілген есептер үшін берілген есепті мақсаттық функциясы төменнен шектелген пара-пар есеппен ауыстыру жолымен математикалық программалау есебінің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Шектік нүктелері сызықты программалаудың жалпы есебінің, дөңес және сызықты емес программалау есептерінің шешімдері болып табылатын минимумдаушы тізбектер құрылып, жинақталу жылдамдығының бағасы алынған. Мысалдардың шығарылуы келтірілген.

Алынған нәтижелердің ғылыми құндылығы әдістің математикалық программалаудың ерекше де ерекше емес те есептерін шешуге қолданылатындығында; көп жағдайда циклдануға әкелетін бұрыштық нүктелерді тауып, олардың бірінен екіншісіне көшу қажеттігінің жоқтығында; дөңес және сызықты емес программалау есептерінің шешілуі Лагранждың қайқы нүктесін іздеумен байланысты емес және қайқы нүктенің бар болуының шарттарының қажетсіздігінде.

Математикалық программалау есептерін шешудің жаңа эффективті әдістерін құру экономиканың, жаратылыстану ғылымдарының, техниканың және ақпараттық технологиялардың есептерін шешу үшін өзекті мәселе болып табылады.

*Түйін сөздер*: {Математикалық программалау, сызықты программалау, дөңес программалау, сызықты емес программалау, тиімділік есебі, минимумдаушы тізбек, шектік нүктелер.}

**Введение.** Выпуклый анализ раздела математики, где изучаются свойства выпуклых множеств и функций. Основания выпуклого анализа были заложены в работах

Минковского, Фенхеля, Хана, Банаха, Крейна, Мильмана. В шестидесятые годы XX века начался новый этап в развитии выпуклого анализа, который привел к созданию теории выпуклых функций и в результате возникла общая теория выпуклого анализа. Книга американского математика Р.Т.Рокафеллара [1] - первая монография посвященная выпуклому анализу.

Выпуклый анализ играет огромную роль для решения задач математического программирования (линейного, выпуклого и нелинейного программирования), теории игр и теории оптимальных процессов.

Исследование задачи линейного программирования берет свое начало с работы Дж. фон Неймана, О. Моргенштерна. Ряд задач линейного программирования и метод их решения предложен Л.В. Канторовичем. Основным методом решения задач линейного программирования является симплекс - метод разработанный Дж. Данцигом, получивший развитие в работах А.Чарнса, Л.Форда, Д.Фалкерсона. Основы линейного программирования и численные методы решения приведены в [2]. Симплекс метод применим для решения невырожденных задач линейного программирования в каноническом виде и имеет ряд недостатков: во-первых, приведение общей задачи линейного программирования к каноническому виду требует введение дополнительных переменных, когда отсутствуют ограничения на значения искомых переменных. Это приводит к увеличению числа крайних точек, к росту числа итераций; во-вторых, в случае, когда ранг матрицы условий меньше числа ограничений задача линейного программирования становится вырожденной. Для решения таких задач симплекс - метод не применим; в третьих, американские ученые В. Кли, Дж.Минти построили пример задачи линейного программирования с $n$ переменными и $2n$ ограничениями, для решения которого требуется не менее $2^n - 1$ итераций симплекс метода, т.е. симплекс метод является алгоритмом "экспоненциальной трудности". Поэтому представляет интерес разработка новых методов решения общей задачи линейного программирования без приведения их к каноническому виду, ориентированные на применение современных средств вычислительной техники.

Как известно [3] поиск наименьшего значения выпуклой функции, определенной на выпуклом множестве, сводится к определению седловой точки функции Лагранжа. При таком подходе к решению задачи выпуклого программирования возникает необходимость наложить дополнительные требования на исходные данные задачи, что снижает эффективность метода множителей Лагранжа. Теоремы Куна-Таккера [1], гарантирующие существования седловой точки функции Лагранжа, являются достаточными условиями. Существуют множества задач выпуклого программирования, которые имеют решения, однако соответствующие функции Лагранжа не имеют седловых точек. Поэтому актуальным является поиск новых методов решения задачи выпуклого программирования без каких-либо множителей Лагранжа и не прибегая к существованию седловой точки функции Лагранжа.

Для задачи нелинейного программирования не имеется аналогичных теорем, как для задачи выпуклого программирования, гарантирующих существование седловой точки обобщенной функции Лагранжа. Нелинейное программирование относится к малоизученной области математического программирования.

### 1. Постановка задачи

Общая задача линейного программирования имеет вид

$$I(u) =< c, u >= c^* u \to \inf \tag{1}$$

$$u \in U = \{u \in R^n \;/\; u \in U_0,\; Au - b \le 0,\; \bar{A}u - \bar{b} = 0\}, \tag{2}$$

где $c \in R^n$, $b \in R^m$, $\bar{b} \in R^s-$ заданные векторы, $A$, $\bar{A}-$ заданные матрицы порядков $m\times n$, $s\times n$ соответственно, множество $U_0=\{u=(u_1,\dots,u_n)\in R^n/u_j\ge 0, j\in I\subset\{1,2,\dots,n\}\}$, (*)-знак транспонирования.

**Задача 1.** Найти необходимое и достаточное условие существования решения общей задачи линейного программирования (1), (2).

**Задача 2.** Найти новый эффективный метод построения решения общей задачи линейного программирования (1), (2).

Общая задача линейного программирования (1), (2) может быть решена симплекс-методом после приведения ее к каноническому виду, путем введения вспомогательных переменных $\upsilon_j$, $q_j$, $j \notin I$, где $u_j = \upsilon_j - q_j$, $j \notin I$, $\upsilon_j \ge 0$, $q_j \ge 0$. Однако это приводит к увеличению числа переменных, не говоря о недостатках симплекс метода в целом, указанные выше.

Часто на практике встречаются задачи выпуклого программирования следующего вида:

$$I(u) \to \inf, \tag{3}$$

$$u \in U = \{u \in R^n / u \in U_0, g_i(u) \le 0, i = \overline{1,m}, g_i(u) =< a_i, u > -b_i = 0, i = \overline{m+1,s}\}, \tag{4}$$

где $I(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,m}-$ выпуклые функции, определенные на выпуклом множестве $U_0$, $a_i \in R^n$, $i = \overline{m+1,s}-$ заданные векторы.

Заметим, что один из методов решения задачи (3), (4) является метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (3), (4) имеет вид

$$\mathscr{L}(u,\lambda) = I(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u),\; u \in U_0,\; \lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in R^s \;/\; \lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_m \ge 0\}. \tag{5}$$

Если пара $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda_0-$ седловая точка функции Лагранжа (5), т.е. $\mathscr{L}(u_*,\lambda) \le$ $\le \mathscr{L}(u_*,\lambda^*) \le \mathscr{L}(u,\lambda^*)$, $\forall u \in U_0$, $\forall \lambda \in \Lambda_0$, то $u_* \in U-$ решение задачи (3), (4). Здесь возникают следующие проблемы: во-первых, задача (3), (4) имеет ли решение, когда функция Лагранжа не имеет седловую точку; во-вторых, при выполнении дополнительно каких требований функция Лагранжа имеет седловую точку. Можно привести много примеров для случаев, когда задача (3), (4) имеет решение, однако функция Лагранжа (5) не имеет седловую точку. Как следует из работ Куна, Таккера для того, чтобы функция Лагранжа (5) имела седловую точку достаточно, чтобы выполнялось условие регулярности, т.е. существовала точка $\bar{u} \in U_0$ такая, что $g_i(\bar{u}) < 0$, $i = \overline{1,m}$. Это дополнительное требование к исходным данным задачи. Поэтому актуальными являются решения следующих задач:

**Задача 3.** Найти необходимое и достаточное условие существования решения задачи выпуклого программирования (3), (4).

**Задача 4.** Найти новый эффективный метод решения задачи выпуклого программирования (3), (4).

Рассмотрим задачу нелинейного программирования следующего вида:

$$I(u) \to \inf \tag{6}$$

$$u \in U = \{u \in R^n \,/\, u \in U_0,\ g_i(u) \le 0,\ i = \overline{1,m},\ g_i(u) = 0,\ i = \overline{m+1,s}\}, \tag{7}$$

где $I(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,s}-$ заданные функции, определенные на выпуклом множестве $U_0 \subset R^n$.

**Задача 5.** Найти необходимое и достаточное условие существования решения задачи нелинейного программирования (6), (7), где $I(u)$, $g_i(u)$, $i = \overline{1,s}$, $u \in U_0-$ любые заданные функции.

## 2. Исследование по линейному программированию

Рассмотрим общую задачу линейного программирования (1), (2).

**Лемма 1** *Пусть множество* $U_* = \{u_* \in U \,/\, I(u_*) = \gamma_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)\} \neq \emptyset$. *Тогда разность* $I(u) - \gamma \ge 0$ *при всех* $u \in U$, *для любого*

$$\gamma \in \Gamma = \{\gamma \in R^1 \,/\, a \le \gamma \le \gamma_*\},$$

*где* $a \le \gamma_*-$ *любое число.*

**Доказательство.** Так как $I(u) \ge \gamma_*$, $\forall u, u \in U$, то $I(u) - \gamma \ge \gamma_* - \gamma$, где $\gamma-$ любое число. Отсюда следует $I(u) - \gamma \ge 0$, $\forall u, u \in U$, если $\gamma_* - \gamma \ge 0$. Следовательно, $\gamma \le \gamma_*$. Пусть $a-$ некоторое число, $a \le \gamma_*$. Тогда $I(u) - \gamma \ge 0$ $\forall u, u \in U$ в любом выпуклом множестве $\Gamma = \{\gamma \in R^1 \,/\, a \le \gamma \le \gamma_*\}$, где $\gamma \in \Gamma$. Лемма доказана.

По исходным данным задачи (1), (2) определим функцию

$$\Phi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [Au - b + d]^*[Au - b + d] + [\bar{A}u - \bar{b}]^*[\bar{A}u - \bar{b}], \tag{8}$$

где

$$u \in U_0, \ \ \gamma \in \Gamma, \ \ d \in D = \{d \in R^m \,/\, d \ge 0\}.$$

Пусть $v = (u, \gamma, d)$, множество $V = U_0 \times \Gamma \times D$. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\Phi(v) \to \inf, \ \ v \in V, \tag{9}$$

где функция $\Phi(v) = \Phi(u, \gamma, d)$ определяется по формуле (8). Пусть $V_* = \{v_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in$ $\in V \,/\, \Phi(v_*) = \Phi_* = \inf\limits_{v \in V} \Phi(v)\}$.

**Теорема 1** *Пусть* $u_* \in U_* \subset U-$ *решение задачи (1), (2). Тогда*

$$v_* = (u_*, \gamma_* = I(u_*),\ d_* = Au_* - b) \in V_*$$

*-решение задачи (9) соответствующее значению* $\Phi(v_*) = 0$.

*Обратно, если* $v_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ *– решение задачи (9) при* $\Phi(v_*) = 0$, *то* $u_* \in U_* \subset U$ *– решение задачи (1), (2).*

*Если значение* $\Phi(v_*) > 0$, *то задача (1), (2) не имеет решения.*

**Доказательство.** Пусть $u_* \in U_*$ – решение задачи (1), (2), где $I(u_*) = I_* = \inf_{u\in U} I(u)$. Следовательно, $u_* \in U_0$, $Au_* - b \le 0$, $\bar{A}u_* - \bar{b} = 0$. Выберем $\gamma_* = I(u_*)$, $d_* = -Au_* + b \ge 0$. Тогда $\Phi(v_*) = [I(u_*) - \gamma_*]^2 + [Au_* - b + d_*][Au_* - b + d_*] + [\bar{A}u_* - \bar{b}]^*[\bar{A}u_* - \bar{b}] = 0$. Так как значение $\Phi(v) \ge 0$, $\forall v$, $v \in V$, то $\Phi(v_*) = \inf_{v\in V} \Phi(v) \ge 0$.

Отсюда следует, что $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V$ – решение задачи (9) при $\Phi(v_*) = 0$. Первая часть теоремы доказана.

Значение $\Phi(v_*) = 0$ тогда и только тогда, когда $I(u_*) - \gamma_* = 0$, $Au_* - b + d_* = 0$, $\bar{A}u_* - \bar{b} = 0$, $u_* \in U_0$, $\gamma_* \in \Gamma$, $d_* \in D$. Так как $Au_* - b = -d_* \le 0$, $\bar{A}u_* - \bar{b} = 0$, $u_* \in U_0$, то $u_* \in U$. Из $I(u_*) - \gamma_* = 0$, $u_* \in U$ следует, что $\gamma_* = I_*$. Итак, $I(u_*) = \gamma_* = I_* = \inf_{u\in U} I(u)$. Следовательно, $u_* \in U_*$– решение задачи (1), (2).

Если $\Phi(v_*) > 0$, то: либо $[I(u_*) - \gamma_*] > 0$; либо $[Au_* - b + d_*]^*[Au_* - b + d_*] > 0$; либо $[\bar{A}u_* - \bar{b}]^*[\bar{A}u_* - \bar{b}] > 0$. Отсюда следует, что: либо $I(u_*) \ne \gamma_*$; либо $Au_* - b + d_* \ne 0$; либо $\bar{A}u_* - \bar{b} \ne 0$. Следовательно, $u_* \notin U$. Это означает, что задача (1), (2) не имеет решения. Теорема доказана.

**Теорема 2** *Пусть $U_0$– выпуклое множество. Тогда:*

*1) множество $V = U_0 \times \Gamma \times D$ выпукло.*

*2) функция $\Phi(v)$ определенная на выпуклом множестве $V$ является выпуклой функцией, т.е.*

$$\Phi(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) \le \alpha\Phi(v_1) + (1-\alpha)\Phi(v_2),\ \forall v_1, v_2 \in V,\ \forall \alpha, \alpha \in [0,1].$$

*3) если для некоторой заданной точки $\varpi \in V$ множество*

$$M(\varpi) = \{v \in V \ /\ I(v) \le I(\varpi)\}$$

*ограничено, то множество $V_*$ непусто, компактно и любая минимизирующая последовательно $\{v_n\} \subset M(\varpi)$ сходится к множеству $V_*$.*

**Доказательство.** Пусть $v_1 = (u_1, \gamma_1, d_1) \in V$, $v_2 = (u_2, \gamma_2, d_2) \in V$ и число $\alpha \in [0,1]$. Тогда $\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 = (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2,\ \alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2,\ \alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) \in V$ в силу того, что $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U_0$, $\alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2 \in \Gamma$, $\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2 \in D$, где $U_0$, $\Gamma$, $D$ – выпуклые множества.

Поскольку $\Phi(v) \in C^2(V)$, то необходимое и достаточное условие выпуклости $\Phi(v)$ на $V$ имеет вид

$$< \Phi''(v)\xi, \xi > \ge 0,\ \forall v,\ v \in V,\ \forall \xi,\ \xi \in R^{n+1+m}.$$

Как следует из (8) функция $\Phi(v) = v^*Qv + qv + b^*b + \bar{b}^*\bar{b}$, где матрица

$$Q = \begin{pmatrix} cc^* + A^*A + \bar{A}^*\bar{A} & -c & A^* \\ -c^* & 1 & 0 \\ A & 0 & I_m \end{pmatrix} = Q^* \ge 0,\ q = \begin{pmatrix} -2A^*b - 2\bar{A}^*\bar{b} \\ 0 \\ -2b \end{pmatrix}^*,$$

то $\Phi''(v) = 2Q \ge 0$, $\forall v$, $v \in V$. Отсюда следует, что функция $\Phi(v)$ является выпуклой на выпуклом множестве $V$.

Поскольку $\Phi(v) \in C^2(V)$, то множество $M(\varpi)$ замкнуто. По условию теоремы $M(\varpi)$ – ограничено. Следовательно, множество $M(\varpi)$ компактно на $V$. Тогда согласно теореме Вейерштрасса множество $V_* \ne \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество. Пусть $\{v_k\} \subset M(\varpi)$ –

минимизирующая последовательность, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(\upsilon_k)=\Phi_*=\inf\limits_{\upsilon\in V}\Phi(\upsilon)$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\upsilon_k=\upsilon_*\in V_*$.

Заметим, что минимизирующая последовательность всегда существует.

Пусть $\upsilon_*-$ любая предельная точка $\{\upsilon_k\}$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\upsilon_{k_m}\}\subset M(\varpi)$, для которой $\lim\limits_{m\to\infty}\upsilon_{k_m}=\upsilon_*$. В силу компактности множества $M(\varpi)$ все предельные точки минимизирующей последовательности принадлежат множеству $M(\varpi)$.

Как следует из определения нижней грани и непрерывности $\Phi(\upsilon)$ на $V$ верны неравенства

$$\Phi_*\le\Phi(\upsilon_*)\le\lim_{m\to\infty}\Phi(\upsilon_{k_m})=\lim_{k\to\infty}\Phi(\upsilon_k)=\Phi_*.$$

Следовательно, $\Phi(\upsilon_*)=\Phi_*=\inf\limits_{\upsilon\in V}\Phi(\upsilon)$. Отсюда следует, что множество $V_*\ne\emptyset$ и любая минимизирующая последовательность сходится к $V_*$. Легко убедиться в том, что множество $V_*$ компактно. Теорема доказана.

**Лемма 2** *Производная* $\Phi'(\upsilon)=(\Phi'_u(\upsilon),\Phi'_\gamma(\upsilon),\Phi'_d(\upsilon))$, *где*

$$\begin{gathered}\Phi'_u(\upsilon)=(2cc^*+2A^*A+2\bar A^*\bar A)u-2c_\gamma+2A^*d-2A^*b-2\bar A^*\bar b,\\ \Phi'_\gamma(\upsilon)=-2(c^*u-\gamma),\ \ \Phi'_d(\upsilon)=2(Au-b+d)\end{gathered}\tag{10}$$

*удовлетворяет условию Липшица, т.е.*

$$|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|\le L|\upsilon_1-\upsilon_2|,\ \ \forall\upsilon_1,\upsilon_2\in V.\tag{11}$$

**Доказательство.** Как следует из выражения $\Phi(\upsilon)=\upsilon^*Q\upsilon+q\upsilon+b^*b+\bar b^*\bar b$, производная $\Phi'(\upsilon)=2Q\upsilon+q$, $\upsilon\in V$. Отсюда следует формула (10). Так как

$$\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)=(\Phi'_u(\upsilon_1)-\Phi'_u(\upsilon_2),\Phi'_\gamma(\upsilon_1)-\Phi'_\gamma(\upsilon_2),\Phi'_d(\upsilon_1)-\Phi'_d(\upsilon_2)),$$

то

$$\begin{gathered}|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|\le|\Phi'_u(\upsilon_1)-\Phi'_u(\upsilon_2)|+|\Phi'_\gamma(\upsilon_1)-\Phi'_\gamma(\upsilon_2)|+|\Phi'_d(\upsilon_1)-\Phi'_d(\upsilon_2)|\le\\ \le l(|u_1-u_2|+|\gamma_1-\gamma_2|+|d_1-d_2|),\ \ l=max\{\|2cc^*+2A^*A+2\bar A^*\bar A\|+2\|c^*\|+\\ +2\|A^*A\|,\ 2\|c\|+2,\ 4\|A^*\|\}.\end{gathered}$$

Отсюда, используя оценку $(a+b)^2\le2a^2+2b^2$, получим

$$|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|^2\le4l^2(|u_1-u_2|^2+|\gamma_1-\gamma_2|^2+|d_1-d_2|^2).$$

Следовательно, $|\Phi'(\upsilon_1)-\Phi'(\upsilon_2)|\le L(|u_1-u_2|^2+|\gamma_1-\gamma_2|^2+|d_1-d_2|^2)^{1/2}$, где $L=2l$. Отсюда следует неравенство (11). Лемма доказана.

На основе формул (10), (11) строим последовательности $\{u_n\},\{d_n\},\{\gamma_n\}$ по следующему алгоритму:

$$\begin{gathered}u_{n+1}=P_{U_0}[u_n-\alpha_n\Phi'_u(\upsilon_n)],\ \ \gamma_{n+1}=P_\Gamma[\gamma_n-\alpha_n\Phi'_\gamma(\upsilon_n)],\\ d_{n+1}=P_D[d_n-\alpha_n\Phi'_d(\upsilon_n)],\ \ n=0,1,2,\dots,0<\varepsilon_0\le\alpha_n\le\frac{2}{L+2\varepsilon_1},\ \varepsilon_1>0,\end{gathered}\tag{12}$$

где $L=const>0-$ постоянная Липшица из (11).

**Теорема 3** *Пусть выполнены условия теоремы 2, последовательности* $\{u_n\} \subset U_0$, $\{\gamma_n\}\subset\Gamma$, $\{d_n\}\subset D$ *определяются по формуле (12), множество* $M(\upsilon_0)=\{\upsilon\in V/\Phi(\upsilon)\leq\Phi(\upsilon_0)\}$ *ограничено. Тогда:*

*1) последовательность* $\{\upsilon_n\} = \{u_n, \gamma_n, d_n\} \subset M(\upsilon_0)$ *является минимизирующей, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(\upsilon_n) = \Phi_* = \inf\limits_{\upsilon\in V} \Phi(\upsilon)$;

*2) последовательность* $\{\upsilon_n\} \subset V$ *сходится к множеству* $V_*$, $V_* \neq \emptyset$, *т.е.* $u_n \to u_*$, $\gamma_n \to \gamma_*$, $d_n \to d_*$ *при* $n \to \infty$, $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$;

*3) справедлива оценка скорости сходимости*

$$0 \leq \Phi(\upsilon_n) - \Phi_* \leq \frac{c^2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{n}, \tag{13}$$

*где* $c = \sup\limits_{\upsilon\in M(\upsilon_0)} |\Phi'(\upsilon)| + \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{d}$, $\bar{d}-$ *диаметр множества* $M(\upsilon_0)$;

*4) общая задача линейного программирования (1), (2) имеет решение тогда только тогда, когда* $\Phi(\upsilon_*) = \Phi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$, *где* $u_* \in U-$ *решение общей задачи линейного программирования;*

*5) если значение* $\Phi(\upsilon_*) > 0$, *то общая задача линейного программирования (1), (2) не имеет решения.*

**Доказательство.** Поскольку $\upsilon_{n+1} \in V$ является проекцией точки $\upsilon_n - \alpha_n\Phi'(\upsilon_n) \in$ $\in R^{n+1+m}$, то $< \upsilon_{n+1} - \upsilon_n + \alpha_n\Phi'(\upsilon_n),\ \upsilon - \upsilon_{n+1} >\geq 0$, $\forall\upsilon,\ \upsilon \in V$. Отсюда получим

$$< \Phi'(\upsilon_n), \upsilon - \upsilon_{n+1} >\geq \frac{1}{\alpha_n} < \upsilon_n - \upsilon_{n+1}, \upsilon - \upsilon_{n+1} >,\ \forall\upsilon,\ \upsilon \in V,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Поскольку функция $\Phi(\upsilon) \in C^{1,1}(V)$, то справедливо неравенство

$$\Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_{n+1}) \geq< \Phi'(\upsilon_n), \upsilon_n - \upsilon_{n+1} > -\frac{L}{2}\|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}\|^2,\ \forall\upsilon_n, \upsilon_{n+1} \in V. \tag{15}$$

Из (14), (15), с учетом неравенства $0 \leq \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq 2/(L + 2\varepsilon_1)$, имеем

$$\begin{gathered}\Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_{n+1}) \geq (\frac{1}{\alpha_n} - \frac{L}{2})|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|^2 \geq \varepsilon_1|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|^2,\ \varepsilon_1 > 0,\\ \forall\upsilon_n, \upsilon_{n+1} \in V,\ n = 0, 1, 2, \ldots.\end{gathered} \tag{16}$$

Из (16) следует, что числовая последовательность $\{\Phi(\upsilon_n)\}$ строго убывает, и она сходится в силу того, что функция $\Phi(\upsilon) \geq 0$, $\forall\upsilon$, $\upsilon \in V$ ограничена снизу. Тогда $\lim\limits_{n\to 0}[\Phi(\upsilon_n) - \Phi(\upsilon_{n+1})] = 0$ и из (16) имеем $|\upsilon_n - \upsilon_{n+1}|\to 0$ при $n\to\infty$. Множество $M(\upsilon_0)$ – компактно, $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$ в силу того, что $\Phi(\upsilon_{n+1}) < \Phi(\upsilon_n) < \cdots < \Phi(\upsilon_1) \leq \Phi(\upsilon_0)$, где $\upsilon_0 \in V-$ начальная точка для последовательности $\{\upsilon_n\} \subset V$. Множество $V_* \subset M(\upsilon_0)$ и функция $\Phi(\upsilon)$ достигает нижней грани на множестве $M(\upsilon_0)$. Следовательно, $V_* \neq \emptyset$. Легко убедиться в том, что множество $M(\upsilon_0)$ выпукло.

Покажем, что последовательность $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$ минимизирующая. Поскольку функция $\Phi(\upsilon) \in C^1(M(\upsilon_0))$ выпукла на выпуклом множестве $M(\upsilon_0)$, то необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\Phi(\upsilon) - \Phi(\varpi) \geq< \Phi'(\varpi), \upsilon - \varpi >,\ \forall\upsilon, \varpi \in M(u_0).$$

Отсюда следует

$$\Phi(\varpi)-\Phi(\upsilon)\le<\Phi'(\varpi),\varpi-\upsilon>,\ \forall\upsilon,\varpi\in M(u_0). \tag{17}$$

Из (17), в частности, когда $\upsilon=\upsilon_*\in M(\upsilon_0)$, $\varpi=\upsilon_n\in M(u_0)$, имеем

$$0\le\Phi(\upsilon_n)-\Phi(\upsilon_*)\le<\Phi'(\upsilon_n),\upsilon_n-\upsilon_*>=<\Phi'(\upsilon_n),\upsilon_n-\upsilon_{n+1}>-$$

$$-<\Phi'(\upsilon_n),\upsilon_{n+1}-\upsilon_*>\le<\Phi'(\upsilon_n),\upsilon_n-\upsilon_{n+1}>-\frac{1}{\alpha_n}<\upsilon_n-\upsilon_{n+1},\upsilon_*-\upsilon_{n+1}>,$$

в силу неравенства (14). Следовательно

$$0\le a_n=\Phi(\upsilon_n)-\Phi(\upsilon_*)\le<\Phi'(\upsilon_n)-\frac{1}{\alpha_n}(\upsilon_*-\upsilon_{n+1}),\upsilon_n-\upsilon_{n+1}>\le$$

$$\le|\Phi'(\upsilon_n)-\frac{1}{\alpha_n}(\upsilon_*-\upsilon_{n+1})||\upsilon_n-\upsilon_{n+1}|\le(\sup_{\upsilon\in M(\upsilon_0)}|\Phi'(\upsilon)|+\frac{\overline{d}}{\varepsilon_0})|\upsilon_n-\upsilon_{n+1}|=c|\upsilon_n-\upsilon_{n+1}|.$$

Так как по доказанному $|\upsilon_n-\upsilon_{n+1}|\to 0$ при $n\to\infty$, следовательно, $\lim_{n\to\infty}\Phi(\upsilon_n)=\Phi_*$. Это означает, что последовательность $\{\upsilon_n\}$ является минимизирующей и в силу компактности множества $M(\upsilon_0)$ и непрерывности $\Phi(\upsilon)$ на $M(\upsilon_0)$ все предельные точки $\{\upsilon_n\}\subset M(\upsilon_0)$ принадлежат множеству $V_*\subset M(\upsilon_0)$. Из неравенства $0\le a_n=\Phi(\upsilon_n)-\Phi_*\le c|\upsilon_n-\upsilon_{n+1}|$, $\Phi(\upsilon_n)-\Phi(\upsilon_{n+1})\ge\varepsilon_1|\upsilon_n-\upsilon_{n+1}|^2$ следует оценка (13). Утверждения 4),5) следуют из теоремы 1. Теорема доказана.

**Пример.** Решить задачу линейного программирования

$$I(u)=-2u_1-3u_2+5u_3-6u_4\to\inf \tag{18}$$

$$2u_1+u_2-u_3+u_4=5,\ u_1+3u_2+u_3-u_4\le 8,\ -u_1+4u_2+u_4=1, \tag{19}$$

1) $u_0=\{u_1\ge 0,\ u_2\ge 0,\ u_3\ge 0,\ u_4\ge 0\}$, 2) $u_0=\{u_1\ge 0,\ u_2\in R^1,\ u_3\ge 0,\ u_4\in R^1\}$.

В отдельности, рассмотрим случаи 1), 2).

