

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

B. M. Mukhamediev, The approximation of sets of guaranteed attainability of control systems with mixed constraints when there is interference, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1993, Volume 33, Number 3, 335–348

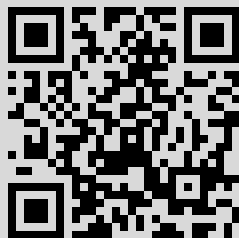
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 95.56.151.183

May 24, 2017, 14:42:36



УДК 517.977.5

© 1993 г. Б. М. МУХАМЕДИЕВ

(Алма-Ата)

АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ ГАРАНТИРОВАННОЙ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Получена линейная оценка в метрике Хаусдорфа для погрешности аппроксимации множества точек фазового пространства, в которые можно привести управляемую систему при любых реализациях помех, воздействию которых она подвержена.

Для анализа потенциальных возможностей управляемых систем полезно использование их множеств достижимости, различные подходы к исследованию и построению которых предложены в ряде работ, например в [1] — [4]. Однако на реальные системы обычно воздействуют неопределенные факторы — помехи, о которых заранее известна лишь область изменения, и задача управления ими имеет теоретико-игровой характер [5] — [8]. Отметим также, что, особенно в экономических и экологических системах, множества управлений зависят от фазовых переменных. Для дискретных систем в [9] — [11] разработаны численные методы построения множеств достижимости и управления в условиях неопределенности. В настоящей статье для управляемых систем ставится задача определения множества точек фазового пространства, гарантированно достижимых с заданной точностью при любых реализациях помех, для двух различных гипотез информированности о ходе процесса. Предлагается аппроксимировать его множеством гарантированной достижимости системы, полученной из исходной путем дискретизации. Указана оценка для погрешности в смысле расстояния по Хаусдорфу.

§ 1. Множества гарантированной достижимости

Через $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство непустых компактов из $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа h (см. [12] — [14]). Пусть задан отрезок $[t_0, \vartheta]$, функция $f: [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, множество $V \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m)$ и многозначное отображение $U: [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^m)$.

Рассмотрим управляемую систему

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(t, x, u) - v, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$u \in U(t, x), \quad v \in V, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых переменных, $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управлений, $v \in \mathbb{R}^n$ — вектор помех, о котором априори известно лишь то, что $v \in V$.

Замечание 1. Как отмечено ниже, полученные в настоящей статье результаты можно распространить на системы более общего вида, чем (1.1), в частности на системы с уравнением движения

$$(1.1') \quad \dot{x} = f(t, x, u) + g(t, x, v).$$

Предположим, что отображения $f(\cdot)$ и $U(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица с константами L и L_1 соответственно. Тогда многозначное отображение $F(\cdot)$, где $F(t, x) = f(t, x, U(t, x))$, также удовлетворяет условию Липшица с константой $p = L(1 + L_1)$. Пусть множество $F(t, x)$ выпукло на $[t_0, \vartheta] \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — множество достижимости системы (1.1), которое, как нетрудно показать, ограничено.

Возможности управления системой (1.1) существенно зависят от информированности о ходе процесса. Рассмотрим две гипотезы. Первая: как и в [5], [7], в каждый момент времени считаются известными состояние $x(t)$ и реализация функций помех $v(\cdot)$ на полуинтервале $[t, t + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Вторая: для каждого t известен лишь вектор $x(t)$.

Возьмем произвольное разбиение $\omega = \{t_0, \dots, t_N\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$, где $t_0 < \dots < t_N = \vartheta$. Положим $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Тогда $\tau_0 + \dots + \tau_{N-1} = T$, где $T = \vartheta - t_0$. Число $|\omega| = \max\{\tau_i | 0 \leq i \leq N-1\}$ называется диаметром разбиения ω . Совокупность измеримых селекторов $v_i(\cdot)$ многозначного отображения V на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ обозначим через $\mathcal{V}_i$. Пусть $x_i(t) \equiv x_i(t; x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$ — решение задачи

$$(1.2) \quad \dot{x} = f(t, x, u_i(t)) - v_i(t), \quad x(t_i) = x_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

т. е. $x_i(\cdot)$ — абсолютно непрерывная функция, почти всюду на $[t_i, t_{i+1}]$ удовлетворяющая уравнению (1.2) (см. [15]).

Используя лемму Гронуолла, можно указать константу $b > 0$ такую, что $F(t, x) \subset bS$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, $x \in \mathcal{X}$, где S — единичный замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$. Тогда если $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$ а $u_i(\cdot)$ — измеримая функция со значениями в $U(t, x_i(t))$ для $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, то справедлива оценка

$$(1.3) \quad \|x_i(t) - x_i\| \leq b(t - t_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Рассмотрим вначале первую гипотезу информированности. Для $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$ через $\mathcal{W}(x_i, v_i(\cdot))$ обозначим множество измеримых на $[t_i, t_{i+1}]$ функций $u_i(\cdot)$ таких, что

$$u_i(t) \in U(t, x_i(t; x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot))), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Определение 1. Точка $w \in R_n$ называется гарантированно l -достижимой ($l \geq 0$) для системы (1.1) при первой гипотезе информированности, если для любого разбиения ω существует кусочно-программная стратегия, т. е. правило выбора $u_i(\cdot)$ из $\mathcal{W}_i(x_i, v_i(\cdot))$ для $i = 0, 1, \dots, N-1$, которая обеспечивает

попадание состояния $x(\vartheta)$ в l -окрестность точки w при любой реализации функции помех $v(\cdot)$.

