Беттің серіктес үшжағы.Деривациялық формула

Қисықтың ілеспелі үшжағын анықтағанымыздай беттің де ілеспелі үшжағын анықтаймыз.Ол үшін беттің үшжағының бірлік $\vec{n\_{1}} ,\vec{n\_{2}}$ векторларын беттің жанама жазықтығында жататындай етіп,ал $\vec{n}$ векторын беттің нормалі векторымен беттесетіндей етіп аламыз.

Егер беттің ілеспелі үшжағының бірлік $\vec{n\_{1}} ,\vec{n\_{2}}$ және $\vec{n}$ векторлары беттің әрбір нүктесінде берілсе,онда бұл векторлардың қисық сызықты $u,v$ координаталарына тәуелді болатыны анық.Бұл $\vec{n\_{1}} ,\vec{n\_{2}}$ ,$ \vec{n}$ векторларынан $u,v$ параметрлері бойынша $\vec{n\_{1u}},\vec{n\_{2u}},\vec{n\_{u}};\vec{n\_{1v}},\vec{n\_{2v}},\vec{n\_{v}}$ дербес туындыларын алып,бұл векторларды бірлік $\vec{n\_{1}} ,\vec{n\_{2}}$ ,$ \vec{n}$ векторлары бойынша жіктесек,онда Френе формулаларына ұқсас екі системадан тұратын формулалар аламыз(төмендегі $Ι,ΙΙ $формулалар).Бұл системадан жіктелулердің матрицалары қиғаш симметриялыдеп ізделінді формулаларды мына түрде жазуға болады:

$\vec{n\_{1v}}=q\vec{n\_{2}}+ s\_{1}\vec{n}$ , $\vec{n\_{1u}}=p\vec{n\_{2}}+ r\_{1}\vec{n}$ ,

$\vec{n\_{2v}}=-q\vec{n\_{1}}+ s\_{2}\vec{n}$ , $\vec{n\_{2u}}=-p\vec{n\_{1}}+ r\_{2}\vec{n}$ , (1)

$\vec{n}=-s\_{1}\vec{n\_{1}} - s\_{2}\vec{n\_{2}}$ , $\vec{n}= -r\_{1}\vec{n\_{1}} - r\_{2}\vec{n\_{2}}$ .

Бұл формулалардың матрицалық түрде жазылуы:

$\left(\begin{matrix}\vec{n\_{1v}}\\\vec{n\_{2v}}\\\vec{n\_{v}}\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}0&q&s\_{1}\\-q&0&s\_{2}\\-s\_{1}&-s\_{2}&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\vec{n\_{1}}\\\vec{n\_{2}}\\\vec{n}\end{matrix}\right)$ ,

 (2)

$\left(\begin{matrix}\vec{n\_{1u}}\\\vec{n\_{2u}}\\\vec{n\_{u}}\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}0&p&r\_{1}\\-p&0&r\_{2}\\-r\_{1}&-r\_{2}&0\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}\vec{n\_{1}}\\\vec{n\_{2}}\\\vec{n}\end{matrix}\right)$ .

(1) формулалардағы $q,s\_{1},s\_{2}$; $p,r\_{1},r\_{2}$ коэффициенттерін есептейміз.

 $\vec{n\_{1}}$, $\vec{n\_{2}}$ және $\vec{n}$ векторларын $M$ нүктесінен бастап саламыз және $\vec{n}$ вввекторларының ұшынан беттің жанама жазықтығына қарағанда бірінші $\vec{n\_{1}}$ векторынан екінші $\vec{n\_{2}}$ векторына бұрылу сағат тілінің жүрісіне қарсы бағытта орындалады(бұрылу жақын тұспен)

1 сурет

$\vec{n\_{1}}$ және $\vec{n\_{2}}$ векторлары $\vec{r\_{u}}$ және $\vec{r\_{v}}$ векторларына коллинеар және өзара ортогональ (2-сурет)

2-сурет

Бұл жағдайда беттің негізгі формасы $ds^{2}$ мына түрде жазылады:

$ds^{2}= A^{2}du^{2}+ B^{2}dv^{2}$ (3)

(ыңғайлы болу үшін $E= A^{2},G= B^{2} деп белгіледік$).2-суретте $α$ жазықтығы беттің жанама жазықтығы. (3) формулада:

$A= \sqrt{\vec{r\_{u}}^{2}}= \left|\vec{r\_{u}}\right| ,B= \sqrt{\vec{r\_{v}}^{2}}= \left|\vec{r\_{v}}\right|$ .

Егер $\vec{n\_{1}} ∥ \vec{r\_{u}} , \vec{n\_{2}} ∥ \vec{r\_{v}}$ шарттарын ескерсек,онда

$\vec{n\_{1}}= \frac{\vec{r\_{u}}}{\left|\vec{r\_{u}}\right|}= \frac{\vec{r\_{u}}}{A} ; \vec{n\_{2}}= \frac{\vec{r\_{v}}}{\left|\vec{r\_{v}}\right|}= \frac{\vec{r\_{v}}}{B}$ .

(1) формуладағы $q$ коэффициентін есептейміз ол үшін (1) формуладағы бірінші теңдіктің оң және сол жақтарын $\vec{n\_{2}}$ векторына скаляр көбейтеміз,және $\vec{n\_{2}} ⊥ \vec{n\_{1}}$ шартын ескереміз:

$q= \vec{n\_{2}} \vec{n\_{1v}}$ . (4)

$\vec{n\_{1}}$ векторынан $v$ параметрі бойынша дербес $\vec{n\_{1v}}$ туындысын есептейміз:

$\vec{n\_{1v}}= \left(\frac{r\_{u}}{A}\right)\_{v}= \left(\frac{1}{A}\right)\_{v}\vec{r\_{u}}+ \frac{1}{A} \vec{r\_{uv}}$ .