1. Пусть $U_0=\{u_1\ge 0,\ u_2\ge 0,\ u_3\ge 0,\ u_4\ge 0\}$. Для задачи (18), (19) имеем

$$c^*=(-2,-3,5,-6),\quad A=(1,3,1,-1),\quad b=-8,\quad \bar{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\-1&4&0&1\end{pmatrix},$$

$$\bar{b}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix},\quad \upsilon=(u,\gamma,d)^*,\quad u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix},\quad \gamma\in R^1,\ d\ge 0,$$

$$Au-8+d=0,\quad \upsilon^*=(u_1,u_2,u_3,u_4,\gamma,d)\in V=U_0\times R^1\times D.$$

Функция

$$\Phi(\upsilon)=[c^*u-\gamma]^2+[Au-8+d]^2+[\bar{A}u-\bar{b}]^*[\bar{A}u-\bar{b}]=\upsilon^*Q\upsilon+q\upsilon+b^*b+\bar{b}^*\bar{b},$$

где

$$Q=Q^*=\begin{pmatrix} cc^*+A^*A+\bar{A}^*\bar{A} & -c & A^* \\ -c^* & 1 & 0 \\ A & 0 & I_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 7 & -11 & 12 & 2 & 1 \\ 7 & 36 & -13 & 20 & 3 & 3 \\ -11 & -13 & 27 & -32 & -5 & 1 \\ 12 & 20 & -32 & 39 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$q=((-2A^*b-2\bar{A}^*\bar{b})^*,0,-2b^*)=(34,66,6,-4,0,10,2),\quad b^*b+\bar{b}^*\bar{b}=90.$$

Производные

$$\Phi'_u(\upsilon)=(2cc^*+2A^*A+2\bar{A}^*\bar{A})u-2c\gamma+2A^*d-2A^*b-2\bar{A}^*\bar{b}=$$

$$=\begin{pmatrix} 20u_1+14u_2-22u_3+24u_4+4\gamma+2d+34 \\ 14u_1+72u_2-26u_3+40u_4+6\gamma+6d+66 \\ -22u_1-26u_2+54u_3-64u_4-10\gamma+2d+6 \\ 24u_1+40u_2-64u_3+78u_4+12\gamma-2d-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Phi'_{u_1}(\upsilon) \\ \Phi'_{u_2}(\upsilon) \\ \Phi'_{u_3}(\upsilon) \\ \Phi'_{u_4}(\upsilon) \end{pmatrix},$$

$$\Phi'_\gamma(\upsilon)=-2(c^*u-\gamma)=-2(-2u_1-3u_2+5u_3-6u_4-\gamma),$$

$$\Phi'_d(\upsilon)=2(Au-b+d)=2(u_1+3u_2+u_3-u_4-8+d).$$

Последовательности $\{u_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{d_n\}$ определяются соотношениями:

$$\begin{gathered} u_1^{(n+1)}=P_{U_0}[u_1^{(n)}-\alpha_n\Phi'_{u_1}(\upsilon_n)],\quad u_2^{(n+1)}=P_{U_0}[u_2^{(n)}-\alpha_n\Phi'_{u_2}(\upsilon_n)], \\ u_3^{(n+1)}=P_{U_0}[u_3^{(n)}-\alpha_n\Phi'_{u_3}(\upsilon_n)],\quad u_4^{(n+1)}=P_{U_0}[u_4^{(n)}-\alpha_n\Phi'_{u_4}(\upsilon_n)], \\ \gamma_{n+1}=P_\Gamma[\gamma_n-\alpha_n\Phi'_\gamma(\upsilon_n)],\quad d_{n+1}=P_D[d_n-\alpha_n\Phi'_d(\upsilon_n)],\quad n=0,1,2,\ldots, \end{gathered}\tag{20}$$

где $\alpha_n=const=\frac{1}{L}$ при $\varepsilon_1=\frac{L}{2}$, $\varepsilon_0=\alpha_n=const>0$. Для численных расчетов выбрано значение $\alpha_n$=0,1. Заметим, что проекция точки $\varpi\in R^n$ на множество $U_0$=$\{u\in R^n\ /\ u\geq 0\}$ определяется так $P_{U_0}[\varpi]=\{\max(0,\varpi_1),\max(0,\varpi_2),\ldots,\max(0,\varpi_n)\}$, где $\varpi=(\varpi_1,\ldots,\varpi_n)$.

Найдены предельные точки последовательностей равные:

$$\lim_{n\to\infty}u_1^{(n)}=u_{1*}=\frac{19}{9},\quad \lim_{n\to\infty}u_2^{(n)}=\frac{7}{9},\quad \lim_{n\to\infty}u_3^{(n)}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}u_4^{(n)}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n=-\frac{59}{9},\quad \lim_{n\to\infty}d_n=\frac{32}{9}.$$

Решением исходной задачи (18), (19) являются: $u_*=(u_{1*},u_{2*},u_{3*},u_{4*})=\left(\frac{19}{9},\frac{7}{9},0,0\right)$, значение $I(u_*)=\gamma_*=-\dfrac{59}{9}$. Такие же результаты можно получить путем решения задачи (18), (19) симплекс методом после ее приведения к каноническому виду.

Легко убедиться в том, что значение $\Phi(\upsilon_*)$=$\Phi(u_*,\gamma_*,d_*)$=0, где $\upsilon_*$=$(u_*,\gamma_*,d_*)\in V_*$, $\Phi(\upsilon_*)=\Phi_*=\inf\limits_{\upsilon\in V}\Phi(\upsilon)=0$. В самом деле, $I(u_*)-\gamma_*=-2\cdot\dfrac{19}{9}-3\cdot\dfrac{7}{9}-\left(-\dfrac{59}{9}\right)=0$, $Au_*-8+d_*=\dfrac{19}{9}+3\cdot\dfrac{7}{9}-8+\dfrac{32}{9}=0$; $\bar{A}u_*-\bar{b}=\begin{pmatrix} 2\cdot\dfrac{19}{9}+\dfrac{7}{9}-5=0 \\ (-1)\cdot\dfrac{19}{9}+4\cdot\dfrac{7}{9}-1=0 \end{pmatrix}$.

2. Пусть $U_0 = \{u_1 \ge 0,\ u_2 \in R^1,\ u_3 \ge 0, u_4 \in R^1\}$. Данный случай отличается от первого случая только тем, что последовательности $\{u_2^n\}$, $\{u_4^{(n)}\}$ определяются соотношениями

$$u_2^{n+1} = u_2^n - \alpha_n \Phi'_{u_2}(\upsilon_n),\ \ u_4^{n+1} = u_4^n - \alpha_n \Phi'_{u_4}(\upsilon_n),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нет необходимости приведения задачи (18), (19) к каноническому виду путем введения дополнительных переменных $u_2 = \upsilon_2 - q_2$, $\upsilon_2 \ge 0$, $q_2 \ge 0$, $u_4 = \upsilon_4 - q_4$, $\upsilon_4 \ge 0$, $q_4 \ge 0$.

### 3. Исследование по выпуклому программированию

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (3), (4).

**Лемма 3** *Пусть множество* $U_* = \{u_* \in U \ / \ I(u_*) = \gamma_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)\} \ne \emptyset$. *Тогда сумма* $g(u) + d \ge 0$ *при всех* $u \in U$ *для любого*

$$d \in D_1 = \{d \in R^m \ / \ d \ge d_*,\ \ d_* = -g(u_*) \ge 0\}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1. Как в предыдущем случае, по исходным данным задачи (3), (4) определим функцию

$$\Psi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [g(u) + d]^*[g(u) + d] + [Au - b]^*[Au - b], \tag{21}$$

где $u \in U_*$, $\gamma \in \Gamma$, $d \in D_1$.

Функции $I(u)$, $g(u) = (g_1(u), \ldots, g_m(u))-$ выпуклы на выпуклом множестве $U_0$.

Пусть $\upsilon = (u, \gamma, d)$, множество $V_1 = U_0 \times \Gamma \times D_1$. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\Psi(\upsilon) \to \inf,\ \ \upsilon \in V_1, \tag{22}$$

где функция $\Psi(\upsilon) = \Psi(u, \gamma, d)$ определяется по формуле (21). Пусть $U_* = \{u_* \in U / I(u_*) = I_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)\}-$ множество решений задачи (3), (4), множество

$$V_* = \{\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_1 \ / \ \Psi(\upsilon_*) = \Psi_* = \inf_{\upsilon \in V_1} \Psi(\upsilon)\}$$

-множество решений задачи (22).

**Теорема 4** *Пусть множество* $U_* = \{u_* \in U \ / \ I(u_*) = I_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)\} \ne \emptyset$. *Тогда:*

*1) если* $u_* \in U_*$ *– решение задачи выпуклого программирования (3), (4), то* $\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ *– решение задачи (22), где* $\gamma_* = I(u_*) = I_*$, $d_* = -g(u_*)$, $\Phi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$;

*2) если* $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*-$ *решение задачи (22) при* $\Phi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$, *то* $u_* \in U_* \subset U$ *– решение задачи выпуклого программирования (3), (4);*

*3) если* $\Phi(u_*, \gamma_*, d_*) > 0$, *то задача выпуклого программирования (3), (4) не имеет решения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

**Теорема 5** *Пусть $U_0$– выпуклое множество, функции $I(u) \in C^2(U_0)$, $g_i(u) \in C^2(U_0)$ – выпуклы. Тогда:*

*1) множество $V_1 = U_0 \times \Gamma \times D_1$ выпукло;*

*2) для того чтобы функция $\Psi(\upsilon)$, $\upsilon \in V$ была выпукла, необходимо и достаточно, чтобы*

$$I(u) - \gamma \geq 0, \quad g(u) + d \geq 0, \quad \forall u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad d \in D_1.$$

*Если кроме того, для некоторой точки $\varpi \in V$ множество $M(\varpi) = \{\upsilon \in V_1 \ / \ \Psi(\upsilon) \leq \Psi(\varpi)\}$ ограничено, то множество $V_*$ непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_n \subset V_1\}$ сходится к множеству $V_*$.*

**Доказательство.** Рассмотрим первое слагаемое из суммы (21). Пусть $\Psi_1(u, \gamma) = [I(u) - \gamma]^2$, $u \in U_0$, $\gamma \in R^1$, где $I(u) \in C^2(U_0)$– выпуклая функция. Заметим, что $< I''(u)\xi, \xi > \geq$, $\forall u, u \in U_0$, $\forall \xi, \xi \in R^n$ в силу выпуклости функции $I(u)$ на $U_0$. Поскольку

$$\Psi_1'(u,\gamma) = \begin{pmatrix} 2[I(u)-\gamma]I'(u) \\ -2[I(u)-\gamma] \end{pmatrix}, \quad \Psi_1''(u,\gamma) = \begin{pmatrix} 2I'(u)[I'(u)]^* + 2[I(u)-\gamma]I''(u) & -2I'(u) \\ -2[I'(u)]^* & 2 \end{pmatrix},$$

$$u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Для того чтобы функция $\Psi_1(u, \gamma) \in C^2(U_0 \times R^1)$ была выпуклой функцией необходимо и достаточно, чтобы $\Psi_1''(u, \gamma) \geq 0$, $\forall u \in U_0$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Далее, применяя известную лемму о том, что: матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} G & g \\ g^* & \Gamma_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

равносильно неравенству $G - g\Gamma_1^{-1}g \geq 0$, где $\Gamma_1 > 0$. Для матрицы $\Psi_1''(u, \gamma)$, $G = 2I'(u)[I'(u)]^* + 2[I(u) - \gamma]I''(u)$, $g = -2I'(u)$, $\Gamma_1 = 2$. Отсюда следует, что $\Psi_1''(u, \gamma) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $2[I(u) - \gamma]I''(u) \geq 0$, $u \in U_0$, $\gamma \in \Gamma$. По условию теоремы $I(u) - \gamma \geq 0$. Следовательно, $\Psi_1''(u, \gamma) \geq 0$ функция $\Psi_1(u, \gamma)$– выпукла на выпуклом множестве $U_0 \times R^1$.

Аналогичным путем можно доказать выпуклость функции $\Psi_2(\lambda) = [g(u)+d]^*[g(u)+d]$ на выпуклом множестве $U_0 \times D_1$. Поскольку функция $\Psi_3(u) = [Au - b]^*[Au - b]$ выпукла на выпуклом множестве $U_0$. Тогда $\Psi(u, \gamma, d) = \Psi_1(u, \gamma) + \Psi_2(u, d) + \Psi_3(u)$ выпуклая функция на выпуклом множестве $V_1$.

Доказательства других утверждений теоремы следуют из доказательства теоремы 2. Теорема доказана.

**Лемма 4** *Пусть выполнены условия теоремы 5, и пусть, кроме того, существует число $\beta > 0$ такое, что*

$$\beta |\Psi_\upsilon'(\upsilon_1) - \Psi_\upsilon'(\upsilon_2)| \leq < \Psi_\upsilon'(\upsilon_1) - \Psi_\upsilon'(\upsilon_2), \upsilon_1 - \upsilon_2 >, \quad \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in V_1. \tag{23}$$

*Тогда: 1) производные*

$$\begin{gathered} \Psi_u'(\upsilon) = 2[I(u) - \gamma]I'(u) + 2\sum_{i=1}^{m}[g_i(u) + d_i]g_i'(u) + 2A^*(Au - b), \\ \Psi_\gamma'(\upsilon) = -2[I(u) - \gamma], \quad \Psi_d'(\upsilon) = 2[g(u) + d]; \end{gathered} \tag{24}$$

*2) градиент $\Psi'_v(v)$, $v \in V_1$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in V_1, \tag{25}$$

*где $L = 1/\beta > 0-$ постоянная Липшица.*

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы непосредственно следует из включения $\Psi(v) \in C^2(V_1)$. При выполнении условия теоремы 5 функция $\Psi(v)$ выпукла на выпуклом множестве $V_1$. Тогда необходимо и достаточно выполнение условия

$$< \Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2, v_1 - v_2) >\geq 0, \quad \forall v_1, v_2 \in V_1.$$

По условию леммы выполнено неравенство (23). Из (23) следует, что

$$\beta|\Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2)|^2 \leq |\Psi'_v(v_1) - \Psi'_v(v_2)||v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in V_1.$$

Отсюда следует неравенство (25). Лемма доказана.

На основе формул (24), (25) строим последовательность $\{v_n\} = \{u_n, \gamma_n, d_n\} \subset V$ по следующему алгоритму:

$$\begin{gathered} u_{n+1} = P_{U_0}[u_n - \alpha_n \Psi'_u(v_n)], \quad \gamma_{n+1} = P_\Gamma[\gamma_n - \alpha_n \Psi'_\gamma(v_n)], \quad d_{n+1} = P_D[d_n - \alpha_n \Psi'_d(v_n)], \\ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 > 0, \end{gathered} \tag{26}$$

где $L = const > 0-$ постоянная Липшица из (25).

**Теорема 6** *Пусть выполнены условия теоремы 5, последовательности $\{u_n\} \subset U_0$, $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$, $\{d_n\} \subset D_1$ определяются по формуле (26). Тогда:*

*1) последовательность $\{v_n\} \subset M(v_0)$ является минимизирующей,*

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(v_n) = \Psi_* = \inf_{v \in V} \Psi(v);$$

*2) последовательность $\{v_n\} \subset M(v_0)$ сходится к множеству $V_*$, $V_* \neq \emptyset$, $u_n \to u_*$, $\gamma_n \to \gamma_*$, $d_n \to d_*$ при $n \to \infty$, $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$;*

*3) справедлива оценка скорости сходимости*

$$0 \leq \Psi(v_n) - \Psi_* \leq \frac{c_1^2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*где $c_1 = \sup_{v \in V} |\Psi'_v(v)| + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\bar{d}$, $\bar{d}-$ диаметр множества $M(v_0)$;*

*4) задача выпуклого программирования (3), (4) имеет решение тогда и только тогда, когда $\Psi(v_*) = 0$;*

*5) задача выпуклого программирования (3), (4) не имеет решения при $\Psi(v_*) > 0$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

**Пример 2.** Решить задачу выпуклого программирования

$$I(u) = 8u_1^2 + 10u_2^2 - 12u_1u_2 + 50u_1 - 80u_2 \to \inf \tag{27}$$

$$u \in U = \{u = (u_1, u_2) \in R^2 / u \in U_0, g_1(u) = 8u_2^2 + u_2^2 - 2 \le 0, g_2(u) = u_1 + u_2 - 1 = 0\}, \quad (28)$$

$$u_0 = \{u = (u_1, u_2) \in R^2 \,/\, u_1 \ge 0, u_2 \ge 0\}. \quad (29)$$

Заметим, что множество $U_0 \subset R^2$ выпукло, функция $I(u)$ выпукла на множестве $U_0$, так как симметричная матрица

$$I''(u) = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} > 0, \quad < I''(u)\xi, \xi >> 0, \quad \forall \xi \in R^2, \quad \forall u.u \in U_0.$$

Легко проверить, что функции $g_1(u)$, $g_2(u)$ выпуклы на множестве $U_0$. Итак, задача (27)-(29) является задачей выпуклого программирования.

Функция

$$\Psi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d]^2 + [u_1 + u_2 - 1]^2,$$

$$u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad d \in D_1 = \{d \ge d_*\}, \quad V = U_0 \times \Gamma \times D_1, \quad \upsilon = (u, \gamma, d) \in V_1.$$

Производные

$$\Psi'_u(\upsilon) = \begin{pmatrix} 2[I(u) - \gamma](16u_1 - 12u_2 + 50) + 32u_1(8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d) + 2(u_1 + u_2 - 1) \\ 2[I(u) - \gamma](20u_2 - 12u_1 - 80) + 4u_2(8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d) + 2(u_1 + u_2 - 1) \end{pmatrix},$$

$$\Psi'(\gamma) = -2[I(u) - \gamma], \quad \Psi'_d(\upsilon) = 2(8u_1^2 + u_2^2 - 2 + d).$$

Последовательности

$$u_1^{(n+1)} = P_{U_0}[u_1^{(n)} - \alpha_n \Psi'_{u_1}(\upsilon_n)], \quad u_2^{(n+1)} = P_{U_0}[u_2^{(n)} - \alpha_n \Psi'_{u_2}(\upsilon_2)],$$

$$\gamma_{n+1} = P_\Gamma[\gamma_n - \alpha_n \Psi'_\gamma(\upsilon_n)], \quad d_{n+1} = P_{D_1}[d_n - \alpha_n \Psi'_d(\upsilon_n)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_n = \dfrac{1}{L} = 0,05$. Предельные точки $u_1^{(n)} \to u_{1*} = 0$, $u_2^{(n)} \to u_{2*} = 1$, $\gamma_n \to \gamma_* = -70$, $d_n \to d_* = 0$ при $n \to \infty$. Решение задачи выпуклого программирования (27)-(29): $u_{1*} = 0$, $u_{2*} = 1$, $I(u_*) = \gamma_* = -70$. Значение $\Psi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$.

### 4. Исследование по нелинейному программированию

Рассмотрим задачу нелинейного программирования (6), (7). Определим функцию

$$\pi(u, \gamma, d) = [I(u) - \gamma]^2 + [g(u) + d]^*[g(u) + d] + [\bar{g}(u)]^*[\bar{g}(u)], \quad (30)$$

где $g(u) = (g_1(u), \ldots, g_m(u))$, $\bar{g}(u) = (g_{m+1}(u), \ldots, g_s(u))$.

Пусть $\upsilon = (u, \gamma, d)$, $u \in U_0$, $\gamma \in \Gamma$, $d \in D_1 = \{d \in R^m \,/\, d \ge d_*\}$. Множество $V = U_0 \times \Gamma \times D_1$. Наряду задачи нелинейного программирования (6), (7), рассмотрим оптимизационную задачу

$$\pi(\upsilon) \to \inf, \quad \upsilon \in V, \quad (31)$$

где $\pi(\upsilon)=\pi(u, \gamma, d)$ определяется по формуле (30). Пусть множество $U_* = \{u_* \in U \,/\, I(u_*) = = I_* = \inf\limits_{u \in U} I(u)\}$ – решение задачи (6), (7), множество

$$V_* = \{\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V \,/\, \pi(\upsilon_*) = \pi_* = \inf_{\upsilon \in V} \pi(\upsilon)\}$$

-множество решений задачи (31).

**Теорема 7** *Пусть множество $U_* \neq \emptyset$. Тогда:*

*1) если $u_* \in U_*$ – решение задачи нелинейного программирования (6), (7), то $v_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ – решение задачи (31), где $\gamma_* = I(u_*) = I_*$, $d_* = -g(u_*)$, $\pi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$;*

*2) если $(u_*, \gamma_*, d_*) \in V_*$ – решение задачи (31) при $\pi(u_*, \gamma_*, d_*) = 0$, то $u_* \in U_*$ – решение задачи нелинейного программирования (6), (7);*

*3) если $\pi(u_*, \gamma_*, d_*) > 0$, то задача нелинейного программирования (6), (7) не имеет решения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем 1,4.

**Теорема 8** *Пусть $U_0-$ выпуклое множество, функции $I(u) \in C^2(U_0)$, $g_i(u) \in C^2(U_0)$, $i = \overline{1,s}$. Тогда:*

*1) множество $V = U_0 \times R^1 \times D-$ выпукло;*

*2) для того чтобы функция $\pi(v)$, $v \in V$ была выпукла, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\pi''(v)$ порядка $(n+s+1) \times (n+s+1)$ была неотрицательной.*

*Если, кроме того, для некоторой точки $\varpi \in V$ множество $M(\varpi) = \{v \in V / \pi(v) \leq \pi(\varpi)\}$ ограничено, то множество $V_*$ непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{v_k \subset V\}$ сходится к множеству $V_*$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем 2,5.

Пусть функция $\pi(v) \in C^{1,1}(V)$, т.е. $\pi(v) \in C^1(V)$ и градиент $\pi'(v)$, $v \in V$ удовлетворяет условию Липшица $|\pi'(v_1) - \pi'(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|$, $\forall v_1, v_2 \in V$. Строим последовательности $\{u_n\}, \{\gamma_n\}, \{d_n\}$ по следующему алгоритму:

$$\begin{gathered} u_{n+1} = P_{U_0}[u_n - \alpha_n \pi'_u(v_n)], \quad \gamma_{n+1} = P_\Gamma[\gamma_n - \alpha_n \pi'_\gamma(v_n)], \\ d_{n+1} = P_{D_1}[d_n - \alpha_n \pi'_d(v_n)], \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 > 0, \ n = 0,1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{32}$$

где $\pi'_u(v) = 2[I(u) - \gamma]I'(u) + 2\sum\limits_{i=1}^{m}[g_i(u) + d_i]g'_i(u) + 2\sum\limits_{i=m+1}^{s}\bar{g}_i(u)\bar{g}'_i(u)$,

$$\pi'_\gamma(v) = -2[I(u) - \gamma], \quad \pi'_d(v) = 2[g(u) + d].$$

**Теорема 9** *Пусть $U_0$ выпуклое множество, функция $\pi(v) \in C^{1,1}(V)$, последовательности $\{u_n\} \subset U_0$, $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$, $\{d_n\} \subset D_1$ определяются по формуле (32). Тогда:*

*1) $\pi(v_n) - \pi(v_{n+1}) \leq \varepsilon_1 |v_n - v_{n+1}|^2$, $n = 0,1,2,\ldots$;*

*2) $\lim\limits_{n\to\infty} |v_n - v_{n+1}| = 0$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 (см. (16)). Поскольку значение $\pi(v) \geq 0$, $v \in V$, то функция $\pi(v)$ ограничена снизу.

**Теорема 10** *Пусть выполнены условия теоремы 9, и пусть, кроме того, $\pi(v)$, $v \in V-$ выпуклая функция, множество $M(v_0) = \{v \in V \ / \ \pi(v) \leq \pi(v_0)\}-$ ограничено. Тогда:*

*1) последовательность $\{v_n\} = \{u_n, \gamma_n, d_n\} \subset M(v_0)$ является минимизирующей $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(v_n) = \pi_* = \inf\limits_{v \in V} \pi(v)$;*

*2) последовательность $\{v_n\} \subset M(v_0)$ сходится к множеству $V_*$, $V_* \neq \emptyset$;*

*3) справедлива следующая оценка скорости сходимости*

$$0 \le \pi(\upsilon_n) - \pi_* \le \frac{c_1}{n}, \ \ c_1 = const > 0, \ \ n = 1, 2, \ldots;$$

*4) задача нелинейного программирования (6), (7) имеет решение тогда и только тогда, когда* $\pi(\upsilon_*) = 0$, $\upsilon_* = (u_*, \gamma_*, d_*) \in V^*$, *где* $u_* \in U_*-$ *решение задачи нелинейного программирования (6), (7);*

*5) если значение* $\pi(\upsilon_*) > 0$, *то задача нелинейного программирования (6), (7) не имеет решения.*

При выполнении условия теоремы задача (31) является задачей выпуклого программирования и доказательство теоремы следует из теорем 3, 6.

Следует отметить, что в ряде случаев несмотря на то функции $I(u)$, $g_i(u)$ $i = \overline{1, s}$ не выпуклые, однако функции $[I(u) - \gamma]^2$, $[g_i(u) + d]^2$, $[g_i(u)]^2$ могут быть выпуклыми. Напр. $g_i(u) = u^3-$ не выпуклая функция, $[g_i(u)]^2 = u^6-$ выпуклая функция.

**5. Заключение**

Создан единый метод решения задачи математического программирования, основанный на последовательном сужении области допустимых решений, ориентированный на применения современных компьютеров.

Отличительной особенностью нового подхода от известных методов (симплекс-метод, метод множителей Лагранжа) состоит в том, что: осуществляется переход от исходной задачи к равносильной задаче с ограниченной снизу функцией цели; сформулированные необходимые и достаточные условия существования решения задачи математического программирования; построения минимизирующих последовательностей, предельные точки которых являются решениями задачи математического программирования.

Научная новизна созданного метода решения задачи математического программирования заключается в том, что: нет необходимости определения крайних точек и осуществить переход от одной крайней точки в другую, зачастую связанный с зацикливанием; метод применим как вырожденным, так и невырожденным задачам математического программирования; решения задач выпуклого и нелинейного программирования не связаны с поиском седловой точки функции Лагранжа; в ряде случае переход от исходной задачи к равносильной задаче позволяет свести решения задачи нелинейного программирования к решению задачи выпуклого программирования.

## Список литературы

[1] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ // Изд-во "Мир". – М.: 1973. – 470 с.

[2] *Ашманов С.А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.– 304 с.

[3] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

## References


[1] *Rokafellar R.* Vypuklyi analiz // Izd-vo "Mir". – M.: 1973. – 470 s.

[2] *Ashmanov S.A.* Lineinoe programmirovanie. – M.: Nauka, 1981.– 304 s.

[3] *Vasil'eva F.P.* Chislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach. – M.: Nauka, 1980. – 518 s.


*Поступила в редакцию 25 апреля 2013 года*

УДК 517.968.23

С.А. Айсагалиев, М.Е. Шангитова

*Казахского национального университета им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;*
*e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz*

# К математической теории управляемых процессов

Предлагаются методы построения программных и позиционных управлений для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями при наличии краевых условий с учетом ограничений на управления. Разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия на основе решения задачи управляемости. Решены две задачи: существование решения задачи управляемости и построение множества всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в заданное конечное состояние.
Основой предлагаемых методов построения программных и позиционных управлений является интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Получено необходимое и достаточное условие существования решения интегрального уравнения. Найдено общее решение одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода.
Показано, что решения проблем управляемости для линейных и нелинейных регулируемых систем могут быть сведены к решению начальной задачи оптимального управления специального вида. Приведены алгоритмы построения минимизирующих последовательностей и оценки их скорости сходимости.
*Ключевые слова*: программное управление, позиционное управление, оптимальное быстродействие, минимизирующие последовательности.

*S.A. Aisagaliev, M.E. Shangitova*

**To mathematical theory of control processes**

The methods of building program and positional controls for processes described by ordinary differential equations in the presence of boundary conditions with the restrictions on the control are developed. An algorithm for solving problem of optimal fast action based on the solution of the controllability problem is elaborated. Two problems are solved: the existence of the controllability problem's solution and the construction of the set of all controls, each element of which transfers trajectory of the system from any initial state to a given final state.
The basis of the proposed methods of constructing program and positional control is a Fredholm integral equation of the first kind. The necessary and sufficient condition for existence of the solution of the integral equation was received. A general solution of one class of Fredholm integral equation of the first kind was found.
It is shown that the solutions of problems of controllability of linear and nonlinear control systems can be reduced to the solution of the initial problem of optimal control of a special type. Algorithms for minimizing sequences and estimation of their rate of convergence are given.
*Key words*: {program control,positional control,optimal fast action,minimizing sequences.}

*С.А. Айсагалиев, М.Е. Шангитова*

**Басқарлатын процесстердін математикалық теориясына**

Басқарудағы шектеуді ескеретін шекаралық шартты қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үрдістер үшін бағдарламалық (программалық) және бағыттық басқару әдістерінің құрылымы ұсынылады. Басқару есебі шешімінің негізінде тиімді тезәрекет есебін шешу алгоритмі құрылды. Екі есеп шешілді: басқару есебі шешімінің бар болуы және әрбір элементі жүйе траекториясын кез - келген бастапқы күйден берілген соңғы күйге көшіретін барлық басқарулар жиынының құрылуы.
Бағдарламалық (программалық) және бағыттық басқаруды құруды ұсынылатын әдістерінің негізі бірінші текті Фредгольм интегралдық теңдеуі болып табылады. Интегралдық теңдеу шешімі бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Бірінші текті Фредгольм интегралдық теңдеуінің бір класының жалпы шешімі табылды.
Басқару мәселесіндегі сызықты және сызықты емес реттелетін жүйелердің шешімі арнайы түрдегі бастапқы тиімді басқару есебі шешіміне сәйкестігі көрсетіледі. Жинақталу жылдамдықтарының бағалаулары мен тізбектерді минимизациялау алгоритімі келтірілген.

