

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ОБЩИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ

Алматы 2014

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИ-
ТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ОБЩИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ

для студентов высших
учебных
заведений

Издание третье, исправ-
ленное и дополненное

Алматы
«Қазақ университеті»
2014

УДК 531(075.8)

ББК 22.2я73

М 55

*Рекомендовано к изданию Ученым советом
физико-технического факультета
и РИСО КазНУ им. аль-Фараби*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор М.Е.Абишев,
доктор физико-математических наук, профессор К.М. Мукашев

Коллектив авторов:

Исатаев С.И., [Исабаев Е.А.], Аскарова А.С., Исатаев М.С.,

Кашкаров В.В., Корзун И.Н., Локтионова И.В., [Омирбеков Ж.О.]

, [Ползик В.В.], [Бердибаев М.С.], Лаврищев О.А., Толеуов Г., Болегенова

С.А., Есеналина К.А., Досаева Б. Т.

Молекулярная физика. Общий физический практикум. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. /Исатаев С.И., Аскарова А.С., Кашкаров В.В., Корзун И.Н., Локтионова И.В. и др. Алматы: «Қазақ университеті», 2014, 170 стр.

ISBN 978-601-04-0462-5

Учебное пособие составлено в соответствии с действующими университетскими программами по общему курсу физики для студентов, изучающих курс общей физики, и содержит введение, описания 10 лабораторных работ по разделу “Молекулярная физика”. Каждая работа содержит краткое теоретическое введение, описание экспериментальной установки, рабочее задание, а также методику проведения экспериментов и обработки их результатов.

Пособие может быть использовано в высших учебных заведениях для физических и физико-технических специальностей.

УДК 531(075.8)

ББК 22.2я73

ISBN 978-601-04-0462-5

© Исатаев С.И. и др., 2014
© КазНУ им. аль-Фараби, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие является второй частью пособия по общему физическому практикуму. В первой части, содержащей лабораторные работы по механике и предваряющей весь физический практикум, говорится о роли физического эксперимента, особенностях его проведения, обработке экспериментальных результатов и их представлении. Эти же вопросы рассмотрены и в предисловии к данному пособию.

Настоящее учебное пособие отвечает требованиям программы раздела "Молекулярная физика" курса общей физики для физических факультетов университетов и содержит описания десяти лабораторных работ, поставленных на физическом факультете КазНУ им. аль-Фараби.

Большинство лабораторных работ поставлено заведующим кафедрой теплофизики и молекулярной физики КазНУ им. аль-Фараби профессором С.И.Исатаевым и соавторами настоящего пособия.

Лабораторная работа №1 "Биномиальный закон распределения вероятностей" поставлена Е.А.Исабаевым. Описание этой работы переработано И.В.Локтионовой.

Лабораторная работа №5 "Определение отношения C_p / C_v с помощью стоячих волн" поставлена С.И.Исатаевым и Е.А.Исабаевым.

Третье издание пособия было отредактировано и дополнено доцентами И.Н.Корзун и В.В.Кашкаровым.

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача физического практикума – количественное изучение физических явлений, воспитание у студентов навыков самостоятельной исследовательской работы и грамотного измерения физических величин. Студенты во время лабораторного занятия самостоятельно проводят физические опыты, знакомясь при этом с важнейшими измерительными приборами, приобретают навыки производить точные измерения и грамотно обрабатывать полученные результаты.

Физические измерения

Во время проведения опытов производятся самые различные измерения.

Измерение есть нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. В физическом практикуме измерения проводятся с целью установления функциональной зависимости между двумя и более величинами.

Существует несколько видов измерений. При классификации их обычно исходят из характера зависимости измеряемой величины от времени, условий, определяющих точность результата измерений и способов выражения этих результатов.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени измерения разделяются на *статические, при которых измеряемая величина остается постоянной*, например, измерение геометрических размеров тела, постоянного давления и т. д., *динамические, в процессе которых измеряемая величина изменяется*, например, измерение амплитуды затухающих колебаний, пульсация скорости и т.д.

По способу получения результатов измерения разделяют на *прямые, косвенные, совокупные и совместные*.

Прямые измерения – это измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно с помощью измерительного прибора.

В этом случае значение физической величины определяется при непосредственном контакте измерительного прибора с объектом, т.е. количественное значение искомой величины определяется по показаниям прибора, сразу, без дальнейшей обработки результатов. Например, измерение размеров тела с помощью микрометра, времени - секундомером и т.д. Прямые измерения можно выразить формулой $x = Q$, где x – искомая величина, а Q – значение, непосредственно получаемое из опытных данных. Прямые измерения широко применяются в машиностроении, технологических процессах и т. д.

Косвенные измерения – это измерения, при которых искомую величину определяют на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Косвенные измерения можно описать формулами

$$x = f(Q_1, Q_2, Q_3, \dots),$$

где x – значение искомой величины;

$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ – значения величин, измеренных прямым способом.

Примерами косвенных измерений могут служить определение объема тела по прямым измерениям его геометрических размеров, нахождение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения. Косвенные измерения широко распространены в тех случаях, когда искомую величину невозможно или слишком сложно найти в результате прямого измерения. Роль косвенных измерений особенно

велика при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению, например, размеров астрономического или внутриатомного порядка.

Совокупные измерения - это производимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомую величину определяют решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин. Примером совокупных измерений является определение массы отдельных гирь набора (калибровка) по известной массе одной из них и по результатам прямых сравнений масс различных сочетаний гирь.

Пусть, например, необходимо произвести калибровку разновеса, состоящего из гирь массой 1, 2, 2*, 5, 10 и 20 кг (звездочкой отмечена гиря, имеющая то же самое номинальное значение). Калибровка состоит в определении массы каждой гири по одной образцовой гире, например, по гире массой 1 кг. Для этого проведем измерения, меняя каждый раз комбинацию гирь (цифры показывают массу отдельных гирь, 1_{об} означает массу образцовой гири в 1 кг):

$$1 = 1_{об} + a,$$

$$1 + 1_{об} = 2 + b,$$

$$2^* = 2 + c,$$

$$1 + 2 + 2^* = 5 + d \text{ и т.д.}$$

Буквы a , b , c и d означают грузики, которые приходится прибавлять или отнимать от массы гири, указанной в правой части уравнения. Решив эту систему уравнений, можно определить значение массы каждой гири.

Совместные измерения – это производимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для нахождения зависимостей между ними. В качестве примера совместных измерений можно назвать измерение электрического сопротивления при 20⁰С и температурных коэффициентов измерительного резистора по данным

прямых измерений его сопротивления при различных температурах.

По условиям, определяющим точность результата, измерения делятся на три класса:

1. *измерения максимально возможной точности, достижимой при существующем уровне техники*; к ним относятся эталонные измерения, измерения физических постоянных;
2. *контрольно-поверочные измерения, погрешность которых не должна превышать некоторое заданное значение*; к ним относятся измерения, проводимые лабораториями госнадзора для контроля над соблюдением государственных стандартов;
3. *технические измерения, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений*; к ним относятся измерения, проводимые в научно-исследовательских работах, в производстве и др.

Единицы измерения физических величин

Поскольку физические величины находятся между собой в функциональной связи, нельзя устанавливать их единицы измерения произвольно. Произвольно установлены единицы измерения семи физических величин, называемых основными единицами в СИ. Это единицы измерения следующих физических величин: длина (метр), масса (килограмм), время (секунда), температура (Кельвин), сила тока (Ампер), сила света (кандела), количество вещества (моль).

Международная система единиц включает в себя две дополнительные к основным единицам, это единицы для измерения плоского (радиан) и телесного (стерадиан) углов. Единицы измерения остальных физических величин находятся из соотношений, определяющих эти величины. Поэтому их называют производными величинами.

Погрешности измерений

Измерить значение физической величины с абсолютной точностью невозможно. Потому что, во-первых, не существует такого точного прибора, во-вторых, возможности органов чувств человека ограничены. Поэтому, когда идет речь об измеренной величине, необходимо указывать погрешность данного измерения.

По природе возникновения погрешности делятся на систематические, случайные и промахи.

Факторы, постоянные или закономерно изменяющиеся в процессе измерительного эксперимента, например, начальное отклонение стрелки прибора от нуля, являются систематическими погрешностями. Систематические погрешности подразделяются на приборные, методические и погрешности метода обработки данных.

Приборные погрешности

Точность измерения любого измерительного прибора ограничена. Погрешности приборов, предназначенных для производственных целей (амперметров, вольтметров, потенциометров и т.д.) определяются их классами точности. Класс точности обычно выражается в процентах. Например, амперметр с классом точности 0,2% определяет значение силы тока, соответствующего полной шкале, с погрешностью, не превышающей 0,2%.

Класс точности прибора, независимо от положения стрелки, показывает минимальную относительную погрешность, а относительная погрешность измеряемой величины увеличивается с приближением стрелки к началу отчета шкалы. Поэтому при измерениях нужно стараться работать во второй половине шкалы. Немаловажно, под каким углом смотреть на стрелку при отсчитывании показания прибора. Чтобы свести к минимуму погрешности,

нужно смотреть на стрелку прибора под прямым углом, т.е. перпендикулярно шкале.

Методические погрешности

К таким погрешностям относятся, например, погрешности методики измерения. Например, неучет силы трения вала в лабораторной работе № 3 при определении момента инерции диска динамическим методом или проверка реальной жидкостью (водой) уравнения Бернулли, полученного для идеальной жидкости.

Погрешности методики обработки результатов

Они возникают вследствие неправильной или несовершенной методики при определении искомой величины путем вычислений и при определении самих погрешностей.

При увеличении числа измерений систематические погрешности не уменьшаются. Для их уменьшения используются более точные приборы и наиболее совершенные методики измерения и обработки данных.

Случайные погрешности.

Случайные погрешности – это составляющие погрешности измерения, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. К ним можно отнести, наряду со случайными изменениями напряжения в электросети, температуры в лаборатории и др., факторы, связанные с несовершенством органов чувств человека и его навыков. В процессе измерения значение и знак случайной погрешности не остаются постоянными. Чтобы уменьшить случайную погрешность, нужно:

1. уменьшить влияние внешних факторов;
2. проводить измерения внимательно и тщательно;
3. увеличить число опытов.

Промахи.

Грубые погрешности (промахи) – погрешности измерения, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях. Они возникают вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. При обнаружении грубых погрешностей такие измерения отбрасывают.

Способы нахождения погрешностей прямых измерений подробно описаны в лабораторной работе № 1, поэтому здесь мы их не рассматриваем, и перейдем к методике нахождения погрешностей косвенных измерений.

Нахождение погрешностей косвенных измерений

Рассмотрим несколько частных случаев соотношений двух или нескольких величин, связанных между собой функционально.

1. Рассмотрим сумму или разность двух величин:

$$A = B \pm C. \quad (1)$$

Наиболее вероятными значениями величин B и C являются их среднеарифметические значения $\langle B \rangle$ и $\langle C \rangle$. Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают среднеарифметическое значение.

Наилучшее значение величины A равно сумме (или разности) наилучших значений слагаемых:

$$A = \langle B \rangle \pm \langle C \rangle. \quad (2)$$

Среднеквадратичная погрешность S_A , если величины B и C независимы, находится по формуле:

$$S_A = \sqrt{S_B^2 + S_C^2}, \quad (3)$$

иначе говоря, складываются не сами погрешности, а их квадраты.

2. Пусть искомая величина равна произведению или частному двух других:

$$A = B \cdot C \text{ или } A = B/C. \quad (4)$$

Наиболее вероятные значения величины A находим по формулам:

$$A = \langle B \rangle \cdot \langle C \rangle \quad \text{или} \quad A = \frac{\langle B \rangle}{\langle C \rangle}. \quad (5)$$

Относительные среднеквадратичные погрешности произведения и частного независимых величин находятся по формуле:

$$\frac{S_A}{A} = \sqrt{\left(\frac{S_B}{\langle B \rangle}\right)^2 + \left(\frac{S_C}{\langle C \rangle}\right)^2}. \quad (6)$$

3. Рассмотрим произведение нескольких величин в различных степенях:

$$A = B^\alpha \cdot C^\beta \cdot E^\gamma \dots \quad (7)$$

Относительная среднеквадратичная погрешность величины A при независимых $B, C, E, \dots$ находится по формуле:

$$\left(\frac{S_A}{A}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{S_C}{C}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{S_E}{E}\right)^2 + \dots \quad (8)$$

4. Приведем общую расчетную формулу. Пусть

$$A = f(B, C, E, \dots), \quad (9)$$

где f – произвольная функция величин B, C, E и т.д.

Тогда наилучшее значение A будет:

$$A_{\text{наил}} = f(\langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle E \rangle, \dots). \quad (10)$$

Среднеквадратичная погрешность A находится по формуле:

$$S_A^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 S_B^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2 S_C^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)^2 S_E^2 + \dots \quad (11)$$

Обозначение $\frac{\partial f}{\partial B}$ имеет обычный смысл частной

производной функции f по B , т.е. производной, при нахождении которой все остальные аргументы, кроме B , считаются постоянными. Частные поизводные следует вычислять при наилучших значениях аргументов $B_{\text{наил}}$, $C_{\text{наил}}$, $E_{\text{наил}}$ и т.д.

Рассмотрим некоторые следствия, которые могут быть получены из анализа формул, приведенных выше.

1. Следует избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух больших чисел. Так, толщину стенки трубы плохо определять, вычитая ее внутренний диаметр из внешнего (и, конечно, деля результат пополам). Относительная погрешность измерения при этом сильно увеличивается, так как измеряемая величина – в нашем случае толщина стенки – мала, а ошибка в ее определении находится путем сложения погрешностей измерения обоих диаметров и поэтому возрастает.

2. Следует определять все измеряемые величины с приблизительно одинаковой относительной погрешностью. Так, если объем тела измерен с погрешностью 1%, то для определения плотности тратить силы и время на измерение массы тела с погрешностью 0,01% в этом случае не имеет смысла.

3. При вычислении погрешности произведения степенных функций нужно обратить внимание на член с высокой степенью. Согласно приведенной выше формуле (8) относительная погрешность сомножителя прямо пропорциональна квадрату его степени. В связи с этим отдельными членами можно пренебречь.

В реальных опытах систематические и случайные погрешности присутствуют одновременно. Обычно они являются независимыми, поэтому полную погрешность можно определить по следующей формуле:

$$S_{\text{ит}}^2 = S_{\text{неод}}^2 + S_{\text{нео}}^2. \quad (12)$$

Приближенные вычисления и правила округления

В процессе выполнения лабораторной работы приходится измерять несколько величин с различной точностью. Если величины, входящие в формулу, имеют различные

погрешности, то нужно обратить внимание в первую очередь на величину с максимальной погрешностью. Тогда при определении общей погрешности не стоит углубляться в вычисление погрешности величин, точности которых многократно превосходит величину с максимальной погрешностью. Иногда их просто отбрасывают.

Точность вычисления искомой величины должна быть в пределах точности измерений. Когда точности вычислений намного превосходят точности измерений, это считается скорее недостатком работы, нежели преимуществом. Поэтому важно знать основные правила округления.

Правила округления и приближенного вычисления

Округляя приближенное число, нужно отбрасывать последние цифры, если первая из отбрасываемых цифр меньше 5 и прибавлять единицу к предыдущей цифре, если первая из отбрасываемых цифр больше 5. Если же первая из отбрасываемых цифр равна 5, то имеется два варианта. Если предыдущая цифра нечетная, то к ней прибавляется единица, если четная – ничего не прибавляется.

Например: $a = 21,314 \approx 21,31$; $\pi = 3,141593 \approx 3,1416$,
 $\pi = 3,141593 \approx 3,14$; $l = 12,15 \text{ м} \approx 12,2 \text{ м}$; $t = 5,25 \text{ с} \approx 5,2 \text{ с}$.

Сама запись значения физической величины несет информацию о степени погрешности. В самом деле, если все цифры написанного числа истинны, то цена последней цифры дает точность измерения или вычисления. Например: $t = 5,021000 \text{ с}$, тогда в записи времени погрешность можно оценить приблизительно как 1 мкс .

Теперь о значащих цифрах. Значащими цифрами называются все верные цифры, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, в числе 0,000205 имеется три значащие цифры. Первые четыре нуля слева – незначащие, ноль между двойкой и пятёркой – значащий. В числе 2300 – четы-

ре значащие цифры. Запись $6,1 \cdot 10^3$ означает, что значащих цифр только две (шестёрка и единица).

В окончательной записи погрешность измерения принято выражать числом с одной или двумя значащими цифрами. Две цифры удерживают при наиболее точных измерениях, а также, если цифра старшего разряда числа выражающего погрешность, равна трём или меньше трёх. При этом для младшего разряда применяют только цифру 5.