Осы теңдіктің оң және сол жақтарын $\vec{n\_{2}}$ векторына скаляр көбейтеміз:

$$\vec{n\_{2}} \vec{n\_{1v}}= \left(\frac{1}{A}\right)\_{v} \vec{r\_{u}} \vec{n\_{2}}+ \frac{1}{A} \vec{n\_{2}} \vec{r\_{uv}}= \frac{1}{A} \vec{n\_{2}} \vec{r\_{uv}}= \frac{1}{AB} \vec{r\_{v}} \vec{r\_{uv}}$$

Сонымен:

$q= \frac{1}{AB} \vec{r\_{v}} \vec{r\_{uv}}= \frac{1}{2AB} \frac{∂}{∂u} \left(\vec{r\_{v}}^{2}\right)= \frac{1}{2AB}\frac{∂}{∂u} \left(B^{2}\right)= \frac{1}{2AB} ∙2B ∙B\_{u}= \frac{B\_{u}}{A}$ .

Демек:

$q= \frac{B\_{u}}{A}$ .

$p$ параметрі үшінде осындай формуланы жазуға болады.Ол үшін (1) жүйенің 5-формуласының оң және сол жақтарын $\vec{n\_{1}}$ векторына скаляр көбейтеміз:

$$ p= \vec{n\_{1}} \vec{n\_{2u}}$$

$\vec{n\_{2}}$ векторынан $u$ параметрі бойынша дербес $\vec{n\_{2u}}$ туындысын есептейміз:

$\left(\vec{n\_{2}}\right)\_{u}= \left(\frac{\vec{r\_{v}}}{B}\right)\_{u}= \left(\frac{1}{B}\right)\_{u}∙ \vec{r\_{v}}+ \frac{1}{B} \vec{r\_{vu}}$ .

Осы теңдіктің оң және сол жақтарын $\vec{n\_{1}}$ векторына скаляр көбейтеміз:

$\vec{n\_{1}} \vec{n\_{2u}}= \frac{1}{B} \vec{n\_{1}} \vec{n\_{vu}}= \frac{1}{BA} \vec{r\_{u}} \vec{r\_{vu}}= \frac{1}{2AB} \frac{∂}{∂v} \left(\vec{r\_{u}}^{2}\right)= \frac{1}{2AB} \frac{∂}{∂v} \left(A^{2}\right)= \frac{1}{2AB} ∙2A ∙ ∙ A\_{v}= \frac{A\_{v}}{B}$ .

Сонымен

$p= -\frac{A\_{v}}{B}$ .

Мынадай белгілеулер енгіземіз:

$$\left\{\begin{array}{c}ω =pdu+qdv\\ω\_{1}= r\_{1}du+ s\_{1}dv\\ω\_{2}= r\_{2}du+ s\_{2}dv\end{array}\right.$$

Осы жағдайда беттің ілеспелі үшжағының $\vec{n\_{1}}$ және $\vec{n\_{2}}$ векторларының дифференциалдарын аламыз:

$$d\vec{n\_{1}}= ω\vec{n\_{2}}+ ω\_{1}\vec{n}$$

$$d\vec{n\_{2}}= -ω\vec{n\_{1}}+ ω\_{2}\vec{n}$$

…………………….

$$d\vec{n}= -ω\_{1}\vec{n\_{1}} - ω\_{2}\vec{n\_{2}}$$

Дифференциалдық формасы

$$ω= -\frac{A\_{v}}{B} du+ \frac{B\_{u}}{A}dv$$

ілеспелі үшжақтың бұру (айналым) коэффициенті деп аталады.

$\vec{n\_{1u}}=p\vec{n\_{2}}+ r\_{1}\vec{n}$ $∙ \vec{n}$

$\vec{n\_{2u}}= -p\vec{n\_{1}}+ r\_{2}\vec{n}$ $∙\vec{n}$

Сонда

$r\_{1}= \vec{n\_{1u}} \vec{n}$ ; $r\_{2}= \vec{n\_{2u}} \vec{n}$

Енді $\vec{n\_{1u}}$ – де есептейміз:

$$\vec{n\_{1u}}= \left(\frac{\vec{r\_{u}}}{A}\right)\_{u}= \left(\frac{1}{A}\right)\_{u} \vec{r\_{u}}+ \frac{1}{A} \vec{r\_{uu}}$$

$\vec{n\_{2u}}= \left(\frac{\vec{r\_{v}}}{B}\right)\_{u}= \left(\frac{1}{B}\right)\_{u} \vec{r\_{v}}+ \frac{1}{B} \vec{r\_{vu}}$ .

Сонда

$$r\_{1}= \frac{1}{A}\vec{r\_{uu}} \vec{n}= \frac{\left[\vec{r\_{u}} \vec{r\_{v}}\right] \vec{r\_{uu}}}{A}= \frac{L}{A}$$

$r\_{2}= \frac{1}{B} \vec{r\_{vu}} \vec{n}= \frac{\left[\vec{r\_{u}} \vec{r\_{v}}\right] \vec{r\_{uv}}}{B}= \frac{M}{B}$ .