*Түйін сөздер*: {программалық басқару, позициялық басқару, тиімді тез әсерету, минимумдаушы тізбектер }

Истоком современной теории управляемости была работа Р.Е.Калмана [1]. Им построено управление с минимальной нормой и получен ранговый критерий управляемости линейных стационарных систем. Решение задачи управляемости на основе l-проблемы моментов было предложено Н.Н.Красовским [2]. Отдельные вопросы управляемости: наименьшая размерность вектора управления, управляемость нелинейных систем с малым параметром, управляемость линейных систем с последействием исследованы в работах [3,4]. Обзор состояния проблемы управляемости до начала XXI века приведен в [5].

Общая задача управляемости обыкновенных дифференциальных уравнений сформулирована в монографии [6]. Последние годы опубликован ряд научных статей посвященных проблемам управляемости и оптимального быстродействия динамических систем. Синтезу ограниченного управления (позиционное управление) линейными динамическими системами на основе функции Ляпунова посвящена работа [7]. Геометрический подход к проблеме управляемости неавтономных линейных систем исследован в работе [8].

Проблема управляемости тесно связана с решением проблем стабилизации динамических систем. В работе [9] рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия билинейных и аффинных систем канонического вида. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем исследованы в [10]. Следует отметить, что в указанных работах исследованы частные случаи общей задачи управляемости и быстродействия динамических систем без фазовых и интегральных ограничений.

Актуальными и нерешенными проблемами управляемости и оптимального быстродействия являются необходимые и достаточные условия разрешимости общей задачи управляемости и быстродействия, конструктивный метод построения решения общей задачи управляемости и быстродействия для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты полученные в данной работе являются продолжением научных исследований, изложенных в [4,5, 11 - 14].

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим управляемый процесс описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \mu(t),\ t \in [t_0, t_1] = I, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x_0 = x(t_0) \in S_0,\ x_1 = x(t_1) \in S_1,\ S_0 \subset R^n,\ S_1 \subset R^n, \tag{2}$$

с ограничением на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u(t) \in V(t) \in R^m,\ \text{п.в.}t \in I.\} \tag{3}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы порядков $n\times n$, $n\times m$ соответственно с кусочно-непрерывными элементами, $S_0$, $S_1$ – заданные ограниченные выпуклые замкнутые множества, $V(t)$, $t \in I$ – заданное множество в $R^m$, $\mu(t)$, $t \in I$ – заданная вектор-функция с кусочно-непрерывными элементами. В частности, множества $S_0$, $S_1$ содержат единственные элементы $x_0 \in R^n$, $x_1 \in R^n$ соответственно. Множество $V = \{-1 \le u_i(t) \le 1,\ i = \overline{1, m},\ \text{п.в. } t \in I\}$.

**Задача 1** *Пусть $U = L_2(I, R^m)$, $V = R^m$. Найти все множества программных и позиционных управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (1) из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$, где $t_0$, $t_1$ – фиксированы, $t_1 > t_0$.*

**Задача 2** *Найти программное и позиционное управление для системы (1), которое переводит траекторию системы из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$, когда $u(t) \in U(t)$, $t \in I$, где множество $U(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (3). Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия для системы (1) - (3), когда момент времени $t_1$ – не фиксирован.*

**Определение 1** *Пусть управление $u(t) \in U(t)$, $t \in I$ переводит траекторию системы (1) из начальной точки $x_0 \in R^n$ в точку $x_1 \in R^n$, а функция $x(t) = x(t, u)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ – решение системы (1). Тогда искомое управление $u(t) = u(t, x_0, x_1) \in U(t)$, $t \in I$ называется программным, а искомое управление вида $u(x, t)$, $t \in I$, где $x = x(t)$, $t \in I$ называется позиционным (или синтезирующим) управлением.*

**Определение 2** *Пусть $t_0$ – фиксированный момент времени, а величина $t_1 > t_0$ – нефиксирована. Решение задачи 2, соответствующее наименьшему значению конечного момента времени $t_1$, называется решением задачи оптимального быстродействия.*

В теории регулируемых систем рассматриваются абсолютная устойчивость положения равновесия уравнения [15]:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \sigma = Sx,\ x(0) = x_0,\ t \in [0, \infty), \tag{4}$$

с включениями

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi_i(\sigma) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1,m}\}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ |\varphi_i(\sigma_i)| \le \varphi_{*i}, \\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^m,\ 0 < \varphi_{*i} < \infty,\ i = \overline{1,m}\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $A, B, S$ – заданные постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно.

Для решения многих прикладных задач представляет интерес решения задач управляемости для регулируемых систем.

Пусть уравнения движения регулируемой системы имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(u) + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{7}$$

$$x(t_0) = x_0 \in R^n,\ x(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{8}$$

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u(t) \in V(t),\ t \in I\}, \tag{9}$$

где функция $\varphi(u)$– фиксированные элементы следующих множеств:

$$\varphi(u) \in \Phi_0 = \{\varphi(u) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(u_i)u_i \le \mu_{0i}u_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1,m}\}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \varphi(u) \in \Phi_1 = \{\varphi(u) \in C(I, R^m)/0 \le \varphi_i(u_i)u_i \le \mu_{0i}u_i^2,\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1,m}, \\ |\varphi_i(u_i)| \le \varphi_{*i}, \forall u,\ u \in R^m,\ 0 < \varphi_{*i} < \infty,\ i = \overline{1,m}\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Как следует из (4) - (6) и (7) - (11), управляемость регулируемых систем рассматривается на конечном отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, функция $\sigma(t)$, $t \in [0, \infty)$ заменена на управление $u(t) \in U(t)$, $t \in I = [t_0, t_1]$, функция $\varphi(u)$ фиксированный элемент множества $\Phi_0$ (либо $\Phi_1$).

**Задача 3** *Пусть $\varphi(u) \in \Phi_0$ – заданная функция. Найти все множества программных и позиционных управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (7) из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$, когда множество $U = L_2(I, R^m)$, $t_0$, $t_1$ – фиксированные моменты времени $t_1 > t_0$.*

**Задача 4** *Пусть $\varphi(u) \in \Phi_1$– заданная функция. Найти программное и позиционное управления из множества $U(t) \subset L_2(I, R^m)$, которые переводят траекторию системы (7) из любой начальной точки $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$ в любую заданную точку $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$ за время $t_1 - t_0$, $t_1 > t_0$. Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия для системы (7) - (9), когда момент времени $t_1$ – нефиксирован.*

Построения всех множеств программных или позиционных управлений в задачах 1,3, когда множество $U \equiv L_2(I, R^m)$, являются нерешенными проблемами теории управляемости как для линейных динамических систем, так и для нелинейных регулируемых систем.

Решения задач 2, 4 актуальны для систем с ограниченными ресурсами.

## 2. Интегральное уравнение.

Решения задач 1-4 связаны со свойствами решений одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Ниже приведены результаты исследования по интегральному уравнению, приведенные в работах автора [11, 12].

Рассмотрим интегральное уравнение следующего вида

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \ t \in I = [t_0, t_1], \tag{12}$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – известная матрица порядка $n \times m$ с кусочно-непрерывными элементами по $t$ при фиксированных $t_0$, $t_1$, $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – искомая функция, оператор $K : L_2(I, R^m) \to R^n$, $a \in R^n$– заданный вектор.

**Теорема 1** *Интегральное уравнение (12) при любом $a \in R^n$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt \tag{13}$$

*порядка $n \times n$ является положительно-определенной, где (*)- знак транспонирования.*

**Теорема 2** *Пусть матрица $C(t_0, t_1) > 0$. Тогда общее решение интегрального уравнения (12) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a + \upsilon(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)\upsilon(t)dt, \ t \in I, \tag{14}$$

*где $\upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – произвольная функция, $a \in R^n$ – любой вектор.*

## 3. Управляемость и оптимальное быстродействие линейных динамических систем.

А. Пусть уравнения движения управляемого процесса имеют вид (1), $x_0 = x(t_0) \in S_0 = R^n$, $x_1 = x(t_1) \in S_1 = R^n$ – заданные точки, искомое управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m) \equiv U$, матрица

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt, \tag{15}$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi} = A(t)\xi$, т.е. $\dot{\theta}(t) = A(t)\theta$, $\theta(t_0) = I_n$, $t \in I$, $I_n$ – единичная матрица порядка $n \times n$.

**Программное управление.** Следующая теорема позволяет выделить все множества программных управлений из $L_2(I, R^m)$ для задачи 1.

**Теорема 3** *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ порядка $n \times n$ положительно определенная. Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию системы (1) из любой начальной точки $x_0 \in R^n$ в любое заданное конечное состояние $x_1 \in R^n$ тогда и только тогда, когда*

$$u(t) \in \Lambda = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u(t) = \upsilon(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, \upsilon), \\ t \in I, \forall \upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m)\}, \tag{16}$$

*где*

$$\lambda_1(t, x_0, x_1) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)[\Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt],$$

$$N_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \ t \in I,$$

*функция $z(t, \upsilon)$, $t \in I-$ решение дифференциального уравнения*

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\upsilon(t), \ z(t_0) = 0, \ \forall \upsilon, \ \upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{17}$$

*Решение дифференциального уравнения (1), соответствующее управлению $u(t) \in \Lambda$, $t \in I$, определяется по формуле*

$$x(t) = z(t, \upsilon) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, \upsilon), \ \forall \upsilon, \ \upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{18}$$

*где*

$$\lambda_2(t, x_0, x_1) = \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)x_0 + \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\times$$

$$\times\Phi(t_0, t_1)x_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\times$$

$$\times \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt, \ \ t \in I,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \ W(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau,$$

$$W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t), \ \ t \in I,$$

*матрица $W(t_0, t_1)$ определяется по формуле (15).*

**Позиционное управление.** На основе найденного множества программных управлений (16) может быть построено множество позиционных управлений $\Lambda_1$ для задачи 1.

**Теорема 4** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная;*

*2) матрица $R_1$ порядка $n \times n$ такая, что $x_1 = R_1 x_0$;*

*3) матрица* $\Sigma(t) = \Phi(t,t_0)\Gamma(t)+\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\times$ $\times\Phi(t_0,t_1)R_1 - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma(t_1),\ t \in I$ *порядка* $n \times n$ *неособая,где произвольная функция* $\upsilon(t) = H(t)x_0,\ \Gamma(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)H(\tau)d\tau,\ t \in I.$

*Тогда множество позиционных управлений представимо в виде*

$$\Lambda_1 = \{u(t) \in \Lambda \subset L_2(I,R^m)/u(t) = u(x,t) = K(t)x(t) + \eta(t),\ \forall H(t),\ t \in I\}, \tag{19}$$

*где* $H(t)-$ *произвольная матрица порядка* $m \times n$, *матрица*

$$\begin{aligned} K(t) = \{&H(t) + B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\big[\Phi(t_0,t_1)R_1 - I_n\big]- \\ &-B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma(t_1)\}\Sigma^{-1}(t),\ t \in I, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) = K(t)\Big[\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\times \\ \times\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt\Big] + B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt. \end{aligned} \tag{21}$$

**Б. Решение задачи 2.** Как следует из теоремы 3, множество всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (1) из $x_0$ в $x_1$, определяется по формуле (16). Для решения задачи 2 следует найти управление из пересечения множеств $U$ и $\Lambda$. Для этого необходимо решить следующие две задачи: 1) показать, что $U \cap \Lambda \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество; 2) найти точки из множества $U \cap \Lambda$.

Решение указанных задач может быть сведено к решению следующей оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$I(\upsilon,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big|\upsilon(t) + \lambda_1(t,x_0,x_1) + N_1(t)z(t_1,\upsilon) - u(t)\big|^2 dt \to inf \tag{22}$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\upsilon(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I = [t_0,t_1],\ \upsilon(\cdot) \in L_2(I,R^m), \tag{23}$$

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I,R^m)/u(t) \in V(t) \subset R^m,\ \text{п.в. } t \in I\}. \tag{24}$$

Заметим, что: 1) поскольку значение $I(\upsilon,u) \geq 0,\ \forall(\upsilon,u) \in L_2(I,R^m) \times U$, то задача 2 имеет решение тогда и только тогда, когда значение $I(\upsilon_*,u_*) = 0$, где $(\upsilon_*,u_*)$ – решение оптимизационной задачи (22)-(24); 2) если $I(\upsilon_*,u_*) = 0$, то решение задачи 2 определяется по формуле

$$u_*(t) = \upsilon_*(t) + \lambda_1(t,x_0,x_1) + N_1(t)z(t_1,\upsilon_*),\ t \in I,$$

где $z(t,\upsilon_*)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (23) при $\upsilon = \upsilon_*$; 3) значение функционала $I(\upsilon,u)$ ограничено снизу.

**Програмное управление.** Оптимизационная задача (22) - (24) может быть решена путем построения минимизирующих последовательностей $\{\upsilon_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{u_n\} \subset U$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} I(\upsilon_n, u_n) = I_* = \inf I(\upsilon, u)$, $(\upsilon, u) \in X = L_2(I, R^m) \times U$. Если $I_* = 0$, то задача 2 имеет решение. В случае $I_* > 0$ задача 2 не имеет решение.

Обозначая
$$F_0(q,t) = \big|\upsilon(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, \upsilon) - u(t)\big|^2,$$
где $q = (\upsilon(t), u(t), z(t_1))$, функционал (22) представим в виде
$$I(\upsilon, u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(q(t), t)dt.$$

**Теорема 5** *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$. *Тогда функционал (22) при условиях (23), (24) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*
$$I'(\upsilon, u) = (I'_\upsilon(\upsilon, u), I'_u(\upsilon, u)) \in L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^m) = H,$$
*в любой точке* $(\upsilon, u) \in X$ *вычисляется по формуле*
$$I'_\upsilon(\upsilon, u) = \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial \upsilon} - B^*(t)\psi(t) \in L_2(I, R^m), \tag{25}$$
$$I'_u(\upsilon, u) = -\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial u} \in L_2(I, R^m), \tag{26}$$
*где* $z(t, \upsilon)$, $t \in I$ *– решение дифференциального уравнения (23), а функция* $\psi(t)$, $t \in I$ *– решение сопряженной системы*
$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi,\ \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z(t_1)} dt. \tag{27}$$
*Кроме того, градиент* $I'(\upsilon, u) \in H$ *– удовлетворяет условию Липшица*
$$\begin{gathered} \big\|I'(\upsilon_1, u_1) - I'(\upsilon_2, u_2)\big\|_{L_2} \le l\big(\|\upsilon_1 - \upsilon_2\|^2_{L_2} + \|u_1 - u_2\|^2_{L_2}\big)^{\frac{1}{2}}, \\ \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in L_2(I, R^m),\ \ \forall u_1, u_2 \in U. \end{gathered} \tag{28}$$

На основе формул (25) - (28) строим последовательности $\{\upsilon_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{u_n\} \subset U$ по следующему алгоритму
$$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n - \alpha_n I'_\upsilon(\upsilon_n, u_n),\ u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n I'_u(\upsilon_n, u_n)],\ n = 0, 1, 2, \dots, \tag{29}$$
где $\varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l + 2\varepsilon_1}$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В частности, при $\varepsilon_1 = \frac{l}{2}$ имеем $\varepsilon_0 = \alpha_n = \frac{1}{l}$, где $l = const > 0$ – постоянная Липшица из (28). Здесь $P_U[\cdot]$ – проекция точки на множество $U$. Как следует из теоремы 5, функционал $I(\upsilon, u) \in C^{1,1}(X)$.

**Лемма 1** *Пусть* $U$ *– ограниченное выпуклое замкнутое множество в* $L_2(I, R^m)$. *Тогда: 1) функционал* $I(\upsilon, u) \in C^{1,1}(X)$ *из (22) при условиях (23), (24) является выпуклым; 2) функционал* $I(\upsilon, u) \in C^{1,1}(X)$ *достигает нижней грани на множестве* $L_2^\rho(I, R^m) \times U$, *где* $L_2^\rho(I, R^m) = \{\upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^m) / \|\upsilon\| \le \rho\}$, $\rho > 0$ *– достаточно большое число.*

**Теорема 6** *Пусть матрица $W(t_0,t_1)>0$, множество $U$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество, последовательности $\{\upsilon_n\}\subset L_2(I,R^m)$, $\{u_n\}\subset U$ определяются по формуле (29). Тогда:*

*1) последовательности $\{\upsilon_n\}$, $\{u_n\}$ являются минимизирующими, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} I(\upsilon_n,u_n)=I_*=\inf_{(\upsilon,u)\in X} I(\upsilon,u);$$

*2) последовательности $\{\upsilon_n\}$, $\{u_n\}$ слабо сходятся к множеству*

$$X_*=\{(\upsilon_*,u_*)\in X\ /\ I(\upsilon_*,u_*)=I_*\},\quad \upsilon_n \xrightarrow{сл} \upsilon_*,\quad u_n \xrightarrow{сл} u_* \ \textit{при}\ n\to\infty;$$

*3) справедлива следующая оценка скорости сходимости*

$$I(\upsilon_n,u_n)-I(\upsilon_*,u_*)\le \frac{m_0}{n},\ n=1,2,\ldots,\ m_0=const>0;$$

*4) для того чтобы задача 2 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение*

$$I(\upsilon_*,u_*)=I_*=0.$$

**Позиционное управление.** На основе найденного программного управления (**??**) может быть построено позиционное управление.

**Теорема 7** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) матрица $W(t_0,t_1)>0$, значение $I(\theta_*)=I(\upsilon_*,u_*)=0$;*

*2) матрица $R_1$ порядка $n\times n$ такая, что $x_1=R_1x_0$;*

*3) функция $\upsilon_*(t)=H_*(t)x_0$, $H_*(t)$ – матрица порядка $n\times m$,*

*4) матрица $\Sigma_1(t)=\Phi(t,t_0)\Gamma_*(t)+\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\times$ $\times\Phi(t_0,t_1)R_1-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma_*(t_1)$, $t\in I$ порядка $n\times n$ неособая, где $\Gamma_*(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)H_*(\tau)d\tau$, $t\in I$. Тогда позиционное управление*

$$u_*(x_*,t)=K_*(t)x_*(t)+\eta_*(t),\ t\in I,$$

*где*

$$K_*(t)=\{H_*(t)+B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)[\Phi(t_0,t_1)R_1-I_n]-$$
$$-B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\Gamma_*(t_1)\}\Sigma^{-1}(t),\ t\in I$$

$$\eta_*(t)=K_*(t)\Big[\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt\Big]+B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt.$$

Решение дифференциального уравнения (1), соответствующее управлению (**??**), равно

$$x_*(t) = z(t, \upsilon_*) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t) z(t_1, \upsilon_*),\ t \in I.$$

**Оптимальное быстродействие.** Решение задачи 2, соответствующее наименьшему значению конечного момента времени при фиксированном $t_0$, называется решением задачи оптимального быстродействия.

Предположим, что найдено управление $u_*(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$ из решения задачи 2, где $t_0$, $t_1 > t_0$ – заданные величины.

Пусть $t_* > t_0$– наименьшее значение $t_1$, для которого значение $I(\theta_*) = 0$. Необходимо найти управление $\bar{u}_*(t) \in U$, $t \in [t_0, t_*]$, $t_* < t_1$, которое переводит траекторию системы (1) из заданной начальной точки $x_0 \in R^n$ в момент времени $t_0$ в заданную точку $x_1 = x(t_*)$ за кратчайшее время $t_* - t_0$.

Выберем $t_{11} = t_1/2$. По изложенному алгоритму находим управление $u_{**}(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, t_{11}]$ и траекторию $x_{**}(t) = x_{**}(t, u_{**})$, $t \in [t_0, t_{11}]$. Если для данной пары $(u_{**}, x_{**})$ значение $I(u_{**}, x_{**}) = 0$, то выберем значение $t_{12} = t_1/4$, $t_{12} < t_{11}$ и т.д. В случае, если $I(u_{**}, x_{**}) > 0$, то выберем $t_{12} = 3t_1/4$ и т.д.

## 4. Управляемость и оптимальное быстродействие нелинейных регулируемых систем.

**А. Решение задачи 3.** Пусть нелинейная функция $\varphi(u) \in \Phi_0$, уравнение движения регулируемой системы имеет вид (7), где $x_0 = x(t_0) \in R^n$, $x_1 = x(t_1) \in R^n$ – заданные точки, управления $u(t) \in L_2(I, R^m)$.

Наряду (7) - (9) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = Ay + B\varpi(t) + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{30}$$

$$y(t_0) = x_0 \in R^n,\ y(t_1) = x_1 \in R^n,\ \varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{31}$$

Заметим, что если $\varpi(t) = \varphi(u(t))$, $t \in I$, то $y(t) = x(t)$, $t \in I$, где $x(t)$ – решение дифференциального уравнения (7) с условиями (8), (9). Для управляемой системы (30), (31) верны утверждения теорем 3, 4.

**Программное управление.** Следующая теорема определяет множества программных управлений для системы (30), (31).

**Теорема 8** *Пусть матрица* $W_1(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} BB^* e^{A^*(t_0-t)} dt$ *порядка* $n \times n$ *положительно определенная. Тогда управление* $\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ *переводит траекторию системы (30) из любой начальной точки* $y(t_0) = x_0 \in R^n$ *в любое заданное конечное состояние* $y(t_1) = x_1 \in R^n$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} \varpi(t) \in \Omega = \{\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m) \ / \ \varpi(t) = \omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega), \\ t \in I,\ \ \forall \omega(\cdot) \in L_2(I, R^m)\}, \end{aligned} \tag{32}$$

*где*

$$\pi_1(t, x_0, x_1) = B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0, t_1)[e^{A(t_0-t_1)} x_1 - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} \mu(t) dt],$$

$$S_1(t) = -B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)},\ t \in I,$$

*функция* $\xi(t,\omega)$, $t \in I$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{\xi} = A\xi + B\omega(t),\ \xi(t_0) = 0,\ \forall\omega,\ \omega(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{33}$$

*Решение дифференциального уравнения (30), соответствующее управлению* $\varpi(t) \in \Omega$, *определяется по формуле*

$$y(t) = \xi(t,\omega) + \pi_2(t,x_0,x_1) + S_2(t)\xi(t_1,\omega),\ t \in I, \tag{34}$$

*где*

$$\pi_2(t,x_0,x_1) = e^{A(t-t_0)} W_1(t,t_1) W_1^{-1}(t_0,t_1) x_0 + e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \times$$

$$\times e^{A(t_0-t_1)} x_1 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau - e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} \mu(t) dt,\ t \in I,$$

$$S_2(t) = -e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)},\ W_1(t_0,t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)} BB^* e^{A^*(t_0-\tau)} d\tau,$$

$$W_1(t,t_1) = W_1(t_0,t_1) - W_1(t_0,t),\ \ t \in I.$$

**Позиционное управление.** На основе теоремы 8 можно сформулировать следующие утверждения.

**Теорема 9** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) матрица* $W_1(t_0,t_1) > 0$;

*2) матрица* $R_1$ *порядка* $n \times n$ *такая, что* $x_1 = R_1 x_0$;

*3) матрица* $\Sigma_1(t) = e^{A(t-t_0)}\Gamma_1(t) + e^{A(t-t_0)} W_1(t,t_1) W_1^{-1}(t_0,t_1) + e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \times$ $\times e^{A(t_0-t_1)} R_1 - e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)} \Gamma_1(t_1)$, $t \in I$ *порядка* $n \times n$ *неособая, где произвольная функция* $\omega(t) = H_1(t) x_0$, $\Gamma_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)} BH(\tau) d\tau$, $t \in I$. *Тогда множество позиционных управлений представимо в виде*

$$\Omega_1 = \{\varpi(t) \in \Omega \,/\, \varpi(t) = \varpi(y,t) = K_1(t) y(t) + \eta(t),\ \forall H_1(t),\ t \in I\}, \tag{35}$$

*где* $H_1(t)$ *– произвольная матрица порядка* $m \times n$ *с кусочно-непрерывными элементами, матрица*

$$\begin{aligned} K_1(t) = \{&H_1(t) + B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) \big[e^{A(t_0-t_1)} R_1 - I_n\big] - \\ &- B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) e^{A(t_0-t_1)} \Gamma_1(t_1)\} \Sigma^{-1}(t)\ t \in I, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) = K_1(t)\Big[\int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau - e^{A(t-t_0)} W_1(t_0,t) W_1^{-1}(t_0,t_1) \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} \mu(t) dt\Big] + \\ + B^* e^{A^*(t_0-t)} W_1^{-1}(t_0,t_1) \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} \mu(t) dt. \end{aligned} \tag{37}$$

Пусть $\varpi(t) = (\varpi_1(t), \dots, \varpi_m(t)) \in \Omega$, функция $\varphi(u) = (\varphi_1(u_1), \dots, \varphi_m(u_m)) \in \Phi_0$, в частности, множество

$$\Phi_0 = \{\varphi(u) = (\varphi_1(u_1), \dots, \varphi_m(u_m)) \in C(I, R^m)/\varphi_i(u_i)u_i \geq 0,\\ \varphi_i(0) = 0,\ i = \overline{1,m},\ \mu_{0i} \to \infty,\ i = \overline{1,m}\}. \tag{38}$$

На практике часто встречаются функции $\varphi_i(u_i)$, $i = \overline{1,m}$ такие, что

$$\varphi_{1i}(u_i) = k_{1i}u_i,\ k_{1i} > 0,\ i = \overline{1,m},\ \varphi_{2i}(u_i) = \begin{cases} k_{2i}u_i^2 & \text{при } u_i \geq 0; \\ -k_{2i}u_i^2 & \text{при } u_i \leq 0,\ k_{2i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}; \end{cases}$$

$$\varphi_{3i}(u_i) = k_{3i}u_i^3,\ k_{3i} > 0,\ i = \overline{1,m},\ \varphi_{4i}(u_i) = \begin{cases} k_{4i}u_i^4 & \text{при } u_i \geq 0; \\ -k_{4i}u_i^4 & \text{при } u_i \leq 0,\ k_{4i} > 0,\ i = \overline{1,m}; \end{cases}$$

$$\varphi_i(u_i) = \varphi_{1i}(u_i) + \varphi_{2i}(u_i) + \varphi_{3i}(u_i) + \varphi_{4i}(u_i),\ i = \overline{1,m}.$$

**Теорема 10** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) матрица $W_1(t_0, t_1)$ положительно определенная;*

*2) функции $\zeta_i = \varphi_i(u_i)$, $i = \overline{1,m}$ имеют непрерывные обратные функции $u_i = \varphi_i^{-1}(\zeta_i)$, $i = \overline{1,m}$.*

*Тогда: 1) множество программных управлений для задачи 3 равно*

$$u(t) \in U_1 = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u_i(t) = \varphi_i^{-1}(\varpi_i(t)),\ i = \overline{1,m},\\ \varpi(t) = (\varpi_1(t), \dots, \varpi_m(t)) \in \Omega\}, \tag{39}$$

*2) множество позиционных управлений для задачи 3 равно*

$$u(x,t) \in U_2 = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/u_i(x,t) = \varphi_i^{-1}(\varpi_i(x,t)),\\ i = \overline{1,m},\ \varpi(x,t) \in \Omega_1\}, \tag{40}$$

*где $\varpi(t) \in \Omega$, $\varpi(x,t) \in \Omega_1$.*

**Б. Решение задачи 4.** Пусть нелинейная функция $\varphi(u) \in \Phi_1$. В частности,

$$\varphi_{1i}(u_i) = \begin{cases} u_i & \text{при } |u_i| \leq 1; \\ +1 & \text{при } u_i \geq 1; \\ -1 & \text{при } u_i \leq -1,\ i = \overline{1,m}; \end{cases} \qquad \varphi_{2i}(u_i) = arctgu_i,\ \ i = \overline{1,m}.$$

В этом случае необходимо рассмотреть линейную управляемую систему следующего вида

$$\dot{y} = Ay + B\varpi(t) + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1],\ y(t_0) = x_0 \in R^n,\ y(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{41}$$

$$\varpi(t) \in T = \{\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\alpha_i \leq \varpi_i(t) \leq \beta_i(t),\ i = \overline{1,m},\ t \in I\}. \tag{42}$$

Для решения задачи 4 необходимо найти управления из пересечения множеств $T$ и $\Omega$. Для этого необходимо решить следующую задачу: минимизировать функционал

$$I_1(\omega, \varpi) = \int_{t_0}^{t_1} |\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega) - \varpi(t)|^2 dt \to \inf \tag{43}$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A\xi + B\omega(t),\ \xi(t_0) = 0,\ \forall\omega,\ \omega(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{44}$$

$$\varpi(t) \in T = \{\varpi(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\alpha_i \le \varpi_i(t) \le \beta_i,\ i = \overline{1,m},\ t \in I\}. \tag{45}$$

**Теорема 11** *Пусть матрица $W_1(t_0, t_1) > 0$. Тогда функционал (43) при условиях (44), (45) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$I_1'(\omega, \varpi) = (I_{1\omega}'(\omega, \varpi), I_{1\varpi}'(\omega, \varpi)) \in H,$$

*в любой точке $(\omega, \varpi) \in X$ вычисляется по формуле*

$$I_{1\omega}'(\omega, \varpi) = 2[\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t, \omega) - \varpi(t)] - B^*\psi(t) \in L_2(I, R^m), \tag{46}$$

$$I_{1\varpi}'(\omega, \varpi) = -2[\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t, \omega) - u(t)] \in L_2(I, R^m), \tag{47}$$

*где $\xi(t, \varpi)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (44), а функция $\psi(t)$, $t \in I-$ решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = -A^*\psi,\ \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} 2S_1^*(t)[\omega(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega) - u(t)]dt. \tag{48}$$

*Кроме того, градиент $I_1'(\omega, \varpi) \in H$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\begin{aligned} \|I_1'(\omega_1, \varpi_1) - I_1'(\omega_2, \varpi_2)\| \le l_1(\|\omega_1 - \omega_2\|^2 + \|\varpi_1 - \varpi_2\|^2)^{1/2}, \\ \forall\omega_1, \omega_2 \in L_2(I, R^m),\ \forall\varpi_1, \varpi_2 \in T. \end{aligned} \tag{49}$$

**Лемма 2** *Функционал (43) при условиях (44), (45) является выпуклым и достигает нижней грани на множестве $X$.*

**Программное управление.** На основе формул (46) - (49) строим последовательности $\{\omega_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{\varpi_n\} \subset T$ по следующему алгоритму

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} = \omega_n - \alpha_n I_{1\omega}'(\omega_n, \varpi_n),\ \varpi_{n+1} = P_T[\varpi_n - \alpha_n I_{1\varpi}'(\omega_n, \varpi_n)], \\ 0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l_1 + 2\varepsilon_1},\ \varepsilon_1 > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{50}$$

Отметим, что: 1) $I_1(\omega, \varpi) \in C^{1,1}(X)$; 2) $I_1(\omega, \varpi) \ge 0$, $\forall(\omega, \varpi) \in X$; 3) если $I_1(\omega_*, \varpi_*) = 0$, то $\varpi_*(t) = \omega_*(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega_*)$, $t \in I$.