Однако нужно заметить, что при промежуточных выкладках для того, чтобы погрешности округления не слишком искажали результаты, нужно удерживать по три-четыре значащие цифры в зависимости от выполняемых вычислительных операций.

Некоторые рекомендации к выполнению лабораторной работы

Весь процесс выполнения лабораторной работы условно можно разделить на четыре этапа.

1. *Подготовительный этап.* Каждая лабораторная работа физического практикума посвящена изучению конкретного физического явления или процесса, закономерности которого предстоит выявить. На вводном занятии физического практикума всем студентам дается тема лабораторной работы, которую на следующем занятии студент обязан выполнить. Для этого он дома (в библиотеке) должен ознакомиться с теорией данной работы, устройством установки (по чертежам) или экспериментальной модели и ходом выполнения экспериментальной части лабораторной работы. Основным источником информации является методическое описание к лабораторной работе. Оттуда студент конспектирует название и цель работы, краткую теорию рассматриваемой задачи, описания установки, ход выполнения работы и методы математической обработки полученных результатов. На занятии физического практикума

студент с собой приносит чертежные инструменты, миллиметровую бумагу, многофункциональный калькулятор и др.

2. *Экспериментальная часть.* Этот этап физического практикума проводится непосредственно в учебной лаборатории. К эксперименту допускаются студенты, подтвердившие хорошую подготовленность к выполнению работы. Необходимые в работе приборы, инструменты и детали выдает лаборант. Измерения проводятся студентом **самостоятельно**. Студент вносит в лабораторный журнал табличные данные физических постоянных, параметры установки и данные эксперимента. По окончании эксперимента преподаватель проверяет правильность измерений, если все правильно, то расписывается в журнале. После подписи преподавателя вносить какие-либо изменения в таблицу данных **запрещается**.

3. *Математическая обработка результатов эксперимента.* В этой части вычисляют искомую величину, строят графики процессов, находят погрешности измерения и проводят анализ полученных результатов. В анализе результатов нужно обратить внимание на причины, оказывающие влияние на результаты опытов.

4. *Защита результатов лабораторной работы.* В этой окончательной части студент обосновывает полученные им результаты перед преподавателем путем собеседования. Он рассказывает о теории данного вопроса, выводит окончательную формулу, отвечает на вопросы, приведенные в конце описания.

Графический способ обработки данных

В экспериментальной физике графики используются для различных целей. Например:

- для определения величин;

- для наглядного описания процесса;
- для нахождения эмпирического соотношения между величинами;
- для сравнения результатов эксперимента с данными теории и других авторов и др.

Графики рисуют на линейной или логарифмической миллиметровой бумаге. При определении функциональной зависимости принято откладывать значения аргумента вдоль оси абсцисс, а значения функции – вдоль оси ординат. Перед построением графиков необходимо уточнить минимальное и максимальное значения величин по осям абсцисс и ординат и выбрать наиболее удобный масштаб. Результаты эксперимента на графике принято отображать значками, а теории – сплошной линией. Если привести на одном и том же графике линии, соответствующие разным режимам одного процесса, это дает наглядное представление о динамике изменения процесса в зависимости от параметров режима. Оптимально подбирая масштаб, нужно добиться, чтобы экспериментальные точки на графике располагались по всей плоскости рисунка.

Обычно точки на графике располагаются по определенной закономерности. Если какая-либо точка не подчиняется этой закономерности (лежит в стороне), нужно настояться: либо имеет место интересный эффект, либо – грубая погрешность. Если измерение выполнено правильно, то окрестности данной точки исследуются более подробно, с целью выяснения эффекта.

По размерам символов на графике можно судить о погрешностях измерения.

Размеры символов графика определяется выражением:

$$\frac{1}{2}l = \pm S.$$

Здесь l - линейный размер символов.

При построении графиков нужно стараться придать линейный характер зависимостям, поскольку линейная функциональная зависимость величин легко «прочитывается» и из нее достаточно просто получить эмпирическую зависимость. Рассмотрим несколько способов линеаризации зависимостей.

1. Пусть процесс описывается квадратичной функцией. Рассмотрим закон падения тел, который описывается формулой:

$$S = \frac{gt^2}{2}.$$

Если откладывать по осям графика S и t , то точки лягут на параболу, которую провести на глаз почти невозможно. Но если откладывать по осям S и t^2 , или $\sqrt{S}$ и t , или $\ln S$ и $\ln t$, то график приобретает вид прямой линии.

В общем случае, приведя квадратичную зависимость к виду $y = ax + b$, можно определить неизвестные постоянные a и b .

2. Пусть процесс описывается степенной зависимостью $y = x^n$.

Прологарифмируем обе стороны этой формулы:

$$\ln y = n \ln x.$$

Если по осям отложить переменные $\ln y$ и $\ln x$, то получим прямую линию.

Метод наименьших квадратов

В общем случае многие сложные выражения можно привести к линейному виду:

$$y = ax + b. \quad (13)$$

Параметры a и b этой зависимости можно найти аналитическим способом, используя опытные данные. Пусть на

опыте получено значение y_i ($i=1,2,\dots,n$), соответствующее значению x_i . Тогда значения a и b в формуле (13), соответствующие наиболее точной зависимости y_i и x_i , можно найти по «методу наименьших квадратов».

Если подставить опытные значения x_i и y_i в (13), из-за погрешностей в измерениях x_i и y_i равенство (13) обычно не выполняется, т.е.

$$y_i - (ax_i + b) \neq 0. \quad (14)$$

Возведём эту разность в квадрат. Далее найдём сумму квадратов этих разностей для всех измерений:

$$D = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (15)$$

По «методу наименьших квадратов» для параметров a и b , которые соответствуют наиболее точной аппроксимирующей линейной зависимости между величинами y и x , в формуле (15) D должно иметь минимальное значение. Поэтому, чтобы найти такие значения параметров a и b , из уравнения (15) найдем частные производные от D по a и b и приравняем полученные выражения нулю.

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n \{[y_i - (ax_i + b)] \cdot x_i\} = 0. \quad (17)$$

Отсюда:

$$\sum_{i=1}^n y_i - nb - a \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - b \sum_{i=1}^n x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \quad (19)$$

Решая полученную систему уравнений, можно найти значения параметров a и b для наиболее точной аппроксимирующей линейной зависимости:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (20)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (21)$$

Если линейная зависимость проходит через начало координат:

$$y = ax, \quad (22)$$

тогда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (23)$$

Метод наименьших квадратов позволяет найти погрешности параметров линейной зависимости, определяемых по формулам (20) и (21):

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n-2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n(n-2)} - \frac{\left(n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n(n-2) \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}, \quad (24)$$

$$S_a^2 = \frac{n S_0^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (25)$$

$$S_b^2 = \frac{S_0^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (26)$$

Здесь S_0 – средняя квадратичная погрешность отдельного измерения,

S_a и S_b – средние квадратичные погрешности параметров линейной зависимости $y = ax + b$.

Лабораторная работа № 1

БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Цель работы: экспериментальная проверка биномиального распределения и сравнение его с распределением Лапласа-Гаусса и распределением Гаусса.

1.2. Краткое теоретическое введение

1.2.1. Детерминированные и статистические законы.

По форме проявления причинных связей законы природы делятся на два класса: *детерминированные и статистические*.

Например, на основании законов механики по известному в настоящем положению планет Солнечной системы может быть практически однозначно предсказано их положение в любой наперёд заданный момент времени, в том числе очень точно могут быть предсказаны солнечные и лунные затмения. Это пример *детерминированных* законов.

Вместе с тем не все явления макромира поддаются точному предсказанию, несмотря на то, что наши знания о нем непрерывно углубляются и уточняются. Например, подбросив монетку, на основании законов механики практически невозможно точно предсказать, как она упадет: орлом или решкой. О результате подбрасывания можно говорить только с определенной вероятностью. Такого рода законы называются *статистическими*.

Так, зная, что вероятность выпадения орла и решки одинаковая, можно утверждать, что, подбросив в очередной раз монетку, увидим, что орел выпадет с вероятностью 0,5 или 50%. Это означает, что при подбрасывании монетки 10 раз в пяти случаях должен выпасть орел, а в остальных

ных пяти – решка. Чем больше совершить бросаний, тем точнее будет выполняться эта закономерность, то есть проверить экспериментально статистические законы можно только при большом количестве испытаний.

В описанном примере существует принципиальная возможность предсказания исхода конкретного испытания, если абсолютно точно знать, с какой скоростью подброшена монетка, под каким углом, каково сопротивление среды, в которой она движется, ускорение свободного падения в данной точке Земли и т.д., то есть все факторы, влияющие на ее движение. В действительности практически невозможно учесть влияние абсолютно всех сил и воздействий, которые, накладываясь друг на друга, приводят к тому, что результат подбрасывания является случайной величиной.

Еще менее детерминированными являются многие законы микромира. Например, с точки зрения квантовой физики нельзя говорить о положении электрона в определённой точке пространства и в определённый момент времени, а можно лишь определить состояние системы с некоторой вероятностью, являющейся мерой возможности реализации заложенных в прошлом тенденций изменения.

Молекулярная физика занимает как бы промежуточное положение между макроскопическими процессами, подчиняющимися детерминированным законам природы, и квантово-механическими явлениями, описываемыми, в основном, статистическими закономерностями. Поэтому процессы, происходящие в газах и жидкостях, можно описать как с феноменологической точки зрения (термодинамика), так и используя статистический подход (молекулярно-кинетическая теория).

Так, например, биномиальное распределение вероятностей используется в молекулярной физике для вычисления вероятности макросостояния системы, состоящей из большого числа частиц, а также для определения связи между

равновесными и наиболее вероятными ее состояниями. Кроме того, на основе биномиального распределения можно получить математическую зависимость относительной флуктуации от числа частиц в системе.

Кроме того, существует глубокая аналогия между моделью идеального газа и распределением плотности вероятности Гаусса для случайных непрерывных величин. Используя это распределение, можно вывести закон Максвелла для распределения молекул по скоростям и по энергиям.

1.2.2. Основные понятия теории вероятности.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет при выполнении определенных условий. Соответственно, *невозможным* является событие, которое при заданных условиях никогда не произойдет.

Случайным называется такое событие, которое при заданном комплексе условий может как произойти, так и не произойти. Мера возможности осуществления такого события и есть его *вероятность*.

Элементарные события – это возможные исключающие друг друга исходы опыта.

Например, однократное бросание монеты – это опыт, а элементарные события – это выпадение либо орла (событие A), либо решки (событие B). Таким образом, в данном опыте количество элементарных событий равно 2.

Вероятность p события A равна числу элементарных событий, благоприятных для A , деленному на общее число всех возможных элементарных событий.

Если опыт таков, что он состоит из конечного числа элементарных событий, которые являются равновероятными, то речь идет о *классическом случае*.

Примеры.

1. При подбрасывании монеты вероятность выпадения

орла равна вероятности выпадения решки и равна $1/2$.

2. При бросании игральной кости, на каждую из шести граней которой нанесены цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6, вероятность выпадения любой из цифр одинакова и равна $1/6$.

1.2.3. Биномиальное распределение.

Как же проверить, что вероятность выпадения, например, орла равна $1/2$? Очевидно, необходимо провести n опытов, из которых в 50% случаев должен выпасть орел, а в 50% – решка. На практике при небольшом n это может не выполняться, то есть, например, из 10 бросаний не обязательно 5 раз выпадет орел, а 5 раз – решка. Однако в 100 опытах эта закономерность выполнится точнее, в 1000 – еще точнее и т.д. Абсолютно точно это распределение (50×50) выполнится при $n \rightarrow \infty$. Однако на практике мы можем провести только конечное число опытов. Поэтому возникает вопрос, какова вероятность того, что из n опытов $n/2$ раз выпадет орел? В более общем случае можно определить вероятности того, что из n опытов орел выпадет $0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$ раз.

Итак, пусть опыт повторяется n раз. Вероятность того, что из n опытов орел выпадет k раз (то есть событие A произойдет k раз), определяется биномиальным законом распределения:

$$w\left(\frac{k}{n}; p\right) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.1)$$

где $C_n^k = n!/k!(n-k)!$ – число сочетаний из n по k ,

p – вероятность выпадения орла при однократном бросании (или вероятность события A),

q – вероятность невыпадения орла при однократном бросании (или вероятность того, что в отдельном опыте не

произойдет это событие, то есть произойдет второе событие – выпадение решки).

Вывод формулы (1.1) дан в **ПРИЛОЖЕНИИ 1**.

Для того, чтобы упростить задачу, можно, вместо того, чтобы подбрасывать одну монету n раз, подбросить одновременно n монет. Тогда формулу (1.1) можно интерпретировать следующим образом: $w\left(\frac{k}{n}; p\right)$ – это вероятность

того, что из n одновременно подброшенных монет орлом выпало k монет. Однако, чтобы экспериментально проверить формулу (1.1), необходимо опыт с подбрасыванием n монет провести N раз, и чем больше N , тем лучше будет согласие результатов такого эксперимента с теоретическим распределением (1.1).

Биномиальное распределение справедливо при выполнении следующих условий:

- число испытаний n фиксировано;
- исход каждого опыта не зависит от результата других испытаний (независимые элементарные события);
- вероятность p события A не зависит от номера опыта, т.е. $p = \text{const}$;
- вероятность q того, что событие A не произойдет, равна: $q = 1 - p$.

Совокупность этих условий называется *математической моделью биномиального эксперимента*.

Примеры

1. Вероятность того, что из 10 подбрасываний монеты 6 раз выпадет орел, равна ($p = 1/2$):

$$w(6/10; 1/2) = \frac{10!}{6! 4!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{210}{1024} = 0,205..$$

2. Вероятность того, что из 3-х бросаний игральной кости

3 раза выпадет "6", равна ($p = 1/6$):

$$w(3/3; 1/6) = \frac{3!}{3! 0!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216} = 0,005.$$

3. Вероятность рождения мальчика равна $p = 0,515$. Вероятность того, что из 10 новорожденных будет 5 мальчиков, равна:

$$w(5/10; 0,515) = \frac{10!}{5! 5!} (0,515)^5 (0,485)^5 = 252 \cdot 0,036 \cdot 0,027 = 0,245..$$

1.2.4. Свойства биномиального распределения.

Величина k в формуле (1.1) является случайной, так как мы не знаем точно, когда это событие произойдет, а можем прогнозировать его появление только с определенной вероятностью. В теории вероятностей различают *дискретные и непрерывные* случайные величины.

Дискретной называется случайная величина, принимающая конечное, или счетное, число значений. Это может быть некоторый набор чисел или функция, принимающая дискретные значения.

Непрерывной называется случайная величина, принимающая непрерывное множество значений (вспомните понятие непрерывности в математическом анализе).

Например, случайная величина k в формуле (1.1) является дискретной, а результат многократных измерений некоторой физической величины a (это может быть, например, ускорение, характерный размер тела, коэффициент температуропроводности и т.д.) является непрерывной случайной величиной, так как при измерениях могут получиться любые значения внутри некоторого интервала.

Математическое ожидание определяется следующим образом: *это среднее арифметическое случайной величи-*

ны, найденное с учетом вероятностей. Математически оно определяется формулой:

$$m_k = \sum_{k=0}^n k \cdot w\left(\frac{k}{n}; p\right). \quad (1.2)$$

Как показано в **ПРИЛОЖЕНИИ 2**, для биномиального распределения

$$m_k = n p. \quad (1.3)$$

Если $p = q$, то математическое ожидание совпадает с наиболее вероятным значением. Отсюда следует, что максимальная вероятность в опыте с монетой соответствует равномерному распределению монет (поровну по двум состояниям).

***Дисперсия** – это среднее квадратов отклонений случайной величины от своего математического ожидания с учетом вероятности:*

$$\sigma_k^2 = \sum_{k=0}^n (k - m_k)^2 w\left(\frac{k}{n}, p\right). \quad (1.4)$$

Дисперсия характеризует "разброс" величины около ее среднего значения. Как показано в **ПРИЛОЖЕНИИ 2**, для биномиального распределения

$$\sigma_k^2 = n p q. \quad (1.5)$$

1.2.5 Применение биномиального распределения в молекулярной физике.

Вероятность макросостояния

Макросостояние осуществляется посредством большого числа микросостояний. Если известны все признаки, которыми характеризуется данное макросостояние, то можно, в принципе, перечислить все микросостояния, совместимые с этими признаками, и подсчитать их число.