Введем множества

$$\begin{aligned} X^N(x_N, l) &= x_N + lS, \quad x_N \in \mathbb{R}^n, \quad X^i(x_i, l) = \\ &= \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i} \bigcup_{u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(x_i, v_i(\cdot))} X^{i+1}(x_i(t_{i+1}); x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)), l, \end{aligned}$$

$x_i \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq i \leq N-1$. Обозначим также $X^0(x_0, l) = X^0(x_0, l)$ и положим $X^*(x_0, l) = \bigcap X^0(x_0, l)$, где пересечение берется по всевозможным разбиениям ω отрезка $[t_0, \vartheta]$.

Лемма 1. Множество $X^*(x_0, l)$ представляет собой множество гарантированной l -достижимости системы (1.1) при первой гипотезе информированности.

Доказательство. Если $w \in X^*(x_0, l)$, то $w \in X^0(x_0, l)$ для любого разбиения ω и, значит, $w \in X^0(x_0, l)$. Допустим, что $w \in X^i(x_i, l)$. Тогда для любого $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$ найдется $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(x_i, v_i(\cdot))$ такое, что $w \in X^{i+1}(x_{i+1}, l)$, где $x_{i+1} = x_i(t_{i+1})$. Применяя последовательно эти рассуждения для $i = 0, 1, \dots, N-1$, получаем $w \in X^N(x_N, l)$, где $x_N = x_{N-1}(t_N)$, т. е. $w \in x_N + lS$. Значит, точка w гарантированно l -достижима.

А если $w \notin X^*(x_0, l)$, то, по определению $X^*(x_0, l)$, найдется разбиение ω , при котором $w \notin X^0(x_0, l)$, т. е. $w \notin X^0(x_0, l)$. Для шага i предположим, что $w \notin X^i(x_i, l)$, $x_i \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$ такое, что при любом $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(x_i, v_i(\cdot))$ имеет место $w \notin X^{i+1}(x_{i+1}, l)$, где $x_{i+1} = x_i(t_{i+1}; x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$. Это означает, что на каждом шаге $i = 0, 1, \dots, N-1$ можно так подбирать помехи $v_i(\cdot)$, что при любой стратегии выбора управлений $u_i(\cdot)$ в момент t_N система (1.1) окажется в состоянии x_N , для которого $w \notin X^N(x_N, l)$, т. е. $w \notin x_N + lS$. Следовательно, точка w не является гарантированно l -достижимой. Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим вторую гипотезу информированности. Через $\mathcal{U}_i(x_i)$ обозначим множество измеримых на $[t_i, t_{i+1}]$ функций $u_i(\cdot)$ таких, что $u_i(t) \in U(t, x_i(t; x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)))$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, для любой функции $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$.

Определение 2. Точка $w \in \mathbb{R}^n$ называется l -достижимой для системы (1.1) при второй гипотезе информированности, если существует разбиение ω и кусочно-программная стратегия, т. е. правило выбора $u_i(\cdot)$ из $\mathcal{U}_i(x(t_i))$ для $i = 0, 1, \dots, N-1$, которая обеспечивает попадание состояния $x(\vartheta)$ системы в l -окрестность точки w при любой реализации функции помех $v(\cdot)$.

Рекуррентным образом введем множества

$$\begin{aligned} X_N(x_N, l) &= x_N + lS, \quad x_N \in \mathbb{R}^n, \\ X_i(x_i, l) &= \bigcup_{u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(x_i)} \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i} X_{i+1}(x_i(t_{i+1}); x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)), l, \end{aligned}$$

$x_i \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq i \leq N-1$. Обозначим также $X_\omega(x_0, l) = X_0(x_0, l)$ и положим

$$X_*(x_0, l) = \bigcup X_\omega(x_0, l),$$

где объединение берется по всевозможным разбиениям ω отрезка $[t_0, \vartheta]$.

Л е м м а 2. Множество $X_*(x_0, l)$ представляет собой множество гарантированной l -достижимости системы (1.1) при второй гипотезе информированности.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

З а м е ч а н и е 2. Для системы (1.1) рассмотрим дифференциальную игру сближения-уклонения с терминальным множеством $M \subset \mathbb{R}^n$. Если $X^*(x_0, l) \cap M \neq \emptyset$ или $X_*(x_0, l) \cap M \neq \emptyset$, то, соответственно, при первой или второй гипотезах информированности у первого игрока, распоряжающегося выбором u , имеется стратегия, которая обеспечивает ему вывод состояния системы в l -окрестность множества M . Если, кроме того, задана функция платы $\Phi(\cdot)$ от конечного фазового состояния, то в качестве оценки значения дифференциальной игры можно взять $\inf \Phi(x)$ на $X^*(x_0, l) \cap M$ или $X_*(x_0, l) \cap M$.