**Теорема 12** *Пусть матрица $W_1(t_0, t_1) > 0$, последовательности $\{\omega_n\} \subset L_2(I, R^m)$, $\{\varpi_n\} \subset T$ определяются по формуле (50). Тогда:*

*1) последовательности $\{\omega_n\}$, $\{\varpi_n\}$ являются минимизирующими*

$$\lim_{n\to\infty} I_1(\omega_n, \varpi_n) = I_{1*} = \inf_{(\omega,\varpi)\in X} I_1(\omega, \varpi);$$

*2) последовательности $\{\omega_n\}$, $\{\varpi_n\}$ слабо сходятся к множеству $X_* \subset X$, $\omega_n \xrightarrow{сл} \omega_*$, $\varpi_n \xrightarrow{сл} \varpi_*$ при $n \to \infty$, $I_1(\omega_*, \varpi_*) = I_{1*}$;*

*3) справедлива следующая оценка скорости сходимости $I_1(\omega_n, \varpi_n) - I_1(\omega_*, \varpi_*) \le \frac{m_{10}}{n}$, $m_{10} = const > 0$, $n = 1, 2, \ldots$;*

*4) для того, чтобы задача 4 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $I_1(\omega_*, \varpi_*) = 0$.*

В случае $I_1(\omega_*, \varpi_*) = 0$, имеем

$$\varpi_*(t) = \omega_*(t) + \pi_1(t, x_0, x_1) + S_1(t)\xi(t_1, \omega_*), \; t \in I, \tag{51}$$

$$y_*(t) = \xi(t, \omega_*) + \pi_2(t, x_0, x_1) + S_2(t)\xi(t_1, \omega_*), \; t \in I. \tag{52}$$

**Позиционное управление.** Для системы (41), (42) верна следующая теорема.

**Теорема 13** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) матрица* $W_1(t_0, t_1) > 0$;

*2) матрица* $R_1$ *порядка* $n \times n$ *такая, что* $x_1 = R_1 x_0$;

*3) функция* $\omega_*(t) = H_*(t)x_0$, $H_*(t)$, $t \in I-$ *матрица порядка* $n \times m$;

*4) матрица* $\Sigma_1(t)$ *неособая, где* $\Gamma_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B H_*(\tau) d\tau$.

*Тогда позиционное управление*

$$\varpi_*(x_*, t) = K_*(t) y_*(t) + \eta(t), \; t \in I, \tag{53}$$

*где* $y_*(t)$, $\varpi_*(t)$ *определяются соотношениями (51), (52) соответственно.*

**Оптимальное быстродействие.** Для системы (41), (42) алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия такой же, что в решении задачи 2.

**Теорема 14** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) матрица* $W_1(t_0, t_1) > 0$;

*2) функция* $\zeta_i = \varphi_i(u_i)$, $i = \overline{1, m}$ *имеют непрерывные обратные функции* $u_i = \varphi_i^{-1}(\zeta_i)$, $i = \overline{1, m}$ *при* $\alpha_i \le \zeta_i \le \beta_i$, $i = \overline{1, m}$.

*Тогда: 1) программное управление*

$$u_{i*}(t) = \begin{cases} u_{i*}(t) = \varphi_i^{-1}(\varpi_{i*}(t)) & \textit{при } \alpha_i \le \varpi_{i*}(t) \le \beta_i; \\ \alpha_i & \textit{при } \varpi_{i*}(t) = \alpha_i; \\ \beta_i & \textit{при } \varpi_{i*}(t) = \beta_i; \end{cases} \quad i = \overline{1, m}$$

*2) позиционное управление*

$$u_{i*}(x_*, t) = \begin{cases} \varphi_i^{-1}(\varpi_{i*}(x_*, t)), & \textit{если } \alpha_i \le \varpi_{i*}(x_*, t) \le \beta_i; \\ \alpha_i & \textit{при } \varpi_{i*}(x_*, t) = \alpha_i; \\ \beta_i & \textit{при } \varpi_{i*}(x_*, t) = \beta_i; \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

## Список литературы

[1] *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления. // Труды I Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т.II. АН СССР. – 1961. – С. 521 - 547.

[2] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.

[3] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 480 с.

[4] *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Краевые задачи оптимального управления. – Алматы: Қазақ университеті, 1999. – 214 с.

[6] *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. – Алматы: Қазақ университеті, 2002. – 348 с.

[7] *Ананьевский И.М., Анахин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова. // Доклады РАН. – 2010. – Т.434. – № 3. – С. 319 - 323.

[8] *Семенов Ю.М.* О полной управляемости линейных неавтономных систем. // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 9. – С. 126 - 127.

[9] *Емельянов С.В., Крищенко А.П.* Стабилизация нерегулярных систем. // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 11. – С. 1515 - 1524.

[10] *Коровин С.К., Капалин И.В., Фомичев В.В.* Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем. // Доклады НАН РК. – 2011. – Т.441. – №5. – С. 606 - 611.

[11] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т.27. – № 9. – С. 1475 - 1486.

[12] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений. // Математический журнал. – 2005. – Т. 5. – №4(18). – С. 17 - 34.

[13] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями. // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2010. – №1. – С. 30 - 55.

[14] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением. // Сибирский математический журнал, январь - февраль. – 2011. – Т.53. – № 1. – С. 20 - 37.

[15] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2000. – 234с.

## References

[1] *Kalman R.E.* Ob obshei teorii sistem upravleniya. // Trudy I Kongressa Mejdunarodnoi federacii po avtomaticheskomu upravleniu. T.II AN SSSR. – 1961. – S. 521 - 547.

[2] *Krasovskii N.N.* Teoriya upravleniya dvijeniem. – M.: Nauka, 1968. – 475 s.

[3] *Gabasov R., Kirillova F.M.* Kachestvennaya teoriya optimalnyh processov. – M.: Nauka, 1971. – 480 s.

[4] *Zubov V.I.* Lekcii po teorii upravleniya. – M.: Nauka, 1975. – 495 s.

[5] *Aisagaliev S.A.* Kraevye zadachi optimalnogo upravleniya. – Almaty: Kazak universiteti, 1999. – 214 s.

[6] *Aisagaliev S.A., Aisagaliev T.S.* Metody resheniya kraevyh zadach. – Almaty: Kazak universiteti, 2002. – 348 s.

[7] *Anan'evskii I.M., Anahin N.V., Ovseevich A.I.* Sintez ogranichennogo upravleniya lineinymi dinamicheskimi sistemami s pomosh'u obshei funkcii Lyapunona. // Doklady RAN. – 2010. – T. 434. – № 3. – S. 319 - 323.

[8] *Semenov U.M.* O polnoi upravlyaemosti lineinyh neavtonomnyh system. // Differencialnye uravneniya. – 2012. – T. 48. – № 9. – S. 126 - 127.

[9] *Emel'yanov S.V., Krishenko A.P.* Stabilizaciya neregulyarnyh sistem. // Differencialnye uravneniya. – 2012. – T. 48. – № 11. – S. 1515 - 1524.

[10] *Korovin S.K., Kapalin I.V., Fomichev V.V.* Minimalnye stabilizatory dlya lineinyh dinamicheskih sistem. // Doklady NAN RK. – 2011. – T. 441. – № 5. – S. 606 - 611.

[11] *Aisagaliev S.A.* Upravlyaemost nekotoroi sistemy differencialnyh uravnenii. // Differencialnye uravneniya. – 1991. – T. 27. – № 9. – S. 1475 - 1486.

[12] *Aisagaliev S.A.* Obshee reshenie odnogo klassa integralnyh uravnenii. // Matematicheskii jurnal. – 2005. – T. 5. – № 4(18). – S. 17 - 34.

[13] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Optimalnoe bystrodeistvie nelineinyh sistem s ogranicheniyami. // Differencialnye uravneniya i processy upravleniya. – 2010. – № 1. – S. 30 - 55.

[14] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P.* Upravlyaemost i bystrodeistvie processa, opisyvaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennym upravleniem. // Sibirskii matematicheskii jurnal, yanvar - fevral. – 2011. – T.53. – № 1. – S. 20 - 37.

[15] *Aisagaliev S.A.* Teoriya reguliruemyh sistem. – Almaty: Kazak universiteti, 2000. – 234 s.

*Поступила в редакцию 25 апреля 2013 года*

*УДК 517.927*

Ж.Х. Жунусова

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: zhzhkh@mail.ru*

# Геометрические корни одной космологической модели

Всевозрастающий интерес разрешения солитонных уравнений в (1+1)-размерности сделал прогресс в развитии математики, в частности, дифференциальной геометрии. Для нахождения солитонного решения проявляется недостаточность геометрических формулировок. В этой связи мы даем геометрическое истолкование исследуемой модели. Рассмотрим теорию гравитации с метрикой, зависящей от кручения, так называемую $F(R,T)$ гравитацию [1]-[2]. Изучаем геометрические корни такой теории. В частности, приводим вывод модели с геометрической точки зрения. Представляем более общую форму $F(R,T)$ гравитации с двумя произвольными функциями и рассматриваем ее в случае пространственно плоской метрики Фридмана-Робертсона-Уолкера. Определяя ненулевые компоненты связи Леви-Чивита и кручения находим компоненты искривления. Подобно им найдены ненулевые компоненты кривизны Риччи. Наконец, приведены явные формы скаляров кривизны и кручения.
*Ключевые слова*: геометрия, кривизна, кручение, тензор, нелинейное уравнение, космология, космологическое ускорение, пространство-время, масштабный фактор, гравитация, солитонное решение.

*Zh.Kh. Zhunussova*

**Geometric roots of the cosmology model**

Arising of interest in solving of soliton equations in (1+1)-dimension made some progress in developing of mathematics, particularly, differential geometry. Lack of geometric charachteristics are appeared in undestanding of soliton solution. In this context, we give geometric explanation of the investigated model. We consider gravity theory with a metric-dependent on torsion, so-called $F(R,T)$ gravity [1]-[2]. We research geometric roots of the theory. In particular, we represent the model with geometric point of view. Moreover, the general form of $F(R,T)$ gravity with two arbitrarly functions is represented. It is considered in the case of Fridmann-Robertson-Walker spatially flat metric. Contortion components are found by defining of non-vanishing torsion components and Levi-Civita connections. Similarly non-vanishing Ricci curvature components are found. Finally, the explicit forms of curvature and torsion scalars are represented.
*Key words*: geometry, curvature, torsion, tensor, nonlinear equation, cosmology, cosmology acceleration, space-time, scale factor, gravity, soliton solution.

*Ж.Х. Жүнүсова*

**Космологиялық моделдің геометриялық бастаулары**

Солитондық теңдеулерді (1+1)-өлшемде шешудегі қарқындылық математиканы, соның ішінде дифференциалдық геометрияны дамытты. Геометриялық сипаттамалардың жетіспеушілігі солитондық шешімдерді іздеу кезінде байқалады. Сол себептен қарастырылып отырған моделді геометрия тұрғысынан талқыладық. Гравитация теориясын бұрандалықтан тәуелді метрикамен қарастырдық, ол $F(R,T)$ гравитация деп аталады [1]-[2]. Осындай теорияның геометриялық түбірлерін зерттейміз. Яғни, моделді геометриялық тұрғысынан сипаттаймыз. Екі кез-келген функциямен $F(R,T)$ гравитацияның жалпы формасын келтіреміз. Оны Фридман-Робертсон-Уолкер кеңістіктегі жазық метрикасы жағдайында қарастырамыз. Бұрандалықпен Леви-Чивита байланысының нолдік емес компоненттерін анықтап қисайу компоненттерін табамыз. Сондай-ақ Риччи қисықтықтығының нолдік емес компоненттері табылған. Сонымен, қисықтықпен бұрандалықтың скалярларының айқын түрлері келтірілген. *Түйін сөздер*: геометрия, қисықтық, бұрандалық, тензор, сызықты емес теңдеу, космология, космологиялық үдеу, уақыт-кеңістігі, масштабтық фактор, гравитация, солитондық шешім.

**1.Введение.** В космологическом контексте, мы находим ускоренное расширение Вселенной. Открытие ускоренного расширения Вселенной было большим прогрессом для современной космологии. Принято считать, что это космологическое ускорение благодаря некоторому виду материи с отрицательной формой давления известно как темная энергия. Природа темной энергии также как его космологическое происхождение остается неизвестной на настоящее время. Для того чтобы объяснить природу темной энергии и ускоренного расширения, широкая разновидность теоретических моделей были предложены в литературе, такие, как квинтэссенция, фантомная, $k$-эссенция, тахион, $f$-эссенция, газ Чаплыгина, $g$- эссенция, и т.д. Среди различных моделей темной энергии, модифицированные модели гравитации являются довольно интересными, поскольку они включают некоторые понятия квантовой и общей (классической) теории гравитации. Есть несколько измененных теорий гравитации, как F(R) гравитация, $F(G)$ гравитация, $F(T)$ гравитация и т. д. [3]-[5]. Одним из интересных и перспективных версии модифицированных теорий гравитации является $F(R,T)$ гравитация. Недавно одна из версии $F(R,T)$ гравитации была предложена в работе [1] и некоторые его свойства были изучены в работе [2].

В данной работе гравитационное действие $F(R,T)$ гравитации и его аргументы получены с геометрической точки зрения. Используя их в пространственно плоской Фридмана-Робертсона-Уолкера ($FRW$) метрике получена система действий со скалярами кривизны и кручения.

Мы исходим из M43 - модели [1]. Эта модель является одним из представлений $F(R,T)$ гравитации. Действие M43 - модели

$$S_{43} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$\begin{aligned} R &= \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ T &= \varepsilon_2 S_\rho^{\mu\nu} T^\rho_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $L_m$ является Лагранжианом материи, $\varepsilon_i = \pm 1$ (сигнатура). Мы попытались дать одно из возможных геометрических формулировок этой М43 - модели. Заметим, что мы имеем разные случаи, связанные с сигнатурой:

$$1)\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1; \quad 2)\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1; \quad 3)\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1; \quad 4)\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1.$$

Также отметим, что М43 - модель является частным случаем М37 - модели, имеющей вид

$$S_{37} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$R = u + \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{2}$$

$$T = \nu + \varepsilon_2 S_\rho^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho,$$

$$R_S = \varepsilon_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, T_S = \varepsilon_2 S_\rho^{\mu\nu} T_{\rho\mu\nu}. \tag{3}$$

**2.Общий случай.**

Для того чтобы понять геометрию М43 - модели мы рассмотрим некоторые пространства-времени с кривизной и кручением, так что ее связь $G_{\mu\nu}^\lambda$ является суммой частей кривизны и кручения. В данной работе греческий алфавит $(\mu, \nu, \rho, \ldots = 0, 1, 2, 3)$ обозначает индексы, связанные с пространством-временем, и латинский алфавит $(i, j, k, \ldots = 0, 1, 2, 3)$ обозначает индексы, которые поднимаются и опускаются с метрикой Минковского $\eta_{ij} = diag(-1, +1, +1, +1)$. Для нашего пространства-времени связь $G_{\mu\nu}^\lambda$

$$G_{\mu\nu}^\lambda = \varepsilon_i^\lambda \partial_\mu \varepsilon_\nu^i + \varepsilon_j^\lambda \varepsilon_\nu^i \omega_{i\mu}^j = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + K_{\mu\nu}^\lambda. \tag{4}$$

Здесь $\Gamma_{i\mu}^j$ является связью Леви-Чивита и $K_{i\mu}^j$ является искривлением. Пусть метрика имеет вид

$$ds^2 = g_{ij} ds^i ds^j. \tag{5}$$

Тогда ортонормированный тетраэдр компонентов $\varepsilon_i(x^\mu)$ связывается с метрикой через

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} \varepsilon_\mu^i \varepsilon_\nu^j, \tag{6}$$

так что условие ортонормальности

$$\eta_{ij} = g_{\mu\nu} \varepsilon_i^\mu \varepsilon_j^\mu. \tag{7}$$

Здесь $\eta_{ij} = diag(-1, +1, +1, +1)$ и мы использовали соотношение

$$\varepsilon_i^\mu \varepsilon_\mu^j = \delta_j^i. \tag{8}$$

Величины $\Gamma_{i\mu}^j$ и $K_{i\mu}^j$ определим как

$$\Gamma_{jk}^j = \frac{1}{2} g^{lr} \{\partial_k g_{rj} + \partial_j g_{rk} - \partial_r g_{jk}\} \tag{9}$$

и

$$K_{\mu\lambda}^\lambda = -\frac{1}{2}(T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\mu\nu}^\lambda + T_{\nu\mu}^\lambda) \tag{10}$$

соответственно. При этом компоненты тензора кручения задаются

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \varepsilon^{\lambda}_{i} T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}, \tag{11}$$

$$T^{i}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\varepsilon^{i}_{\nu} - \partial_{\mu}\varepsilon^{i}_{\mu} + \Gamma^{i}_{j\mu}\varepsilon^{j}_{\nu} - \Gamma^{i}_{j\nu}\varepsilon^{j}_{\mu}. \tag{12}$$

Кривизну $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ определим как

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \varepsilon^{\rho}_{i}\varepsilon^{\sigma}_{j} R^{i}_{j\mu\nu} = \partial_{\mu}G^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}G^{\rho}_{\sigma\mu} + G^{\rho}_{\lambda\mu}G^{\lambda}_{\sigma\nu} - G^{\rho}_{\lambda\nu}G^{\lambda}_{\sigma\mu} \\ = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} + \partial_{\mu}K^{\rho}_{\sigma\mu} - \partial_{\nu}K^{\rho}_{\sigma\mu} + K^{\rho}_{\lambda\mu}K^{\lambda}_{\sigma\nu} - K^{\rho}_{\lambda\nu}K^{\lambda}_{\sigma\mu} \\ +\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}K^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}K^{\lambda}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}K^{\rho}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}K^{\rho}_{\lambda\nu}, \end{aligned} \tag{13}$$

где кривизна римановой связности Леви-Чивита определяется стандартным образом

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}. \tag{14}$$

Введем теперь два важных для нас величин, именно скаляры кривизны (R) и кручения (T) как

$$R = g^{ij}R_{ij}, \tag{15}$$

$$T = S^{\mu\nu}_{\rho}T^{\rho}_{\mu\nu}, \tag{16}$$

где

$$S^{\mu\nu}_{\rho}\frac{1}{2}(K^{\mu\nu}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\rho}T^{\theta\nu}_{\theta} - \delta^{\nu}_{\rho}T^{\theta\mu}_{\theta}). \tag{17}$$

Тогда M43 - модель запишем в виде (1).

**3.Случай для пространственно плоской метрики Фридмана-Робертсона-Уолкера.**

Рассмотрим пространственно плоскую метрику Фридмана-Робертсона-Уолкера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{18}$$

где $(t)$ является масштабным фактором. В этом случае ненулевые компоненты связи Леви-Чивита являются

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{00} = \Gamma^{i}_{00} = 0, \\ \Gamma^{0}_{0i} = \Gamma^{0}_{i0} = \Gamma^{0}_{ij} = a^2 H\delta_{ij}, \\ \Gamma^{i}_{j0} = \Gamma^{i}_{0j} = H\delta^{j}_{i}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $H = (lna)_t$ и $(i, j, k, \ldots = 1, 2, 3)$. Теперь вычислим компоненты кручения. Его ненулевые компоненты определяются по формуле

$$T_{110} = T_{220} = T_{330} = a^2 h,$$

$$T_{123} + T_{231} + T_{312} = 2a^3 f, \tag{20}$$

где $h$ и $f$ некоторые действительные функции [3]. Заметим, что индексы тензора кручения поднимаются и опускаются по отношению к метрике

$$T_{ijk} = g_{kl}T^l_{ij}. \tag{21}$$

Теперь мы можем найти компоненты искривления. Тогда получим

$$\begin{gathered} K^1_{10} = K^2_{20} + K^3_{30} = 0, \\ K^1_{01} = K^2_{02} = K^3_{03} = h, \\ K^0_{11} = K^0_{22} + K^0_{33} = a^2 h, \\ K^1_{23} = K^2_{31} + K^3_{12} = -af, \\ K^1_{32} + K^2_{13} + K^3_{21} = af. \end{gathered} \tag{22}$$

Ненулевые компоненты кривизны $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ задаются следующим образом

$$\begin{gathered} R^0_{101} = R^0_{202} = R^0_{303} = a^2(\dot H + H^2 + Hh + \dot h), \\ R^0_{123} = -R^0_{213} = R^0_{312} = 2a^3 f(H+h), \\ R^1_{203} = -R^1_{302} = R^2_{301} = -aHf + \dot f, \\ R^1_{212} = R^1_{313} = R^2_{323} = a^2[(H+h)^2 + f^2]. \end{gathered} \tag{23}$$

Подобно им напишем ненулевые компоненты кривизны Риччи $R_{mu\nu}$ как

$$\begin{gathered} R_{00} = -3\dot H - 3\dot h - 3H^2 - 3Hh, \\ R_{11} = R_{22} + R_{33}a^2(\dot H + \dot h + 3H^2 + 5Hh + 2H^2 - f^2). \end{gathered} \tag{24}$$

Так же находим ненулевые компоненты тензора $S^{\mu\nu}_\rho$. Получим

$$S^{10}_1 = \frac{1}{2}(K^{10}_1 + \delta^1_1 T^{\theta 0}_\theta - \delta^1_1 T^{\theta\nu}_\theta) = \frac{1}{2}(h + 2h) = h, \tag{25}$$

$$S^{10}_1 = S^{20}_2 = S^{30}_3 = 2h, \tag{26}$$

$$S^{23}_1 = \frac{1}{2}(K^{23}_1 + \delta^2_1 + \delta^3_1) = -\frac{f}{2a}, \tag{27}$$

$$S^{23}_1 = S^{31}_2 = S^{21}_3 = -\frac{f}{2a} \tag{28}$$

и

$$T = T^1_{10}S^{10}_1 + T^2_{20}S^{20}_2 + T^3_{30}S^{30}_3 + T^1_{23}S^{23}_1 + T^2_{31}S^{31}_2 + T^3_{12}S^{12}_3. \tag{29}$$

Теперь мы можем написать явные формы скаляров кривизны и кручения

$$R = 6(\dot H + 2H^2) + 6\dot h + 18Hh + 6h^2 - 3f^2, \tag{30}$$

$$T = 6h^2 - a^{-2}f^2.$$

Итак, M43 - модель запишем следующим образом

$$S_{43} = \int d^4x\sqrt{-g}[F(R,T) + L_m],$$

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) + 6\dot{h} + 18Hh + 6h^2 - 3f^2, \qquad (31)$$
$$T = 6h^2 - a^{-2}f^{-2}.$$

Далее определив Лагранжиан обобщенной модели $F(R,T)$ гравитации можем построить некоторые космологические решения, в частности, для модели $F = \mu R + \nu T$.

В этом случае решения космологических уравнений делятся на два класса. Каждая из них связана с некоторыми скалярными функциями кручения. В частности, можно найти точное решение де Ситтера. Эти точные аналитические решения космологических уравнений описывают ускоренное расширение Вселенной.

## Список литературы

[1] *Myrzakulov R.* arXiv:1008.4486;

[2] *Myrzakulov R.* arXiv:1205.5266;

[3] *Muller-Hoissen F.* Phys. Lett. A, 92, N9, 433-434 (1982);

[4] *Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S.*, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006) [hepth/0603057];

[5] *Frieman J., Turner M. and Huterer D.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 46, 385 (2008) [arXiv:0803.0982].

## References

[1] *Myrzakulov R.* arXiv:1008.4486;

[2] *Myrzakulov R.* arXiv:1205.5266;

[3] *Muller-Hoissen F.* Phys. Lett. A, 92, N9, 433-434 (1982);

[4] *Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S.*, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006) [hepth/0603057];

[5] *Frieman J., Turner M. and Huterer D.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 46, 385 (2008) [arXiv:0803.0982].

*Поступила в редакцию 3 мая 2013 года*

*УДК 514.7; 517.977*

А.Д. Мажитова

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;*
*e-mail: Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz*

# Субриманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением

В данной работе мы рассматриваем субриманову задачу на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением. Эта задача основана на построении Гамильтоновой структуры для заданной метрики Карно-Каратеодори при помощи принципа максимума Понтрягина. В последнее время очень актуальны задачи исследования геодезических потоков на субримановых многообразиях (см., например, [5, 6]). Подробные теоретические аспекты отражены в [1]. Классификация левоинвариантных структур на трехмерных группах Ли приведена А. Аграчевым и Д. Барилари в [3]. Согласно этой классификации существуют инварианты субримановой геометрии, реализуемой на четырех разрешимых ненильпотентных группах Ли: $SOLV^-$, $SOLV^+$, $SE(2)$ и $SH(2)$. Мы занимаемся исследованием групп $SOLV^-$ и $SOLV^+$. В работах [8, 9] подробно изучены эти группы с левоинвариантным неголономным распределением.

*Ключевые слова: субриманова геометрия, правоинвариантная метрика, Гамильтониан, геодезические.*

*A.D. Mazhitova,*

**Sub-Riemannian problem on the three-dimensional solvable Lie group $SOLV^+$ with right-invariant distribution**

In this article we consider sub-Riemannian problem on the three dimensional solvable Lie group $SOLV^+$ with right-invariant distribution. We constructed the Hamiltonian structure for the geodesic flow of Carnot-Caratheodory metrics via the Pontryagin maximum principle. Recently, a very relevant research problems geodesic flows on sub-Riemannian manifolds (see, for example, [5, 6]). Detailed theoretical aspects are reflected in [1]. In work [3] A. Agrachev and D. Barilari made classification of left-invariant structures on three-dimensional Lie groups. According to this classification, there are invariants of the sub-Riemannian geometry, implemented in four nonnilpotent solvable Lie groups: $SOLV^-$, $SOLV^+$, $SE(2)$ and $SH(2)$. We research $SOLV^-$ and $SOLV^+$. In the papers [8, 9] detailed study these groups with nonholonomic left-invariant distribution.