Пусть $\tilde{A}_\alpha$ – число микросостояний, где α характеризует макросостояние, $\tilde{A}_0$ – общее число состояний. Тогда, на основании постулата о равновероятности микросостояний, вероятность рассматриваемого макросостояния равна:

$$w(\alpha) = \tilde{A}_\alpha / \tilde{A}_0 .$$

Введем следующие обозначения:

V – объём, занимаемый идеальным газом;

n – число частиц в объёме V ;

$N = V / d^3$ – число ячеек, которые могут занимать частицы (d – ребро ячейки в виде куба).

Здесь $d^3 \approx 10^{-30} \text{ м}^3$, поэтому N очень велико, и всегда соблюдается условие $N \gg n$.

Найдем вероятность $w(k/n; p)$ такого макросостояния системы, при котором в некотором фиксированном объёме V_1 , составляющем часть объёма V , из общего числа n частиц находится k частиц.

По условию задачи $V_1 \leq V$, $k \leq n$. Но, кроме этого, объём V_1 не должен быть слишком малым и должен содержать по крайней мере k ячеек, в которых могли бы помещаться k частиц. Число ячеек в объёме V_1 равно $N_1 = V_1 / d^3$, поэтому $N_1 \geq k$.

Предполагается, что частицы отличимы друг от друга (например, пронумерованы). Это означает, что два микросостояния, в которых частицами заняты одни и те же ячейки, различны, если, например, две частицы поменялись местами в каких-то ячейках. Но макросостояние системы от перестановки частиц в ячейках не изменится.

Покажем, что данная модель соответствует математической модели биномиального эксперимента.

- Число частиц в системе фиксировано и равно n .
- Согласно *постулату равновероятности* все микросо-

стояния системы равновероятны.

- Вероятность нахождения частицы в объёме V_1 равна $p = N_1 / N = V_1 / V$, а так как объёмы V_1 и V фиксированы, то p является постоянной величиной.
- Вероятность нахождения частицы в остальной части объёма $V - V_1$ равна $q = 1 - p$.

Следовательно, искомая вероятность может быть определена с помощью биномиального распределения (1.1).

При применении формулы (1.1) к идеальному газу объём V_1 не имеет значения и выбран лишь для того, чтобы придать наглядный смысл вероятности p для отдельной частицы находиться в этом объёме.

При очень малых k ($k \rightarrow 0$) и при очень больших k ($k \rightarrow n$) вероятность $w(k/n; p)$ очень мала:

$$w(k/n; p) \approx q^n \rightarrow 0,$$

поскольку q и p меньше единицы, а n велико. При некотором промежуточном значении k вероятность $w(k/n; p)$ достигает максимума, для нахождения которого необходимо решить уравнение:

$$\frac{dw(k/n; p)}{dk} = 0. \quad (1.6)$$

В [1.6.1] показано, что $n_{\max} = n_0$, где n_0 – число частиц в единице объема, если бы они были распределены равномерно по всему объёму. Этот результат означает, что *наиболее вероятным является равномерное распределение частиц по всему объёму V_1 .*

Поскольку положение объёма V_1 произвольно и может быть выбрано в любой части объёма V , заключаем, что наиболее вероятным распределением частиц в объёме является равномерное распределение. Такое состояние замк-

нотой системы, по определению, является стационарным и равновесным. Поэтому полученный результат по-другому можно выразить следующим образом:

наиболее вероятным состоянием системы является её равновесное состояние.

Флуктуации

С течением времени число частиц в некотором объёме не остается постоянным, а все время изменяется в небольших пределах. Поскольку состояние рассматриваемой системы описывается биномиальным распределением, среднее число частиц в объеме V_1 равно математическому ожиданию биномиального распределения (см. (1.3)):

$$\langle k \rangle = m_k = p n. \quad (1.7)$$

Говорят, что *величина флуктуирует, если ее значение колеблется около среднего*. Мерой флуктуации является стандартное отклонение от среднего значения, которое совпадает с корнем из дисперсии и в случае биномиального распределения равно (см. (1.5)):

$$\sigma = \sqrt{\langle (\Delta k)^2 \rangle} = \sqrt{n p q}. \quad (1.8)$$

Это равенство показывает, что стандартное отклонение растет медленнее, чем общее число частиц в системе, в то время как среднее (1.7) растет пропорционально числу частиц в системе.

Найдем относительное стандартное отклонение:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta k)^2 \rangle}}{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Из этого выражения следует, что *относительное стандартное отклонение убывает с ростом числа частиц в системе*.

Учитывая, что $q = 1 - p$, а $p = V_1 / V$, получим:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta k)^2 \rangle}}{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{V}{V_1} - 1} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (1.9)$$

При $V_1 \rightarrow V$ относительная величина флуктуаций стремится к нулю и при $V_1 = V$ становится равной нулю, поскольку во всем объеме полное число частиц фиксировано и никаких флуктуаций числа частиц нет. При уменьшении V_1 относительная величина флуктуаций возрастает согласно (1.9). При $V_1 \ll V$ можно в (1.9) пренебречь единицей по сравнению с отношением V/V_1 , и выражение (1.9) примет вид:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta k)^2 \rangle}}{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{V}{V_1}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Из полученной формулы следует, что *относительная роль флуктуаций возрастает с уменьшением области, в которой эти флуктуации рассматриваются.*

Например, если взять область, в которой в среднем находится всего несколько частиц, то относительная величина флуктуаций составляет весьма заметную долю от числа частиц. Если область столь мала, что в среднем в ней находится всего 10 частиц, то относительное стандартное отклонение достигает примерно 1/3. Если же при нормальных атмосферных условиях взять объем 1 мм^3 , то в нем в среднем содержится $2,7 \cdot 10^{16}$ частиц, а относительное стандартное отклонение меньше 10^{-8} , т.е. является очень маленькой величиной.

Поэтому *в макроскопических системах с очень большим числом частиц статистические флуктуации незначительны, и с большой точностью можно считать, что величины равны своим средним значениям.*

1.2.6. Распределение Лапласа-Гаусса.

При $n \rightarrow \infty$ биномиальный закон распределения вероятностей переходит в формулу Лапласа-Гаусса.

Применяя формулу Стирлинга для факториалов, выражение (1.1) можно привести к следующему виду (см. **ПРИЛОЖЕНИЕ 3**):

$$w\left(\frac{k}{n}; p\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \quad (1.10)$$

Это и есть формула Лапласа-Гаусса. Учитывая, что это распределение совпадает с биномиальным распределением, можно утверждать, что математическое ожидание и дисперсия распределения Лапласа-Гаусса также вычисляются по формулам (1.3) и (1.5). С учетом этих выражений, формулу (1.10) можно переписать следующим образом:

$$w\left(\frac{k}{n}, p\right) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}. \quad (1.11)$$

Таким образом, при больших n (а именно, при $n > 10$) вместо формулы (1.1) можно использовать выражения (1.10) или (1.11).

Отметим, что здесь случайная величина k , так же, как и в биномиальном законе, является дискретной.

1.2.7. Распределение Гаусса.

Осознание того факта, что значение измеряемой на опыте физической величины является случайной величиной, позволяет использовать для обработки экспериментальных данных теорию вероятностей. Действительно, результаты ряда измерений электрических импульсов описываются распределением Гаусса:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (1.12)$$

где m_x – математическое ожидание величины x ,
 σ_x^2 – дисперсия величины x .

Функция $w(x)$ определяет вероятность того, что значение измеряемой величины x лежит в интервале $x, x + dx$ (причем эта вероятность равна $w(x)dx$).

С другой стороны, на систему “измерительный прибор–исследуемый объект” действует n неконтролируемых (случайных) причин, каждая из которых вызывает независимые друг от друга отклонения $+\sigma$ и $-\sigma$, причем $p(+\sigma) + p(-\sigma) = 1$. Совокупность этих отклонений вызывает ошибку в значении физической величины $\Delta x = x - \langle x \rangle$.

Эта модель с точностью до терминологии совпадает с моделью биномиального эксперимента, а распределение Лапласа-Гаусса (1.11) практически совпадает с законом Гаусса (1.12). Отличие этих формул заключается лишь в том, что в распределении (1.11) фигурирует *дискретная* случайная величина k , а в распределении (1.12) аргументом является *непрерывная* случайная величина x . При этом следует иметь в виду, что основные характеристики непрерывной случайной величины – математическое ожидание и дисперсия – соответственно определяются следующим образом:

$$m_x = \int x w(x) dx, \quad \sigma_x^2 = \int (x - m_x)^2 w(x) dx.$$

Используя распределение Гаусса (1.12), можно получить формулу для распределения молекул идеального газа по их скоростям и кинетическим энергиям – так называемое распределение Максвелла (см. **ПРИЛОЖЕНИЕ 4**).

1.3. Методика проведения эксперимента

Чтобы экспериментально проверить выполнение биномиального распределения, используем опыт с подбрасыванием монеты. В закрытом сосуде имеется 12 монет. Чтобы определить вероятность выпадения k монет "орлом" из общего числа n монет, необходимо одновременно подбрасывать n монет как можно больше раз, отмечая при каждом опыте число монет, выпавших "орлом". Пусть опыт проведен N раз. Определив количество опытов $N(k)$, при котором k монет выпало "орлом", можно найти относительную частоту $N(k)/N$ появления k монет "орлом" при одновременном подбрасывании n монет. При этом k может иметь значения: $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Очевидно, что чем больше опытов будет проведено, тем точнее будет результат эксперимента, а вероятность, определенная экспериментально, при $N \rightarrow \infty$ совпадет с теоретической вероятностью (1.1):

$$w\left(\frac{k}{n}; p\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(k)}{N}.$$

Поскольку количество опытов всегда конечно, будем считать, что $w\left(\frac{k}{n}; p\right) \approx \frac{N(k)}{N}$.

1.4. Порядок выполнения работы

1.4.1. Проведите от 100 до 150 опытов, подсчитывая в каждом опыте число монет, выпавших "орлом" вверх (или "решкой" – по выбору экспериментатора). Результаты опытов занесите в таблицу 1.1. Если результат каждого опыта отмечать его номером над отрезком, соответствующим значению k , то к концу эксперимента Вы получите готовую гистограмму.

Таблица 1.1.

Количество монет, выпавших "орлом" вверх

№	k	№	k	№	k
1		34		37	
2		35		38	
...		...		...	
33		66		100	

1.4.2. Определите из полученной гистограммы частоту $N(k)$ появления случайной величины k , а также экспериментальную вероятность $w_{\text{эксп}} = N(k)/N$. Занесите эти данные в таблицу 1.2.

1.4.3. Рассчитайте теоретические распределения вероятностей по формулам (1.2), (1.10), (1.11), используя для этого следующие таблицы:

Таблица 1.2.

Определение $\langle k \rangle$ и средней квадратичной погрешности S_k по экспериментальным данным

k	$N(k)$	$w_{\text{эксп}} = N(k)/N$	$k w_{\text{эксп}}$	$\Delta k = k - \langle k \rangle$	$\Delta k^2 w_{\text{эксп}}$
0					
1					
...					
12					
	$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\langle k \rangle =$		$S_k^2 =$

Таблица 1.3.

Расчет биномиального распределения (БР) для $n=12$

k	$C_{12}^k = \frac{12!}{k!(12-k)!}$	$w_{\text{БР}} = C_{12}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} = \frac{C_{12}^k}{4096}$
0		
1		

...		
12		

Таблица 1.4.

Расчет распределения Лапласа-Гаусса (ЛГ) для $n=12$
($m_k = 6, \sigma_k^2 = 3$)

k	$z = \frac{(k - 6)^2}{6}$	e^{-z}	$w_{ЛГ} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2\pi}} e^{-z} = 0,23e^{-z}$
0			
1			
...			
12			

Для расчета распределения Гаусса использовать значения $\langle k \rangle, S_k$, определенные по экспериментальным данным из таблицы 1.2.

Таблица 1.5.

Расчет распределения Гаусса (Г) для $\langle k \rangle = \dots, S_k = \dots$

x	$z = \frac{(x - \langle k \rangle)^2}{2S_x^2}$	e^{-z}	$w_G = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} e^{-z}$
0			
1			
...			
12			

1.4.4. По данным таблиц 1.2 – 1.5 составить сводную таблицу для сравнения всех распределений и экспериментальных данных.

Таблица 1.6.

Сравнение распределений вероятностей

$k = x$	$w_{экс}$	$w_{БР}$	$w_{ЛГ}$	$w_{Г}$
0				
1				
2				
...				
12				

1.4.5. По данным таблицы 1.6 на одном рисунке построить графики функций $w_{БР}$, $w_{ЛГ}$, $w_{Г}$. Нанести на этот же график экспериментальные данные $w_{экс}$.

1.4.6. Проанализировать полученные результаты и сделать вывод о причинах расхождения данных.

1.5. Вопросы для самопроверки

1.5.1. Что означают понятия “дискретная величина” и “непрерывная величина”?

1.5.2. Чем отличаются биномиальное распределение, распределение Лапласа-Гаусса и распределение Гаусса друг от друга?

1.5.3. Где в физике используется биномиальное распределение?

1.5.4. Дайте определения математического ожидания и дисперсии случайной величины.

1.5.5. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению?

1.5.6. Для чего необходимо перед каждым подбрасыванием монет тщательно встряхивать кружку с монетами?

1.5.7. В чем причины расхождения результатов эксперимента с теоретическим распределением вероятности?

1.6. Литература

1.6.1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: учебник для физических специальностей вузов. Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М: Высшая школа, 1987. – 360 с.

1.6.2. Хадсон Д. Статистика для физиков. - М.: Мир, 1967.

1.6.3. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. - М.: Гардарики, 1998. – 326 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вывод биномиального распределения

Пусть опыт производится над четырьмя монетами: А, В, С, Д. Допустим, что в одном из опытов все монеты расположились "орлом" вверх ($k = 4$) – состояние “О”. Тогда данное размещение можно представить в виде последовательности А(О) В(О) С(О) Д(О). Согласно правилу об умножении вероятностей независимых событий вероятность этого состояния равна $pppp = p^4$. Такое состояние может быть реализовано единственным способом, так как монеты в данном состоянии могут располагаться в любом порядке.

Рассмотрим случай, когда в другом опыте какие-либо три монеты ($k = 3$) оказались в состоянии “О” (орел), а одна – в состоянии “Р” (решка). Таких возможностей будет четыре: А(О) В(О) С(О) Д(Р), А(О) В(О) С(Р) Д(О), А(О) В(Р) С(О) Д(О), А(Р) В(О) С(О) Д(О). Поскольку вероятность каждого из этих состояний равна $ppp = p^3$, то вероятность осуществления одной из перечисленных возможностей, в соответствии с теоремой о сложении вероятностей независимых событий, равна $4p^3$.

Для ($k = 2$) число всевозможных способов размещения по двум состояниям “О” и “Р” окажется равным шести, а вероятность этого состояния равной $6p^2q^2$ (покажите это). Описанные результаты сведены в таблицу П1.

Таблица П1

Распределение монет по двум состояниям ($n = 4, p = 0,5$)

№ состояний	Состояния		k	C_4^k	$p^k q^{4-k}$	$w(k/4; 0,5)$
	"O"	"P"				
1	ABCD	-	4	1	16	1/16
2	ABC	D	3	4	16	4/16
3	ABD	C				
4	ACD	B				
5	BCD	A				
6	AB	CD	2	6	16	6/16
7	AC	BD				
8	AD	BC				
9	CD	AB				
10	BD	AC				
11	BC	AD				
12	D	ABC	1	4	16	4/16
13	C	ABD				
14	B	ACD				
15	A	BCD				
16	-	ABCD	0	1	16	1/16
Σ				16		1

Легко заметить, что число способов размещения монет в данном состоянии ("O") равно числовому коэффициенту в разложении двучлена (бином Ньютона):

$$(p + q)^4 = 1p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + 1q^4.$$

Как известно, биномиальные коэффициенты такого разложения равны числу сочетаний из 4-х элементов по $k=4,3,2,1,0$ (проверьте данные таблицы П1):

$$C_4^k = 4!/k!(4-k)!$$

Каждое из слагаемых бинома Ньютона определяет вероятность конкретного состояния, т.е.:

$$w(k/4, p) = C_4^k p^k q^{4-k}.$$

Если эта формула справедлива для $n = 4$, то она применима и для $n = 5, 6, \dots$, и т.д. (метод математической индукции). Тогда для n монет это выражение примет следующий вид:

$$w(k/n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Это соотношение называется *биномиальным распределением*. Оно определяет вероятность того, что при n испытаниях интересующее нас событие (выпадение монет "орлом" вверх) произойдет ровно k раз.