§ 2. Некоторые свойства операций над множествами

Вначале отметим следующие известные свойства:

$$(2.1) \quad \bigcap_{\alpha \in A} (X_\alpha + Y) = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha + Y,$$

$$(2.2) \quad \bigcap_{\alpha \in A} (X_\alpha + Y) \supset \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + Y,$$

$$(2.3) \quad \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{\beta \in B} X_{\alpha\beta} \subset \bigcap_{\beta \in B} \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha\beta}.$$

Через $c(\psi, X)$, где $\psi \in \mathbb{R}^n$, обозначим опорную функцию множества $X \subset \mathbb{R}^n$, через ∂S — единичную сферу в $\mathbb{R}^n$. Если X — выпуклое ограниченное замкнутое множество, то, как известно [14],

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq c(\psi, X), \psi \in \partial S\},$$

где (ψ, x) — скалярное произведение векторов ψ, x . Однако может оказаться, что имеет место равенство

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq c(\psi, X), \psi \in \Psi\},$$

где $\Psi \subset \partial S$. Например, если X — многогранник, то множество Ψ можно выбрать конечным. Заметим, что, вообще говоря, справедливо неравенство

$$c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) \leq \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha).$$

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ выпуклых компактных множеств из $\mathbb{R}^n$ выметается по направлению $\psi \in \partial S$, если

$$c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha).$$

Лемма 3. Пусть множество $\Psi \subset \partial S$ таково, что $X_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq c(\psi, X_\alpha), \psi \in \Psi\}$ для всех $\alpha \in A$. Тогда

$$(2.4) \quad \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha), \psi \in \Psi\}.$$

Доказательство. Множество в правой части (2.4) обозначим через $\tilde{X}$. Если $x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ по $\alpha \in A$, то $x \in X_\alpha$, $\alpha \in A$, и $(\psi, x) \leq c(\psi, X_\alpha)$, $\psi \in \Psi$, $\alpha \in A$. Поэтому получаем $(\psi, x) \leq \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha)$ по $\alpha \in A$ для $\psi \in \Psi$, т. е. $x \in \tilde{X}$.

Обратно. Пусть $x \in \tilde{X}$. Тогда $(\psi, x) \leq c(\psi, X_\alpha)$, $\alpha \in A$, $\psi \in \Psi$. Учитывая условия леммы, получаем $x \in X_\alpha$, $\alpha \in A$, т. е. $x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ по $\alpha \in A$. Утверждение доказано.

Пусть Ψ — множество направлений ψ , удовлетворяющее условиям леммы 3. Положим

$$\Psi_0 = \{\psi \in \Psi \mid c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha)\},$$

т. е. это множество направлений ψ , по которым выметается семейство множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Лемма 4. Имеет место равенство

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha), \psi \in \Psi_0\}.$$

Доказательство. Если $\psi \in \Psi \setminus \Psi_0$, то

$$(2.5) \quad c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) < \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha).$$

Значит, в системе неравенств (2.4) ограничение (2.5) избыточно. Отбрасывая все такие избыточные неравенства из (2.4), получаем требуемое равенство. Утверждение доказано.

Лемма 5. Пусть имеет место равенство

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + Y), \psi \in \Psi_0\},$$

причем семейство множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ выметается по всем направлениям $\psi \in \Psi_0$. Тогда

$$\bigcap_{\alpha \in A} (X_\alpha + Y) = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + Y.$$

Доказательство. Имеем

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) + c(\psi, Y), \psi \in \Psi_0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha) + c(\psi, Y), \psi \in \Psi_0\} \supset$$

$$\supset \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} (X_\alpha + Y)), \psi \in \Psi_0\} \supset \bigcap_{\alpha \in A} (X_\alpha + Y).$$

Но, по свойству (2.2), всегда справедливо противоположное включение. Значит, лемма доказана.

Л е м м а 6. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство непустых выпуклых компактных множеств из $\mathbb{R}^n$, λ — неотрицательное число. Тогда справедливо равенство

$$\bigcap_{\alpha \in A} (X_\alpha + \lambda \bigcap_{\beta \in A} X_\beta) = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + \lambda \bigcap_{\beta \in A} X_\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через Ψ_0 по-прежнему будем обозначать множество направлений $\psi \in \Psi$, по которым выметается семейство множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Используя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + \lambda \bigcap_{\beta \in A} X_\beta &= (1 + \lambda) \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq (1 + \lambda) \inf_{\alpha \in A} c(\psi, X_\alpha), \psi \in \Psi_0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\psi, x) \leq c(\psi, \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha + \lambda \bigcap_{\beta \in A} X_\beta), \psi \in \Psi_0\}. \end{aligned}$$

Значит, для семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и множества $Y = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ выполнены условия леммы 5, из которой поэтому следует требуемое равенство. Утверждение доказано.