*Key words*: {sub-Riemannian geometry, right-invariant metric, Hamiltonian, geodesics}

*А.Д. Мажитова,*

**Есептелімді үш өлшемді $SOLV^+$ Ли тобындағы оң-инвариант үйлестірімді субриман есебі**

Бұл жұмыста есептелімді үш өлшемді $SOLV^+$ Ли тобындағы оң-инвариант үйлестірімді субриман есебі қарастырылды. Карно-Каратеодори метрикасының геодезиялық қисықтары үшін Понтрягиннің максимум принципінде негізделген Гамильтон жүйесі құрастырылған. Соңғы уақытта субриман көпбейнеліктердегі геодезиялық қисықтарды зерттеу есептері актуалды (мысалы, [5, 6] қараңыз). Негізгі теориялық аспектілер [1] жұмысында келтірілген. Үш өлшемді Ли тобындағы сол-инвариант құрылымдар классификациясын А. Аграчев пен Д. Барилари [3] жұмысында жасаған. Сол классификация бойынша субриман геометриясы орнын табатын $SOLV^-$, $SOLV^+$, $SE(2)$ және $SH(2)$ нильпотентті емес Ли топтарында инварианттар бар. Біз соның ішіндегі $SOLV^-$ и $SOLV^+$ топтарын зерттеумен айналысамыз. [8, 9] жұмыстарында бұл топтар оң-инвариантты голономды емес үйлестірімімен зерттелген.

*Түйін сөздер*: {субриман геометриясы, оң-инвариантты метрика, Гамильтониан, геодезиялық қисықтар}

Пусть $M^n$ гладкое $n$-мерное многообразие. Гладкое семейство

$$\Delta = \{\Delta(q) : \quad \Delta(q) \in T_qM^n \quad \forall q \in M^n, \;\; \dim \Delta(q) = k\}$$

$k$-мерных подпространств в касательных пространствах в точке $q \in M^n$ называется вполне неинтегрируемым, если векторные поля из $\Delta$, и их всевозможные коммутаторы порождают все касательное пространство $TM^n$:

$$\operatorname{span}\{[f_1,[\dots[f_{m-1},f_m]\dots]](q) : f_i(p) \in \Delta(p) \;\; \forall p \in M^n, m = 1,\dots\} = T_qM^n.$$

Иногда такое распределение $\Delta$ называется вполне неголономным. Двумерное распределение на трехмерном многообразии является вполне неголономным тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{span}\{f_1(q), f_2(q), [f_1(q), f_2(q)]\} = T_qM^3,$$

где в каждой точке $q$ вектора $f_1(q)$ и $f_2(q)$ образуют базу в $\Delta(q)$.

Пусть $g_{ij}$ полная риманова метрика на $M^n$. Тройка $(M^n, \;\; \Delta, \;\; g_{ij})$ называется субримановым многообразием. Непрерывная в смысле Липшица кривая $\gamma : [0,T] \to M^n$ называется допустимой, если $\dot\gamma(t) \in \Delta(\gamma(t))$ для почти всех $t \in [0,T]$. Длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{g_{\gamma(t)}\left(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)}dt.$$

Расстояние между двумя точками на многообразии находится следующим образом,

$$d(q_0, q_1) = \inf_{\gamma \in \Omega_{q_0,q_1}} l(\gamma),$$

где $\Omega_{q_0,q_1}$ является множеством всех допустимых кривых, соединяющих точки $q_0$ и $q_1$. Такая функция $d(\cdot,\cdot)$ называется субримановой метрикой на $M^n$, а геодезическая этой метрики является допустимой кривой $\gamma : [0,T] \to M^n$, которая локально минимизирует функционал длины $l(\gamma)$.

Геодезические субримановой метрики должны удовлетворять принципу максимума Понтрягина (смотрите, например, [1]).

Пусть $f_1, \dots, f_k$ касательные ортонормированные векторные поля из $\Delta$, которые порождают всё $\Delta$ в каждой точке $M^n$.

Принцип максимума Понтрягина утверждает следующее:

- *Пусть $M^n$ гладкое $n$-мерное многообразие. Рассмотрим для непрерывных в смысле Липшица кривых следующую задачу минимизации*

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q), \quad u_i \in \mathbf{R}, \quad \int_0^T \sum_{i=1}^{k} u_i^2(t)dt \longrightarrow \min, \quad q(0) = q_0, \quad q(T) = q_1$$

*с фиксированным $T$. Рассмотрим отображение $\mathcal{H} : T^*M^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, заданную функцией*

$$\mathcal{H}(q, \lambda, p_0, u) := \langle \lambda, \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q) \rangle + p_0 \sum_{i=1}^{k} u_i^2.$$

*Если кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$ с управлением $u(\cdot) : [0,T] \to \mathbf{R}^k$ является оптимальной, тогда существует Липшицева функция (ковектор) $\lambda(\cdot) : t \in [0,T] \mapsto \lambda(t) \in T^*_{q(t)}M^n$, $(\lambda(t), p_0) \neq 0$ и постоянная $p_0 \leq 0$ такие, что*

*i)* $\dot{q}(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t))$,

*ii)* $\dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t))$,

*iii)* $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(q(t), \lambda(t), p_0, u(t)) = 0$.

Кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина называется экстремальной кривой (или экстремалью). Такой кривой соответствует множество пар $(\lambda(\cdot), p_0)$. Тип экстремальной кривой (нормальный или анормальный) зависит от значения $p_0$:

- если $p_0 \neq 0$, то экстремаль называется нормальной;
- если $p_0 = 0$, то экстремаль называется анормальной;
- экстремаль называется строго анормальной, если она не проектируется (на $M^n$) в нормальные экстремали.

Для нормальных экстремалей, которые являются геодезическими согласно [1], мы будем полагать $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Из пункта iii) следует, что $u_i = \langle \lambda(t), f_i(t) \rangle$, а также, что кривая $q(\cdot) : [0,T] \to M^n$ будет геодезической тогда и только тогда, если она является проекцией на $M^n$ решения

$(\lambda(t), q(t))$ Гамильтоновой системы, действующей на $T^*M^n$ со следующей Гамильтоновой функцией:

$$H(q,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\langle\lambda, f_i\rangle^2\right), \quad q \in M^n, \quad \lambda \in T_q^*M^n. \tag{1}$$

Гамильтониан $H$ является постоянным вдоль любого решения Гамильтоновой системы. Более того, $H = \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда геодезическая натурально-параметризованна.

Теперь перейдем непосредственно к нашей субримановой задаче на группе $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением.

В работах [8],[9] были подробно изучены геодезические потоки субримановой задачи на трехмерных разрешимых группах $SOLV^-$ и $SOLV^+$ с левоинвариантным расперделением.

Итак, наша группа $SOLV^+$ представлена матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а их коммутационные отношения следующие

$$[e_1, e_2] = 0; \quad [e_1, e_3] = e_2; \quad [e_2, e_3] = -e_1.$$

Коммутаторы базисных векторов порождает все касательное пространство.

Пусть метрика на группе будет обычной

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

а правонвариантное распределение образовано площадками $\Delta = \mathrm{span}\{e_1, e_3\}$. Пусть $q = (x, y, z)$ точка на группе $SOLV^+$. Тогда касательное пространство в каждой точке $SOLV^+$ определяется матрицами вида

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_z = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а векторы $e_1, e_2, e_3$ с помощью правых сдвигов переходят в следующие вектора

$$R_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & y \\ -\cos z & -\sin z & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть,

$$\begin{aligned} &R_q^*(e_1) = \partial_x, \\ &R_q^*(e_2) = \partial_y, \\ &R_q^*(e_3) = y \cdot \partial_x - x \cdot \partial_y + \partial_z. \end{aligned} \tag{5}$$

В каждой точке группы неголономное распределение образовано векторами $\tilde{f}_1 = \partial_x$, $\tilde{f}_3 = y \cdot \partial_x - x \cdot \partial_y + \partial_z$. Для применения Принципа максимума Понтрягина и Гамильтоновой структуры это распределение должно определяться ортонормированной системой. После процесса ортогонализации и нормировки они перейдут в вектора:

$$f_1 = \partial_x, \quad f_3 = \frac{-x \cdot \partial_y + \partial_z}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Найдем функцию Гамильтона по формуле (1)

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}\, p_x^2 + \frac{1}{2\,(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z)^2. \tag{6}$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получаем уравнения Гамильтона для (6)

$$\begin{aligned} &\dot{x} = p_x, && \dot{p_x} = \frac{x}{(x^2+1)^2}\,(-xp_y + p_z)^2 + \\ & && \quad + \frac{1}{(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z)p_y, \\ &\dot{y} = -\frac{x}{(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z), && \dot{p_y} = 0, \\ &\dot{z} = \frac{1}{(x^2+1)}\,(-xp_y + p_z), && \dot{p_z} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где точка означает производную по $t$. Система (7) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_y, \quad I_3 = p_z,$$

значит эта система дифференциальных уравнений полностью интегрируема. Нужно отметить, что интегрирование же этой системы является довольно сложной задачей, хотя бы, потому, что интегралы получаются в эллиптических функциях. Мы вычислим явно интеграл только для переменной $t$. Не теряя общности, будем считать, что все геодезические берут начало в единице группы, то есть справедливы следующие начальные условия для системы (7):

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \tag{8}$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \quad p_y = a, \quad p_z = b.$$

Подставим это все в гамильтониан (6) и получим

$$1 = p_x^2 + \frac{1}{x^2+1}\,(-ax+b)^2. \tag{9}$$

Из (7) нетрудно увидеть, что если $p_x \equiv 0$, то $b = \pm 1$, $a = 0$. В этом случае

$$x(t) = 0 \quad y(t) = bt, \quad z(t) = bt.$$

Если $a \neq 0$, то $p_x$ тождественно не может равняться нулю, поэтому из (9) находим $p_x$. Подставим его в первое уравнение системы (7) и найдем интеграл для переменной $t$ при $p_x > 0$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{(-ax+b)^2}{x^2+1}}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{\sqrt{(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2}}. \tag{10}$$

Случай $p_x < 0$ может быть посчитан аналогично. Последний интеграл разбивается на 2 слагаемых

$$t = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(1-a^2)x^2+2abx+1-b^2}} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)}\sqrt{(1-a^2)x^2+2abx+1-b^2}},$$

которые вычисляются в терминах эллиптических функций. Предварительно эти интегралы нужно привести к нормальной форме Лежандра (смотрите [4, 10]). Отметим, что мы будем рассматривать случай, когда квадратный трехчлен $(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2$ имеет два вещественных корня, т.е. $a^2 + b^2 - 1 > 0$. Подкоренное выражение интегралов $G(x)$ является полиномом четвертой степени, который можно привести к виду

$$G(x) = \left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(x - \frac{b}{a}\right)^2\right] \times$$

$$\times \left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a^2(1-a^2-b^2)}{a^2+b^2}\left(x - \frac{b}{a}\right)^2\right],$$

и переписать в следующей форме

$$G(x) = \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left[1+\frac{a^2}{b^2}\cdot\left(\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}\right)^2\right] \times \left[1+\frac{a^2(1-a^2-b^2)}{b^2}\cdot\left(\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}\right)^2\right].$$

Подставим полученное разложение в интегралы и сделаем дробно-линейное преобразование $\frac{b}{a}\xi = \frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{a}{b}}$, получим

$$t = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1-(a^2+b^2-1)\xi^2)}} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{\left(\frac{\xi+\frac{b}{a}}{\xi-\frac{a}{b}}\right)^2 d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1-(a^2+b^2-1)\xi^2)}}.$$

Вычислив эти интегралы после соответствующего преобразования, получим,что

$$\begin{aligned} t = {} & \frac{1}{k}\cdot \mathbf{F}\left(\arccos m\xi,\, k\right) + p_1\cdot \Pi\left(\arccos m\xi,\, n,\, k\right) + p_2 \cdot \mathbf{E}\left(\arccos m\xi,\, k\right) + \\ & + p_3 \cdot \frac{\xi\cdot\sqrt{(1+\xi^2)\left(\frac{1}{a^2+b^2-1}-\xi^2\right)}}{1-\frac{b^2}{a^2}\cdot\xi^2} + \\ & + p_4\cdot\sqrt{A\left(\xi^2-\tfrac{a^2}{b^2}\right)^{-2} + B\left(\xi^2-\tfrac{a^2}{b^2}\right)^{-1} + C} + \\ & + p_5 \cdot \arcsin\frac{2A\left(\xi^2-\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}+B}{p_6}, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$m = \sqrt{a^2+b^2-1}, \quad n = \frac{b^2}{b^2 - a^2(a^2+b^2-1)}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$p_1 = \frac{a^2(a^2+b^2-1)}{\sqrt{a^2+b^2}(a^2(a^2+b^2-1)-b^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{b^4-a^2+a^2b^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2a^4(1-a^2)-a^4+a^2b^2}{2(b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2))}\right)-\frac{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)}{a^2b^2}-\right],$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot(b^4-a^4+a^2b^2)}{b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2)}, \quad p_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2(b^4-a^4+a^2b^2)(a^2+b^2-1)}{a^2(b^4(1+a^2)+a^4(1-a^2))}, \tag{12}$$

$$p_4 = -\frac{a\sqrt{a^2+b^2-1}}{b^3(a^2+b^2)(1-a^2)}, \quad p_5 = -\frac{b^3\sqrt{a^2+b^2-1}}{2a(a^2-1)^{3/2}},$$

$$p_6 = b^4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-1}}$$

Подставляя это выражение в первые три уравнения системы (7) можно получить явные уравнения для геодезических нашей субримановой геометрии.

## Список литературы

[1] *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления - М: Физматлит, 2005. - 392 с.

[2] *Аксенов Е. П.* Специальные функции в небесной механике - М: Наука, 1986. - 321 с.

[3] *Agrachev A. and Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 21-44.

[4] *Бэйтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье - М: Наука, 1967. - 300 с.

[5] *Boscain U. and Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on $S^3$, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. - 2008. - Vol. 47. - P. 1851-1878.

[6] *Calin O., Chang D.-Ch., and Markina I.* SubRiemannian geometry on the sphere $S^3$. // Canad. J. Math. - 2009. - Vol. 61. -P.721-739.

[7] *Градштейн И. С.,Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений - М: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

[8] *Мажитова А. Д.* Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Математические труды. - 2012. - Т. 15, № 1. - С. 120-128.

[9] *Mazhitova A. D.*Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group $SOLV^{-}$ // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 309-322.

[10] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции - М: Физматлит, 1963. - 500 с.

## References

[1] *Agrachev A.A. and Sachkov, Yu.L.* Control theory from the geometric viewpoint // Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 87. Control Theory and Optimization, II. // - Springer-Verlag, Berlin, 2004. - 392 p.

[2] *Aksenov Ye. P.* Special Functions in Celestial Mechanics - M:Nauka, 1986. - 321 p.

[3] *Agrachev A. and Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 21-44.

[4] *Bateman H., Erdeyi A.* Higher Transcendental Functions. Elliptic and automorphic functions. Lame functions and Mathieu. - Moscow: Nauka, 1967. - 343 p.

[5] *Boscain U. and Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on $S^3$, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. - 2008. - Vol. 47. - P. 1851-1878.

[6] *Calin O., Chang D.-Ch., and Markina I.* SubRiemannian geometry on the sphere $S^3$. // Canad. J. Math. - 2009. - Vol. 61. - P. 721-739.

[7] *Gradstein I.S. and Ryzhik, I.M.* Tables of Integrals // Series and Products - New York, Academic. - 1980. - 1100 p.

[8] *Mazhitova A. D.* The geodesic flow of the sub-Riemannian metric on a three-dimensional solvable Lie group // Mathematical works. - 2012. - V.15, № 1. - P. 120-128.

[9] *Mazhitova A. D.* Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group $SOLV^{-}$ // Journal of Dynamical and Control Systems. - 2012. - Vol. 18, № 3. - P. 309-322.

[10] *Whittaker E. T. and Watson G. N.* A course of modern analysis. Transcendental functions - M: Fizmatlit, 1963. - Chapter 2. - 516 c.

*Поступила в редакцию 2 мая 2013 года*

УДК 519.21

Н. Аканбай , А.Б. Ахмедов , З.И. Сулейменова

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы e-mail: noureke@mail.ru*

# О некоторых вариантах неклассической центральной предельной теоремы

Условие равномерной предельной малости слагаемых является основой классических предельных теорем теории вероятностей для сумм независимых случайных величин. Не использующие условию равномерной бесконечной малости слагаемых предельные теоремы обычно называются неклассическими. Общеизвестно также, что в схемах суммирования независимых слагаемых зачастую бывает удобнее иметь дело с самими распределениями и сформулировать условия предельных теорем в опирающихся непосредственно на распределения ограничениях. Вместе с тем в наше время аппарат характеристических функций прочно вошел в теорию вероятностей как основа одного из самих мощных используемых в ней методов. Тем не менее доказательству сходимости рядов из независимых случайных величин в условиях на характеристических функций посвящены сравнительно мало работ. Данная работа посвящена доказательству некоторых неклассических предельных теорем в сформулированных в терминах характеристических функций, условиях.

*Ключевые слова: неклассическая предельная теорема, математическое ожидание, конечная дисперсия.*

*N.Akanbai, A.B. Ahmedov, Z.I. Suleimenova*

**On some versions of non-classical central limit theorem**

The condition of the smallness of the uniform limit of terms is the basis of the classical limit theorems for sums of independent random variables. Do not use the condition of uniform infinitesimal terms limit theorems are usually called non-classical. It is well known also that the schemes summation of independent variables is often more convenient to deal with the very distributions and formulate the conditions in limit theorems based directly on the allocation constraints. However, in our time, the characteristic functions of the device firmly entrenched in probability theory as the basis of one of themselves powerful techniques used in it. However, the proof of the convergence of series of independent random variables in terms of the characteristic functions are devoted to sravntielno little work. This work is devoted to the proof of some non-classical limit theorems formulated in terms of characteristic functions, conditions.

*Key words*: {non-classical limit theorem, the expectation, the final variance.}

*Н. Аканбай , А.Б. Ахмедов , З.И. Сулейменова*

**Классикалық емес орталық шекті теореманың кейбір нұсқалары туралы**

Қосылғыштардың бірқалыпты шектік аздығы туралы шарт - тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындылары үшін ықтималдықтар теориясының классикалық шектік теоремаларының негізі. Қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздығы шарты пайдаланылмайтын шектік теоремалар әдетте классикалық емес шектік теоеремалар деп аталады. Тәуелсіз қосылғыштарды қосу схемаларында үлестірімдердің өздерімен жұмыс істеу және шектік теоремалардың шарттарын тікелей үлестірімдерге сүйенетін шектеулер арқылы тұжырымдау көбіне ыңғайлы болатыны да жалпы белгілі. Сонымен бірге сипаттамалық функциялар аппараты қазіргі уақытта ықтималдықтар теориясына нық енген, осы теорияда қолданылатын ең бір қуатты әдістердің бірі екені де белгілі. Бұл жұмыс классикалық емес шектік теоремалардың кейбір нұсқалардың сипаттамалық функциялар терминдері арқылы тұжырымдалған шарттар аясында дәлелдеуге арналған.

*Түйін сөздер*:{классикалық емес шекті теорема, математикалық күтім, ақырлы дисперсия.}

Пусть

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, ..., \xi_{nn}, ... \tag{1}$$

-последовательность серий независимых случайных величин (с.в.),

$$F_{nj}(x) = P(\xi_{nj} < x), j = 1, 2, ...,$$

$$S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + ...,$$

причем число слагаемых $S_n$ может быть как конечным, так и бесконечным. В последнем случае будет предполагаться, что $S_n$ представляет собой сходящийся (в смысле слабой сходимости) ряд независимых с.в..

**Замечание 1.** Напомним, что для последнего ряда (т.е. для $S_n$) понятия сходимости по распределению (слабой сходимости), по вероятности и с вероятностью 1 эквивалентны.

Положим

$$F_n(x) = P(S_n < x) = F_{n1} * F_{n2} * ... * ..., \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

где $*$ - знак композиции распределений.

Как хорошо известно, метрика Леви ($L-$ метрика) между двумя функциями распределения (ф.р.) $F(x)$ и $G(x)$ определяется формулой

$$L(F, G) = inf\{\varepsilon : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon; x \in R\},$$

и расстояние $L(\cdot, \cdot)$ метризует топологию слабой сходимости распределений. Также напомним, что если

$$\lim_{n\to\infty} L(F_n, \Phi) = 0, \tag{2}$$

то для последовательности (1) имеет место центральная предельная теорема (ЦПТ).

Возникает вопрос об ограничениях, которые следует наложить на слагаемые, чтобы условие (2) о справидливости ЦПТ перестала быть тривиальной и в тоже время сохранила достаточную степень общности. На этом пути и появилось ограничение, известное под названием условия равномерной бесконечности малости. Оно требует, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ было выполнено условие

$$\sup_j P(|\xi_{nj}| \geq \varepsilon) \to 0, n \to \infty. \tag{3}$$

Необходимость подобного (3) ограничения, в первую очередь, связано с желанием сделать каждое слагаемое равноправным в формировании значения суммы $S_n$. Построение теории суммирования независимых с.в. при выполнении условия (3) связано, в основном, с именами П. Леви, В. Феллера, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко. В частности, в трудах этих ученых доказано, что класс предельных законов распределений для $F_n$ (в смысле слабой сходимости)совпадает с классом всех безгранично делимых распределений (см.[1], [2]).

Как отмечено в монографии [3], еще П. Леви попытался сформулировать условия справедливости ЦПТ без предположения о равномерной бесконечной малости слагаемых (3). Следуя В.М. Золотареву, предельные теоремы о распределениях суммы $S_n$, не использующие условие (3), стали называться неклассическим. Им впервые доказана следующая теорема, обобщеющая классическую ЦПТ в форме Линдеберга - Феллера (см.[4]).

**Теорема 1.** Пусть с.в. последовательности (1) имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии $E\xi_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2$, причем

$$\sum_j \sigma_{nj}^2 = 1 \tag{4}$$

Тогда сходимость $L(F_n, \Phi) \to 0$ (т.е. ЦПТ) имеет место тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$ выполнены следующие два условия:

а)

$$\alpha_n = \sup_j L(F_{n,j}, \Phi_{nj}) \to 0, \tag{5}$$

где $\Phi_{n,j}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$;

б) при каждом $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j \in A_n} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} x^2 d(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)) \to 0, \tag{6}$$

где множество $A_n$ содержит те значения индекса $j$, для которых $\sigma_{nj}^2 \leq \sqrt{\alpha_n}$, т.е.

$$A_n = \{j : \sigma_{nj}^2 \leq \sqrt{\alpha_n}\} \tag{7}$$

**Замечание 2.** В [5] доказано, что условия а) и б) могут быть объединены в одно:

для любого $\varepsilon > 0$

$$R_n(\varepsilon) = \sum_j \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx \to 0, n \to \infty. \tag{8}$$

**Замечание 3.** Условие равномерной бесконечной малости (3) в случае существования дисперсий $\sigma_{nj}^2$ переходит в условие

$$\sup_j L(F_{nj}, 0) \to 0, n \to \infty. \tag{3'}$$

Следующая лемма позволяет установить отношения взаимосвязи условий (3), (5), (3′).

**Лемма 1.**Если выполнено условие (3′), то из условия (5) следует выполнение условия равномерной бесконечной малости (3).

**Доказательство.** Согласно замечанию 3, условие (3) равносильно условие (3′). Далее, по свойству метрического расстояния

$$L(F_{nj}, 0) \le L(F_{nj}, \Phi_{nj}) + L(\Phi_{nj}, 0). \tag{9}$$

Следовательно

$$\sup_j L(F_{nj}, 0) \le \alpha_n + \sup_j L(\Phi_{n,j}, 0). \tag{10}$$

Легко увидеть, что при любом $j$

$$L(\Phi_{nj}, 0) \le \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} d\Phi_{nj} = \int\limits_{|x|\ge\frac{\varepsilon}{\sigma_{nj}}} d\Phi \le \int\limits_{|x|\ge\frac{\varepsilon}{\sup\limits_j \sigma_{nj}}} d\Phi \to \infty, n \to \infty. \tag{11}$$

Последнее предельное соотношение в (11) вытекает из того, что согласно (4) $\sigma_{n,j} \to 0, (n \to \infty)$.

Теперь приведем и докажем некторые варианты неклассических ЦПТ в терминах характеристических функций (х.ф.).

Предварительно введем следующие обозначения:

$$f_{nj}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nj}(x), \varphi_{nj}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_{nj}(x) = e^{-\frac{\sigma_{nj}^2 t^2}{2}}, j = 1, 2, ...,$$

$$f_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod_j f_{nj}(t), \varphi_n(t) = \prod_j \varphi_{nj}(t).$$

Заметим, что в силу (4) $\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

**Теорема 2.**Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда сходимость $L(F_n, \Phi) \to 0$ (т.е. ЦПТ) имеет место тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$ выполняется следующие два условия:

1) для любого $T > 0$

$$\sup_j \sup_{|t|\le T} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \to 0. \tag{12}$$

2) при каждому положительном $T$

$$\sup_{|t|\leq T}\sum_{j\in A_n}|f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)|\to 0, \tag{13}$$

где множество $A_n$ определено соотношением (7).

При доказательстве теоремы 2 нами будут использованы приводимые ниже вспомогательные леммы 2-4.

Для любой ф.р. $F(x)$ положим

$$F^*(x)=1-F(x)+F(-x).$$

Пусть $g(x)-$ некоторая неотрицательная и неубывающая на $[0,\infty)$ функция, а $F(x)$ и $G(x)$ две ф.р. такие, что

$$\int\limits_0^\infty g(x)F^*(x)dx=\int\limits_0^\infty g(x)G^*(x)dx. \tag{14}$$

Для любых ф.р. $F(x)$ и $G(x)$ определим $\nu-$ метрику соотшением:

$$\nu(F,G)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(|x|)|(F(x)-G(x))|dx.$$

то, что $\nu$ будет (вероятностей) метрикой проверяется непосредственно.

**Лемма 2.**([5]). Если выполнено условие (14), то для любого $B>0$

$$\nu(F,G)\leq 4\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)G^*(x)dx+g(B)(B+1)L(F,G)\}. \tag{15}$$

Далее, интегрированием по частям можно убедиться, что для любой ф.р. $F(x)$ с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $\sigma^2$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dF(x)=2\int\limits_0^\infty xF^*(x)dx, \tag{16}$$

где $F^*(x)-$ определенное соотношением (14) функция.

Пусть $g(x)=x$. Тогда условие (14), согласно равенству (16), перейдет в условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dF(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dG(x)=\sigma^2. \tag{17}$$

Положим $\overline{G}(x)=G(\sigma x)$. Тогда неравенство (15) можно переписать в виде

$$\nu(F,G)\leq 4\{\sigma^2\int\limits_{B/\sigma}^{\infty} x(\overline{G}(x))^*dx+B(B+1)L(F,G)\} \tag{15'}$$

аналогичными рассуждениями, использованными при выводе равенства (16), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|x|\geq\varepsilon} x^2 dF(x) \geq \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} xF^*(x)dx. \tag{18}$$

Полагая в неравенстве (15′) $B = A\sigma$, с учетом (17), (18), а также тем, что $\sigma/A \leq 1$ при $A \geq 1$, получаем следующее

**Следствие.** Для любого $A \geq 1$

$$\nu(F, G) \leq 4\{\sigma^2 \int\limits_{|x|>A} x^2 d\overline{G}(x) + A^2(\sigma^2 + \sigma)L(F, G)\} \tag{19}$$

**Лемма 3.** Пусть при $n \to \infty$ выполнено соотношение (5). Тогда для любого $T > 0$ при $n \to \infty$

$$\sup_j \sup_{|t|\leq T} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \to 0 \tag{20}$$

**Замечание 4.** Предельное соотношение (20) доказано в [3] рассуждениями от противного. Мы приведем здесь прямое доказательство этого соотношения, причем оценки, полученные в процессе этого доказательства, будут использованы в дальнейшем.

**Доказательство.** Имея в виду, что $F_{nj}(x)$ и $\Phi_{nj}(x)$ распределения с нулевыми математическими ожиданиями, для разности характерисческих функции этих распределний можем писать:

$$f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)(dF_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)).$$

Проведя здесь интегрирование по частям, получим

$$|f_{nj}(x) - \varphi_{nj}(t)| = |\int\limits_{-\infty}^{\infty} (it)(e^{itx} - 1)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x))dx.|$$

Откуда, в силу того, что $|e^{i\alpha} - 1| \leq |\alpha|$ для любого $\alpha \in R$, имеем

$$|f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \leq |t|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\,dx = t^2 v(F_{nj}, \Phi_{nj}). \tag{21}$$

Теперь воспользуемся оценкой метрики $v(F, G)$, приведенной в (19) и тем, что $\Phi_{nj}-$ распределние с дисперсией $\sigma_{nj}^2$, $\Phi_{nj}(\sigma_{nj}x) = \Phi(x)$. Тогда для любого $A \geq 1$

$$v(F_{nj}, \Phi_{nj}) \leq 4\{\sigma_{nj}^2 \int\limits_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + A^2(\sigma_{nj}^2 + \sigma_{nj})L(F_{nj}, \Phi_{nj})\} \tag{22}$$

Из (22), с учетом (4), получим

$$\sup_j v(F_{nj},\Phi_{nj}) \le 4\left[\int\limits_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + 2A^2\alpha_n\right]. \tag{23}$$

Утверждение леммы теперь вытекает из соотношений (5), (21), (23) и возможности выбора А достаточно большим.