Применительно к физической системе, которая может находиться в двух состояниях, биномиальное распределение позволяет вычислять вероятность данного состояния.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Характеристики биномиального распределения

1. Математическое ожидание

Найдем, чему равно математическое ожидание для биномиального распределения. Подставляя выражение (1.1) в формулу (1.2), получим:

$$m_k = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = 0 + \frac{n!}{1!(n-1)!} p q^{n-1} + \\ + \frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 q^{n-2} + \dots + \frac{n!}{n!0!} p^n q^0.$$

Это выражение можно упростить, используя свойства факториала:

$$n! = n(n-1)!, \quad n! = n(n-1)(n-2)!, \dots$$

Тогда будем иметь:

$$m_k = npq^{n-1} + n(n-1)p^2q^{n-2} + \dots + p^n = \\ = np(q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \dots + p^{n-1}) = np(q+p)^{n-1} = np.$$

Здесь учтено, что $(q + p)^{n-1} = 1$ в силу того, что $q + p = 1$. Таким образом, искомое выражение для математического ожидания биномиального распределения имеет следующий вид: $m_k = n p$.

2. Дисперсия

Определим дисперсию биномиального распределения, воспользовавшись её математическим определением (1.4):

$$\begin{aligned}\sigma_k^2 &= \sum_{k=0}^n (k - m_k)^2 w\left(\frac{k}{n}; p\right), \\ \sigma_k^2 &= \sum_{k=0}^n (k^2 - 2km_k + m_k^2) w\left(\frac{k}{n}; p\right) = \sum_{k=0}^n k^2 w\left(\frac{k}{n}; p\right) - \\ &\quad - 2m_k \sum_{k=0}^n k w\left(\frac{k}{n}; p\right) + m_k^2 \sum_{k=0}^n w\left(\frac{k}{n}; p\right).\end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой математическое ожидание величины k^2 , сумма во втором слагаемом является математическим ожиданием величины k , а сумма в третьем слагаемом представляет собой полную вероятность того, что из n опытов "орел" выпадет 0, 1, 2, ..., n раз. Очевидно, что эта вероятность должна быть равна 1, так как выпадение из n опытов любого числа "орлов" является достоверным событием:

$$\sum_{k=0}^n w(k/n, p) = 1.$$

Это выражение называется *условием нормировки*. Учитывая сказанное, выражение для дисперсии можно записать следующим образом:

$$\sigma_k^2 = m_{k^2} - 2m_k^2 + m_k^2 = m_{k^2} - m_k^2 = m_{k^2} - (np)^2.$$

Для расчета m_k воспользуемся тождеством:

$$k^2 = k^2 + k - k = k(k-1) + k.$$

Тогда

$$m_{k^2} = m_{k(k-1)} + m_k = m_{k(k-1)} + np.$$

Подставляя это соотношение в выражение для дисперсии, получим:

$$\sigma_k^2 = m_{k(k-1)} + np - (np)^2.$$

Применяя определение математического ожидания, но уже для функции $k(k-1)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} m_{k(k-1)} &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= 0 + 0 + 2 \frac{n! p^2 q^{n-2}}{2!(n-2)!} + 3 \cdot 2 \frac{n! p^3 q^{n-3}}{3!(n-3)!} + \dots + n(n-1) \frac{n! p^n}{n! 0!} = \\ &= n(n-1) p^2 q^{n-2} + n(n-1)(n-2) p^3 q^{n-3} + \dots + n(n-1) p^n = \\ &= n(n-1) p^2 [q^{n-2} + (n-2) p q^{n-2} + \dots + p^{n-2}] = n(n-1) p^2, \end{aligned}$$

так как сумма в квадратных скобках равна единице:

$$q^{n-2} + (n-2) p q^{n-2} + \dots + p^{n-2} = (q + p)^{n-2} = 1.$$

Таким образом, выражение для дисперсии биномиального распределения получим в следующем виде:

$$\sigma_k^2 = n(n-1) p^2 + np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

Учитывая, что $1-p = q$, окончательно будем иметь:

$$\sigma_k^2 = npq.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вывод распределения Лапласа-Гаусса

Преобразуем биномиальное распределение, пользуясь формулой Стирлинга для факториала: $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, которая справедлива при $n > 10$. Тогда

$$\begin{aligned} w\left(\frac{k}{n}; p\right) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} p^k q^{n-k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^{n-k+k}}{k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Введем переменную $u = k - np$, и, заменив k через u : $k = u + np$, будем иметь:

$$w\left(\frac{k}{n}; p\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{(u+np)(n-u-np)}} \left(\frac{np}{u+np}\right)^{u+np} \left(\frac{nq}{n-u-np}\right)^{n-u-np}.$$

Имея в виду, что $p = 1 - q$, вынося за скобки np и nq и произведя далее очевидные математические действия, придем в виду:

$$w\left(\frac{k}{n}; p\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{np}\right)\left(1 - \frac{u}{nq}\right)}} \left(1 + \frac{u}{np}\right)^{-(np+u)} \left(1 - \frac{u}{nq}\right)^{-(nq-u)}.$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $u/np \ll 1$ и $u/nq \ll 1$. Поэтому в выражении под радикалом можно оставить только единицу. Этого делать нельзя по отношению к двум последним множителям, так как они возводятся в более высокие степени.

Прологарифмируем последнее выражение:

$$\ln w\left(\frac{k}{n}; p\right) = -\ln \sqrt{2\pi npq} - (np+u) \ln\left(1 + \frac{u}{np}\right) - (nq-u) \ln\left(1 - \frac{u}{nq}\right).$$

Разложим логарифмические функции в ряд по формуле:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - L$$

Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми, получим:

$$\ln\left(1 + \frac{u}{np}\right) = \frac{u}{np} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{np}\right)^2,$$

$$\ln\left(1 - \frac{u}{nq}\right) = -\frac{u}{nq} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{nq}\right)^2.$$

Подставив эти выражения в первоначальную формулу и произведя алгебраические преобразования, учтя при этом, что $p + q = 1$, получим:

$$\ln \frac{w(k/n; p)}{\sqrt{2\pi npq}} = -\frac{u^2}{2npq}.$$

Отсюда, возвращаясь к старой переменной и потенцируя, получим искомое выражение:

$$w(k/n; p) = 1/\sqrt{2\pi npq} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Это и есть распределение Лапласа-Гаусса. Поскольку при выводе этой зависимости использовалась приближенная формула Стирлинга для факториалов, которая справедлива только при $n > 10$, то и распределение Лапласа-Гаусса также справедливо только при $n > 10$. При $n \rightarrow \infty$ распределение Лапласа-Гаусса совпадает с биномиальным распределением.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Вывод распределения Максвелла

Термодинамическое равновесие устанавливается в результате громадного числа столкновений между молекулами. В результате каждого столкновения проекции скорости молекулы испытывают случайное изменение $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$, причем изменения каждой проекции скорости независимы друг от друга.

Рассмотрим движение молекулы, скорость которой в начальный момент времени равна нулю. Изменение проек-

ций ее скорости при i -том столкновении с другими молекулами обозначим Δv_{xi} , Δv_{yi} , Δv_{zi} . По прошествии достаточно большого промежутка времени, в течение которого молекула испытала громадное число столкновений, ее проекции скорости станут равны:

$$v_x = \sum_i \Delta v_{xi}, \quad v_y = \sum_i \Delta v_{yi}, \quad v_z = \sum_i \Delta v_{zi}.$$

Каждая из этих проекций является суммой большого числа случайных величин, для которых справедлив закон Гаусса (см., например, [1], §2). Следовательно, плотность распределения вероятности для проекций скорости можно представить в следующем виде:

$$\varphi(v_x^2) = Ae^{-\alpha v_x^2}, \quad \varphi(v_y^2) = Ae^{-\alpha v_y^2}, \quad \varphi(v_z^2) = Ae^{-\alpha v_z^2}, \quad (\text{П1})$$

где A и α – постоянные, одинаковые для всех трех проекций ввиду полной эквивалентности осей координат и независимости случайных величин v_x , v_y , v_z .

Вероятность того, что проекция скорости на ось x заключена в интервале $[v_x, v_x + dv_x]$, равна:

$$dP(v_x) = \varphi(v_x^2) dv_x = Ae^{-\alpha v_x^2} dv_x. \quad (\text{П2})$$

Аналогичные формулы справедливы и для других проекций скорости. Вероятность того, что скорость молекулы заключена в интервале

$$[v_x, v_y, v_z, v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z],$$

по закону умножения вероятностей выражается в виде:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = A^3 e^{-[\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]} dv_x dv_y dv_z. \quad (\text{П3})$$

Постоянная A находится из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dP(v_x, v_y, v_z) = 1. \quad (\text{П4})$$

Это условие означает следующее: вероятность того, что скорость молекулы может быть любой внутри интервала $(-\infty, \infty)$, равна единице, то есть это событие является абсолютно достоверным.

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, из условия нормиров-

ки (П4) находим:

$$A = \sqrt{a/\pi}. \quad (\text{П5})$$

Вычислим среднюю кинетическую энергию молекулы:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle &= \frac{m}{2} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dP(v_x, v_y, v_z) = \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \exp[-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)] dv_x dv_y dv_z. \end{aligned}$$

Интегралы такого типа находятся следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \alpha^{-3/2} \sqrt{\pi}.$$

Применяя этот прием к каждому интегралу, получим:

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3m}{4\alpha}.$$

Используя связь между средней кинетической энергией молекул и температурой: $\langle mv^2/2 \rangle = 3/2 kT$, получим выражение для α :

$$\alpha = m/2kT.$$

С учетом полученного выражения и формулы (П5) уравнение для вероятности (П3) примет вид:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z. \quad (\text{П6})$$

От распределения проекций скорости перейдем к распределению модуля скорости. Для этого, поскольку распределение скоростей изотропно, нужно перейти в сферическую систему координат в пространстве скоростей и проинтегрировать уравнение (П6) по сферическому слою толщиной $d\nu$, радиус которого равен $\nu = (\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2)^{1/2}$. Тогда имеем:

$$d\nu_x d\nu_y d\nu_z = \nu^2 d\Omega d\nu,$$

где $d\Omega$ – телесный угол, под которым из начала координат виден элемент поверхности сферического слоя.

Очевидно, интеграл по всей поверхности сферического слоя равен:

$$\int_{\Omega=4\pi} \nu^2 d\Omega = \nu^2 \int_{\Omega=4\pi} d\Omega = 4\pi \nu^2.$$

Поэтому в результате интегрирования в (П6) по сферическому слою толщиной $d\nu$ получаем вероятность нахождения модуля скорости молекулы в интервале скоростей $[\nu, \nu + d\nu]$:

$$dP(\nu) = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{m\nu^2}{2kT}} \nu^2 d\nu.$$

Функция

$$f(\nu) = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{m\nu^2}{2kT}} \nu^2 \quad (\text{П7})$$

называется плотностью распределения вероятностей Максвелла. Поскольку молекулы движутся независимо и случайно, число молекул $dn(\nu)$, скорости которых заключены в интервале $[\nu, \nu + d\nu]$, равно:

$$dn(\nu) = n \cdot dP(\nu),$$

где n – полное число молекул в системе.

Относительное число молекул в интервале $[\nu, \nu + d\nu]$ равно:

$$\frac{dn(v)}{n} = dP(v) = f(v) \cdot dv,$$

или, с учетом (П7), получим закон Максвелла распределения молекул по скоростям:

$$\frac{dn(v)}{n} = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Лабораторная работа № 2

ГРАДУИРОВКА ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕРМОМЕТРА

2.1. Цель работы: изучение принципа действия термоэлектрического термометра и его градуировка.

2.2. Краткое теоретическое введение

При контакте двух проводников, изготовленных из различных материалов, между ними возникает обмен электронами, который приводит к появлению контактной разности потенциалов. Ее величина зависит от рода соприкасающихся проводников и от температуры контакта.

Возникновение контактной разности потенциалов обусловлено двумя причинами:

- 1) различием в работах выхода электронов из различных металлов;
- 2) различием у разных металлов плотностей электронного газа, т.е. числа электронов, приходящихся на единицу объёма металла.

Рассмотрим цепь (рис.2.1), состоящую из двух спаянных между собой проводников 1 и 2, изготовленных из различных металлов.

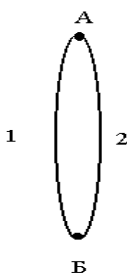


Рис. 2.1.

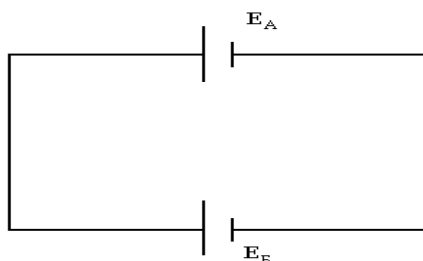


Рис. 2.2.

Пока температуры спаев одинаковы, контактные разности потенциалов, возникающие в спаях *A* и *B*, равны между собой. Эквивалентная схема этой цепи представлена на рис. 2.2, где контактная э.д.с. спаев изображена в виде двух элементов с одинаковыми э.д.с., включённых навстречу друг другу:

$$E_A = E_A. \quad (2.1)$$

Ток в такой цепи, естественно, равен нулю. При нагревании одного из спаев возникающие в контактах разности потенциалов уже не будут равны между собой, поэтому в такой цепи результирующая э.д.с. отлична от нуля, что приводит к появлению тока. Эта э.д.с. называется термоэлектродвижущей силой (т.э.д.с.). Явление было открыто в 1821 году Т.И.Зеебеком и носит его имя. Оно широко используется для измерения температуры в устройствах, называемых термоэлектрическими термометрами.

Термоэлектрический термометр представляет собой цепь, содержащую два спая разнородных металлов, в разрыв одного из проводников которой включен милливольтметр.

На рис. 2.3 приведена схема термоэлектрического термометра. Она содержит два проводника 1 и 2 из различных металлов, концы которых сварены и образуют спаи *A* и *B*.

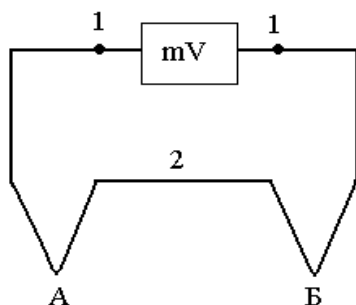


Рис. 2.3.

При измерениях один спай поддерживается при неизменной температуре (например, помещается в сосуд Дьюара с тающим льдом, $t = 0^{\circ}\text{C}$), второй спай приводится в тепловой контакт с исследуемым телом. Такие термометры обладают тем преимуществом, что позволяют измерять как очень высокие, так и низкие температуры, что невозможно сделать с помощью обычных жидкостных термометров; кроме того, они более чувствительны и менее инерционны.

Значение т.э.д.с. термоэлектрического термометра определяется разностью т.э.д.с. спаев *A* и *B*. Если спай *A* находится при $t = 0^{\circ}\text{C}$, то зависимость т.э.д.с. от температуры t "горячего" спая можно представить в виде:

$$E = at + bt^2 + ct^3 + \dots, \quad (2.2)$$

где a , b и c – постоянные, зависящие от рода материалов, из которых составлен термоэлектрический термометр,

t – температура "горячего" спая в $^{\circ}\text{C}$.

Для того, чтобы цепь, содержащую два спая разнородных проводников, использовать в качестве термометра, ее необходимо проградуировать. Для градуировки обычно используют некоторые заранее известные температурные значения, например, температуру таяния льда, кипения воды, плавления чистых металлов. Во время градуировки один спай термостатируется (т.е. остается при постоянной температуре) в сосуде Дьюара с тающим льдом, а второй поочередно погружается в ванны, в которых создана известная температура.

При использовании термоэлектрического термометра для точных измерений температуры лучше измерять возникающую в цепи электродвижущую силу, а не текущий в ней ток. Это связано с тем, что т.э.д.с. зависит только от рода образующих спаи металлов и температуры спаев, в то время как сила текущего в цепи тока определяется, кроме

того, сопротивлением измерительного прибора, соединительных проводов и внутренним сопротивлением спаев.

Для характеристики термоэлектрических свойств у какой-либо пары проводников вводят понятие дифференциальной термо-э.д.с. α , которая иначе называется *постоянной термопары* и равна т.э.д.с., возникающей при разности температур между спаями в 1°C :

$$\alpha = dE / dt ; \quad (2.3)$$

α зависит как от рода данной пары проводников, так и от температуры.

В ПРИЛОЖЕНИИ 2 приведена таблица значений т.э.д.с. для некоторых наиболее часто употребляемых пар металлов.