§ 3. Оценки для погрешностей аппроксимации

Пусть ω, ν — разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$. Используя свойство (2.3), нетрудно показать, что справедлива

Л е м м а 7. Если разбиение ν более тонкое, чем разбиение ω , т. е. $\omega \subset \nu$, то

$$X^\omega(x_0, l) \subset X^\nu(x_0, l), \quad X_\omega(x_0, l) \subset X_\nu(x_0, l).$$

Л е м м а 8. Для любых разбиений ω, ν имеет место включение $X_\omega(x_0, l) \subset X^\nu(x_0, l)$ и $X_\nu(x_0, l) \subset X^\omega(x_0, l)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\omega, \nu \subset \omega \cup \nu$, то из предыдущей леммы и свойства (2.3) следуют включения

$$X_\omega(x_0, l) \subset X_{\omega \cup \nu}(x_0, l) \subset X^{\omega \cup \nu}(x_0, l) \subset X^\nu(x_0, l),$$

т. е. $X_\omega(x_0, l) \subset X^\nu(x_0, l)$ для любых разбиений ω, ν . Взяв объединение по ω и пересечение по ν , получим второе требуемое включение. Утверждение доказано.

При аппроксимации множеств гарантированной достижимости системы (1.1) будет использоваться дискретная система

$$(3.1) \quad z_{i+1} = z_i + \tau_i f(t_i, z_i, u_i) - \tau_i v_i, \quad z_0 = x_0,$$

$$u_i \in U(t_i, z_i), \quad v_i \in \text{co}V, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Для разбиения ω определим множества

$$Z^N(z_N, l) = Z_N(z_N, l) = z_N + lS,$$

$$Z^i(z_i, l) = \bigcap_{v_i \in \text{co}V} \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} Z^{i+1}(z_{i+1}, l),$$

$$Z_i(z_i, l) = \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} \bigcap_{v_i \in \text{co}V} Z_{i+1}(z_{i+1}, l)$$

для $0 \leq i \leq N-1$, где x_{i+1} определяется из (3.1). Положим также $Z^0(x_0, l) = Z^0(x_0, l)$, $Z_\omega(x_0, l) = Z_0(x_0, l)$. Аналогично доказательству леммы 1 и [10] можно показать, что $Z^0(x_0, l)$ и $Z_\omega(x_0, l)$ — множества гарантированной l -достижимости дискретной системы (3.1), соответствующие следующим двум гипотезам информированности на каждом шаге i : первая — известны состояние z_i и вектор помех v_i и вторая — известно лишь состояние x_i .

Л е м м а 9. *Имеет место включение*

$$X^\omega(x_0, l) \subset Z^0(x_0, l + C_1\tau),$$

где $\tau = |\omega|$, $C_1 = 0.5pT(1+b)\exp(pT)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_i, z_i — некоторые векторы из $\mathcal{X}$, $v_i \in \text{co}V$, $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}^i(x_i, v_i)$ и $x_i(\cdot)$ — решение задачи (1.2). Тогда

$$x_{i+1} = x_i(t_{i+1}) = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x_i(t), u_i(t)) dt - \tau_i v_i.$$

В силу липшицевости отображения $U(\cdot)$ и оценки (1.3) существует измеримая функция $\tilde{u}(\cdot)$ со значениями из $U(t_i, z_i)$ такая, что $\|u_i(t) - \tilde{u}_i(t)\| \leq L_i[(1+b)(t-t_i) + \|x_i - z_i\|]$ при $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ (см. [13], [14]). Тогда

$$(3.2) \quad x_{i+1} \in x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t_i, z_i, \tilde{u}_i(t)) dt - \tau_i v_i + \\ + p \left[\frac{1}{2} (1+b) \tau_i^2 + \|x_i - z_i\| \tau_i \right] S.$$

По свойствам интегралов от многозначных отображений [13], [14] получим, что существует вектор $u_i \in U(t_i, z_i)$, для которого

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t_i, z_i, \tilde{u}_i(t)) dt = \tau_i f(t_i, z_i, u_i).$$

Если для x_i, u_i, v_i определить z_{i+1} из (3.1), то из (3.2) следует неравенство

$$(3.3) \quad \|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq 0.5p(1+b)\tau_i^2 + (1+p\tau_i)\|x_i - z_i\|.$$

Возьмем произвольный вектор $w \in X^\omega(x_0, l)$. Тогда для системы (1.1) найдется стратегия, которая для состояния $x_N = x(t_N)$ гарантирует выполнение неравенства $\|x_N - w\| \leq l$ при любых $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$, в частности при любых $v_i(t) \equiv v_i \in \text{co}V$,

$0 \leq i \leq N-1$. Учитывая, что $z_0 = x_0$, применяя неравенство (3.3) для $i = 0, 1, \dots, N-1$, получаем

$$\|x_N - z_N\| \leq \frac{1}{2} p (1+b) \sum_{i=0}^{N-1} \tau_i^2 \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 + p\tau_j) \leq c_1 \tau.$$

Следовательно, для дискретной системы (3.1) существует стратегия, обеспечивающая неравенство $\|z_N - w\| \leq l + c_1 \tau$, т. е. $w \in Z^0(x_0, l + c_1 \tau)$. Утверждение доказано.