**Лемма 4**([6]).Если $|a_k| \le 1, |b_k| \le 1; k = 1, 2, ..., n$, то

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

*Достаточность*. В первую очередь заметим, что в силу леммы 3 условие (12) теоремы 2 вытекает из условия а) теоремы 1.

Далее, с учетом леммы 4, можем писать

$$\left|f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \left|\prod_j f_{nj}(t) - \prod_j \varphi_{nj}(t)\right| \le \sum_j |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| =$$

$$= \sum_{j\in A_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) + \sum_{j\in\overline{A}_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)|. \tag{24}$$

Заметим теперь, что из условия 2) теоремы 2 вытекает сходимость к нулю первой суммы правой части (24). Следовательно, для окончательного доказательства утверждения теоремы 2 достаточно показать, что вторая сумма вторая сумма в (24) стремится к нулю при неограниченном росте $n$.

Поскольку $\sigma_{nj}^2 \ge \sqrt{\alpha_n}$ при каждом $j \in \overline{A}_n$ (см.(7)), то

$$\sum_{j\in\overline{A}_n} \sigma_{nj}^2 \ge \sqrt{\alpha_n} \sum_{j\in\overline{A}_n} 1.$$

Согласно (4) сумма $\sum\limits_{j\in\overline{A}_n} \sigma_{nj}^2 \le 1$, следовательно число слагаемых в последней сумме, т.е. число элементов множества $\overline{A}_n$, удовлетворяет неравенству

$$|\overline{A}_n| = \sum_{j\in\overline{A}_n} 1 \le \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}. \tag{25}$$

В силу неравенств (21), (22), (25), для $T > 0$ и $A \ge 1$ можем написать следующую цепочку неравенств:

$$\sup_{|t|\le T} \sum_{j\in\overline{A}_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \le T^2 \sum_{j\in\overline{A}_n} v(F_{nj},\Phi_{nj}) \le 4T^2\left[\int\limits_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + 2A^2\sqrt{\alpha_n}\right].$$

Следовательно, если выбрать A достаточно большим, но так, чтобы $A^2\sqrt{\alpha_n} \to 0 (n \to \infty)$, то из последного неравенства получим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\le T} \sum_{j\in \overline{A}_n} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| = 0. \tag{26}$$

Итак, для всех $t$ из конечного отрезка $[-T, T]$ верно предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{27}$$

т.е. условия 1) и 2) является достаточными условиями для выполнения условия (2), т.е. ЦПТ.

*Необходимость.* Необходимость условия 1) следует из теоремы A и леммы 3. Чтобы доказать необходимость условия 2), воспользуемся следующим соотношением, являющегося следствием того, что $F_{nj}$ и $\Phi_{nj}$ является распределениями с одинаковыми (нулевыми) математическими ожиданиями и одинаковыми (равными $\sigma^2_{nj}$) дисперсиями:

$$f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}) d(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)).$$

Путем интегрирования получаем следующее: для любого $\varepsilon > 0$

$$|f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} it(e^{itx} - 1 - itx)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x))dx \right| \le$$

$$\le |t| \int\limits_{|x|\le\varepsilon} \left|e^{itx} - 1 - itx\right| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx + \left| it \int\limits_{|x|>\varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x))dx \right| \tag{28}$$

Обозначим через $I_1$ и $I_2$ соответственно первое и второе слагаемые правой части (28) и оценим их. Воспользовавщись неравенством

$$\left|e^{itx} - 1 - itx\right| \le \frac{t^2x^2}{2},$$

можем написать:

$$I_1 \le \frac{|t|^3}{2} \int\limits_{|x|\le\varepsilon} x^2 |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx \le \frac{|t|^3}{2} \cdot \varepsilon \int\limits_{|x|\le\varepsilon} |x|\, |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx. \tag{29}$$

Далее,

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{0} (-x)\, |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|\, dx = \int\limits_{0}^{\varepsilon} u\, |F_{nj}(-u) - \Phi_{nj}(-u)|\, du \le \int\limits_{0}^{\varepsilon} uF_{nj}(-u)du + \int\limits_{0}^{\varepsilon} u\Phi_{nj}(-u)du. \tag{30}$$

Очевидно, что

$$\int_0^\varepsilon x\left|F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)\right|dx \le \int_0^\varepsilon x(1-F_{nj}(x))dx+\int_0^\varepsilon x(1-\Phi_{nj}(x))dx. \tag{31}$$

Теперь вспомнив определения $F^*_{nj}(x)$ и $\Phi^*_{nj}(x)$, с учетом (29)-(31)и равенства (16)получим

$$I_1 \le \frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int_0^\varepsilon xF^*_{nj}(x)dx+2\int_0^\varepsilon x\Phi^*_{nj}(x)dx\right] \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int_0^\infty xF^*_{nj}(x)dx+2\int_0^\infty x\Phi^*_{nj}(x)dx\right] =$$

$$\frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon\left[2\int_{-\infty}^\infty x^2dF_{nj}(x)+2\int_{-\infty}^\infty x^2d\Phi_{nj}(x)\right] = \frac{|t|^3}{4}\cdot\varepsilon(\sigma^2_{nj}+\sigma^2_{nj}) = \frac{|t|^3}{2}\cdot\varepsilon\sigma^2_{nj} \tag{32}$$

Для оценки $I_2$ нам понадобится вспомогательная лемма 5. Предварительно для любой ф.р. $F(x)$ положим

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} 1-F(x), x>0, \\ F(x), x\le 0, \end{cases}$$

и заметим, что для любых ф.р. $F(x)$ и $G(x)$

$$|F(x)-G(x)| \le \left|\widetilde{F}(x)-\widetilde{G}(x)\right| \le \widetilde{F}(x)+\widetilde{G}(x). \tag{33}$$

**Лемма 5.** Если при некотором $k\ge 1$

$$\int_{-\infty}^\infty |x|^k dF(x) < \infty,$$

то для любого $\varepsilon>0$

$$\int_{|x|>\varepsilon} |x|^k dF(x) \le k\int_{|x|>\varepsilon} |x|^{k-1}\widetilde{F}(x)dx. \tag{34}$$

Доказательство леммы легко следует из соотношения

$$\int_{|x|>\varepsilon} |x|^k dF(x) = \int_\varepsilon^\infty x^k d(-\widetilde{F}(x)) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (-x)^k d\widetilde{F}(x).$$

Оценим теперь $I_2$. Для этого сначала запишем $I_2$ в виде $I_2 = |I_{21}+I_{22}|$, где

$$I_{21} = it\int_{|x|>\varepsilon} (e^{itx}-1)(F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x))dx, I_{22} = -it^2\int_{|x|>\varepsilon} x(F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x))dx$$

Далее, можем писать (см. доказательства соотношений (21)и (22))

$$|I_{21}| \le |t| \int\limits_{|x|>\varepsilon} \left|e^{itx}-1\right| |F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)|\, dx \le |t| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|(e^{itx}-1)\right| |F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)|\, dx \le t^2 v(F_{nj},\Phi_{nj}).$$

Для $v(F_{nj},\Phi_{nj})$ справедливы неравенства (22) и (23), откуда вытекает , что

$$\sup_{|t|\le T} \sum_{j\in A_n} |I_{21}| \to 0 (n\to\infty).$$

Если воспользуемся соотношениями (33),(34), то получим оценку

$$I_{22} \le t^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|\, |F_{nj}(x)-\Phi_{nj}(x)|\, dx \le t^2 \left[ \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x| \widetilde{F}_{nj}(x) dx + \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x| \widetilde{\Phi}_{nj}(x) dx \right] \le$$

$$\le t^2 \left[ \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nj}(x) \right] \qquad (35)$$

Теперь из соотношений (28), (32), (35) следует, что

$$\sum_{j\in A_n} |f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)| \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{2} \cdot \varepsilon \sum_{j\in A_n} \sigma_{nj}^2 + t^2 \sum_{j\in A_n} \left[ \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nj}(x) \right] + \sum_{j\in A_n} |I_{21}|. \qquad (36)$$

Поскольку $\Phi_{nj}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$, то с учетом структуры множества $A_n$ и равенства (4) имеем

$$\sum_{j\in A_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nj}(x) = \sum_{j\in A_n} \sigma_{nj}^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon\sigma_{nj}} x^2 d\Phi(x) \le$$

$$\le \sum_{j\in A_n} \sigma_{nj}^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon\alpha_j^{-\frac{1}{4}}} x^2 d\Phi(x) \le \int\limits_{|x|>\epsilon\alpha_n^{\frac{-1}{4}}} x^2 d\Phi(x) \to 0(m\to\infty) \qquad (37)$$

Последнее соотношение формулы (37) вытекает из конечности дисперсии и из условия (5). Очевидно, что аналогичное соотношение справедливо и для слагаемых с $\widetilde{F}_{nj}$. Окончательно из соотношений (4), (36), (37), произвольности $\varepsilon$ и теоремы 1 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\le T} \sum_{j\in A_n} |f_{nj}(t)-\varphi_{nj}(t)| = 0.$$

Теорема 2 доказано.

**Замечание 5.** Поскольку распределение с.в. однозначно определяется через х.ф., то задача нахождения необходимых и достаточных условий для справедливости ЦПТ в терминах х.ф. является существенной в теории суммирования с.в. Это тем более важно, потому что выполнение условий, накладываемых на распределения слагаемых, сформулированные в терминах х.ф., обычно легко проверяются.

**Замечание 6.** Теорема 2 существенно обобщает классическую теоерему Линдеберга-Филлера. в идейном отношении вероятностный смысл теоремы 2 сводится к следующему: предварительно (как и в случае теоремы 1) выделяется подпоследовательность слагаемых с.в., которые удовлетворяют условию равномерной бесконечной малости, а потом для них проверяется выполнение классического условия Линдеберга.

При помощи небольшой видоизменений в доказательстве теоремы 2 можно убедиться в справедливости следующей теоремы, в которой два условия 1) и 2) объединены в одно.

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие (4). Тогда сходимость $L(F_n, \Phi) \to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup_{|t|\le T} \sup_{j} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \to 0, \tag{38}$$

при $n \to \infty$ и любом $T > 0$.

Эта теорема является аналогом выше упомянутой теоремы из [5] в терминах х.ф.

Авторы выражают глубокую признательность академику АН РУз Ш.К. Форманову за постановку задачи и полезные советы при написании статьи.

## Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.-М.:Гостехиздат, 1949.- 264 с.

[2] *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. - М.: Наука, 1972.- 414 с.

[3] *Линник Ю.В., Островский И.В.* Разложения случайных величин и векторов. - М.: Наука, 1972. - 480 с.

[4] *Золотарев В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. - М.: Наука, 1986. - 417 с.

[5] *Rotar V.* Probability Thoery. World Scientific, River Edge, Nj, 1997. - 414 p.

[6] *Аканбай Н., Форманов Ш.К.* Неклассический вариант слабой сходимости в центральной предельной теореме - ДАН РУз., №4, 2012 , С. 3-6.

## References

[1] *Gnedenko B.V.,Kolmogorov A.N.* Predel'nye raspredelenija dlja summ i nezavisimyh sluchajnyh velichin. M.:Gostehizdat, 1949.- 264 s.

[2] *Petrov V.V.*Summy nezavisimyh sluchajnyh velichin. M.: Nauka, 1972.- 414 s.

[3] Linnik Ju. V, Ostrovskij I.V. Razlozhenija sluchajnyh velichin i vektorov.M.: Nauka, 1972. - 480 s.

[4] *Zolotarev* Sovremennaja teorija summirovanija nezavisimyh sluchajnyh velichin.M.: Nauka, 1986. - 417 s.

[5] *Rotar V.* Probability Thoery. World Scientific, River Edge, Nj, 1997. - 414 p.

[6] *Akanbaj N., Formanov Sh.K.* Neklassicheskij variant slaboj shodimosti v central'noj predel'noj teoreme.- DAN RUz., №4, 2012 , s. 3-6.

*Поступила в редакцию 28 апреля 2013 года*

*УДК 517.95*

Н.С. Ахтаева, Э.Т. Каримов

*Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан; Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;*
*e-mail: akhtaeva_nazgul@mail.ru, erkinjon@gmail.com*

# О краевой задаче с условием сопряжения интегрального вида для смешанного параболо - гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа

В работе изучены вопросы однозначной разрешимости одной локальной задачи с интегральными условиями сопряжения на линии изменения типа для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка. При определенных ограничениях на данные задачи доказывается теоремы существования и единственности решения задачи.
*Ключевые слова*: {Смешанное параболо-гиперболическое уравнение, условия сопряжения, интегральное уравнение.}

*N.S. Akhtaeva, E.T. Karimov*

**A boundary value problem with adjointing condition of integral type for mixed parabolic - hyperbolic equations with non-characteristic line type change**

In work questions of unique solvability of one local problem with integrated conditions of adjointing on the line of change of type for mixed parabolo-hyperbolic equation of the second order are studied. Under certain restrictions on the data of the problem we prove the existence and uniqueness of solutions of the problem.
*Key words*: {Mixed parabolo-hyperbolic equation,conditions of adjointing, integral equation.}

*Н.С. Ақтаева, Е.Т. Кәрімов*

**Тип өзгеру сызығы характеристика болмаған аралас парабола-гиперболалық теңдеу үшін интегралдық түрдегі түйіндес шартты шекаралық есеп туралы**

Жұмыста екінші ретті аралас парабола-гиперболалық теңдеулер үшін тип өзгеру сызығында түйіндес интегралдық шарттарымен берілген локалді есебінің бірмәнді шешілу мәселесі қарастырылады. Есептің берілгеніне нақтылы шектеулерден кейін есеп шешімінің бар болуы және бірмәнділігі туралы теоремалар дәлелденді.

*Түйін сөздер*: {Аралас парабола-гиперболалық теңдеу, түйіндес шарты, интегралдық теңдеу.}

Рассмотрим уравнение

$$f(x,y) = \begin{cases} u_x - u_{yy},\ y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy},\ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной области $\Omega$, ограниченной при $y > 0$ отрезками $AA_0$, $A_0B_0$, $B_0B$ прямых $x = 0, y = 1, x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками $AC:\ x + y = 0$ и $BC:\ x - y = 1$ уравнения (1).

**Задача.** Найти решение уравнения (1) из класса функций

$$W = \left\{u(x,y):\ u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB\right) \cap C_y^2\left(\Omega_1\right) \cap C^2\left(\Omega_2\right)\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u\left|_{AA_0 \cup A_0B_0}\right. = 0, \tag{2}$$

$$u\left|_{AC}\right. = 0, \tag{3}$$

условию сопряжения

$$u_y(x,+0) = \alpha u_y(x,-0) + \beta \int\limits_x^1 u_y(t,-0)Q(x,t)dt,\ 0 < x < 1, \tag{4}$$

где $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$, $f(x,y)$, $Q(x,t)$ – заданные функции, $\alpha, \beta \in R$, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Это задача в случае, когда $\beta = 0, \alpha = 1$ совпадает с классической задачей Трикоми для уравнения (1) и является вольтерровой задачей (см. например [1]).

Различные краевые задачи с непрерывными и разрывными условиями склеивания исследованы во многих работах, информации об основных из этих работ можно найти в монографии [2]. Опуская огромную библиографию по этому направлению отметим работы [3-7], где изучены вопросы разрешимости краевых задач с условиями сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболических уравнений.

Мы исследуем задачу в следующих двух случаях: 1) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$; 2) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

**Получение основных функциональных соотношений на линии изменения типа**

В области $\Omega_1$ решение 1-краевой задачи для уравнения (1) представимо в виде [2]:

$$u(x,y) = \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^1 G\left(x - x_1, y, y_1\right) f\left(x_1, y_1\right) dy_1 + \int\limits_0^x G_{y_1}\left(x - x_1, y, 0\right) \tau_1(x_1) dx_1, \tag{5}$$

где $\tau_1(x) = u(x, +0)$,

$$G(x, y, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ exp\left\{ -\frac{(y - y_1 + 2n)^2}{4x} \right\} - exp\left\{ -\frac{(y + y_1 + 2n)^2}{4x} \right\} \right]$$

– функция Грина 1-краевой задачи для уравнения (1) в области $\Omega_1$.

Вычислив производную $u_y$ и устремляя $y$ к нулю получим

$$\nu_1(x) = -\int_0^x k(x-t)\tau_1'(t)dt + \Phi_0(x), \tag{6}$$

где $u_y(x, +0) = \nu_1(x)$,

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp\left( -\frac{n^2}{x} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \widetilde{k}(x),$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x - x_1, y_1) f(x_1, y_1) dy_1,$$

$$G_0(x, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y_1 + 2n) exp\left( -\frac{(y_1 + 2n)^2}{4x} \right).$$

В области $\Omega_2$ решение ищем в виде

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[ \tau_2(\xi) + \tau_2(\eta) - \int_\xi^\eta \nu_2(t)dt \right] - \int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1, \tag{7}$$

где $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $f_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} f\left( \frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2} \right)$, $\tau_2(x) = u(x, -0)$, $u_y(x, -0) = \nu_2(x)$.

Используя условие (3) находим

$$\nu_2(\eta) = \tau_2'(\eta) - 2\int_0^\eta f_1(\xi_1, \eta) d\xi_1. \tag{8}$$

(8) подставим в условие сопряжения (4) и получим

$$\nu_1(x) = \alpha\tau_1'(x) + \beta \int_x^1 \tau_1'(t) Q(x,t) dt - 2\alpha \int_0^x f_1(\xi_1, x) d\xi_1 - 2\beta \int_x^1 \left( \int_0^t f_1(\xi_1, t) d\xi_1 \right) Q(x,t) dt. \tag{9}$$

**Доказательство единственности решения задачи.** Умножим уравнение $u_x - u_{yy} = 0$ на функцию $u$ и интегрируем по области $\Omega_1$. Применяя формулу Грина, после использования условия (2), имеем

$$\iint_{\Omega_1} u_y^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(1, y) dy + \int_0^1 \tau_1(x) \nu_1(x) dx = 0. \tag{10}$$

Учитывая (9) в однородном случае, получим

$$I=\int\limits_0^1 \tau_1(x)\nu_1(x)dx=\alpha\int\limits_0^1 \tau_1(x)\tau_1(x)dx+\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)dx\int\limits_x^1 \tau_1'(t)Q(x,t)dt=I_1+I_2.$$

Легко можно убедиться, что если $\alpha\geq 0$, то $I\geq 0$. Используя формулу интегрирования по частьям $I_2$ напишем следующим образом:

$$I_2=\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)\left[\tau_1(1)Q(x,1)-\tau_1(x)Q(x,x)\right]dx-\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)dx\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_t(x,t)dt=I_{2,1}-I_{2,2}.$$

Пусть $Q(x,1)=0$. Если $\beta Q(x,x)\leq 0$, то $I_{2,1}\geq 0$. Если далее предположим, что $Q(x,t)=Q_1(x)Q_2(t)$, то $I_{2,2}=-\beta\int\limits_0^1 \tau_1(x)Q_1(x)dx\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt$. Так как

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2=-2\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)\times\tau_1(x)Q_2'(x)dt,$$

то интегрируя по частьям, после несложных преобразований имеем

$$I_{2,2}=-\frac{\beta}{2}\frac{Q_1(0)}{Q_2'(0)}\left(\int\limits_0^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2-\frac{\beta}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1 \tau_1(t)Q_2'(t)dt\right)^2\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'dx.$$

Если $\frac{\beta Q_1(0)}{Q_2'(0)}\leq 0$, $\beta\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'\leq 0$, то $I_{2,2}\geq 0$.

Учитывая вышеполученные условия, получим, что $I\geq 0$. Тогда из (10) получим, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega_1}$. Учитывая искомий класс функции и решение задачи Коши получим, что $u(x,y)\equiv 0$ и в области $\overline{\Omega_2}$. И так, мы можем заключить, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega}$.

Теперь сформулируем только что доказанное утверждение в виде теоремы.

**Теорема 1** *Пусть*

$$\alpha\geq 0,\ Q(x,t)=Q_1(x)Q_2(t),\ Q_2(1)=0,\ \beta Q_1(x)Q_2(x)\leq 0,\ \frac{\beta Q_1(0)}{Q_2'(0)}\leq 0,\ \beta\left(\frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)}\right)'\leq 0.$$

*Тогда если существует решение задачи, то оно единственно.*

**Замечание.** В качестве примера для такой функции $Q(x,t)$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 1 приведем следующую функцию:

$$Q(x,t)=-x(1-t)^{\lambda},\ 0<\lambda<1.$$

**Существование решения задачи**

Справедлива следующая теорема о существовании решения задачи.

**Теорема 2** *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Если* $f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $f(0,0)=0$, $Q(x,t) \in C([0,1]\times[0,1]) \cap C^1((0,1)\times(0,1))$, *то существует единственное решение задачи.*

Доказательство: (9) подставим в (6):

$$\begin{gathered}\alpha\tau_1'(x) + \beta\int\limits_x^1 \tau_1'(t)Q(x,t)dt + \int\limits_0^x \tau_1'(t)k(x-t)dt = \\ = \Phi_0(x) + 2\alpha\int\limits_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1 + 2\beta\int\limits_x^1 Q(x,t)dt\int\limits_0^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1.\end{gathered} \tag{11}$$

При $\beta=0, \alpha\neq 0$ уравнение (11) будет интегральным уравнением Вольтерра 2-рода с ядром $k(x)$, которая имеет слабую особенность, а правая часть непрерывно дифференцируема. Поэтому в этом случае задачно будет однозачно разрешима.

В случае, когда $\alpha=0, \beta\neq 0$ из (11) сначало получим интегральное уравнение Абелья, потом действуя по стандартному методу получим интегральное уравнение Фредгольма 2-рода вида

$$\tau'(x) + \int\limits_0^1 K_1(x,z)\tau'(z)dz = \Phi_1(x), \tag{12}$$

а в случае, когда $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$ сразу из (11) получим интегральное уравнение вида

$$\tau'(x) + \int\limits_0^1 K_2(x,z)\tau'(z)dz = \Phi_2(x), \tag{13}$$

где $\tau(x)=\tau_1(x)=\tau_2(x)$,

$$K_1(x,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{cases}\int\limits_0^{x-z}\frac{dt}{\sqrt{x-t-z}}\frac{\partial\widetilde{k}(t)}{\partial t}dt + \beta\frac{Q(z,z)}{\sqrt{x-z}},\ 0\le z\le x,\\ -\beta\int\limits_z^1\frac{\frac{\partial Q(t,z)}{\partial t}}{\sqrt{x-t}}dt,\ x\le z\le 1,\end{cases}$$

$$K_2(x,z) = \frac{1}{\alpha}\begin{cases}k(x-t),\ 0\le z\le x,\\ \beta Q(t,z),\ x\le z\le 1,\end{cases}$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{x-x_1}\frac{\frac{\partial G_0(t,y_1)}{\partial t}}{\sqrt{x-x_1-t}}dt\right]f(x_1,y_1)dy_1 + \right.$$

$$+2\beta\left[\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{x-t}}\int\limits_t^1\frac{\partial Q(t,z)}{\partial t}dz\int\limits_0^z f_1(\xi_1,z)d\xi_1 - \right.$$

$$-\int_0^x d\xi_1 \int_0^{x-\xi_1} \frac{Q(\xi_1+t,\xi_1+t)}{\sqrt{x-t-\xi_1}} f_1(\xi_1,\xi_1+t)dt\Bigg]\Bigg\},$$

$$\Phi_2(x)=\frac{1}{\alpha}\Bigg\{\int_0^x dx_1\int_0^1 G_0(x-x_1,y)f(x_1,y_1)dy_1+2\alpha\int_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1+$$

$$+2\beta\int_x^1 Q(x,t)dt\int_0^t f_1(\xi_1,t)d\xi_1\Bigg\}.$$

Легко можно убедиться, что если выполнены условия теоремы 1 и 2, то интегральные уравнения (12) и (13) однозначно разрешимы. После нахождении функции $\tau(x)$, функции $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$ находятся по формулам (6) и (8) соответственно. После нахождения этих функций, решение задачи можно восстановить в области $\Omega_1$ как решение 1-краевой задачи, а в области $\Omega_2$ как решение задачи Коши.

## Список литературы


[1] *Бердышев А.С.* О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. –1989. -No 3. – С.14–18.

[2] *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. // Ташкент: Фан. – 1986. – 220 с.

[3] *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения. - 1997. - Т.33. No 1. – С.115-119.

[4] *Eshmatov B.E., Karimov E.T.* Boundary value problems with continuous and special gluing conditions for parabolic–hyperbolic type equations. // Cent.Eur. J. Math.-2007.-Vol.5, No 4. – P.741–750.

[5] *Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A.* Nonlocal Problems with Special Gluing for a Parabolic- Hyperbolic Equation // Proceedings of the 6th International ISAAC Congress "Further Progress in Analysis". Ankara, Turkey, 13-18 August 2007. – P. 727-734.

[6] *Berdyshev A.S., Karimov E.T., Akhtaeva N.S.* Boundary Value Problems with Integral Gluing Conditions for Fractional-Order Mixed-Type Equation // International Journal of Differential Equations 2011, Volume 2011, Article ID 268465, 10 pages. doi:10.1155/2011/268465.

[7] *Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T.* On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator // Nonlinear analysis: Theory, Methods and Applications (NATMA).-2012.Vol.75. No 6. – P.3268-3273.

## References

[1] *Berdyshev A.S.* O lokalnyh kraevyh zadachah s othodom ot haracteristici dlya parabolo-giperbolicheskogo uravnenya // Izvestya AN UZSSR. Seria fiz-mat nauk. -1989. -No 3. – S.14–18.

[2] *Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamozhanov M.* Kraevye zadachi dlya uravnenya parabolo-giperbolicheskogo tipa // Tashkent: Fan. – 1986. – 220 s.

[3] *Kapustin N.U., Moiseev E.I.* O spektralnyh zadachah so spektralnym parametrom v granichnom uslovii // Differensialnye uravnenya. - 1997. - T.33. No 1. – S.115-119.

[4] *Eshmatov B.E., Karimov E.T.* Boundary value problems with continuous and special gluing conditions for parabolic–hyperbolic type equations. // Cent.Eur. J. Math.-2007.-Vol.5, No 4. – P.741–750.

[5] *Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A.* Nonlocal Problems with Special Gluing for a Parabolic- Hyperbolic Equation // Proceedings of the 6th International ISAAC Congress "Further Progress in Analysis". Ankara, Turkey, 13-18 August 2007. – P. 727-734.

[6] *Berdyshev A.S., Karimov E.T., Akhtaeva N.S.* Boundary Value Problems with Integral Gluing Conditions for Fractional-Order Mixed-Type Equation // International Journal of Differential Equations 2011, Volume 2011, Article ID 268465, 10 pages. doi:10.1155/2011/268465.

[7] *Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T.* On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator // Nonlinear analysis: Theory, Methods and Applications (NATMA).- 2012. Vol.75. No 6. – P.3268-3273.

*Поступила в редакцию 26 апреля 2013 года*

УДК 624.131; 539.215

А. Дасибеков, А. Абжапбаров

*Южно-Казахстанский Государственный Университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан. E-mail: azeke_55@mail.ru*

# Учет неоднородности грунтовых оснований при устройстве песчаной подушки

Данная работа посвящена решению одномерной задачи уплотнения грунтов, обладающих упругим свойством. Здесь часть нагрузки, равная величине структурной прочности сжатия, сразу же воспринимается скелетом грунта. Поэтому поровое давление зависит от проницаемости, уплотняемости и скорости нарастания ползучих деформаций грунта. Кроме того, уплотняемый грунт по своей структуре неоднороден. Причем свойство неоднородности грунтового основания учитывается через его модуль деформации, который изменяется по глубине в виде степенной функцией. Для изучения процесса уплотнения грунтового массива в такой постановке под действием различных внешних сил получен ряд расчетных формул. При помощи этих выражений можно определить давление в поровой жидкости, напряжение в скелете неоднородного уплотняемого грунта и вертикальные перемещения точек верхней поверхности земляного массива для любого момента

*Ключевые слова: одномерная задача, упругость, неоднородность, уплотнение грунта, модуль деформации, напряжение, осадок грунта.*

*A. Dasibekov, A. Abzhapbarov,*

**The accounting of inhomogeneity of the soil foundations at arrangement of sand bed**

The present work is devoted to a decision of one-dimensional problem of soil compaction, having elastic properties. Here the part of the loading, which is equal in value of structural compressive strength immediately assimilated by soil skeleton. Therefore, an interstitial pressure depends on permeability, compaction and rate of growth of creeping soil distortion. Furthermore, a compacted soil, according to its structure, is heterogeneous. Moreover, a property of inhomogeneity of the soil foundation is taken into consideration through its modulus of distortion, which is changed in depth in the form of the exponential function. For study of the process of compaction of soil mass in such posing under the influence of various outside forces was obtained the series of calculating formulas. By means of those expressions it is possible to determine pressure in an interstitial liquid, strain in the skeleton of heterogeneous compacted soil and vertical displacements of point of the upper surface of earth solid mass for any moment.