В пределах малых изменений температуры "горячего" спая (для пары медь-константан можно в грубом приближении считать в пределах 100°C) температурная зависимость термо-э.д.с. линейна:

$$E_1 = at . \quad (2.4)$$

В этом случае постоянная термопары α зависит только от выбора пары металлов.

Для более точной градуировки зависимость термо-э.д.с. от температуры можно записать в виде квадратичной функции:

$$E_2 = at + bt^2 . \quad (2.5)$$

Задача заключается в том, чтобы снять экспериментальную зависимость изменения т.э.д.с. от температуры "горячего" спая и оценить, какая из зависимостей - (2.4) или (2.5) - лучше согласуется с экспериментальными данными.

2.3. Экспериментальная установка и методика измерений

2.3.1. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2.4. Здесь 1 – сосуд Дьюара, 2 и 3 – "холодный" и "горячий" спаи термоэлектрического термометра соответственно, 4 – сосуд с нагреваемой жидкостью, 5 – тающий лед.

Свободные концы термопары соединяются с клеммами вольтметра.

2.3.2. В качестве нагреваемой жидкости используется глицерин. Температура кипения чистого глицерина 240°C . Следовательно, есть возможность изменять температуру "горячего" спаи термоэлектрического термометра в пределах от комнатной до 240°C .

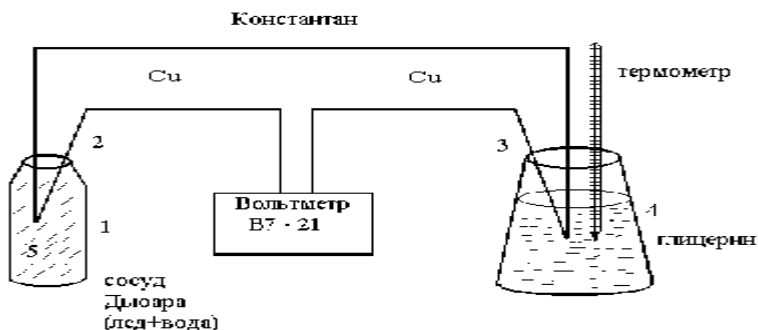


Рис. 2.4. Экспериментальная установка

2.4. Порядок выполнения работы

2.4.1. Подготовьте вольтметр к работе.

2.4.2. Определите цену деления термометра.

2.4.3. Сосуд Дьюара заполните тающим льдом и опустите туда один из спаев термоэлектрического термометра.

2.4.4. Измерьте т.э.д.с. для случая, когда жидкость, в которую опущен так называемый "горячий" спай, находится при комнатной температуре.

2.4.5. Включите нагреватель и измеряйте т.э.д.с. через каждые 10°C изменения температуры "горячего" спая. Полученные результаты занесите в таблицу 2.1.

Таблица 2.1.

Результаты измерений т.э.д.с. при различных температурах "горячего" спая $t_{\text{аио}}$

и вычислений коэффициента

a в зависимости $E_1 = at$ (2.4), $d_i = E_{i \text{ ýêñ} } - E_{i \text{ ðàñ} }$

N_2	$t_{i \text{ аио}}, ^{\circ}\text{C}$	$E_{i \text{ ýêñ}}, \text{ìÁ}$	$x_i y_i$	x_i^2	$E_{i \text{ ðàñ}}$	d_i
1						
2						
...						
n						
.			$\sum_{i=1}^n x_i y_i =$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 =$		

2.4.6. Используя метод наименьших квадратов, рассчитайте по экспериментальным данным коэффициенты в зависимости (2.4) (см. **ПРИЛОЖЕНИЕ 1**, формула П 3).

2.4.7. Вычисления параметров зависимости (2.5) $E_2 = at + bt^2$ удобно проводить, используя таблицу 2.2.

Зависимость (2.5) можно представить в виде:

$$\frac{E}{t} = a + bt,$$

т.е. свести ее к линейной зависимости вида $y = A + Bx$,

где $y = \frac{E}{t}$, $A = a$, $B = b$, $x = t$.

Тогда для расчета коэффициентов A и B можно использовать формулы (П 2), приведённые в **ПРИЛОЖЕНИИ 1**.

По найденным коэффициентам A и B рассчитайте теоретические значения $y_{i \delta \hat{\alpha} \hat{n} \div} = A + Bx_i$. Затем найдите значения $E_{i \delta \hat{\alpha} \hat{n} \div} = y_{i \delta \hat{\alpha} \hat{n} \div} \cdot t_i$ и занесите их в таблицу 2.2.

Таблица 2.2.

Данные для вычисления параметров зависимости

$$E_2 = at + bt^2 \quad (2.5), \quad d_i = E_{i \hat{y} \hat{e} \hat{n} \hat{i}} - E_{i \delta \hat{\alpha} \hat{n} \div}$$

N_{θ}	t_i x_i	$E_{i \hat{y} \hat{e} \hat{n} \hat{i}} / t_i$ y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$E_{i \delta \hat{\alpha} \hat{n} \div}$	d_i
1						
2						
.						
n						
	$\sum_{i=1}^n x_i =$	$\sum_{i=1}^n y_i =$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i =$		

2.4.8. Нанесите экспериментальные точки на график зависимости т.э.д.с. от температуры, проведите кривые (2.4) и (2.5), используя полученные значения $E_{i \delta \hat{\alpha} \hat{n} \div}$.

2.4.9. Оцените, какая из двух зависимостей лучше согласуется с экспериментальными данными.

2.5. Вопросы для самопроверки

2.5.1. Объясните принцип действия термоэлектрического термометра. Какое физическое явление лежит в основе его работы?

2.5.2. Какие причины приводят к появлению контактной разности потенциалов?

2.5.3. Назовите преимущества и недостатки метода измерения температуры с помощью термоэлектрического термометра.

2.5.4. От чего зависит интервал измеряемых температур для жидкостных термометров и для термоэлектрического термометра?

2.6. Литература

2.6.1. Физический практикум. Механика и молекулярная физика: Учебное пособие / Иверонова В.И., Белянкин А.Г., Мотулевич Г.П., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Под ред. Ивероновой В.И. – М.: Наука, 1967. – 352 с.

2.6.2. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

2.6.3. Кей Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных / Кей Дж., Лэби Т. – М.: 1962.

2.6.4. Калашников. С. Г. Электричество / Калашников. С. Г. – М.: Наука, 1970. – 666 с.

2.6.5. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм / Матвеев А.Н. – М.: ВШ, 1983. – 463 с.

2.6.6. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин / Зайдель А.Н. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Коэффициенты A и B в уравнении линейной аппроксимирующей зависимости (зависимости, приближенно описывающей экспериментальные данные) вида

$$y = A + Bx \quad (\text{П.1})$$

рассчитываются по методу наименьших квадратов по следующим формулам:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad B = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (\text{П.2})$$

Если используется зависимость (2.4) $E = at$, то формула (П.1) примет вид: $y = Bx$, где $y = E$, $B = a$, $x = t$. Коэффициент B рассчитывается по формуле:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n E_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2}. \quad (\text{П } 3)$$

Значения E_i , t_i берутся из эксперимента.

Зависимость (2.5) удобно представить в виде: $\frac{E}{t} = a + bt$,

т.е. свести ее к линейной зависимости вида $y = A + Bx$, где

$$y = \frac{E}{t}, \quad A = a, \quad B = b, \quad x = t.$$

Тогда для расчета коэффициентов A и B можно использовать формулы (П 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица

Термо-э.д.с. термопар из различных металлов и сплавов

Температура "холодного" спая 0°C .

Температура "горячего" спая, $^\circ\text{C}$	Термо-э.д.с., мВ		
	Платина- 90% платины + 10% родия	Железо- константан (60%Cu + 40% Ni)	Медь- константан
100	0.64	5,4	4,28
200	1.44	11,0	9,29
300	2.31	16,6	14,86
400	3.25	22,1	21,87
500	4.22	27,6	-
600	5.22	32,3	-
700	6.26	39,3	-
800	7.33	45,7	-
1000	9.57	58,3	-
1500	15.56	-	-

Лабораторная работа № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ БОЛЬЦМАНА

3.1. Цель работы:

3.1.1. изучить экспериментальный метод определения постоянной Больцмана;

3.1.2. определить величину постоянной Больцмана и оценить погрешность измерения.

3.2. Краткое теоретическое введение

Модель идеального газа. Это простейшая модель газообразного состояния вещества. В этой модели пренебрегается потенциальной энергией взаимодействия между молекулами газа по сравнению с кинетической энергией их хаотического движения. Такое приближение возможно, если среднее расстояние между молекулами значительно больше их диаметров. Однако столкновениями молекул между собой пренебрегать нельзя. Именно столкновения между молекулами приводят к хаотичности их движения и установлению термодинамического равновесия.

Такому приближению соответствует также механическая модель упруго сталкивающихся шариков с малыми размерами (по сравнению с размерами сосуда).

Основное уравнение кинетической теории газов устанавливает связь между молекулярными величинами, т.е. величинами, относящимися к одной молекуле, и величиной давления, характеризующей газ как целое, – величиной макроскопической, непосредственно измеряемой на опыте:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_o \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{ном} \rangle, \quad (3.1)$$

где p – давление газа на стенки сосуда,

n – число молекул в единице объема,

m_0 – масса молекулы,

$\langle v^2 \rangle$ – среднее значение квадрата скорости теплового движения молекул,

$\langle \varepsilon_{ном} \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

Число молекул в единице объема равно отношению полного числа молекул газа N , находящихся в сосуде, к его объему V : $n = N/V$, тогда уравнение (3.1) можно переписать в виде:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle \varepsilon_{ном} \rangle. \quad (3.2)$$

Следовательно, произведение объема газа на его давление численно равно $2/3$ кинетической энергии поступательного хаотического движения всех молекул газа, заключенных в этом объеме.

Общее число молекул равно:

$$N = mN_A / M,$$

где m/M – число молей газа,

N_A – число Авогадро, т.е. число молекул в одном моле любого вещества.

Подставляя это выражение в (3.2), получим:

$$pV = \frac{2}{3} \frac{m}{M} N_A \langle \varepsilon_{ном} \rangle. \quad (3.3)$$

Сопоставим это уравнение с эмпирическим уравнением состояния Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (3.4)$$

Тогда получим:

$$\langle \varepsilon_{ном} \rangle = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A}. \quad (3.5)$$

Таким образом, средняя кинетическая энергия поступательного хаотического движения одной молекулы газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре.

Величины R , N_A являются универсальными постоянными. Их отношение

$$\frac{R}{N_A} = k \quad (3.6)$$

также является универсальной постоянной и называется постоянной Больцмана.

Если $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$,
то $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}$.

Вводя постоянную Больцмана, для средней кинетической энергии одной молекулы можно получить:

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (3.7)$$

Таким образом, средняя кинетическая энергия хаотического поступательного движения молекул идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре и является мерой интенсивности теплового движения молекул при заданной температуре. Тем самым формула (3.7) выявляет молекулярно-кинетический смысл понятия температуры: температура тела есть количественная мера энергии теплового движения молекул, из которых состоит это тело.

Подставляя (3.7) в (3.1), мы можем преобразовать основное уравнение кинетической теории газов к виду:

$$p = nkT. \quad (3.8)$$

Это соотношение связывает давление газа с числом молекул n в единице объема и абсолютной температурой T . Коэффициентом пропорциональности между ними является постоянная Больцмана.

Уравнение (3.8) справедливо не только для чистых газов, но и для газовых смесей. В случае смеси идеальных

невзаимодействующих газов под p понимают полное давление, а под n – число молекул газовой смеси в единице объёма. Действительно, так как $n = \sum_i n_i$, то

$$p = \sum_i n_i kT = \sum_i p_i. \quad (3.9)$$

Полное давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений компонентов (закон Дальтона).

Парциальным давлением i -го компонента газовой смеси называется давление компонента при тех же значениях температуры и объема, что и у смеси.

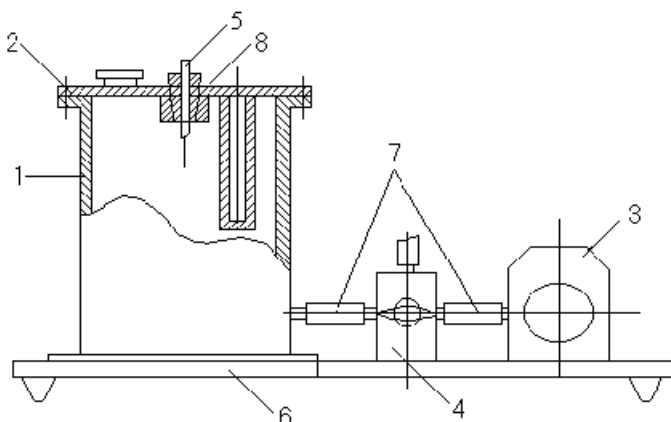
Уравнения (3.8) и (3.9) можно применять к чистым парам и смесям химически инертных паров при условии, что их парциальные давления меньше соответствующих давлений насыщенных паров. Для насыщенных паров соотношения (3.8) и (3.9) не выполняются.

3.3. Описание экспериментальной установки и методика измерений

3.3.1. Установка для измерения постоянной Больцмана изображена на рис.3.

Установка состоит из сосуда 1 объёмом V с крышкой 2. Перед началом проведения опыта необходимо сосуд проветрить. Для этого служит кран 4, который следует повернуть так, чтобы сосуд сообщался с насосом 3. Затем сосуд герметически закрывается пробкой 8. Через отверстие в пробке сосуд сообщается с наклонным микроманометром. В пробку вставлена игла 5, через которую шприцем вводится 1 см^3 легко испаряющейся жидкости (например, ацетон). Молярная масса M , плотность ρ и давление насыщенных паров p_i при 20°C для некоторых жидкостей приведены в **ПРИЛОЖЕНИИ** к данной лабораторной работе.

При испарении жидкости пары создают избыточное парциальное давление Δp , измеряемое наклонным микроманометром. Описание наклонного микроманометра приведено в **ПРИЛОЖЕНИИ 1** в конце книги. Вся экспериментальная установка крепится на основании 6.



1 - сосуд, 2 - крышка, 3 - насос, 4 - кран, 5 - игла,
6 - основание, 7 - шланг, 8 - пробка

Рис.3. Установка для определения постоянной Больцмана.

Возникающее парциальное давление паров жидкости равно избыточному давлению Δp в сосуде:

$$\Delta p = nkT, \quad \text{тогда} \quad k = \Delta p / nT.$$

Учитывая, что $n = N/V$ есть число молекул пара введенной жидкости, отнесенное к объему сосуда, получим:

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{\rho V_{\text{в}}}{M / N_A} = \frac{\rho}{M} N_A V_{\text{в}}, \quad (3.10)$$

где ρ – плотность впрыснутой жидкости, для ацетона

$$\rho = 0,7893 \text{ г/см}^3,$$

m – масса введенной жидкости,

V_a – объем жидкости, введенной в сосуд с помощью шприца,

m_0 – масса одной молекулы,

M – молярная масса жидкости,

$$M = 58,08 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Тогда для определения постоянной Больцмана получим:

$$k = \frac{MV \cdot \Delta p}{\rho N_A V_a l}, \quad (3.11)$$

где Δp – избыточное давление в сосуде, определяемое наклонным микроманометром, $\Delta p = k_i \cdot g \cdot l$ (Па),

k_i – коэффициент наклона микроманометра,

l – показание манометра в делениях.

Опыт проведите 3 раза. Результаты занесите в таблицу 3.1.

Таблица 3.1.

**Результаты измерения избыточного давления паров
жидкости**

№	Жидкость	k_i	$V_a, \text{л}^3$	l	$\Delta p, \text{Па}$
1					
2					
3					

Таблица 3.2.

Расчет постоянной Больцмана k

№	$\Delta p, \text{Па}$	$k, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$\langle k \rangle, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$\Delta k, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$\Delta k^2, \frac{\text{Дж}^2}{\text{К}^2}$
1					
2					
3					

3.3.2. Оцените погрешность результата с учетом случайной и приборной погрешности по формуле:

$$\Delta k_{\text{н\ddot{e}i}} = \sqrt{\Delta k_{\text{н\ddot{e}}}^2 + \Delta k_{\text{i\ddot{o}}}^2}. \quad (3.12)$$

Случайную погрешность $\Delta k_{\text{н\ddot{e}}}$ рассчитайте стандартным методом.

Для одного из замеров оцените приборную погрешность $\Delta k_{\text{i\ddot{o}}}$, используя метод нахождения погрешности для косвенных измерений:

$$\Delta k_{\text{i\ddot{o}}} = k \sqrt{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{\text{е}}}{V_{\text{е}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}, \quad (3.13)$$

где ΔV – погрешность в измерении объема сосуда (указана на установке);

$\Delta V_{\text{е}}$ – приборная погрешность шприца, равная половине цены наименьшего деления;

ΔT – половина цены деления термометра, K ,

Δl – погрешность отсчета по шкале манометра, равная половине цены деления.