Л е м м а 10. Для $0 \leq i \leq N$ справедливо включение

$$Z_i(x_i + \mu S, l) \subset Z_i(x_i, l + \mu e^{\rho T}),$$

где число $\mu \geq 0$, вектор $z_i \in \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что выполняются включения

$$(3.4) \quad Z_i(z_i + \mu S, l) \subset Z_i(z_i, l + \mu \prod_{j=i}^{N-1} (1 + p\tau_j))$$

для $0 \leq i \leq N$. При $i = N$ включение (3.4) следует из определения $Z_N(z_N, l)$. Предположим, что (3.4) справедливо для номера $i+1$, и докажем его для номера i , $0 \leq i \leq N-1$. Учитывая липшицевость $f(\cdot)$ и $U(\cdot)$, можно записать

$$\begin{aligned} Z_i(z_i + \mu S, l) &\subset \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} \bigcap_{v_i \in \text{co} V} Z_{i+1}(z_i + \tau_i f(t_i, z_i, u_i) - \\ &- \tau_i v_i + (1 + p\tau_i) \mu S, l) \subset \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} \bigcap_{v_i \in \text{co} V} Z_{i+1}(z_i + \tau_i f(t_i, z_i, u_i) - \\ &- \tau_i v_i, l + (1 + p\tau_i) \mu \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 + p\tau_j)) = Z_i(z_i, l + \mu \prod_{j=i}^{N-1} (1 + p\tau_j)). \end{aligned}$$

Значит, включение (3.4) доказано. Из него очевидным образом вытекает утверждение леммы.

Сделаем следующее предположение о телесности множества $U(t, x)$: существует число $\rho > 0$ такое, что $U(t, x) \supset \rho S \neq \emptyset$, т. е. для некоторого $a(t, x) \in \mathbb{R}^m$ выполняется включение

$$(3.5) \quad a(t, x) + \rho S_1 \subset U(t, x), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \mathcal{X},$$

где S_1 — единичный замкнутый шар из $\mathbb{R}^m$. В силу ограниченности $U(\cdot)$ найдется число $r > 0$, для которого

$$(3.6) \quad U(t, x) \subset a(t, x) + r S_1, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Через $\mathcal{U}_i(x)$ обозначим множество всех измеримых селекторов многозначного отображения $t \rightarrow U(t, x) + L_1(1+b)(t-t_i)S_1$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Для решения задачи (1.2), где $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(\cdot)$, $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^\circ$, используя лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\|x_i(t_{i+1}) - x_i\| \leq d_i \tau_i + 0.5L[1 + L_1(1+b)]\tau_i^2 \exp(L\tau_i),$$

где $d_i = h(\{0\})$, $U(t_i, x_i) - V$. Если b, τ таковы, что

$$b \geq \frac{2d_i + L(1 + L_i)\tau \exp(L\tau)}{2 - LL_i\tau \exp(L\tau)},$$

то будет выполнено неравенство $\|x_i(t_{i+1}) - x_i\| \leq b\tau_i$ для любых $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(x_i)$, $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$. Тогда, имея в виду липшицевость отображения $U(\cdot)$, получаем

$$\begin{aligned} U(t_i, x_i) &\subset U(t, x_i(t)) + L_1(1 + b)\Delta t_i S_1 \subset \\ &\subset U(t, x_i(t)) + k\Delta t_i(U(t_i, x_i) - a(t_i, x_i)), \end{aligned}$$

где обозначено $\Delta t_i = t - t_i$, $k = L_1(1 + b)/\rho$. Положим

$$\tilde{U}(t, x_i) = \bigcap_{u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(x_i)} \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i} U(t, x_i(t)).$$

Будем считать, что для чисел $\bar{\tau} > 0$, $b > 0$ выполнены условия

$$\bar{\tau} < \frac{\rho}{L_1(1 + b)}, \quad b \geq \frac{2d + L(1 + L_i)\bar{\tau} \exp(L\bar{\tau})}{2 - LL_i \exp(L\bar{\tau})},$$

где $d = \sup h(\{0\})$, $U(t, x) - V$ на $[t_0, \infty) \times \mathcal{X}$. Тогда для $\tau \leq \bar{\tau}$ получим включение

$$U(t_i, x_i) \subset \frac{1}{1 - k\Delta t_i} \tilde{U}(t, x_i) - \frac{k\Delta t_i}{1 - k\Delta t_i} a(t_i, x_i).$$

На основании (3.6) и липшицевости $U(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, x_i) - a(t_i, x_i) &\subset U(t, x_i(t)) - a(t_i, x_i) \subset \\ &\subset U(t_i, x_i) - a(t_i, x_i) + L_1(1 + b)\Delta t_i S_1 \subset (r + L_1(1 + b)\Delta t_i) S_1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(3.7) \quad U(t_i, x_i) \subset \tilde{U}(t, x_i) + q\Delta t_i S_1, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Здесь обозначено

$$q = \frac{L_1(1 + b)(r + L_1(1 + b)\bar{\tau})}{\rho(1 - k\bar{\tau})}.$$

Следовательно, если $\tau \leq \bar{\tau}$, то $U(t, x_i(t)) \neq \emptyset$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, при любых $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i(x_i)$, $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i$.