*Key words*: {one-dimensional problem, elasticity, inhomogeneity, soil compaction, modulus of distortion, strain, settlement of soil}

*Дасибеков А., Абжапбаров А.,*

**Құмды жастығы бар топырақ негіздерінің бір текті еместігін ескеру**

Бұл мақала серпімді қасиетке ие болатын топырақ тығыздалуының бір өлшемді есебінің шешілуіне арналған. Бұл жерде сығылудың структуралық беріктігіне тең болған күш бірден топырақтың қаңқасына беріледі. Сондықтан сұйыққа түсетін басым күш топырақтың су өткіздігішіне, тығыздалуына және ығысу деформациясының өсу жылдамдығына тәуелді болады. Сонымен қатар, тығыздалатын топырақ құрылысының өзі бір текті емес. Топырақ негіздерінің біртекті болмаған қасиеті оның деформация модулі тығыздалу тереңдігіне байланысты дәрежелі функция бойынша өзгеруінде. Есептің осы қойылуында, бір қатар сыртқы күштердің әсерінен топырақ массивінің тығыздалу процессін анықтайтын есептеу формулалары табылған. Бұл өрнектер арқылы топырақ кеуегіндегі сұйықтыққа түсетін басым күшін, бір текті болмаған топырақ қаңқасындағы кернеуді және әрбір кезең үшін тығыздалатын топырақ массивінің отыруын есептеуге болады.

*Түйін сөздер*: {бір өлшемді есеп, серпімділік, біртекті емес, топырақ тығыздығы, деформация модулі, кернеу, топырақтың отыруы.}

Вначале разберёмся, что это такое, песчаная подушка под фундамент, и для чего она нужна. Для того, чтобы понять это, заглянем немного глубже – чего же боится больше всего фундамент? Фундамент любого здания больше всего боится промерзания грунта, а если быть более точным, то промерзания грунта, ниже уровня залегания фундамента. Ведь при замерзании почва начинает давать подвижки, и эти подвижки могут с лёгкостью влиять непосредственно на фундамент. А от этого уже происходит проседание фундамента. Следовательно, при закладке фундамента существенную роль выполняет песчаная насыпная подушка. Ее основная функция заключается в смягчении нагрузки на основание фундамента. Укладывать песок необходимо равномерно, примерной толщиной 10-15 сантиметров для невысоких зданий. Если основание состоит из рыхлых или слабых грунтов, то они удаляются на определенную глубину. Это делается для того, чтобы фундамент лег на более прочное основание, ведь чем глубже внутрь грунта, тем прочнее он, потому, что верхние слои сдавливают нижние. На тех основаниях, где имеется высокий уровень грунтовых вод, укладку подушки делают только с предварительно созданным дренажем. Поскольку такие грунты могут вспучиваться и промерзать, представляя тем самым потенциальную опасность для фундамента. Иногда для возведения фундаментной подушки песок не используется. Его можно заменить, к примеру, гравием, в который входит песчаная фракция. Этот материал так же хорошо будет сдерживать нагрузки со стороны фундамента. Технология его укладки практически ни чем не отличается от укладки песка. Кстати, и сам фундамент на гравийной подушке будет стоять долго. Это достаточно надежное основание. Щебень так же является хорошим заменителем песка, его обычно используют в проблемных грунтах, на которых фундамент заливать сложно. Но все, же специалисты рекомендуют даже щебень смешивать с песком. Он просто заполнит все пространство, которое остается между частями фракции. Песчаные и щебеночные (или гравийные) подушки предназначены для распределения давления от фундамента на большую площадь либо для замены слоя слабого грунта под фундаментом. Таким образом, строительство сооружений на слабых водонасыщенных глинистых грунтах требует более внимательного подхода к ним, чем к другим грунтам. Это связано с тем, что сооружения, взаимодействующие с такими грунтами, испытывают большие осадки. Причем они протекают в течение длительного времени. На таких водонасыщенных глинистых грунтах, прежде чем строит высокие здания, создают искусственные основания, применяя песчаные подушки мощностью от 1-2м до 7м. Они позволяют уменьшить глубину заложения фундаментов, увеличивают их устойчивость и уменьшает осадки фундаментов. Кроме того, песчаные подушки используются в качестве дренирующего слоя, так как поровая вода из нижележащих водонасыщенных глинистых грунтов отжимается в процессе уплотнения грунтов, от веса самой подушки ускоряя процесс консолидации грунтов основания. Кроме того, деформативные свойства грунтов, вообще говоря, меняются с координатами точки, и допущение об их однородности представляет собой идеализации реальных состояний уплотняемых земляных масс. В этом отношении теоретические и экспериментальные исследования Г.К.Клейна [1], Б.Н. Баршевского [2] и других исследователей показывают, что грунты, на которых строятся сооружения, по своим механическим свойствам являются неоднородными и эта неоднородность грунта изменяется по глубине согласно закону:

$$E(z) = E_m z^m, \tag{1}$$

где $E_m$ является модулем деформации грунта на глубине $z = 1$; показатель $m$ в большинстве случаев лежит в пределах $0 < m < 2$ и он связан с коэффициентом Пуассона $\mu_0$, т.е.

$$\mu_0\,(2 + B) = 1.$$

Г.К. Клейном [1] разработана методика расчета балок, лежащих на грунтовом основании, модуль деформации которого изменяется по закону (1). Здесь для определения осадки поверхности полупространства им была получена такая формула:

$$W_m = \frac{P}{\pi_m\ D_m\ r^{m+1}},$$

где $P$ – сосредоточенная сила, приложенная на поверхность полупространства; $D_m = \frac{E_m}{\alpha^*}$ – характеристика жесткости неоднородного полупространства; $r$ – расстояние от места приложения силы $P$ до точки поверхности полупространства, где определяется осадка:

$$\alpha = \frac{3+m}{2}\left(\frac{1}{1+m} - \mu_0\right).$$

На основе этих исследований в отличие от (1), в данной работе для исследования процесса уплотнения модуль деформации грунта будет принят в виде

$$E = E_m(1+\beta z)^m(\alpha > 0, \quad E_m > 0, \quad \alpha + \beta z > 0), \tag{2}$$

где $E_m, \beta, m$ являются опытными параметрами.

Параметры $E_m, \beta, m$, входящие в (2), могут быть определены, если известны три значения модуля деформации $E_1, E_2, E_3$ для трех различных значений $z_1, z_2, z_3$.

Ниже рассмотрим процесс уплотнения слоя неоднородного водонасыщенного грунта мощностью $h$, залегающего под песчаной подушкой. В начальный момент времени $(t = \tau_1)$ к слою грунта мгновенно прикладывается распределенная нагрузка с интенсивностью $q(z,t)$. Тогда математическая постановка данной задачи сводится к следующему: требуется определить давление в поровой жидкости $P(z,t)$, напряжение в скелете грунта $\sigma(z,t)$ и вертикальные перемещения верхней поверхности $S(t)$ (осадок) уплотняемого грунтового основания. При этом допускается: для сильно сжимаемых водонасыщенных глинистых грунтов в начальный момент времени часть нагрузки, мгновенно приложенной нагрузки $q$ к грунту, равная по величине структурной прочности сжатия $p_{\text{стр}}$, сразу же воспринимается скелетом грунта; грунт по своей структуре неоднороден, т.е. неоднородность грунта может быть обусловлена непрерывным возрастанием его плотности, а потому и жесткости по глубине под влиянием собственного веса. Это означает, что свойства грунта не являются постоянными а изменяются в зависимости от положения координат. Причем грунт, модуль деформации которого непрерывно увеличивается с глубиной и называется непрерывно неоднородным; грунтовые основания под действием нагрузки деформируются в вертикальном направлении; земляная среда водонасыщенна, т.е. она состоит из твердых частиц грунта и заполняет ее поры водой; вязкий характер деформации глинистого грунта выражен не достаточно явно, вследствие чего явление ползучести скелета в ряде случаев просто можно не учесть; фильтрация воды, отжимаемой из уплотняемого сильносжимаемого водонасыщенного глинистого грунта, протекает по обобщенному закону Дарси.

Тогда величина порового давления $P(z,t)$ при $t = \tau_1$ будет равна

$$P|_{t=\tau_1} = q(z,\tau_1) - P_{\text{стр}} = q_0(z,\tau_1), \tag{3}$$

т.е. часть нагрузки, равная величине структурной прочности сжатия $P_{\text{стр}}$, сразу же воспринимается скелетом грунта. При этом скорость изменения коэффициента пористости $\varepsilon(z,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_2}(1+\varepsilon_{cp})\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_{cp}$ – средний коэффициент пористости; $k$ - коэффициент фильтрации, $\gamma_{\text{в}}$ – объемный вес воды; $\varepsilon\,(z,t)$ – коэффициент пористости для исследуемого момента времени $t$ и глубины $z$. Если грунт деформируется только в вертикальном направлении, то по теории фильтрационной консолидации, сумма избыточного порового давления $P(z,t)$ и эффективного напряжения в грунте $\sigma(z,t)$ в любой момент времени равно внешней нагрузке, т.е.

$$P + \sigma = q. \tag{5}$$

В линейной теории консолидации грунтов компрессионная зависимость для неоднородного грунта имеет вид

$$\varepsilon(z,t) = \varepsilon_0 - a(z)\sigma(z,t) \tag{6}$$

Здесь коэффициент сжимаемости для неоднородного уплотняемого грунта $a(z)$ зависит от координаты $z$, т.е. от глубины расположения исследуемой точки уплотняемого грунтового массива; $\varepsilon_0$ – начальный коэффициент пористости.

Имея в виду выражения (3)-(6), соотношение (4) приводим к следующему виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = C_{1v}(1+z)^m \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{7}$$

где $C_{1v} = \frac{k(1+\varepsilon_{cp})}{\gamma_2 a_0}$.

Граничные условия при ламинарном законе Дарси примем в виде

$$P|_{z=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \tag{8}$$

Второе граничное условие относится к глубине $h$, ниже которой фильтрации не происходит. Таким образом, решение исследуемой задачи сводится к решению дифференциального уравнения (7) при краевых (3) и (8) условиях.

Решение (7) при граничных условиях (8) получим в виде

$$P = \sqrt{1+\beta z}\sum_{i=0}^{\infty} C_i V_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu_i(1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] e^{-C_{1v}\lambda_i^2 t}, \tag{9}$$

где $m \neq 2$;

$$C_i = \frac{\int_1^{1+\beta h} q_0\left(z,\tau_1\right) z^{\frac{1}{2}-m} V_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu_i(1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] dz + \mathrm{R}\left(\mathrm{t},\tau_1\right)}{\int_1^{1+\beta h} z^{1-m} V^2_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu_i(1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] dz}; \tag{10}$$

$$R(t,\tau_1) = \int_{\tau_1}^{t} e^{C_{1\nu}(\tau-\tau_1)} \int_1^{1+\beta h} (1+\beta z)^{\frac{1}{2}-m} \frac{\partial q}{\partial t} V_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta z\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] dz d\tau.$$

Причем функция $V_{\frac{1}{2-m}}(x)$ зависит от величины $\frac{1}{2-m}$. Если она целая, то

$$V_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta z\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] = J_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta z\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] Y_{\frac{1}{2-m}}(\nu) - J_{\frac{1}{2-m}}(\nu) Y_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta z\right)^{\frac{2-m}{2}}\right]. \tag{11}$$

При дробном $\frac{1}{2-m}$

$$V_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta z\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] = J_{\frac{1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta z\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] Y_{-\frac{1}{2-m}}(\nu) - J_{-\frac{1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta z\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] Y_{\frac{1}{2-m}}\left(\nu\right). \tag{12}$$

где $J_{\frac{1}{2-m}}$, $Y_{\frac{1}{2-m}}$ – функции Бесселя соответственно первого и второго родов. Причем параметр $\nu$, входящий в (9)-(12) находится из следующих трасцендентных уравнений: для целого индекса $\frac{1}{2-m}$ из выражения

$$J_{\frac{1}{2-m}}(\nu) Y_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta \mathrm{h}\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] - Y_{\frac{1}{2-m}}(\nu) J_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta h\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] = 0, \tag{13}$$

для дробного индекса из

$$J_{\frac{1}{2-m}}(\nu) Y_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\,\nu(1+\beta h)^{\frac{2-m}{2}}\,\right] - Y_{-\frac{1}{2-m}}(\nu) J_{\frac{m-1}{2-m}}\left[\nu\left(1+\beta h\right)^{\frac{2-m}{2}}\right] = 0. \tag{14}$$

Уравнение (13), (14) при конкретных числах $m$ имеют бесчисленные множества вещественных корней $\frac{2}{2-m}\lambda = \nu$. Имея в виду выражения (9) и (5) напряжение в грунте $\sigma(z,t)$ в любой момент времени равно

$$\sigma(z,t) = q - \sqrt{1+\beta z}\sum_{i=0}^{\infty} C_i V_{\frac{1}{2-m}} \left[\nu_i (1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] e^{-C_{1v}\lambda_i^2 t}. \tag{15}$$

Из (9) и (15) можно получить решение задачи для грунта модуль деформации которого не будет меняться в зависимости от координаты, т.е. от глубины. Для этого необходимо считать, что $\beta = 1$ и $m = 0$. Тогда индекс бесселевых функции $\frac{1}{2-m}$ равен $\frac{1}{2}$.

В связи с тем, что экспоненциальная функция $e^{-x}$ быстро убывает при больших значениях показателя, то в (9) ограничимся только первым членом ряда. При этом решение данной задачи относительно порового давления согласно (9) может быть записано следующим образом:

$$P(z,t) = C_0\sqrt{1+\beta z} V_{\frac{1}{2-m}} \left[\frac{2\lambda_0}{2-m}(1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] e^{-C_{1v}\lambda_0 t}, \tag{16}$$

Выражение (16) описывает рассеивание порового давления во времени и по глубине. Данное выражение является обобщающим результатом К. Терцаги [3] и М.Ю. Абелева [4].

Напряжение в скелете грунта находится из соотношения (15), т.е.

$$\sigma(z,t) = q - C_0\sqrt{\alpha+\beta z} V_{\frac{1}{2-m}} \left[\nu_0 (\alpha+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}\right] e^{-C_{1v}\lambda_0 t}. \tag{17}$$

Полученные выражения (16) и (17) соответственно позволяют определить изменения давления в поровой жидкости и напряжений в скелете грунта для любой точки рассматриваемой конечной области уплотнения неоднородного двухфазного грунта, обладающего упругим свойством. После того как определено напряжение в скелете уплотняемого неоднородного грунтового массива можно вычислить и вертикальные перемещения точек верхней поверхности уплотняемого слоя грунта (осадок).

Действительно, если к поверхности слоя грунта приложена некая вертикальная нагрузка, то соответствующая ей осадки $S(t)$ может быть определены по формуле [5], т.е.

$$S(t) = \int_0^h \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon(z,t)}{1+\varepsilon_0} dz, \tag{18}$$

где $h$ – мощность уплотняемого неоднородного грунтового массива. Так как $\varepsilon(\tau_1) - \varepsilon(z,t) = a(z)\sigma(z,t)$, то (18) примет вид

$$S^{(H)}(t) = \frac{1}{1+\varepsilon_0}\int_0^h a(z)\sigma(z,t) dz. \tag{19}$$

В (19) вместе $\sigma(z,t)$ подставив (17), находим

$$S^{(H)}(t) = \frac{a_0}{1+\varepsilon_0}\int_0^h (1+\beta z)^{-m}\{q - \sqrt{1+\beta z} V_{\frac{1}{2-m}} [\nu_0 (1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}] e^{-C_{1V}\lambda_0 t}\} dz.$$

Откуда

$$S^{(H)}(t) = \frac{a_0}{1+\varepsilon_0}\{\frac{q}{\beta(1-m)}[(1+\beta h)^{1-m}-1] - \frac{\gamma_2}{\beta(1-m)}[1-\frac{1}{\beta(2-m)}]\left[(1+\beta h)^{2-m}-1\right] - \\ - \int_0^h (1+\beta)^{1-m} V_{\frac{1}{2-m}}[\nu_0(1+\beta z)^{\frac{2-m}{2}}]e^{-C_{1V}\lambda_0 t}\}dz \quad (20)$$

При $t \to \infty$ из (20), имеем

$$S^{(H)}(\infty) = \frac{a_0}{\beta(1+\varepsilon_0)(1-m)}\left\{q\left[(1+\beta h)^{1-m}-1\right] - \gamma_2\left[1-\frac{1}{\beta(2-m)}\right]\times \right. \\ \left. \times\left[(1+\beta h)^{2-m}-1\right]\right\}. \quad (21)$$

Из (21) для однородного грунта получим

$$S^{(0)}(\infty) = \frac{a_0 h}{1+\varepsilon_{cp}} q. \quad (22)$$

Выражение (22) зависит только от толщины уплотняемого слоя, нагрузки, коэффициента сжимаемости и не зависит от параметров неоднородного грунта. Заметим, что такая неоднородность грунта также учтены в [6].

Таким образом, выражение (16), (17) и (20) дают возможность определить численные значения давлений в поровой жидкости, напряжений в скелете грунта и осадки уплотняемого неоднородного грунта.

Задача решена также для случаев, когда уплотнение слоя водонасыщенного грунта происходит под действием равномерно распределенной нагрузки с постоянной интенсивностью $q$, под нагрузкой, линейно-возрастающей по глубине.

## Список литературы

[1] *Баршевский Б.Н.* Одномерная задача консолидации для грунтов с переменным по глубине модулем деформации // Некоторые вопросы машиностроения и строительной механики. – Л.: 1967. –Вып.68. – Ч.1. – С. 55-61.

[2] *Клейн Г.К.* Расчет осадок сооружений по теории неоднородного линейно-деформируемого полупространства // Гидротехническое строительство. - 1948. - № 2. - С. 7-14.

[3] *Терцаги К.* Теория механики грунтов / под редакцией Н.А. Цытовича. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.

[4] *Абелев М.Ю.* Строительство промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах. – М.: Стройиздат, 1983. – 247 с.

[5] *Флорин В.А.* Основы механики грунтов. – М.: Госстройиздат, 1961. – Т.2. – 544 с.

[6] *Ширинкулов Т.Ш., Дасибеков А.Д., Бердыбаева М.Ж.* О трехмерном уплотнении упругоползучих неоднородных грунтов с неоднородными их граничными условиями // Механика и моделирование технологических процессов. – Тараз, 2006. – № 1. – С. 30-35.

## References

[1] *Barshevckiiy B.N.* Odnomernaya zadacha konsolidatsii dlya gruntob s peremennym po glubine modulem deformftsii // Nekotorye voprosy mashinostroenie i stroitelnoi mekhaniki. – L.: 1967. –Vipusk 68. – CH.1. – S. 55-61.

[2] *Klein G.K.* Raschet osadok sooruzhenii po teorii neodnorodnogo lineino-deformiruemogo poluprostranstva // Gidrotekhnicheskogo stroitel'stvo, – 1948. – №2. – S. 7-14.

[3] *Tertsagi K.* Teoriya mekhaniki gruntov / pod redaktsiei N.A. Tsytovicha. – M.: Gosstroiizdat, 1961, – 507 c.

[4] *Abelev M.Yu.* Stroitel'stvo promyshlennykh i grazhdanskikh sooruzheniy na slabykh vodonasyshchennykh gruntakh. – M.: Stroiizdat, 1983. – 247 c.

[5] *Florin V.A.* Osnovy mekhaniki gruntov. – M.: Gosstroiizdat, 1961. – T.2. – 544 c.

[6] *Shirinkulov T.Sh., Dasibekov A.D., Berdybaeva M.Zh.* O trekhmernom uplotnenii uprugopolzuchikh neodnorodnykh gruntov s neodnorodnymi ikh granichymi usloviyami // Mekhanika I modelirovanie tekhnologicheskikh protsessov. – Taraz, 2006. – № 1. – S. 30-35.

*Поступила в редакцию 3 мая 2013 года*

УДК 517.925:579

А.И. Абакумов[1], А.А. Адамов[2], А.А. Исмаилова[2]

[1] *Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия*
*e-mail: abakumov@iacp.dvo.ru*
[2] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
*e-mail: adam1955@mail.ru, a.ismailova@mail.ru*

# Моделирование микробных сообществ растительных организмов

В рамках многомодельного подхода к изучению природных биосистем предложены четыре варианта описания динамики биомасс фитопланктонного сообщества в водной экосистеме: рассмотрены замкнутые и открытые модели, модели с учетом внутреннего состояния организмов и без такового.
*Ключевые слова*: Математическое моделирование, фитопланктон, фитопланктонное сообщество, биосистема, питательные вещества

*A.I. Abakumov, A.A. Adamov, A.A. Ismailova*
**Modeling of microbial communities of plant organisms**

In the framework of multi-model approach to the study of natural biological systems offered four options describe the dynamics of phytoplankton biomass in the aquatic environment: Consider the closed and open models, taking into account the internal condition of the body and without it.
*Key words*: Mathematical modeling, phytoplankton, phytoplanktonic community, biosystem, nutrients

*А.И. Абакумов, А.А. Адамов, А.А. Исмаилова*
**Өсімдік ағзаларындағы микробтық топтануларын модельдеу**

Табиғи биожүйелерді зерттеудің көпмодельділігі аясында су экожүйесінің фитоплантктондық қауымдастылығының биомассалар динамикасын сипаттаудың төрт нұсқасы қарастырылады: ағзалардың ішкі жағдайын есепке алатын және алмайтын модельдер, ашық және тұйықталған модельдер қарастырылған.
*Түйін сөздер*: математикалық модельдеу, фитопланктон, фитопланктондық топтану, биожүйе, қоректік заттектер

Оценка биологической продуктивности экологических систем имеет большое значение для изучения состояния природной среды и возможностей рационального природопользования. Для водных экосистем биологическая продуктивность может быть оценена на основе продуктивности фитопланктона [1]. Продуктивность фитопланктона в значительной мере определяется процессом потребления минеральных веществ при строительстве растительного организма в ходе фотосинтеза [2]. При изучении состояния и функционирования фитопланктона важную роль в настоящее время играют данные дистанционных методов зондирования поверхности морей и океанов. В частности, искусственные спутники Земли позволяют получить данные о содержании минеральных веществ и хлорофилла в поверхностном слое. Данные о хлорофилле (в первую очередь, хлорофилле "а") дают возможность оценить содержание фитопланктона и дать грубую оценку первичной продукции [3]. Данные о минеральных веществах (на основе азота, фосфора, кремния и других химических элементов), составляющих материальную основу для построения растительных организмов в процессе фотосинтеза, дают возможность оценить характеристики продукционных процессов фитопланктона [4]. На этом этапе полезны математические модели динамики численностей (биомасс) основных видов фитопланктонного сообщества [2].

Подобные математические модели используются также в описании динамики микробных культур в лабораторных экспериментах [4]-[5]. В докладе представлены группы моделей динамики биомасс сообществ микроорганизмов. Модели основаны на системах дифференциальных уравнений. Исследованы качественные свойства решений на структурном уровне.

## Модели функционирования фитопланктонных сообществ

Модели описывают динамику преобразования веществ при фотосинтезе и построении растительного организма. Рассматриваются модели замкнутых и открытых по веществу систем. Для краткости сами модели будем называть замкнутыми или открытыми соответственно.

При описании микробиологических культур применяются открытые модели, берущие начало из описания хемостата [5]. Это модели проточных культур, когда в систему с некоторой скоростью попадают питательные вещества и содержимое выбывает из системы, чаще всего, с той же скоростью. Такие же модели применяются для описания функционирования фитопланктона в предположении, что в изучаемой среде выполняются условия протока. В иных природных ситуациях могут быть пригодны другие модели, в том числе частично или полностью замкнутые по веществу. В работе сравниваются открытые и замкнутые модели.

В моделях выделены биологические виды фитопланктона и группы минеральных питательных веществ. Фитопланктон представлен $m$ видами, их содержание в среде обозначено $y_i$ для вида $i$. Минеральное питание растительных организмов разбивается на $n$ групп сходных веществ (на основе азота, фосфора, кремния и т.п.). В рассматриваемых моделях питательные вещества предполагаются не взаимозаменяемыми. Содержание веществ группы $j$ в среде обозначается $z_j$. Рост биомассы клеток вида $i$ происходит с удельной скоростью $\mu_i(z)$ в зависимости от содержания $z$ биогенов во внешней среде. Под $y$ понимается вектор с компонентами $y_i$, а под $z$- вектор с компонентами $z_j$. Одна из моделей сообщества в хемостате имеет вид [5]:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = (\mu_i(z) - D)y_i \\ \frac{dz_j}{dt} = D(z_{j0} - z_j) - \sum_{i=1}^{m} v_{ij}(z_j)y_i \end{cases} \quad i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n. \tag{1}$$

Через $D$ обозначена скорость протока вещества в системе, через $z_0$ - содержание минеральных питательных веществ во входящем потоке, через $\nu_{ij}\left(z_j\right)$ - удельные скорости поглощения вещества группы $j$ организмами вида $i$.

Сравним свойства решений в модели (1) с замкнутой моделью. Эта модель описывает динамику биомасс основных групп фитопланктона, минеральных веществ и отмершей органики. Сначала рассмотрим модель без различения минеральных веществ по группам, эти вещества и отмершая органика представлены одной группой каждая. Блок отмершей органики с массой $s$ введен для описания замкнутого цикла преобразования веществ. Функция $r(s)$ описывает скорость преобразования органики в минеральные соединения при бактериальном разложении. Удельные скорости элиминации микроорганизмов задаются функциями $e_i(y_i)$ их содержания в среде. Элиминация включает в себя процессы естественной смертности, внутривидовой конкуренции и изъятия особей из системы по иным причинам. Но вместе с тем принято предположение, что отмершая органика остается внутри системы (замкнутость по веществу). Остальные обозначения соответствуют предыдущей модели, опущены индексы там, где они не нужны. Тогда замкнутая модель приобретает вид системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \mu_i(z)y_i - e_i\left(y_i\right)y_i \\ \frac{dz}{dt} = r(s) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i(z)y_i \quad i = 1, ..., m. \\ \frac{ds}{dt} = \sum_{i=1}^{m} e_i\left(y_i\right)y_i - r(s) \end{cases} \tag{2}$$

В сравнении с этими двумя моделями опишем модели, учитывающие состояние организмов с точки зрения возможностей их жизнедеятельности.

### Учет внутреннего состояния

Для живого организма та или иная стратегия деятельности определяется не только окружающей средой, но и его состоянием. Внутреннее состояние организма можно характеризовать по-разному. В нашем случае как индикатор предлагается использовать внутриклеточное содержание питательных веществ на основе минеральных соединений во внешней среде.

Следующие две модели учитывают внутриклеточное содержание веществ, от которого зависит поведение растительных организмов. Такое представление ведется от моделирования физико-химических процессов в клетке [6]-[7]. Один из конкретных вариантов такой модели предложен в монографии [8]. Начнем с ее обобщения.

Содержание питательных веществ группы $j$ в клетке вида $i$ обозначим $q_{ij}$. Эту величину называют клеточной квотой. Содержание минеральных веществ в среде обозначается $z_j$, а органических соединений той же группы - $s_j$. Скорость роста отдельного вида определяется на основе принципа Либиха [9]: она ограничена скоростью роста наименее производительного минерального вещества. Это правило записано ниже формулой (5). Потребление питательных веществ микроорганизмами осуществляется с удельной скоростью $\nu_{ij}\left(z_j, q_{ij}\right)$, а рост растительной биомассы происходит с удельной скоростью $\mu_{ij}\left(q_{ij}\right)$ в зависимости от вектора $z=\left(z_j\right)_{j=1}^n$ содержания минеральных веществ во внешней среде и матрицы $q=\left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ содержания питательных веществ в клетках растений. Открытая модель динамики масс системы имеет вид [8]:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = (\mu_i(q_i)-D)y_i \\ \frac{dz_j}{dt} = D(z_{j0}-z_j)-\sum_{i=1}^m v_{ij}(z_j,q_{ij})y_i \quad i=1,...,m;\ j=1,...,n. \\ \frac{dq_{ij}}{dt} = v_{ij}(z_j,q_{ij})-\mu_i(q_i)\cdot q_{ij} \end{cases} \tag{3}$$

Под $q_i$ понимается вектор $q_i=\left(q_{ij}\right)_{j=1}^n$, функция $\mu_i(q_i)$ вычисляется по формуле (5).