Оцените относительную погрешность:

$$\varepsilon_{<k>} = \frac{\Delta k_{\text{н\ddot{e}i}}}{<k>}.$$

Окончательный результат представьте в виде:

$$k = (<k> \pm \Delta k_{\text{н\ddot{e}i}}), \frac{\ddot{A}\text{е}}{\hat{E}}.$$

3.4. Вопросы для самопроверки

3.4.1. Что такое модель идеального газа? При каких условиях реальный газ близок к идеальному?

3.4.2. Запишите основное уравнение кинетической теории газов, объясните его смысл.

3.4.3. Каков физический смысл температуры? постоянной Больцмана?

- 3.4.4. Выведите уравнение состояния идеального газа.
- 3.4.5. Что называется парциальным давлением компонента в смеси газов? Сформулируйте закон Дальтона для смеси газов.
- 3.4.6. Зачем надо проветривать сосуд перед проведением опыта? Является ли обязательным удаление паров жидкости перед началом серии опытов с другой жидкостью?
- 3.4.7. Объясните устройство и принцип действия наклонного микроманометра.
- 3.4.8. В каких единицах измеряется давление в СИ? Какие внесистемные единицы давления Вы знаете?
- 3.4.9. Какая связь существует между давлением и температурой газа в сосуде?
- 3.4.10. Измерение какой величины вносит наибольший вклад в полную погрешность результата?

3.5. Литература

- 3.5.1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: Учебник для физич. спец. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Матвеев А.Н. – М.: Высш. шк., 1987. – 360 с
- 3.5.2. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. 2-е изд. / Кикоин А.К., Кикоин И.К. – М.: Наука, 1976. 480 с.
- 3.5.3. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика / Савельев И.В. – М.: Астрель, АСТ, 2003. – 208 с.
- 3.5.4. . Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.
- 3.5.5. Таблицы физических величин. Справочник / Кикоин И.К., Григорьев И.С., Данилов Ю.А. и др.; Под ред. Кикоина И.К. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.
- 3.5.6. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин / Зайдель А.Н. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Молярная масса M , плотность ρ и давление насыщенных паров p_i
при 20 °С для некоторых жидкостей

№	Наименование жидкости	Химиче- ская фор- мула	$M, \frac{\text{г}}{\text{моль}} \cdot 10^{-3}$	$\rho, \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 10^3$	$p_i, \text{мм рт.ст.}$
1	Вода	H ₂ O	18,02	0,9982	17,6
2	Этанол	C ₂ H ₅ OH	46,07	0,7893	42,4
3	Ацетон	(CH ₃) ₂ CO	58,08	0,7908	156
4	Этиловый эфир	(C ₂ H ₅) ₂ O	74,12	0,7135	440
5	Изобутиловый спирт	C ₄ H ₉ OH	74,12	0,8027	9
6	Бутиловый спирт	C ₄ H ₉ OH	74,12	0,8098	5
7	Бензол	C ₆ H ₆	78,11	0,8790	76
8	Дихлорэтан	1,2-C ₂ H ₄ Cl ₂	98,96	1,257	66
9	Четыреххлористый углерод	CCl ₄	153,8	1,592	87
10	Этилбензол	C ₆ H ₅ C ₂ H ₅	106,2	0,8670	7,1

Лабораторная работа № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОТЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ (ПЛАВЛЕНИЯ) И ИЗМЕНЕНИЯ ЭНТРОПИИ ОЛОВА ПРИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

4.1. Цель работы:

4.1.1. определение удельной теплоты кристаллизации (плавления) олова;

4.1.2. определение изменения энтропии олова при кристаллизации.

4.2. Краткое теоретическое введение

4.2.1. Фазовые переходы. Процессы плавления и кристаллизации.

Часть термодинамической системы, однородная по своим макроскопическим свойствам, называется *фазой*. Фазы отделены друг от друга физическими поверхностями раздела. Примером двух фаз одного и того же вещества является вода с плавающими в ней кусочками льда. При определенных условиях разные фазы одного и того же вещества могут находиться в равновесии друг с другом, соприкасаясь между собой. Равновесие имеет место только в определенном интервале температур, причем каждой температуре T соответствует определенное давление p . Таким образом, состояния равновесия двух фаз изображаются на диаграмме (p, T) линией $p = f(T)$. Эта диаграмма называется диаграммой состояний (см. рис.4.1).

Переход вещества из одной фазы в другую обычно сопровождается поглощением или выделением некоторого количества тепла, которое называется скрытой теплотой фазового перехода, или просто теплотой перехода. Такие переходы называются *фазовыми переходами первого рода*.

Фазовые переходы первого рода: плавление и кристаллизация, испарение и конденсация, возгонка (сублимация) и конденсация. Кривые плавления, кипения и сублимации разбивают координатную плоскость (pT) на три области (см. рис.4.1). Любая точка в одной из этих областей изображает соответствующее однородное состояние вещества. Кривые 1, 2, 3 – линии фазового равновесия. Точка T , при которой все три фазы вещества находятся в динамическом равновесии друг с другом, называется тройной точкой. Точка K – критическая точка.



Рис. 4.1. Диаграмма состояний

Примером фазового перехода 1-го рода является процесс плавления и обратный ему процесс кристаллизации.

В твердое состояние вещество может перейти как из жидкого, так и из газообразного состояния. И в том, и в другом случае такой переход будет сопровождаться изменением симметрии состояний.

Рассмотрим превращение "жидкость – твердое тело". Процесс образования твердого тела при охлаждении жидкости идет при определенной температуре T_k – температуре кристаллизации. Это объясняется тем, что при кристаллизации потенциальная энергия взаимодействия моле-

кул или атомов уменьшается и выделяется в виде тепла, которое компенсирует тепло, отдаваемое системой "жидкость – кристалл" в окружающую среду. Это тепло называется *теплотой кристаллизации*. Тепло, выделяющееся при кристаллизации единицы массы вещества, называется *удельной теплотой кристаллизации*.

Обратное превращение – плавление – также происходит при постоянной температуре $T_{i\bar{e}}$ и сопровождается поглощением энергии. Поглощенная энергия в данном случае идет на разрушение кристаллической решетки. При заданном давлении температура кристаллизации T_k равна температуре плавления $T_{i\bar{e}}$.

Количество энергии, необходимое для перевода единицы массы вещества из твердого в жидкое состояние при температуре плавления, называется *удельной теплотой плавления вещества*. Удельная теплота плавления численно равна удельной теплоте кристаллизации λ .

Нагреем в электрической печи исследуемое вещество (олово) вместе с тиглем, в котором оно находится, до температуры выше температуры плавления. Затем вынесем тигель из печи в сторону. Олово начнет охлаждаться в воздухе за счет естественной конвекции. Через некоторое время установится такой режим, при котором температура во всех точках олова будет уменьшаться с одинаковой скоростью. Это условие выполняется тем лучше, чем больше теплопроводность охлаждаемого объекта и меньше интенсивность теплоотдачи в окружающую среду с постоянной температурой $T_{\bar{n}\delta}$. Описанный процесс охлаждения называется *регулярным тепловым режимом первого рода*.

Количество теплоты δQ , теряемое нагретым телом за время $d\tau$ при его охлаждении, находится по закону теплоотдачи Ньютона следующим образом:

$$\delta Q = \alpha (T_{\text{н\grave{a}}} - T_{\text{н\grave{o}}}) \cdot S \cdot d\tau.$$

Здесь α – коэффициент теплоотдачи – величина, зависящая от формы нагретого тела, качества его поверхности, физических параметров окружающей среды (плотности и вязкости воздуха и т.п.).

Коэффициент теплоотдачи α численно равен количеству теплоты, теряемой с единицы площади поверхности тела за единицу времени при $T_{\text{н\grave{a}}} - T_{\text{н\grave{o}}} = 1\text{K}$, $[\alpha] = \text{Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{K})$;

$T_{\text{н\grave{a}}}$ – температура поверхности нагретого тела;

$T_{\text{н\grave{o}}}$ – температура окружающей среды;

S – площадь поверхности нагретого тела.

Уравнение теплового баланса для охлаждения олова записывается с учётом того, что тепло, выделяемое при охлаждении олова с тиглем на температуру dT , отводится в окружающую среду за время $d\tau$:

$$-(c_{\text{O1}} m_{\text{O}} + c_{\text{T}} m_{\text{T}}) dT = q_1 (T_{\text{н\grave{a}}} - T_{\text{н\grave{o}}}) d\tau. \quad (4.1)$$

Здесь c_{O1} – удельная теплоемкость жидкого олова, Дж/(кг·K);

m_{O} – масса олова, кг;

c_{T} и m_{T} – удельная теплоёмкость и масса тигля соответственно, Дж/(кг·K) и кг;

dT – изменение температуры тела за время $d\tau$, K;

q_1 – скорость теплоотдачи жидкого олова в окружающую среду, Дж/(с·K);

$T_{\text{н\grave{o}}}$ – температура окружающей среды (температура воздуха в лаборатории), K;

$T_{\text{н\grave{a}}}$ – температура поверхности охлаждаемого тела, K.

Скорость теплоотдачи q_1 , т.е. количество теплоты, теряемое нагретым телом в единицу времени при $T_{i\hat{a}} - T_{\hat{n}\delta} = 1K$, зависит от площади поверхности охлаждаемого тела и от коэффициента теплоотдачи α .

В первом приближении для данной формы тигля и в небольшом интервале изменения температуры тела можно считать q_1 постоянной. Так как теплопроводность олова достаточно большая и его температура в точке расположения термопары мало отличается от температуры наружной поверхности, принимаем $T = T_{i\hat{a}}$. Учитывая это равенство, будем интегрировать уравнение (4.1) методом разделения переменных. Для этого запишем его в виде:

$$\frac{dT}{T - T_{\hat{n}\delta}} = - \frac{q_1}{c_{O1}m_O + c_Tm_T} d\tau. \quad (4.2)$$

Введем обозначение:

$$k_1 = \frac{q_1}{c_{O1}m_O + c_Tm_T}. \quad (4.3)$$

Величина k_1 имеет в СИ следующую единицу измерения:

$$[k_1] = [q / cm] = 1 \text{ c}^{-1};$$

k_1 характеризует скорость изменения температуры охлаждаемой системы и называется *темпом охлаждения*.

Для решения дифференциального уравнения (4.2) необходимо задать начальное условие: $T = T_0$ при $\tau = 0$.

Проинтегрировав правую и левую части уравнения (4.2), получим:

$$\ln(T - T_{cp}) = -k_1\tau + \ln C, \quad (4.4)$$

где C – константа интегрирования. Из начального условия найдем эту постоянную: $\ln(T_0 - T_{cp}) = \ln C$ и $C = T_0 - T_{\hat{n}\delta}$.

Тогда выражение (4.4) можно записать следующим образом:

$$\ln(T - T_{\tilde{n}\delta}) = \ln(T_0 - T_{\tilde{n}\delta}) - k_1 \tau, \quad (4.5)$$

или

$$T - T_{\tilde{n}\delta} = (T_0 - T_{\tilde{n}\delta}) e^{-k_1 \tau}. \quad (4.6)$$

Как видно из (4.6), при охлаждении нагретого тела его температура уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону.

Такой темп охлаждения сохранится до тех пор, пока температура олова не достигнет температуры кристаллизации T_k . Эта температура не будет изменяться до тех пор, пока не произойдет полная кристаллизация олова, хотя тепло продолжает отдаваться в окружающую среду.

После окончания кристаллизации температура олова с тиглем начинает опять уменьшаться, причем снова по экспоненциальному закону регулярного режима:

$$T - T_{cp} = (T_k - T_{cp}) \cdot e^{-k_2(\tau - \tau_k)}, \quad (4.7)$$

где

$$k_2 = \frac{q_2}{c_{O2} m_O + c_T m_T}, \quad (4.8)$$

T_k – температура кристаллизации олова,

k_2 – темп охлаждения твердого олова с тиглем,

c_{O2} – удельная теплоемкость твердого олова.

Кривая зависимости температуры от времени при охлаждении олова имеет вид, показанный на рис. 4.2.

Здесь участок АВ соответствует охлаждению жидкого олова, ВС – участок кристаллизации олова, СД – охлаждение твердого олова.

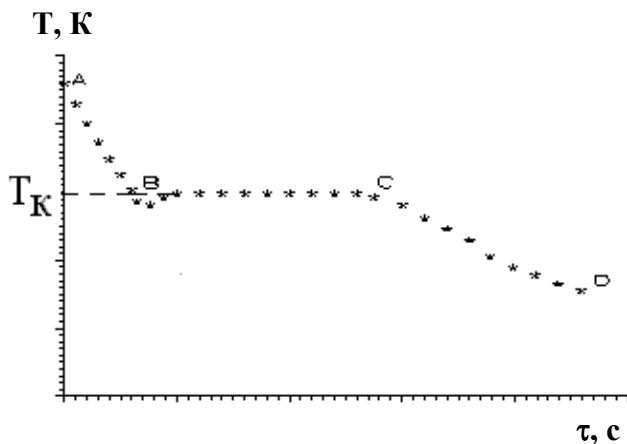


Рис. 4.2. Кривая охлаждения олова

Вблизи точки В наблюдается небольшой минимум температуры, а вблизи точки С – небольшой участок, где темп охлаждения меньше k_2 . Нарушение регулярного режима охлаждения вблизи точки В связано с возникновением метастабильного состояния (переохлажденное состояние жидкости, когда температура опускается ниже температуры кристаллизации T_k , а кристаллизация ещё не наступает), которое зависит от чистоты исследуемого вещества.

Количество тепла, выделенное при кристаллизации олова, равно:

$$Q = \lambda m_o, \quad (4.9)$$

где λ – удельная теплота кристаллизации, численно равная удельной теплоте плавления.

4.2.2. Вывод формулы для определения удельной теплоты кристаллизации.

Тепло, выделенное при кристаллизации, равно количеству теплоты, отданному телом за время кристаллизации в окружающую среду:

$$Q = q (T_k - T_{\tilde{n}\delta}) \cdot (\tau_k - \tau_i), \quad (4.10)$$

где $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$ – средняя скорость теплоотдачи в окружающую среду,

τ_i и τ_k – моменты времени, соответствующие началу и окончанию кристаллизации олова.

Приравнявая правые части формул (4.9) и (4.10), получим:

$$\lambda m_O = q (T_k - T_{\tilde{n}\delta}) \cdot (\tau_k - \tau_i).$$

Отсюда:

$$\lambda = \frac{q(T_k - T_{\tilde{n}\delta}) \cdot (\tau_k - \tau_i)}{m_O}. \quad (4.11)$$

Выражение для q найдём, используя формулы (4.3) и (4.8):

$$q_1 = k_1 (c_{O1} m_O + c_T m_T), \quad (4.12)$$

$$q_2 = k_2 (c_{O2} m_O + c_T m_T). \quad (4.13)$$

Следовательно,

$$q = \frac{1}{2} [k_1 (c_{O1} m_O + c_T m_T) + k_2 (c_{O2} m_O + c_T m_T)].$$

Окончательное выражение для λ получится в виде:

$$\lambda = \frac{(T_k - T_{\tilde{n}\delta})(\tau_k - \tau_i)}{2 m_O} [k_1 (c_{O1} m_O + c_T m_T) + k_2 (c_{O2} m_O + c_T m_T)]. \quad (4.14)$$

k_1, k_2, τ_i, τ_k находятся из графика, построенного по экспериментальным данным и изображённого на рис. 4.3.

Для этого запишем уравнение (4.5) для момента времени начала кристаллизации τ_i :

$$\ln(T_k - T_{\tilde{n}\delta}) = \ln(T_0 - T_{\tilde{n}\delta}) - k \tau_i. \quad (4.15)$$

Отсюда получим:

$$k_1 = \frac{\ln(T_0 - T_{\tilde{n}\delta}) - \ln(T_k - T_{\tilde{n}\delta})}{\tau_i}. \quad (4.16)$$

Аналогично, записав (4.5) для моментов времени окончания кристаллизации τ_k и некоторого момента времени τ_2 при охлаждении твёрдого олова, будем иметь:

$$\begin{aligned}\ln(T_k - T_{\tilde{n}\delta}) &= \ln(T_0 - T_{\tilde{n}\delta}) - k_2 \tau_k, \\ \ln(T_2 - T_{\tilde{n}\delta}) &= \ln(T_0 - T_{\tilde{n}\delta}) - k_2 \tau_2.\end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим следующую формулу для k_2 :

$$k_2 = \frac{\ln(T_k - T_{\tilde{n}\delta}) - \ln(T_2 - T_{\tilde{n}\delta})}{\tau_2 - \tau_k}. \quad (4.17)$$

В качестве измерителя температуры в данной лабораторной работе используется термоэлектрический термометр (принцип его действия – см. лабораторная работа №2). Термо-э.д.с. E пропорциональна разности температур "горячего" T и "холодного" $T_{\tilde{n}\delta}$ спаев, поэтому кривую охлаждения олова можно построить в переменных E и τ .