Лемма 11. При $\tau = |\omega| \leq \bar{\tau}$ справедливо включение

$$Z_\omega(z_0, l) \subset X_\omega(x_0, l + C_2\tau), \quad \text{где } C_2 = 0.5LT(1 + b + q) \exp(pT).$$

Доказательство. Для $0 \leq i \leq N$ покажем, что

$$(3.8) \quad Z_i(z_i, l) \subset X_i(z_i, l + \frac{1}{2}L(1 + b + q) \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j^2 \exp(pT)).$$

При $i = N$, очевидно, (3.8) выполняется как равенство. Допустим, что для

номера $i + 1$ включение (3.8) справедливо, и докажем его для номера i , $0 \leq i \leq N - 1$. Можно записать

$$Z_i(z_i, l) = \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}} Z_{i+1}(z_i(t_{i+1}), l),$$

где $z_i(\cdot)$ — решение задачи

$$\dot{z} = f(t, z, u_i) - v_i(t), \quad z(t_i) = z_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Из включения (3.7) тогда получим

$$Z_i(z_i, l) \subset \bigcup_{u_i(\cdot), z_i(\cdot)} \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}} Z_{i+1}(y_i(t_{i+1}), l),$$

где объединение берется по всевозможным измеримым селекторам $\tilde{u}_i(\cdot)$ и $s_i(\cdot)$ многозначных отображений $t \rightarrow \tilde{U}(t, z_i)$ и $t \rightarrow S_i$ соответственно, а $y_i(\cdot)$ — решение задачи

$$\dot{y} = f(t, z, \tilde{u}_i(t) + q(t - t_i) s_i(t)) - v_i(t), \quad y(t_i) = z_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Пусть $\tilde{x}_i(\cdot)$ — решение задачи (1.2) при $x_i = z_i$ и $u_i(\cdot) = \tilde{u}_i(\cdot)$, $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}$. Тогда

$$\begin{aligned} y_i(t_{i+1}) &\in z_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, \tilde{x}_i(t), \tilde{u}_i(t)) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} L(1 + b + q) \tau_i^2 S = \tilde{x}_i(t_{i+1}) + \frac{1}{2} L(1 + b + q) \tau_i^2 S. \end{aligned}$$

Заметим, что $\tilde{U}(t, z_i) \subset U(t, \tilde{x}_i(t)) \subset U(t, z_i) + L_1(1 + b)(t - t_i) S_i$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Поэтому $\tilde{u}_i(\cdot) \in \tilde{\mathcal{U}}_i(z_i)$. Имеем

$$\tilde{u}_i(t) \in \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}} U(t, x_i(t; z_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot))) \quad \forall u_i(\cdot) \in \tilde{\mathcal{U}}_i(z_i).$$

В частности, при $u_i(\cdot) = \tilde{u}_i(\cdot)$ отсюда получим, что $\tilde{u}_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}(z_i)$, и тогда

$$\begin{aligned} Z_i(z_i, l) &\subset \bigcup_{\tilde{u}_i(\cdot) \in \tilde{\mathcal{U}}_i(z_i)} \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}} Z_{i+1}\left(\tilde{x}_i(t_{i+1}) + \frac{1}{2} L(1 + b + q) \tau_i^2 S, l\right) \subset \\ &\subset \bigcup_{\tilde{u}_i(\cdot) \in \tilde{\mathcal{U}}_i(z_i)} \bigcap_{v_i(\cdot) \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}} X_{i+1}\left(\tilde{x}_i(t_{i+1}), l + \frac{1}{2} L(1 + b + q) \sum_{j=1}^{N-1} \tau_j^2 e^{\rho T}\right). \end{aligned}$$

Получено включение (3.8). Из него при $i = 0$ следует требуемое включение. Утверждение доказано.

Л е м м а 12. *Имеет место включение*

$$Z^{\omega}(z_0, l) \subset Z^{\omega}(z_0, l + C_3 \tau),$$

где $\tau = |\omega|$, $C_3 = [1 + \exp(\rho T)] |V|$, $|V| = h(\{0\}, V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$(3.9) \quad Z^i(z_i, l) \subset \bigcap_{v \in \text{co}V} Z_i(z_i - \tau v, l + |V|\tau)$$

для $0 \leq i \leq N$. При $i = N$ имеем

$$\begin{aligned} Z^N(z_N, l) &= \bigcap_{v \in \text{co}V} (z_N + lS + \tau \text{co}V - \tau v) \subset \\ &\subset \bigcap_{v \in \text{co}V} Z_N(z_N - \tau v, l + |V|\tau). \end{aligned}$$

Предположим, что (3.10) выполняется для номера $i + 1$, и докажем для номера i , $0 \leq i \leq N - 1$. Используя свойство (2.3) и выпуклость $\text{co}V$, получаем

$$\begin{aligned} Z^i(z_i, l) &\subset \bigcap_{v_i, v' \in \text{co}V} \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} \bigcap_{v' \in \text{co}V} Z_{i+1}(z_i + \tau_i f(t_i, z_i, u_i) - \\ &- \tau_i v' - \tau_i v_i - (\tau - \tau_i) v', l + |V|\tau) = \bigcap_{v \in \text{co}V} Z_i(z_i - \tau v, l + |V|\tau), \end{aligned}$$

т. е. включение (3.9) доказано. При $i = 0$ из (3.9) и леммы 10 получим требуемое включение. Утверждение доказано.