Модель (3) с указанной конкретизацией используется для анализа структуры фитопланктонных сообществ в северной части Черного моря [10].

Замкнутая модель при учете внутреннего состояния растительных организмов приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \mu_i(q_i)y_i - e_i\left(y_i\right)y_i \\ \frac{dz_j}{dt} = r_j(s_j)-\sum_{i=1}^m v_{ij}(z_j,q_{ij})y_i \\ \frac{ds_j}{dt} = \sum_{i=1}^m e_i\left(y_i\right)q_{ij}y_i - r_j(s_j) \\ \frac{dq_{ij}}{dt} = v_{ij}(z_j,q_{ij})-\mu_i(q_i)\cdot q_{ij} \end{cases} \quad i=1,...,m;\ j=1,...,n. \tag{4}$$

Конкретизация функций модели может быть осуществлена на основе формулы М. Друпа [?] для удельной скорости роста фитоорганизмов $\mu_{ij}(q)=\mu_{ij}^{(0)}(1-\frac{\underline{q}_{ij}}{q_{ij}})$. Через $\underline{q}_{ij}$ и $\bar{q}_{ij}$ обозначены нижние и верхние границы для внутриклеточных концентраций питательных веществ. Удельные скорости минерального питания в зависимости от содержания веществ во внешней среде определяются формулами $\nu_{ij}(z_i,q_{ij})=\bar{\nu}_{ij}(q_{ij})\frac{z_j}{k_{ij}+z_j}$ (зависимость Дж. Моно [7]), где функция $\bar{\nu}_{ij}(q_{ij})$ имеет предложенный С. Йоргенсеном [11] вид:

$$\bar{\nu}_{ij}(q_{ij})=\nu_{ij}^{(0)}\frac{\bar{q}_{ij}-q_{ij}}{\bar{q}_{ij}-\underline{q}_{ij}}.$$

Функция $\mu_i(q_i)$ определяется по принципу «узкого места» Либиха формулой:

$$\mu_i(q_i)=\min_{j=1,\ldots,n}\mu_{ij}(q_{ij}), \tag{5}$$

Как видно из приведенных формул, открытые модели согласуются с замкнутыми общими зависимостями, что позволяет провести сравнение свойств решений в этих моделях.

**Заключение**

В рамках многомодельного подхода к изучению природных биосистем [14]-[15] предложены четыре варианта описания динамики биомасс фитопланктонного сообщества в водной экосистеме: рассмотрены замкнутые и открытые модели, модели с учетом внутреннего состояния организмов и без такового. Свойства решений в этих классах моделей существенно различаются. В замкнутых моделях имеется континуальное множество положительных равновесных решений, в открытых моделях для проточных систем присутствует конечное множество изолированных неотрицательных равновесных решений. В моделях без учета внутриклеточного содержания вещества удается доказать устойчивость равновесных решений, в том числе и с использованием признаков структурной устойчивости (знак-устойчивости). В моделях с учетом внутриклеточного содержания питательных веществ это можно сделать при некоторых ограничениях, хотя на основе вычислительных экспериментов остается представление о справедливости свойств устойчивости и для этой группы моделей в целом.

# Список литературы

[1] *Йоргенсен С.Е.* Управление озерными системами. М.: Агропромиздат, 1985. 160 с.

[2] *Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1993. 301 с.

[3] *Шушкина Э.А., Виноградов М.Е., Гагарин В.И., Дъяконов В.Ю., Лебедева Л.П., Незлин Н.П.* Оценка продуктивности, скорости обмена, трофодинамики, а также запасов планктонных организмов в разнопродуктивных районах океана на основании спутниковых и экспедиционных наблюдений // Информационный бюллетень РФФИ. 1997. Т.5, № 4. С. 278.

[4] *Адамович В.В., Рогозин Д.Ю., Дегерменджи А.Г.* Поиск критерия регулирования в непрерывной культуре микроорганизмов // Микробиология. 2005. Т. 74, № 1. С. 5-16.

[5] *Абросов Н.С., Боголюбов А.Г.* Экологические генетические закономерности сосуществования и коэволюции видов. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1988. 333 с.

[6] *Droop M.R.* The nutrient status of algal cells in continuous culture // J. Mar. Biol. Assoc. U. K. 1974. V.54. P. 825-855.

[7] *Monod J.* The growth of bacterial cultures // Ann. Rev. Microbiology. 1949. V. 111, N. 2. P. 371-394.

[8] *Силкин В.А., Хайлов К.М.* Биоэкологические механизмы управления в аквакультуре. Л.: Наука, 1988. 230 с.

[9] *Алексеев В.В., Крышев И.И., Сазыкина Т.Г.* Физическое и математическое моделирование экосистем. С.-Петербург: Гидрометеоиздат, 1992. 366 с.

[10] *Паутова Л.А., А.С. Микаэлян, В.А. Силкин.* Структура планктонных фитоценов шельфовых вод северо-восточной части Черного моря в период массового развития Emiliania huxleyi в 2002 - 2005 гг. // Океанология. 2007. Т. 47, № 3. С. 408-417.

[11] *Jorgensen S.E.* A eutrophication model for a lake // J. Ecol. Modelling. 1976. V. 2. P. 147-165.

[12] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 576 с.

[13] *Логофет Д.О., Ульянов Н.Б.* Необходимые и достаточные условия знак-устойчивости матриц // Доклады АН СССР. 1982. Т. 264, №3. С. 542 - 546.

[14] *Абакумов А.И., Гиричева Е.Е.* Многомодельный подход к исследованию водных экосистем // Известия Самарского научного центра РАН. 2009. Т. 11, № 1(7). С. 1399-1402.

[15] *Абакумов А.И., Пак С.Я.* Динамика численности фитопланктона в зависимости от минерального питания (математические модели) // Информатика и системы управления. 2010. № 3 (25). С. 10-19.


## References


1. *Jorgensen S.E.* Upravlenie ozernymi sistemami. M.: Agropromizdat, 1985. 160 p.

2. *Riznichenko G.Ju., Rubin A.B.* Matematicheskie modeli biologicheskih produkcionnyh processov. M.:Izd-vo MGU, 1993. 301 p.

3. *Shushkina Je.A., Vinogradov M.E., Gagarin V.I., D'jakonov V.Ju., Lebedeva L.P., Nezlin N.P.* Ocenka produktivnosti, skorosti obmena, trofodinamiki, a takzhe zapasov planktonnyh organizmov raznoproduktivnyh rajonah okeana na osnovanii sputnikovyh i jekspedicionnyh nabljudenij // Informacionnyj bjulleten' RFFI. 1997. T.5, № 4. P. 278.

4. *Adamovich V.V.,Rogozin D.Ju., Degermendzhi A.G.* Poisk kriterija regulirovanija v nepreryvnoj kul'ture mikroorganizmov// Mikrobilogija. 2005. T. 74, № 1. P. 5-16.

5. *Abrosov N.S., Bogoljubov A.G.* Jekologicheskie geneticheskie zakonomernosti sosushhestvovanija i kojevoljucii vidov. Novosibirsk: Nauka. sibirskoe otdelenie, 1988. 333 p.

6. *Droop M.R.* The nutrient status of algal cells in continuous culture // J. Mar. Biol. Assoc. U. K. 1974. V.54. P. 825-855.

7. *Monod J.* The growth of bacterial cultures // Ann. Rev. Microbiology. 1949. V. 111, N. 2. P. 371-394.

8. *Silkin V.A., Hajlov K.M.* Biojekologicheskie mehanizmy upravlenija v akvakul'ture. L.: Nauka, 1988. 230 p.

9. *Alekseev V.V., Kryshev I.I., Sazykina T.G.* Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie jekosistem. S.-Peterburg: Gidrometeoizdat,Cb 1992. 366 p.

10. *Pautova L.A., Mikajeljan A.S., Silkin V.A.* Struktura planktonnyh fitocenov shel'fovyh vod severo-vostochnoj chasti Chernogo morja v period massovogo razvitija Emiliania huxleyi v 2002 - 2005 gg. // Okeanologija . 2007. T. 47, № 3.P. 408-417.

11. *Jorgensen S.E.* A eutrophication model for a lake // J. Ecol. Modelling. 1976. V. 2. P. 147-165.

12. *Gantmaher F.R.* Teorija matric. M: Nauka, 1988. 576 c.

13. *Logofet D.O., Ul'janov N.B.* Neobhodimye i dostatochnye uslovija znak-ustojchivosti matric// Doklady AN SSSR. 1982. T. 264, №3. P. 542 - 546.

14. *Abakumov A.I., Giricheva E.E.* Mnogomodel'nyj podhod k issledovanijju vodnyh jekosistem// Izvestija Samarskogo nauchnogo centra RAN. 2009. T. 11, № 1(7). P. 1399-1402.

15. *Abakumov A.I., Pak S.Ja.* Dinamika chislennosti fitoplanktona v zavisimosti ot mineral'nogo pitanija (matematicheskie modeli) // Informatika i sistemy upravlenija . 2010. № 3 (25). P. 10-19.


*Поступила в редакцию 28 апреля 2013 года*

*УДК 517.977.55*

З.Н. Мурзабеков, Ш.А. Айпанов

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;*
*e-mail: murzabekov-zein@mail.ru, aipanov@mail.ru*

# Конструирование оптимального управления с обратной связью для нестационарных линейных систем при закрепленных концах траекторий *

В работе предлагается алгоритм решения задачи оптимизации для нестационарных неоднородных линейных систем управления. Рассматривается задача с квадратичным функционалом затрат и ограниченным управлением из множества в форме эллипсоида. Требуется оптимальным образом перевести систему из заданного начального состояния в начало координат за конечный интервал времени. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что входной сигнал ищется в виде синтезирующего управления, зависящего от текущего состояния системы и времени. Использование множителей Лагранжа специального вида позволяет сконструировать искомое управление с обратной связью, обеспечивающее выполнение заданных ограничений на значения управления и точный перевод системы в начало координат за конечный интервал времени. Предлагаемый метод представлен в виде алгоритма, удобного для реализации на компьютере. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач оптимального управления космическими аппаратами, самолетами, роботами-манипуляторами и т.д.

*Ключевые слова*: линейная система, квадратичный функционал, эллипсоид, управление с обратной связью, множители Лагранжа.

*Z.N. Murzabekov, Sh.A. Aipanov*

**Constructing the feedback optimal control for nonstationary linear systems with fixed endpoints of trajectories**

The algorithm for solving the optimization problem for nonstationary nonhomogenous linear control systems is offered in this article. The problem with quadratic cost functional and ellipsoid-constrained control is considered. It is required to transfer the system from the given initial state to the origin along the optimal way for a finite time interval. The feature of the considered problem is that the entrance signal is looked for in the form of the synthesizing control which depends on current state of the system and time. Usage of Lagrange multipliers of a special form allows to construct the required feedback control providing a fulfillment of given constraints on control values and exact transfer the system into the origin for a finite time interval. The offered method is presented in the form of the algorithm convenient for computer-aided realization. The received results can be used for solving the optimal control problems for spacecrafts, planes, robot manipulators, etc.

*Key words*: {linear system, quadratic functional, ellipsoid, feedback control, Lagrange multipliers.}

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 1625 / ГФ3, 2013-2015 гг.

*З.Н. Мұрзабеков, Ш.Ә. Айпанов*

**Жолсызықтарының ұштары бекітілген жағдайда тұрлаусыз сызықтық жүйелер үшін кері байланысты тиімді басқарым құру**

Жұмыста тұрлаусыз біртектес емес сызықтық басқару жүйелері үшін тиімділеу есебін шешу алгоритмі ұсынылған. Квадраттық шығын функционалы және эллипсоид түріндегі жиыннан алынған шенелген басқарымы бар есеп қарастырылған. Жүйені ақырлы уақыт аралығында берілген бастапқы жағдайдан координаталар басына тиімді тәсілмен көшіру керек. Қарастырылып отырылған есептің ерекшелігі – кіріс сигналы жүйенің ағымдық жағдайы мен уақытқа тәуелді синтездеуші басқарым түрінде ізделінеді. Арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштерін қолдану басқарымның мәндеріне қойылған шектеулердің орындалуын қамтамасыз ететін және ақырлы уақыт аралығында жүйені координаталар басына дәл жеткізетін ізделінді кері байланысты басқарымды құруға мүмкіндік береді. Ұсынылып отырылған әдіс компьютерде жүзеге асыруға ыңғайлы алгоритм түрінде сипатталған. Алынған нәтижелерді ғарыш аппараттарын, ұшақтарды, робот-манипуляторларды, т.б. тиімді басқару есептерін шешу үшін қолдануға болады.

*Түйін сөздер*: {сызықтық жүйе, квадраттық функционал, эллипсоид, кері байланысты басқарым, Лагранж көбейткіштері.}

**Введение.** На практике часто встречаются задачи оптимального управления динамическими системами с закрепленными концами траекторий. Это, например, задачи управления космическими аппаратами, самолетами, роботами-манипуляторами и т.д. В этих задачах требуется обеспечить перевод системы из заданного начального состояния в желаемое конечное состояние за конечный интервал времени, минимизируя при этом затраты топлива или энергии.

Различные математические постановки задач оптимального управления и практические примеры приведены в [1, 2]. Обстоятельный обзор моделей и методов, используемых в современной теории оптимального управления содержится в [3]. Задача оптимального управления для динамических систем может быть сформулирована как задача нахождения программного управления $u(t)$ или как задача конструирования синтезирующего управления $u(x, t)$, т.е. управления с обратной связью, зависящего от вектора состояния системы $x$ и текущего времени $t$. В первом случае задача может быть решена с использованием принципа максимума Понтрягина [4], во втором случае для решения задачи можно использовать метод динамического программирования Беллмана [5] или достаточные условия оптимальности Кротова [6].

Отметим, что особенностью рассматриваемой задачи является то, что траектории системы должны проходить через фиксированные точки в начальный и конечный моменты времени, т.е. левые и правые концы траекторий являются закрепленными. Приведенный в данной работе метод решения задачи оптимального управления основан на использовании множителей Лагранжа [7], причем предлагается использовать множители специального вида [8], которые позволяют построить синтезирующее управление и обеспечивают приведение системы к желаемому состоянию в конечный момент времени.

## 1 Постановка задачи

Рассматривается линейная система управления, описываемая дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad (t_0 \le t \le T), \tag{1}$$

с заданным начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

и конечным условием

$$x(T) = 0_n, \tag{3}$$

с ограничением на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u \in E^m \mid 0.5\, u'D(t)u - d \le 0\}, \quad d > 0, \quad (t_0 \le t \le T). \tag{4}$$

Здесь $x(t)$ – $n$-вектор состояния объекта; $u(t)$ – $m$-вектор кусочно-непрерывных управляющих воздействий; $A(t)$, $B(t)$ – матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$ соответственно (элементы этих матриц являются непрерывными функциями); $f(t)$ – $n$-вектор непрерывных функций; $D(t)$ – положительно определенная $(m \times m)$-матрица; $0_n$ – нулевой $n$-вектор; штрих $(')$ означает операцию транспонирования. Динамика системы рассматривается в интервале времени $[t_0, T]$, где $t_0$ и $T$ – заданные начальный и конечный моменты времени.

Целевой функционалом имеет вид

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} [0.5\, x'(t)Q(t)x(t) + 0.5\, u'(t)R(t)u(t)]\, dt, \tag{5}$$

где $Q(t)$ – положительно полуопределенная $(n \times n)$-матрица, $R(t)$ – положительно определенная $(m \times m)$-матрица.

Ставится задача: найти синтезирующее управление $u(t) = u(x(t), t)$, которое удовлетворяет ограничению (4) и переводит систему (1) из заданного начального состояния (2) в конечное состояние (3) (в начало координат) за фиксированный интервал времени $[t_0, T]$, минимизируя при этом функционал (5).

## 2 Алгоритм решения задачи

Предлагаемый метод решения задачи основан на достаточных условиях оптимальности, полученных в [8]. Для снятия ограничения в виде дифференциальной связи (1) используется множитель Лагранжа $\lambda_0(t) = \lambda_0(x(t), t) = K(t)x(t) + q(t)$, где $K(t)$ – симметрическая $(n \times n)$-матрица, $q(t)$ – $n$-вектор-функция, подлежащие определению. А другой множитель Лагранжа $\lambda(t) \ge 0$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить выполнение ограничения (4) на значения управлений.

Обозначим через $W(t, T)$ симметрическую $(n \times n)$-матрицу вида

$$W(t, T) = \int_{t}^{T} \Phi(t, \tau)S(t)\Phi'(t, \tau)\, d\tau.$$

Здесь $S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$ – симметрическая $(n \times n)$-матрица; $\Phi(t, \tau) = \Theta(t)\Theta^{-1}(\tau)$ – матрица размерности $(n \times n)$; $\Theta(t)$ – фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения вида $\dot{y}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]y(t)$.

Оптимальная траектория движения системы и оптимальное управление в задаче (1)–(5) могут быть найдены с использованием следующего алгоритма:

1) Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(T) = K_T,\\&\dot{W}(t,T) = [A(t) - S(t)K(t)]W(t,T) + W(t,T)[A(t) - S(t)K(t)]' - S(t), \quad W(T,T) = O_n,\end{aligned} \tag{6}$$

где $K_T$ – положительно полуопределенная симметрическая $(n \times n)$-матрица; $O_n$ – нулевая $(n \times n)$-матрица. В результате интегрирования системы (6) определяются матрицы $K_0 = K(t_0)$ и $W_0 = = W(t_0, T)$ (интегрирование производится в обратном направлении изменения времени).

2) Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_0) = K_0,\\&\dot{\Phi}(t_0,t) = -\Phi(t_0,t)[A(t) - S(t)K(t)], \quad \Phi(t_0,t_0) = I_n,\\&\dot{\chi}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]\chi(t) - S(t)\eta(t) + f(t), \quad \chi(t_0) = x_0,\\&\dot{\eta}(t) = -[A(t) - S(t)K(t)]'\eta(t) - K(t)f(t), \quad \eta(t_0) = 0_n,\end{aligned} \tag{7}$$

где $\chi(t)$, $\eta(t)$ – вспомогательные $n$-векторы; $I_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. В результате интегрирования системы (7) определяются матрица $\Phi(t_0, T)$ и вектор $\chi(T)$, тем самым можно вычислить вектор

$$q_0 = W^{-1}(t_0,T)\Phi(t_0,T)\chi(T) \tag{8}$$

(предполагается, что матрица $W(t_0, T)$ невырождена).

3) Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_0) = K_0,\\&\dot{W}(t,T) = [A(t) - S(t)K(t)]W(t,T) + W(t,T)[A(t) - S(t)K(t)]' - S(t), \quad W(t_0,T) = W_0,\\&\dot{x}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]x(t) + B(t)\varphi(x(t),t) - S(t)q(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0,\\&\dot{q}(t) = -[A(t) - S(t)K(t)]'q(t) + W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x(t),t) - K(t)f(t), \quad q(t_0) = q_0.\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь выбор вектора $q_0$ в начальном условии $q(t_0) = q_0$ в виде (8) обеспечивает прохождение траектории системы через начало координат в момент времени $T$, т.е. выполнение конечного условия $x(T) = 0_n$. Полученное из (9) решение $x(t)$, $(t_0 \le t \le T)$ соответствует искомой *оптимальной траектории* движения системы. В процессе интегрирования системы (9) вычисляется *оптимальное управление* по формуле

$$\begin{aligned}&u(x(t),t) = -[R(t) + \lambda(t)D(t)]^{-1}B'(t)[K(t)x(t) + q(t)] =\\&= \omega(x(t),t) + \varphi(x(t),t), \quad (t_0 \le t \le T),\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}&\omega(x(t),t) = -R^{-1}(t)B'(t)[K(t)x(t) + q(t)],\\&\varphi(x(t),t) = \{[I_m + \lambda(t)R^{-1}(t)D(t)]^{-1} - I_m\}\omega(x(t),t);\end{aligned} \tag{11}$$

$I_m$ – единичная $(m \times m)$-матрица.

В формулах (10), (11) множитель Лагранжа $\lambda(t) \ge 0$ следует выбрать так, чтобы обеспечить выполнение ограничения (4) на значения управлений. Если в момент времени $t$ выполняется неравенство $0.5\,\omega'(x(t),t)D(t)\omega(x(t),t) - d \le 0$, то можно принять

$\lambda(t) = 0$; в противном случае $\lambda = \lambda(t)$ выбирается из условия

$$\delta(\lambda) = 0.5\, u'(x(t),t) D(t) u(x(t),t) - d = 0. \tag{12}$$

Можно показать, что существует единственный корень $\lambda > 0$ уравнения $\delta(\lambda) = 0$, который может быть найден с использованием известных численных методов (например, метода дихотомии [9]).

## 3 Пример

Рассматривается система, динамика которой в интервале времени $[t_0, T] = [0, 3]$ описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2\, x_1(t) + 3\, x_2(t) + u_1(t) + \sin t, \\ \dot{x}_2(t) &= -4\, x_1(t) - \ln(t+1) x_2(t) + u_2(t) \end{aligned} \tag{13}$$

с начальными условиями $x_1(t_0) = 7$ и $x_2(t_0) = 2$. Управления $u_1$ и $u_2$ могут принимать значения из эллипса $5\, u_1^2 - 6\, u_1 u_2 + 5\, u_2^2 - 8 \leq 0$. Требуется перевести систему в начало координат, т.е. обеспечить выполнение конечных условий $x_1(T) = 0$ и $x_2(T) = 0$, минимизируя при этом функционал

$$\begin{aligned} J(u) = \int_{t_0}^{T} &[0.5\,(e^{-t}+1) x_1^2(t) - x_1(t) x_2(t) + 0.5\, x_2^2(t) + \\ &+ 0.5\, u_1^2(t) + 0.5\,(t+1) u_2^2(t)]\, dt \to \inf_u . \end{aligned} \tag{14}$$

Результаты численных расчетов, полученные с использованием алгоритма, приведенного в предыдущем разделе, показаны на рис. 1 и 2. Найденные управления обеспечивают достаточно точный перевод системы из начального состояния $(7, 2)$ в начало координат $(0, 0)$ за интервал времени $[t_0, T] = [0, 3]$ (в численных расчетах получены значения $x_1(T) \approx 0.26 \cdot 10^{-12}$ и $x_2(T) \approx 0.52 \cdot 10^{-12}$).

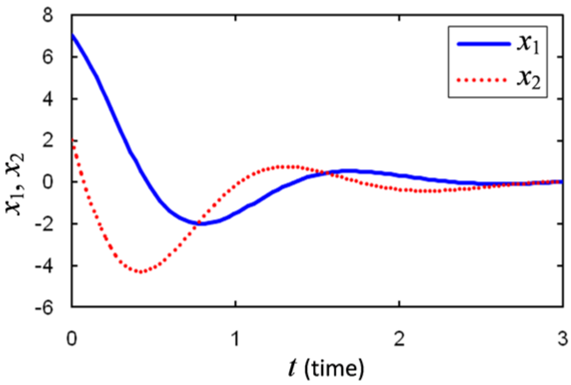


Рис. 1: Фазовые переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$

Как видно из рис. 2, оптимальные управления в интервале времени $[t_0, t_1]$ принимают значения, расположенные на границе эллипса (участок $AB$), а в интервале $(t_1, T]$

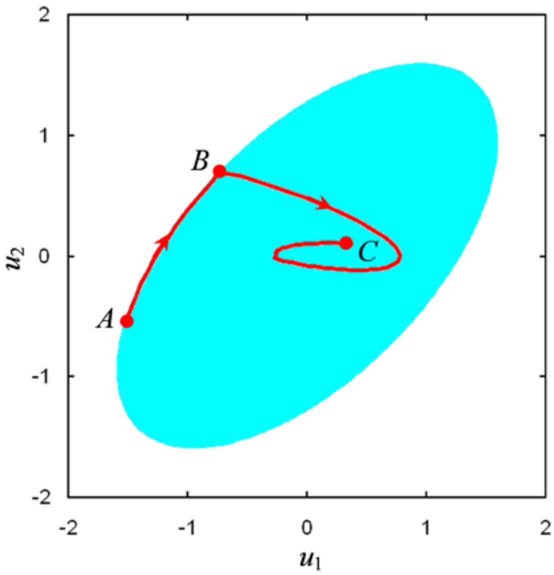


Рис. 2: Управления $u_1$ и $u_2$ ($A$ – в начальный момент $t_0$; $B$ – в момент переключения управления $t_1$; $C$ – в конечный момент $T$)

значения управления соответствуют внутренним точкам эллипса (участок $BC$). Переключение управления происходит в момент времени $t_1 \approx 0.4298$.

**Заключение.** В работе рассмотрена линейно-квадратичная задача оптимального управления, где допустимые значения входа принимают значения из заданного множества в виде эллипсоида. Особенностью задачи является то, что левые и правые концы траекторий являются закрепленными, требуется перевести систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(T) = 0_n$ за заданный интервал времени $[t_0, T]$, минимизируя при этом квадратичный функционал (5).

Рассматриваемая задача оптимального управления решена здесь с использованием множителя Лагранжа специального вида. Множитель $\lambda_0(t)$ выбирается в виде функции $\lambda_0(t) = = \lambda_0(x(t), t) = K(t)x(t) + q(t)$, что позволяет сконструировать синтезирующее оптимальное управление $u(x(t), t)$. Матрица $K(t)$ и вектор $q(t)$ находятся в результате решения некоторых дифференциальных уравнений в интервале $[t_0, T]$, причем для вектора $q(t)$ условие $q(t_0) = q_0$ выбирается так, чтобы обеспечить выполнение конечного условия $x(T) = 0_n$ для вектора состояния системы.

За счет выбора другого множителя Лагранжа $\lambda = \lambda(t)$ обеспечивается выполнение ограничения (4) на значения управлений. В случае, когда управление является внутренней точкой множества $U(t)$, имеем $\lambda = 0$. Если же управление лежит на границе множества $U(t)$, то соответствующее значение $\lambda > 0$ определяется как корень уравнения $\delta(\lambda) = 0$ (см. формулу (12)).

Рассмотренный пример (13), (14) показывает применимость предлагаемого алгоритма для нестационарных линейных систем с квадратичным функционалом качества, где подинтегральная функция также может явно зависеть от времени.

## Список литературы

[1] *Bryson A.E., Ho Yu-Chi.* Applied optimal control: optimization, estimation and control. – Washington: Hemisphere, 1975. – 481 p.

[2] *Athans M., Falb P.* Optimal control: introduction to the theory and its applications. – New York: McGraw-Hill, 1966. – 879 p.

[3] *Куржанский А.Б.* Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений. I. Обыкновенные системы // Диф. уравн. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 12–22.

[4] *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

[5] *Bellman R., Kalaba R.* Dynamic programming and modern control theory. – New York: Academic Press, 1966. – 112 p.

[6] *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 446 с.

[7] *Алексеев В.М. и др.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

[8] *Мурзабеков З.Н.* Достаточные условия оптимальности динамических систем с закрепленными концами // Матем. журн. – 2004. – Т. 4, № 2(12). – С. 52–59.

[9] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. – М.: Факториал пресс, 2002. – 824 с.

## References

[1] *Bryson A.E., Ho Yu-Chi.* Applied optimal control: optimization, estimation and control. – Washington: Hemisphere, 1975. – 481 p.

[2] *Athans M., Falb P.* Optimal control: introduction to the theory and its applications. – New York: McGraw-Hill, 1966. – 879 p.

[3] *Kurzhanskiy A.B.* Differentsial'nye uravneniya v zadachakh sinteza upravleniy. I. Obyknovennye sistemy // Dif. uravn. – 2005. – T. 41, N 1. – S. 12–22.

[4] *Pontryagin L.S. i dr.* Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov. – M.: Nauka, 1976. – 392 s.

[5] *Bellman R., Kalaba R.* Dynamic programming and modern control theory. – New York: Academic Press, 1966. – 112 p.

[6] *Krotov V.F., Gurman V.I.* Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya. – M.: Nauka, 1973. – 446 s.

[7] *Alekseev V.M. i dr.* Optimal'noe upravlenie. – M.: Nauka, 1979. – 432 s.

[8] *Murzabekov Z.N.* Dostatochnye usloviya optimal'nosti dinamicheskikh sistem s zakreplennymi kontsami // Matem. zhurn. – 2004. – T. 4, N 2(12). – S. 52–59.

[9] *Vasil'ev F.P.* Metody optimizatsii. – M.: Faktorial press, 2002. – 824 s.

*Поступила в редакцию 6 мая 2013 года*