Если эту же кривую построить в полулогарифмических координатах $\ln E$ и τ (рис. 4.3), то участки АВ и СД станут прямолинейными, что позволит более точно определить моменты начала τ_i и окончания τ_k кристаллизации. Таким образом, для определения темпов охлаждения k_1 и k_2 необходимо построить зависимость $\ln E$ от τ (рис. 4.3).

Моменты времени τ_i и τ_k соответствуют точкам пересечения прямых АВ и СД с линией кристаллизации ВС.

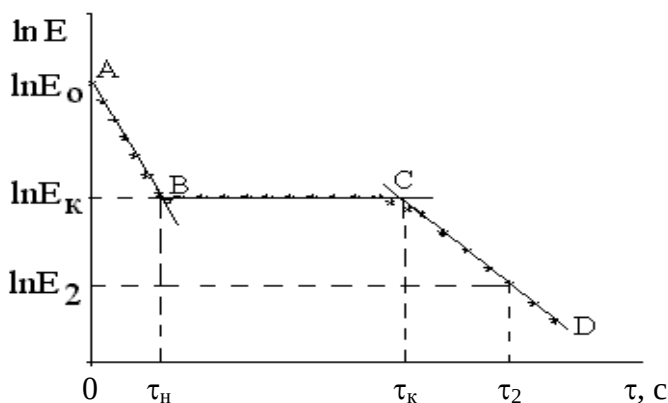


Рис. 4.3. Кривая охлаждения олова в полулогарифмических переменных

Так как термо-э.д.с в первом приближении пропорциональна разности температур, при которых находятся концы спаев термопары, формулы (4.16) и (4.17) для вычисления k_1 и k_2 примут вид:

$$k_1 = \frac{\ln E_0 - \ln E_k}{\tau_i}, \quad (4.16a)$$

$$k_2 = \frac{\ln E_k - \ln E_2}{\tau_2 - \tau_k}. \quad (4.17a)$$

4.2.3. Вывод формулы для изменения энтропии при кристаллизации.

Энтропия, характеризует вероятность макросостояния физической системы и определяется выражением

$$S = k \cdot \ln W, \quad (4.18)$$

которое называется *формулой Больцмана*.

Здесь k – постоянная Больцмана;

W – статистический вес (термодинамическая вероятность), т.е. число микросостояний, посредством которых реализуется данное макросостояние.

Нахождение изменения энтропии при тепловых взаимодействиях основано на измерении приведенного количества тепла.

Согласно термодинамическому определению энтропии, её приращение равно приведенному количеству тепла, т.е. отношению элементарного количества тепла, полученного системой, к абсолютной температуре T , при которой происходит этот процесс:

$$dS = \delta Q / T . \quad (4.19)$$

Полное изменение энтропии при обратимом переходе системы из состояния А в состояние В определяется путем интегрирования выражения (4.19):

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} . \quad (4.20)$$

В процессе кристаллизации олово отдаёт тепло в окружающую среду, т.е. $\delta Q < 0$, поэтому энтропия олова уменьшается.

Изменение энтропии олова при кристаллизации определяется формулой:

$$\Delta S = S_B - S_A = \frac{\lambda \cdot m_o}{T_k} < 0 . \quad (4.21)$$

Так как энтропию в некотором смысле можно считать мерой беспорядка в системе, то уменьшение энтропии олова при кристаллизации соответствует переходу системы в более упорядоченное состояние.

4.3. Описание установки

4.3.1. Принадлежности: тигель с оловом, печь, измерительная термopа, секундомер, цифровой вольтметр.

4.3.2. Установка (рис. 4.4) состоит из укрепленного на конце штанги тигля с оловом, который можно помещать в

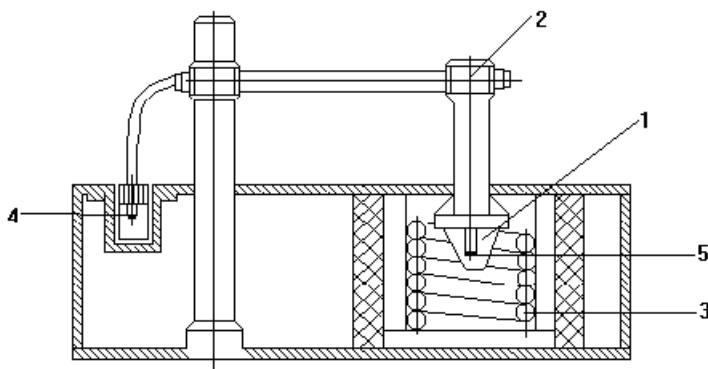
электрическую печь и отводить в сторону от печи после того, как олово расплавится.

Один спай термопары находится в глицерине при комнатной температуре, а её "горячий" спай помещается в расплавленное олово в тигле.

Термопара подключена к универсальному цифровому вольтметру для измерения термоэлектродвижущей силы (термо-э.д.с) в цепи термопары. Показания вольтметра пропорциональны разности температур спаев термопары:

$$E = \alpha (T - T_{\text{н\ddot{o}}}), \quad (4.22)$$

где α – постоянная термопары.



1 – тигель с оловом, 2 – штатив, 3 – нагреватель,
4 – сосуд с глицерином, 5 – измерительная термопара

Рис. 4.4. Установка для определения удельной теплоты
плавления олова

4.4. Порядок выполнения работы

4.4.1. Запишите необходимые для расчетов данные в тетрадь:

$c_{\text{ол}} = 267,9 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$ - удельная теплоемкость жидкого олова, соответствующая температуре 240°C ;

$c_{O_2} = 246,6 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ - удельная теплоемкость твердого олова, соответствующая температуре 230°C ;

c_T , m_T и m_O – удельная теплоемкость фарфорового тигля, массы тигля и олова (приведены на табличке возле установки);

$T_k = 231,9^\circ\text{C}$ – температура кристаллизации олова.

$T_{\text{н\delta}}$ – температура воздуха по показанию контрольного термометра, висящего на стене в лаборатории.

4.4.2. Поместите тигель с оловом в держателе над печью так, чтобы тигель входил в центральное отверстие муфельной печи.

4.4.3. Включите установку в сеть.

4.4.4. Пока олово нагревается, подготовьте таблицу для записи результатов эксперимента, предусмотрев в ней следующие колонки:

- номер по порядку,
- время в секундах,
- термо-э.д.с. E в милливольтгах,
- логарифм термо-э.д.с. $\ln E$.

Всего в таблице необходимо предусмотреть 50 – 100 строк в зависимости от того, через какие интервалы времени будут производиться измерения.

4.4.5. После достижения показания вольтметра 20 мВ выключите печь и отведите держатель с тиглем в сторону от нагревателя, расположив его над столом на высоте $15 \div 20 \text{ см}$.

4.4.6. Включите секундомер и сразу же начните запись показаний вольтметра через каждые $10 \div 20 \text{ сек}$. Измерения производите до тех пор, пока показания вольтметра не достигнут значения, в два раза меньшего по сравнению со значением термо-э.д.с, соответствующим температуре кристаллизации. Данные занесите в таблицу 4.

Таблица 4.

Результаты измерений термо-э.д.с E и значения $\ln E$

$\tau, \text{с}$	$E, \text{мВ}$	$\ln E$
0		
15		
30		
...		

4.4.7. Постройте кривую охлаждения олова в переменных $E = f(\tau)$.

4.4.8. Постройте этот же график в полулогарифмических координатах: $\ln E = f(\tau)$ и определите по нему моменты времени, соответствующие началу τ_i и концу τ_k процесса кристаллизации, а также значение $\ln E_k$, соответствующее температуре кристаллизации.

4.4.9. По наклону участков АВ и СД полулогарифмического графика определите темпы охлаждения k_1 и k_2 , используя формулы (4.16а) и (4.17а).

4.4.10. Используя табличное значение температуры плавления олова и измеренную температуру окружающей среды в лаборатории, с помощью формулы (4.14) найдите удельную теплоту плавления олова.

4.4.11. По формуле (4.21) вычислите изменение энтропии олова при кристаллизации.

4.4.12. Сравните полученное значение λ с его табличным значением из справочника.

4.5. Вопросы для самопроверки

4.5.1. Расскажите о фазовых переходах первого рода. Начертите диаграмму состояний и объясните её.

4.5.2. Что называется удельной теплотой плавления?

4.5.3. В каких фазах находится вещество при кристаллизации и как изменяется при этом его внутренняя энергия? Какая часть ее (кинетическая или потенциальная) при этом изменяется?

4.5.4. Как изменяется энтропия тела при кристаллизации?

4.5.5. Чем можно объяснить наличие переходных участков на кривой охлаждения вблизи точек В и С на рис. 4.1?

4.5.6. Какие погрешности возникают при измерениях? Объясните их причины.

4.5.7. Какие упрощающие предположения сделаны при выводе формулы (4.14), и как они скажутся на точности полученного результата?

4.6. Литература

4.6.1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: Учебник для физич. спец. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Матвеев А.Н. – М.: Высш. шк., 1987. – 360 с

4.6.2. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. 2-е изд. / Кикоин А.К., Кикоин И.К. – М.: Наука, 1976. 480 с.

4.6.3. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика / Савельев И.В. – М.: Астрель. АСТ, 2003. – 208 с.

4.6.4. . Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

4.6.5. Кортнев А.В., Рублев Ю.В., Куценко А.Н. Практикум по физике / Кортнев А.В., Рублев Ю.В., Куценко А.Н. – М.: ВШ, 1963. – 516 с.

Лабораторная работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ C_p / C_v МЕТОДОМ СТОЯЧИХ ВОЛН

5.1. Цель работы: определение отношения теплоемкостей газов методом стоячих волн.

5.2. Краткое теоретическое введение

Для характеристики тепловых свойств газа, как и всякого другого тела, пользуются физической величиной, называемой теплоемкостью.

Теплоемкостью C_δ какого-либо тела называется величина, равная количеству тепла, которое нужно сообщить телу для изменения его температуры на 1 K . Если температура тела изменяется не на 1 K , а на dT градусов, тогда эта величина равна

$$C_\delta = \delta Q / dT, \quad (5.1)$$

где δQ – количество тепла, необходимое для изменения температуры тела на dT градусов.

Величина C_δ измеряется в Дж/К .

Теплоемкость, отнесенная к единице массы вещества, называется удельной теплоемкостью $\tilde{n}$, т.е.

$$\tilde{n} = \frac{C_\delta}{m} = \frac{\delta Q}{m \cdot dT}. \quad (5.2)$$

Удельная теплоемкость измеряется в $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$.

Теплоемкость, отнесенная к одному молю вещества, называется молярной теплоемкостью $\tilde{N}$:

$$C = \frac{C_\delta}{\nu} = \frac{\delta Q}{\nu \cdot dT}. \quad (5.3)$$

Здесь $\nu = M/m$ – количество молей вещества,

M – его молярная масса.

Единица измерения молярной теплоемкости в СИ:
 $\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Очевидно, что

$$C = Mc. \quad (5.4)$$

Как удельная, так и молярная теплоемкость характеризуют не тело, а вещество, из которого состоит тело.

Значение теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Наибольший интерес представляет теплоемкость для случаев, когда нагревание происходит при постоянном объеме или при постоянном давлении. В первом случае теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном объеме C_V , во втором – теплоемкостью при постоянном давлении C_p . При нагревании данной массы на 1К при постоянном давлении и при постоянном объеме требуются разные количества тепла, т.е.

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V \neq C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p, \quad (5.5)$$

причем теплоемкость C_p идеального газа больше его теплоемкости C_V . Это связано с тем, что при $V = \text{const}$ полученное количество тепла тратится только на изменение внутренней энергии, т.е. на повышение температуры, тогда как при $p = \text{const}$ часть количества теплоты уходит на совершение работы газом при расширении. Из формулы Мейера $C_p = C_V + R$ ясен физический смысл универсальной газовой постоянной R .

Универсальная газовая постоянная R численно равна работе, которую совершает один моль идеального газа при его изобарическом нагревании на 1К .

Теплоемкость вещества тесно связана с его внутренней структурой и может быть теоретически рассчитана при определенных предположениях о его структуре. Согласно

классической теории, основанной на законе Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы, для отношения теплоемкостей C_P к C_V имеем следующее выражение:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}, \quad (5.6)$$

где i – число степеней свободы молекулы газа. Как следует из (5.4), величина γ определяется числом степеней свободы молекулы. *Числом степеней свободы механической системы называется число независимых координат, определяющих ее положение и конфигурацию в пространстве.* Для одноатомного газа $i = 3$, для двухатомного $i = 5$, для трехатомного $i = 6$.

Однако формула (5.4) дает значения, не всегда совпадающие с экспериментом. На трудности, например, наталкивается попытка объяснить теплоемкость хлора. Это связано с тем, что данная теория не в состоянии должным образом учесть энергию, связанную с внутренними движениями в молекуле, к которым закон равномерного распределения энергии по степеням свободы не всегда применим.

Особенно важным отклонением от результатов теории является тот факт, что $\tilde{N}_D/\tilde{N}_V$ оказывается зависящим от температуры, в то время как, согласно (5.4), оно для данного газа с данным значением i – величина постоянная. Расхождение теории и опыта свидетельствует, очевидно, о том, что представление о молекулах как о твердых шариках, движения которых происходят по законам механики, не вполне соответствует действительности. Теперь хорошо известно, что молекулы состоят из взаимодействующих между собой атомов, а атомы имеют сложное строение и состоят из многих еще меньших частиц, которые также движутся сложным образом. Движение же атомных частиц не подчиняется классической механике, а управляется за-

конами квантовой механики. Поэтому, пока идет речь о теплоемкости одноатомных газов, на которую не влияют внутриатомные движения и связанная с ними энергия, классическая теория теплоемкости оказывается в хорошем согласии с опытом. Но в многоатомных молекулах существенную роль играют уже внутренние процессы в молекулах и атомах, с которыми, несомненно, связаны, например, колебательные степени свободы. Естественно, классическая теория, не учитывающая особых квантовых свойств атомных систем, в этом случае дает лишь приблизительно верные результаты.

Квантовая теория дает полное объяснение всем опытным данным о теплоемкости.

Отношение теплоемкостей газов $\gamma = \tilde{N}_D / \tilde{N}_V$ играет важную роль в теории идеальных газов. Как было сказано выше, оно связано с числом степеней свободы молекул. Кроме того, эта величина входит в уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона): $pV^\gamma = \text{const}$.

Роль этой величины заключается еще и в том, что, зная ее, можно не прибегать к измерениям C_V , которые всегда трудны. Значение C_V можно получить из измеренных значений C_p и γ . Часто именно так и поступают.

Существует несколько способов определения $\tilde{N}_D / \tilde{N}_V$. Наиболее удобным из них следует считать метод, основанный на измерении скорости звука в газе. Из акустики известно, что скорость звука ν в газе определяется формулой:

$$\nu = \sqrt{\gamma RT / M}, \quad (5.7)$$

где $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$ – универсальная газовая постоянная;

T – температура газа;

M – его молярная масса.

Если T и M известны, то, найдя скорость звука υ , из уравнения (5.5) можно определить величину γ следующим образом:

$$\gamma = \frac{M}{RT} \upsilon^2. \quad (5.8)$$

Для нахождения скорости звука может быть использовано соотношение

$$\upsilon = f \cdot \lambda, \quad (5.9)$$

где f – частота звуковых колебаний в исследуемом газе;

λ – длина волны.

Для определения длины волны λ используется метод стоячих волн.