Определим множества

$$\begin{aligned} H^N(z_N, l) &= lS, \\ H^i(z_i, l) &\cap \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} [H^{i+1}(z_{i+1}, l) + z_{i+1} - z_i] \end{aligned}$$

для $0 \leq i \leq N - 1$, где z_{i+1} определяется из (3.1). Нетрудно проверить, что

$$Z^i(z_i, l) = z_i + H^i(z_i, l), \quad 0 \leq i \leq N,$$

и что

$$(3.10) \quad H^0(z_0, l) \subset (l + bT)S.$$

Лемма 13. Для любых чисел $\lambda, \mu \geq 0$ справедливы включения

$$(3.11) \quad H^i(z_i, \lambda) + \mu S \subset H^i(z_i, \lambda + \mu), \quad 0 \leq i \leq N.$$

Доказательство. При $i = N$, как следует из определения, включение (3.11) выполняется. Предположим справедливость (3.11) для номера $i + 1$ и докажем для номера i , $0 \leq i \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} H^i(z_i, \lambda + \mu) &\supset \bigcap_{v_i \in \text{co}V} \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} [H^{i+1}(z_{i+1}, \lambda) + \\ &+ \mu S + z_{i+1} - z_i] \supset H^i(z_i, \lambda) + \mu S. \end{aligned}$$

Здесь использованы свойства (2.1) и (2.2). Утверждение доказано.

Далее предположим, что

$$(3.12) \quad V \subset F(t, x), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Тогда выполняются включения $0 \in H^i(z_i, 0)$ и, в силу предыдущей леммы, $lS \subset H^i(z_i, l)$ для $z_i \in \mathcal{X}$, $0 \leq i \leq N$.

Л е м м а 14. Для $l > 0$, $\mu \geq 0$ имеет место включение

$$Z^0(x_0, l + \mu) \subset Z^0(x_0, l) + \mu(1 + bT/l) \exp(bT/l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Методом математической индукции покажем, что

$$(3.13) \quad Z^i(z_i, l + \mu) \subset Z^i(z_i, l) + \frac{\mu}{l} \prod_{j=i}^{N-1} \left(1 + \frac{b\tau_j}{l}\right) H^i(z_i, l)$$

для $0 \leq i \leq N$. При $i = N$ имеем

$$Z^N(z_N, l + \mu) = z_N + lS + \mu S = Z^N(z_N, l) + (\mu/l) H^N(z_N, l).$$

Предположим, что (3.13) выполняется для номера $i + 1$, и покажем, что тогда (3.13) справедливо и для номера i , $0 \leq i \leq N - 1$:

$$Z^i(z_i, l + \mu) \subset \bigcap_{v_i \in \text{co}V} \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} \left[Z^{i+1}(z_{i+1}, l) + \frac{\mu}{l} \prod_{j=i+1}^{N-1} \left(1 + \frac{b\tau_j}{l}\right) H^{i+1}(z_{i+1}, l) \right],$$

где z_{i+1} определяется из (3.1). Используя оценку $\|z_{i+1} - z_i\| \leq b\tau_i$, получаем

$$Z^i(z_i, l + \mu) \subset \bigcap_{v_i \in \text{co}V} \bigcup_{u_i \in U(t_i, z_i)} \left\{ H^{i+1}(z_{i+1}, l) + z_{i+1} + \frac{\mu}{l} \prod_{j=i+1}^{N-1} \left(1 + \frac{b\tau_j}{l}\right) [H^{i+1}(z_{i+1}, l) + z_{i+1} - z_i + b\tau_i S] \right\}.$$

С учетом включения $lS \subset H^i(z_i, l)$ из леммы 6 следуют соотношения

$$Z^i(z_i, l + \mu) \subset z_i + \left[1 + \frac{\mu}{l} \prod_{j=i+1}^{N-1} \left(1 + \frac{b\tau_j}{l}\right) \right] H^i(z_i, l) + \frac{\mu}{l} \prod_{j=i+1}^{N-1} \left(1 + \frac{b\tau_j}{l}\right) \frac{b\tau_i}{l} H^i(z_i, l) = Z^i(z_i, l) + \frac{\mu}{l} \prod_{j=i}^{N-1} \left(1 + \frac{b\tau_j}{l}\right) H^i(z_i, l).$$

Включение (3.13) доказано. Из него при $i = 0$ и из включения (3.10) следует включение

$$Z^0(z_0, l + \mu) \subset Z^0(z_0, l) + (1 + bT/l) \exp(bT/l) \mu S,$$

что доказывает лемму.

Обозначим $\hat{\tau} = \min \{\bar{\tau}, (l/2)(c_2 + c_3)^{-1}\}$.

