Нетривиальность для экспоненциального времени и слабая сводимость

Бакибаев Тимур

(совместная работа с Клаусом Амбос-Шпис)

КазНУ им. аль-Фараби

Алматы, 2010

Полнота и слабая полнота

- Множество $A \in C$ называется полным для класса C, если все множества из класса C могут быть сведены к множеству A.
- (Lutz 1995) Множество $A \in C$ называется слабо полным для класса C, если значительная часть класса C может быть сведена к множеству A.

Экспоненциальная сложность

- Линейно-экспоненциальное время:

$$E = DTIME\left(2^{lin}\right) = \cup_{k \geq 1} E_k,$$

где $E_k = DTIME(2^{kn})$

- Полиномиально-экспоненциальное время:

$$EXP = DTIME\left(2^{poly}\right) = \cup_{k \geq 1} EXP_k,$$

где $EXP_k = DTIME(2^{n^k})$

Сводимости

- $A \leq_m^p B$: «многие-к-одному»
- $A \leq_{k-tt}^p$: таблица истинности, k запросов
- $A \leq_{btt}^p$: объединение k-tt сводимостей
- $A \leq_{tt}^p$: неограниченное кол-во запросов
- $A \leq_T^p$: Тьюринговая сводимость,
  адаптивные запросы

Lutz: Слабая полнота для E и EXP

- Для формализации понятия «значительной» части E или EXP Лютц представил некоторые меры μ_p и μ_{p_2} для E и EXP соответственно и назвал подкласс $C \subseteq E$ (EXP) незначительным, если $\mu_p(C) = 0$ $\left(\mu_{p_2}(C) = 0\right)$.

Определение (Lutz 1995). Множество $A \in E$ называется слабо полным для E если $\mu_p(P_m(A) \cap E) \neq 0$.

Множество A называется слабо полным для EXP если $\mu_{p_2}(P_m(A) \cap EXP) \neq 0$.

Нетривиальность для E (EXP)

Определение (Ambos-Spies). Множество A называется E-нетривиальным, если

$$\forall k \geq 1\ \exists A_k \in E \setminus E_k \left(A_k \leq_m^p A\right),$$

иначе A называется E –тривиальным.

Множество A наз-ся EXP-нетривиальным, если

$$\forall k \geq 1\ \exists A_k \in EXP \setminus EXP_k \left(A_k \leq_m^p A\right),$$

иначе A называется EXP –тривиальным.

Вместе с Клаусом Амбос-Шписом мы изучали данное понятие в течение более трёх лет и результаты вошли в мою PhD диссертацию.

Преимущества нетривиальности

- Нетривиальность, так же, как и слабая полнота по Лютцу показывает, что множество находится не в P.
- Нетривиальных множеств намного больше, чем слабо полных.
- Понятие нетривальности намного проще.

Отношения между типами сводимостей для класса EXP

A m-EXP-полное		A m-EXP-нетривиально
$\Updownarrow$	$\Longrightarrow$	$\Updownarrow$
A 1-tt-EXP-полное		A 1-tt-EXP-нетривиально
$\Downarrow$		$\Updownarrow$
A btt-EXP-полное	$\Longrightarrow$	A btt-EXP-нетривиально
$\Downarrow$		$\Updownarrow$
A tt-EXP-полное	$\Longrightarrow$	A tt-EXP-нетривиально
$\Downarrow$		$\Downarrow$
A T-EXP-полное	$\Longrightarrow$	A T-EXP-нетривиально

Отношения между типами сводимостей для класса E

$$
\begin{array}{ccc}
A\ m\text{-}E\text{-полное} & & A\ m\text{-}E\text{-нетривиально} \\
\Updownarrow & \Longrightarrow & \Updownarrow \\
A\ 1\text{-}tt\text{-}E\text{-полное} & & A\ 1\text{-}tt\text{-}E\text{-нетривиально} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
A\ btt\text{-}E\text{-полное} & \Longrightarrow & A\ btt\text{-}E\text{-нетривиально} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
A\ tt\text{-}E\text{-полное} & \Longrightarrow & A\ tt\text{-}E\text{-нетривиально} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
A\ T\text{-}E\text{-полное} & \Longrightarrow & A\ T\text{-}E\text{-нетривиально}
\end{array}
$$

Теорема

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{c} A\ m\text{-}E\text{-полное} \\ \Updownarrow \\ A\ 1\text{-}tt\text{-}E\text{-полное} \end{array}} & \Longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} A\ m\text{-}E\text{-нетривиально} \\ \Updownarrow \\ A\ 1\text{-}tt\text{-}E\text{-нетривиально} \end{array}} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
A\ btt\text{-}E\text{-полное} & \Longrightarrow & A\ btt\text{-}E\text{-нетривиально} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
A\ tt\text{-}E\text{-полное} & \Longrightarrow & A\ tt\text{-}E\text{-нетривиально} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
A\ T\text{-}E\text{-полное} & \Longrightarrow & A\ T\text{-}E\text{-нетривиально}
\end{array}$$

Существует T-E-полное множество A, которое tt-тривиально для E и EXP

Пусть $C \in E_1$ *-*m*-*E*-полное множество.*

1. $C \leq_T^p A$
2. $A \in E_1$

Существует T-E-полное множество A, которое tt-тривиально для E и EXP

Пусть $C \in E_1$ -m-E-*полное множество.*

1. $C \leq_T^p A$
2. $A \in E_1$
3. $\forall B \left(B \leq_{tt}^p A \Rightarrow B \in E_6 \right)$

Существует T-E-полное множество A, которое tt-тривиально для E и EXP

1. $C \leq_T^p A$
2. $A \in E_1$
3. $\forall B \left(B \leq_{tt}^p A \Rightarrow B \in E_6 \right)$

$$CODE(z) = \{\langle z, y \rangle : |y| \leq 3|z|^2 + 1\}$$

Существует T-E-полное множество A, которое tt-тривиально для E и EXP

1. $C \leq_T^p A$
2. $A \in E_1$
3. $\forall B\left(B \leq_{tt}^p A \Rightarrow B \in E_6\right)$

$$CODE(z) = \{\langle z, y\rangle : |y| \leq 3|z|^2 + 1\}$$
$$C(z) = code(z)(3|z|^2)$$

Существует T-E-полное множество A, которое tt-тривиально для E и EXP

1. $C \leq_T^p A$
2. $A \in E_1$
3. $\forall B \left(B \leq_{tt}^p A \Rightarrow B \in E_6 \right)$

$$CODE(z) = \{\langle z, y \rangle : |y| \leq 3|z|^2 + 1\}$$
$$C(z) = code(z)(3|z|^2)$$
$$A \cap CODE(z) = \{\langle z, y \rangle : y \sqsubseteq code(z)\}$$

Спасибо за внимание!