**Дәріс № 10.**

**4.10. Шексіз аз тізбектер және олардың қасиеттері. Тізбектің шегі. Жинақталатын тізбектердің негізгі қасиеттері. Теңсіздіктерде шекке көшу. Монотонды тізбектің шегі  саны.**

**Дәріс мақсаты:** функцияның шегіне көшпес бұрын, сандық тізбектің шегіне тоқталып, оның шегінің критерийі негізінде  санын енгізу.

**Кілтті сөздер.** Шексіз аз тізбек. Тізбектің шегі. Жинақталатын тізбектердің қасиеттері. Теңсіздіктерде шекке көшу. Монотонды сандық тізбектің шегі  саны. Натурал логарифм.

***Қысқаша мазмұны.***

**4.10.1. Шексіз аз тізбектер және олардың қасиеттері.**

**Анықтама 1.**  сандық тізбектің *шексіз аз сандық тізбек* деп атаймыз, егер кезкелген оң  саны үшін  номері табылып,  болғанда  теңсіздігі орындалатын болса.

Анықтаманы жоғарыда келтірілген кванторларды (логикалық символдарды) қолданып қысқаша төмендегі түрде жазуға болады:



**4.10.2. Шексіз аз тізбектердің қасиеттері.**

**Теорема 4.10.2.** Екі шексіз аз тізбектердің қосындысы шексіз аз тізбек болады.

*Дәлелдеуі.*  және  – шексіз аз тізбегі болсын. Бізге дәлелдеу керек.

 – олардың қосындысының шексіз аз тізбек болатындығы.

 – шексіз аз тізбек болса, онда   – нөмері табылып, одан үлкен болатын  нөмерлері үшін, яғни  теңсіздігі орындалады.

 үшін  үшін   теңсіздігі орындалады белгілесек онда

 және  теңсіздіктері  болғанда бірдей орындалады.



 

Олай болса  тізбегі шексіз аз тізбек болады.

*Ескерту*  – шексіз аз тізбек болады.

**Теорема 4.10.3.** Шексіз аз тізбектердің көбейтіндісі шексіз аз тізбек болады.

 *Дәлелденуі:*  және  – шексіз аз тізбектер.  – шексіз аз тізбек, олай болса.

 үшін 

 

соңғы теңсіздік  – шексіз аз тізбек екендігін көрсетеді.

**Теорема 4.10.4.** Шектелген тізбектің шексіз аз тізбекке көбейтіндісі шексіз аз тізбек болады.

*Дәлелдеуі:*  - шектелеген, ал  – шексіз аз тізбектер болсын  тізбегінің шексіз аз тізбек болатындығын дәлелдеу керек.  шектелеген тізбек, олай болса, оң санының орнына  санын алайық, ол үшін  олай болса



 

Соңғы теңсіздіктен  сандық тізбегінің шексіз аз тізбек екендігі шығады.

**4.10.5. Тізбектің шегі.**

**Анықтама 1.**  санын  *сандық тізбегінің шегі* деп атайды, егер кезкелген оң  саны үшін сондай  номері табылып, теңсіздігі орындалатын болса.



Шегі бар тізбекті *жинақталатын тізбек* деп атайды да  немесе   символымен белгілейді.

Шегі жоқ тізбекті *жинақталмайтын тізбек* деп атайды.

Мысалы, дәлелдейік.

 

   

 яғни 

 теңсіздігі  номерлері үшін орындалады, олай болса .

**4.10.6. Жинақталатын тізбектердің қасиеттері.**

**Теорема 4.10.6.**  және  жинақталатын тізбектердің қосындысы да жинақталатын тізбек болады және оның шегі шектердің қосындысына тең болады, яғни



*Дәлелденуі:*  және  сандық тізбектері жинақталатын тізбектер олай болса

   

   



  



Себебі біріншіден екі шексіз аздардың қосындысы шексіз аз тізбек болады, екіншіден кезкелген айнымалы шаманы тұрақты сан мен шексіз аз шаманың қосындысы ретінде ұсынуға болса, онда осы айнымалы шаманың шегі тұрақты сан болады.

**Теорема 4.10.7.** Егер  және  сандық тізбектері жинақталатын болса, онда олардың көбейтіндісі де жинақталатын тізбек болады және



теңдігі орындалады.

**Теорема 4.10.8.** Егер  және  сандық тізбектері жинақталатын сандық тізбек болса онда сандық тізбегі де жинақталады және  теңдігі орындалады, 

Мысалы.  шегін табу керек.  бөлшектің алымы да, бөлімі де шексіз өседі. Теорема 4.10.8 қолдануға болмайды. Сондықтан бұл тізбекті алдымен алымын да бөлімін де  бөліп түрлендіреміз.





**4.10.7. Теңсіздіктерде шекке көшу**

**Теорема 4.10.7.** ,  және сандық тізбектері берілсін, сонымен қатар барлық  үшін  теңсіздіктері орындалсын және  болса. Онда  болады.

*Д/уі.*   сандық тізбегі үшін 



Дәл сол сияқты  сандық тізбегі үшін 

  





Осыдан  яғни



**4.10.8. Монотонды сандық тізбектер.**

**Анықтама 1.**  сандық тізбегін *өспелі* деп атайды, егер *кемімейтін* деп атайды, егер  *кемімелі* деп атайды, егер  *өспейтін* деп атайды, егер .

Мұндай тізбектердің барлығын *монотонды тізбектер* (бірсарынды) деп жалпы атпен атайды.

**Теорема 4.10.8.** Шектелген монотонды тізбектің шегі бар болады.

**4.10.9.  саны.**

Жалпы мүшесі  түрінде болатын  сандық тізбегін қарастырайық



Жоғарғы математика бойынша кезкелген оқулықта бұл тізбектің өспелі, яғни  және шектелген екендігі, яғни  келтірілген.

Монотонды, шектелген тізбектің әрқашан шегі бар болады. Бұл шекті арқылы белгілейді.  саны математиканың көптеген салаларында маңызды рөл атқарады.

**Бақылау сұрақтары.**

1. Шексіз аз тізбек деп қандай тізбекті айтады?
2. Екі шексіз аз тізбектердің қосындысы және көбейтіндісі қандай тізбектер болады?
3. Шектелген тізбек пен шексіз аз тізбектердің көбейтіндісі қандай тізбек болады?
4. Тізбектің шегі деп нені айтады?
5. Шегі бар тізбекті тұрақты сан мен шексіз аз тізбек түрінде жазуға бола ма?
6. Теңсізіктерде шекке көшуге бола ма?
7. Монотонды тізбектің шегі қандай кезде бар болады?
8. Саны дегеніміз не?

**Әдебиет.**

1. В.С.Шипачев. Высшая математика.
2. Қазақша жазылған жоғарғы математика бойынша кезкелген оқулықты қолдануға болады.