Т е о р е м а 1. Если выполнены условия (3.5), (3.12), то $X_*(x_0, l) \neq \emptyset$ для $l > 0$ и справедливы включения

$$(3.14) \quad Z^0(x_0, l + C_1\tau) \supset X^*(x_0, l) \supset X_*(x_0, l) \supset Z_\omega(x_0, l - C_2\tau),$$

причем множество $Z_\omega(x_0, l - C_2\tau)$ непусто и

$$(3.15) \quad h(Z^0(x_0, l + C_1\tau), Z_\omega(x_0, l - C_2\tau)) \leq C\tau \text{ для } \tau \leq \hat{\tau},$$

где

$$C = \left(1 + \frac{bT}{l - (C_2 + C_3)\hat{\tau}} \right) \exp \left(\frac{bT}{l - (C_2 + C_3)\hat{\tau}} \right) (C_1 + C_2 + C_3).$$

Доказательство. Пусть $l \geq 0$. Множество $Z^N(z_N, l)$, очевидно, непусто. Предположим, что $Z^{i+1}(z_{i+1}, l) \neq \emptyset$, $z_{i+1} \in \mathcal{X}$. Тогда, как легко проверить,

$$Z^i(z_i, l) \supset Z^{i+1}(z_i + \tau_i(F(t_i, z_i) - V), l)$$

и, значит, $Z^i(z_i, l) \neq \emptyset$ для $z_i \in \mathcal{X}$, $0 \leq i \leq N-1$. Поэтому $Z^0(x_0, l)$ непусто.

По леммам 11 и 12, для $\tau \leq \bar{\tau}$, $\tau = |\omega|$ справедливы включения

$$Z^0(x_0, l) \subset Z_\omega(x_0, l + C_3\tau) \subset X_\omega(x_0, l + (C_2 + C_3)\tau),$$

т. е. множество $X_\omega(x_0, l)$ непусто при $l \geq (C_2 + C_3)\tau$, $\tau \leq \bar{\tau}$. Тогда при $l > 0$ для разбиений ω таких, что $|\omega| \leq \hat{\tau}$, множество $X_\omega(x_0, l)$ непусто. Поэтому и $X_*(x_0, l) \neq \emptyset$ для $l > 0$.

Из лемм 8, 9 и 11 следуют включения

$$Z^0(x_0, l + C_1\tau) \supset X^0(x_0, l) \supset X^*(x_0, l) \supset X_*(x_0, l) \supset$$

$$\supset X_\omega(x_0, l) \supset Z_\omega(x_0, l - C_2\tau), \quad \tau \leq \hat{\tau},$$

т. е. справедливы включения (3.14). Так как $Z^0(x_0, l)$ непусто при $l \geq 0$, то из леммы 12 получим, что $Z_\omega(x_0, l - C_2\tau)$ непусто при $l - (C_2 + C_3)\tau \geq 0$, что заведомо выполняется для $\tau \leq \hat{\tau}$.

И, наконец, из лемм 12 и 14 следуют включения

$$\begin{aligned} Z^0(x_0, l + C_1\tau) &\subset Z^0(x_0, l - (C_2 + C_3)\tau) + \\ &+ \left(1 + \frac{bT}{l - (C_2 + C_3)\tau} \right) \exp \left(\frac{bT}{l - (C_2 + C_3)\tau} \right) (C_1 + C_2 + C_3)\tau S \subset \\ &\subset Z_\omega(x_0, l - C_2\tau) + C\tau S \end{aligned}$$

для $\tau \leq \hat{\tau}$. Вместе с (3.14) эти включения означают, что справедливо неравенство (3.15). Теорема доказана.

Можно проверить, что в рассматриваемых условиях на систему (1.1) множество $X^*(x_0, l)$ компактно.

Следствие. Замыкание множества $X_*(x_0, l)$ совпадает с множеством $X^*(x_0, l)$.

Замечание 3. Неравенство (3.15) дает априорную оценку точности аппроксимации множества гарантированной достижимости. Однако при численных расчетах можно получать более точные оценки, если непосредственно вычислять отклонение множества $Z^0(x_0, l + C_1\tau)$ от множества $Z_\omega(x_0, l - C_2\tau)$.

Список литературы

1. Лотов А. В. Численный метод построения множества достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 1. С. 67—78.
2. Никольский М. С. Об аппроксимации множества достижимости управляемого процесса//Матем. заметки. 1987. Т. 41. С. 71—76.
3. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
4. Панасюк И. П. Уравнения областей достижимости и их применения в задачах оптимального управления//Автоматика и телемехан. 1982. № 5. С. 67—78.
5. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования//Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307—330.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
7. Пишеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем//Кибернетика. 1970. № 2. С. 54—63.
8. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
9. Иванюлов Ю. П., Мухамедиев Б. М. Линейные многошаговые игры с противоположными интересами//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1977. № 4. С. 49—55.
10. Мухамедиев Б. М. Построение множества достижимости для линейной динамической задачи при наличии помех//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 2. С. 508—512.
11. Мухамедиев Б. М. Численный метод для многошаговой задачи принятия решений в условиях неопределенности//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 6. С. 803—814.
12. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966.
13. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions. Berlin: Springer, 1977.
14. Благодатских В. И. Теория дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1979. Ч. 1.
15. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 04.03.91
Переработанный вариант 10.06.92