Стоячие волны возникают в результате колебательного процесса, наблюдаемого при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой, распространяющихся навстречу друг другу. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу волна отраженная, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну. Если начало координат взять в такой точке, в которой встречные волны имеют одинаковые фазы, и выбрать отчет времени так, чтобы начальные фазы оказались равными нулю, то уравнение обеих плоских волн можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi_{i\ddot{a}\ddot{a}} &= a_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{\upsilon} \right), \\ y_{i\ddot{o}\ddot{d}} &= a_0 \cos \omega \left(t + \frac{x}{\upsilon} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где x – расстояние от источника колебаний до точки наблюдения,

y – смещение колеблющейся точки от положения равновесия,

$\omega = 2\pi / \lambda$ – циклическая частота колебаний

Сложение этих двух волн дает:

$$\begin{aligned} \acute{o} &= \acute{o}_{i\ddot{a}\ddot{a}} + \acute{o}_{i\ddot{o}\ddot{o}} = a_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + a_0 \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) = \\ &= 2a_0 \cos \left(\omega \frac{x}{v} \right) \cos \omega t = A \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Выражение (5.11) показывает, что во всех точках среды возникают колебания с частотой ω . Возникшее колебание носит название стоячей волны. Множитель $2a_0 \cos(\omega x / v)$, не зависящий от времени, выражает амплитуду A результирующего колебания.

Таким образом, амплитуда колебания зависит от координаты x , определяющей положение точек среды. Точки, в которых амплитуда максимальна, называются пучностями. Точки, в которых амплитуда равна нулю, в колебании не участвуют. Такие точки называются узлами. Амплитуда A максимальна в точках, для которых

$$\cos(\omega x / v) = 1. \quad (5.12)$$

Отсюда положение пучностей определится условием:

$$\omega x_k / v = \pm k\pi, \quad (5.13)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно, координаты пучностей:

$$x_k = \pm k\pi \frac{v}{\omega} = \pm k\pi \frac{\lambda f}{\omega} = \pm k\pi \frac{\lambda f}{2\pi f} = \pm k \frac{\lambda}{2}. \quad (5.14)$$

В закрытой с обеих сторон трубе (телефоном и микрофоном) длиной l чистая резонансная волна получается тогда, когда по длине трубы укладывается целое число полу-

волн, т.е. когда $l = k\lambda / 2$. В этом случае интенсивность звука, воспринимаемого микрофоном, будет максимальной. Тогда скорость звука определяется следующим образом:

$$v = f \cdot \lambda = f \cdot 2l / k. \quad (5.15)$$

Экспериментально находить значение k неудобно. Поэтому здесь поступают следующим образом: при частоте f_1 пусть $k = k_1$, при другой частоте f_2 f_i значение k также изменится и будет равно k_2 k_i , т.е.

$$v = f_1 \frac{2l}{k_1} \quad \text{и} \quad v = f_2 \frac{2l}{k_2} \quad v = f_i \frac{2l}{k_i}.$$

Тогда скорость v может быть определена в виде:

$$v = \frac{2l(f_2 - f_1)}{k_2 - k_1}. \quad v = \frac{2l(f_i - f_1)}{k_i - k_1}. \quad (5.16)$$

Находить из опыта разность $k_2 - k_1$ легче, чем абсолютную величину k . Из (5.14) получим:

$$\frac{f_2 - f_1}{k_2 - k_1} = \frac{v}{2l}. \quad (5.17)$$

5.3. Экспериментальная установка и методика выполнения работы

5.3.1. Описание экспериментальной установки.

Блок-схема установки, применяемой в настоящей работе, приведена на рис.5. Звуковые колебания в стальной трубе возбуждаются телефоном Т и улавливаются микрофоном М. Мембрана телефона приводится в движение переменным током звуковой частоты; в качестве источника переменной э.д.с. используется звуковой генератор ГЗ-34. Частота возбуждаемого колебания измеряется электросчетным частотомером ЧЗ-32. Возникающий в микрофоне сигнал регистрируется на цифровом вольтметре В7-35. При

наступлении резонанса (т.е. при $l = k\lambda/2$, $k = 0, 1, 2, \dots$) показание цифрового вольтметра будет максимальным. Краны 1 и 2 служат соответственно для наполнения и откачки газа. Откачка производится с помощью вакуумного насоса.

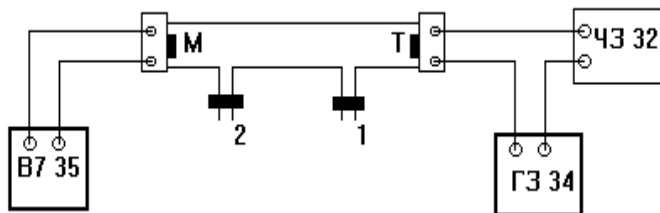


Рис.5. Блок-схема экспериментальной установки

5.3.2. Порядок выполнения работы.

5.3.2.1. Включите в сеть звуковой генератор ГЗ-34, электросчетный частотомер ЧЗ-32 и цифровой вольтметр В7-35. Дайте им прогреться 5 – 7 минут.

5.3.2.2. Под руководством преподавателя или дежурного лаборанта производите откачку газа в трубе, оставленной от предыдущего опыта, и наполните ее воздухом.

5.3.2.3. Плавно увеличивая частоту сигнала, подаваемого звуковым генератором, получите ряд последовательных резонансных значений частоты, около десяти, отмечая наступление резонанса по увеличению показания цифрового вольтметра В7-35. Опыт повторите три раза. Найдите среднее значение частоты, соответствующей каждому резонансу. Результаты занесите в таблицу 5.1.

Таблица 5.1.

Частоты резонансов

Номер резонанса k	Воздух			
	$f_1, \text{Гц}$	$f_2, \text{Гц}$	$f_3, \text{Гц}$	$\langle f \rangle, \text{Гц}$
1				
2				
...				
10				

5.3.2.4. Чтобы для вычисления скорости звука ν можно было применить формулу (5.16), используйте данные таблицы 5.2. Затем по формуле (5.8) рассчитайте γ и $\langle \gamma \rangle$. Результаты вычислений занесите в таблицу 5.2.

5.3.2.5. Оцените абсолютную и относительную погрешность измерений по методу нахождения погрешностей прямых измерений. Окончательный результат представьте в виде:

$$\gamma = \langle \gamma \rangle \pm \Delta\gamma.$$

Таблица 5.2.

Вычисление скорости звука ν и γ

$k_i - 1$	$f_i - f_1, \text{Гц}$	$\nu_i, \text{м/с}$	γ_i	$\langle \gamma \rangle$	$\Delta\gamma_i$	$\Delta\gamma_i^2$
2-1						
3-1						
.						
.						
10-1						

5.3.2.6. Полученные результаты изобразите на графике, откладывая по оси абсцисс номер резонанса k , а по оси ординат – разность между частотой последующих резонансов и частотой первого резонанса $f_{k+1} - f_1$. Через полученные точки проведите наилучшую прямую. Угловой коэффици-

ент прямой определяет величину $\nu/2l$ (см. формулу (5.17)).
Определив из графика угловой коэффициент f/k , вычислите по формуле (5.15) среднее значение скорости звука.

5.3.2.5. Подставляя найденное значение скорости звука в формулу (5.8), вычислите значение $\gamma = C_p/C_v$ и сравните его с $\langle \gamma \rangle$ из таблицы 5.2.

5.4. Вопросы для самопроверки

5.4.1. Какой газ называется идеальным? Запишите уравнение состояния идеального газа и объясните его.

5.4.2. Сформулируйте первое начало термодинамики в общем виде и для каждого изопроцесса. Начертите графики изопроцессов в координатах (pV) , (pT) , (VT) .

5.4.3. Дайте определение теплоёмкости вещества, удельной теплоёмкости, молярной теплоёмкости. Функцией процесса или состояния является теплоёмкость?

5.4.4. Почему теплоемкость при постоянном давлении больше теплоемкости при постоянном объеме? Каков физический смысл универсальной газовой постоянной R ?

5.4.5. Что называется числом степеней свободы?

5.4.6. В чем причина расхождения теоретических и экспериментальных значений теплоемкости?

5.4.7. Каким должно быть значение γ для воздуха?

5.5. Литература

5.5.1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: Учебник для физич. спец. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Матвеев А.Н. – М.: Высш. шк., 1987. – 360 с

5.5.2. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. 2-е изд. / Кикоин А.К., Кикоин И.К. – М.: Наука, 1976. 480 с.

5.5.3. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика / Савельев И.В. – М.: Астрель. АСТ, 2003. – 208 с.

5.5.4. . Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

5.5.5. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин / Зайдель А.Н. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

Лабораторная работа № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ЖИДКОСТЕЙ КАЛОРИМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

6.1. Цель работы: определение удельной теплоемкости жидкости методом графического учета потерь тепла вследствие теплообмена системы с окружающей средой.

6.2. Краткое теоретическое введение

Теплоемкостью $C_{\partial\partial\partial\partial}$ тела называется отношение бесконечно малого количества тепла δQ , полученного телом, к соответствующему приращению его температуры dT :

$$C_{\partial\partial\partial\partial} = \delta Q / dT, \quad (6.1)$$

где δQ – количество тепла, необходимое для изменения температуры тела на dT градусов. Величина $C_{\partial\partial\partial\partial}$ измеряется в Дж/К.

Теплоемкость тела можно отнести к единице массы, одному моллю и единице объема тела. Соответственно этому теплоемкость называется удельной, молярной или объемной.

Теплоемкость, отнесенная к единице массы вещества, называется удельной теплоемкостью $\tilde{n}$, т.е.

$$\tilde{n} = \frac{C_{\partial\partial\partial\partial}}{m} = \frac{\delta Q}{m \cdot dT}. \quad (6.2)$$

Удельная теплоемкость измеряется в Дж/(кг·К).

Теплоемкость, отнесенная к одному моллю вещества, называется молярной теплоемкостью $\tilde{N}$:

$$C = \frac{C_{\partial\partial\partial\partial}}{\nu} = \frac{\delta Q}{\nu \cdot dT}. \quad (6.3)$$

Здесь $\nu = M/m$ – количество молей вещества,
 M – его молярная масса.

Единица измерения молярной теплоемкости в СИ: Дж/(моль·К).

Очевидно, что

$$C = Mc. \quad (6.4)$$

Как удельная, так и молярная теплоемкость характеризуют не тело, а вещество, из которого состоит тело.

Обычно жидкие и твердые вещества характеризуют их удельной теплоемкостью c .

На основе первого начала термодинамики количество тепла δQ , полученного системой, идет на приращение ее внутренней энергии dU и на совершение системой работы δA :

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (6.5)$$

Как известно, в случае нагревания газа совершаемая им работа может быть различной в зависимости от способа подвода тепла. Поэтому теплоемкость газа также является функцией процесса и может иметь различные значения в зависимости от условий подвода тепла. В частности, можно говорить о теплоемкости газа при постоянном давлении C_p или теплоемкости при постоянном объеме C_v .

Однако при нагревании жидкости (так же, как и твердого тела) ее объем изменяется на весьма малую величину и работой, производимой жидкостью при тепловом расширении, можно пренебречь по сравнению с приращением ее внутренней энергии (если она находится далеко от области фазовых переходов). Поэтому для жидкости можно положить $C_p \approx C_v \approx C$.

Можно считать, что удельная теплоемкость жидкости не зависит от способа подвода тепла. Удельная теплоемкость большинства жидкостей с повышением температуры слабо увеличивается.

Теплоемкость воды понижается от $4,2174 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ при 0°C до $4,1780 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ при 35°C , а затем повышается до $4,2145 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ при 99°C . Как видно, максимальное относительное изменение удельной теплоемкости воды в интервале температур от 0°C до 35°C не превышает $0,9\%$. Поэтому для большинства практических расчетов можно пренебречь зависимостью теплоемкости от температуры и принять для удельной теплоемкости воды ее среднее значение $c = 4,1868 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ в интервале температур от 0°C до 100°C . В большинстве методов калориметрических измерений дистиллированная вода используется как эталонное тело с известной удельной теплоемкостью.

В данной работе удельная теплоемкость исследуемой жидкости определяется методом графического учета потерь тепла вследствие теплообмена системы с окружающей средой.

При экспериментальном определении удельной теплоемкости по формуле (6.2) всегда возникают затруднения, связанные с тем, что в процессе нагревания исследуемого тела часть тепла отдается в окружающую среду вследствие теплообмена. Поэтому всегда приходится вводить поправку на потери тепла в окружающую среду. Методика учета этих поправок зависит от конкретного калориметрического способа определения удельной теплоемкости тела.

В данной работе используется метод калориметрического измерения удельной теплоемкости тела, когда температура калориметра все время выше температуры окружающей среды. Тогда в течение всего опыта калориметр только отдает тепло окружающей среде. В данном опыте включают электрический нагреватель, опущенный в калориметр с исследуемой жидкостью, и нагревают её до температуры, на $10\div 15^\circ\text{C}$ выше температуры окружающей

среды. Затем нагреватель выключают и дают системе охлаждаться и отдавать тепло окружающей среде под действием естественной конвекции. Во всё время опыта наблюдают за изменением со временем температуры жидкости в калориметре и температуры окружающей среды, занося их значения в таблицу.

При этом для случая с включенным нагревателем на основании уравнения теплового баланса можно написать:

$$I \cdot U \cdot dT = (cm + c_0 m_0) dT + \alpha (T_{\text{нв}} - T_{\text{нд}}) S d\tau \quad (6.6)$$

и для случая с выключенным нагревателем:

$$(cm + c_0 m_0) dT + \alpha (T_{\text{нв}} - T_{\text{нд}}) S d\tau = 0. \quad (6.7)$$

Здесь I , U – сила тока и напряжение на нагревателе;

c , m – удельная теплоемкость и масса исследуемой жидкости в калориметре;

c_0 и m_0 – удельная теплоёмкость и масса калориметра;

α – коэффициент теплоотдачи от калориметра в окружающую среду (см. лабораторную работу № 4),

S – площадь поверхности калориметра;

$T_{\text{нв}}$ и $T_{\text{нд}}$ – средние температуры поверхности калориметра и окружающей среды;

dT – приращение средней по объему температуры жидкости за время $d\tau$.

Как правило, все диэлектрические жидкости имеют небольшой коэффициент теплопроводности и при отсутствии конвективного перемешивания распределение температуры жидкости по объему может быть неравномерным. Температура жидкости не равна температуре поверхности стенки калориметра. Поэтому необходимо во время опыта постоянно перемешивать жидкость в калориметре с помощью мешалки. Только при этом условии будут справедливы уравнения (6.6) и (6.7). При этом также можно прибли-

женно считать, что температура поверхности калориметра $T_{\ddot{a}a}$ равна средней температуре жидкости T :

$$T_{\ddot{a}a} = T.$$

Коэффициент теплоотдачи α слабо зависит от температурного перепада $T_{\ddot{a}a} - T_{\ddot{o}o}$, поэтому его можно считать не зависящей от температуры постоянной величиной.

Если нагреватель включен в момент времени τ_1 , когда калориметр с жидкостью имеет среднюю температуру T_1 , и выключается в момент времени τ_2 при средней температуре T_2 , то уравнение теплового баланса (6.6) можно записать в конечных разностях:

$$IU(\tau_2 - \tau_1) = (cm + c_0 m_0)(T_2 - T_1) + \alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_{cp} \right) S(\tau_2 - \tau_1). \quad (6.8)$$

Здесь в последнем члене произведена замена: $T_{нов} = \frac{T_1 + T_2}{2}$,

так как теплоотвод в окружающую среду определяется средним за время опыта перепадом температуры между нагретым телом и окружающей средой:

$$T_{нов} - T_{cp} = \frac{(T_{нов1} - T_{cp}) + (T_{нов2} - T_{cp})}{2} = \frac{T_1 + T_2}{2} - T_{cp} \quad (6.9)$$

с учетом предположения о равенстве средней температуры жидкости и поверхности стенки калориметра.

Для нахождения коэффициента теплоотдачи α воспользуемся уравнением (6.7) баланса тепла при выключенном нагревателе, которое перепишем в виде:

$$\frac{dT}{T_{\ddot{a}a} - T_{c\ddot{o}}} = - \frac{\alpha S}{cm + c_0 m_0} d\tau. \quad (6.10)$$

Учтём, что $T_{ii\hat{a}} = T$. Тогда (6.10) примет вид:

$$\frac{dT}{T - T_{c\delta}} = - \frac{\alpha S}{cm + c_0 m_0} d\tau. \quad (6.11)$$

Проинтегрируем (6.11) по времени, начиная от момента выключения нагревателя τ_2 до некоторого момента τ , при котором калориметр охладится от T_2 до T .

$$\ln \frac{T - T_{cp}}{T_2 - T_{cp}} = - \frac{\alpha S}{cm + c_0 m_0} (\tau_2 - \tau).$$

Тогда

$$T - T_{cp} = (T_2 - T_{cp}) e^{-k(\tau - \tau_2)}, \quad (6.12)$$

где коэффициент

$$k = \frac{\alpha S}{cm + c_0 m_0} \quad (6.13)$$

называется темпом охлаждения.

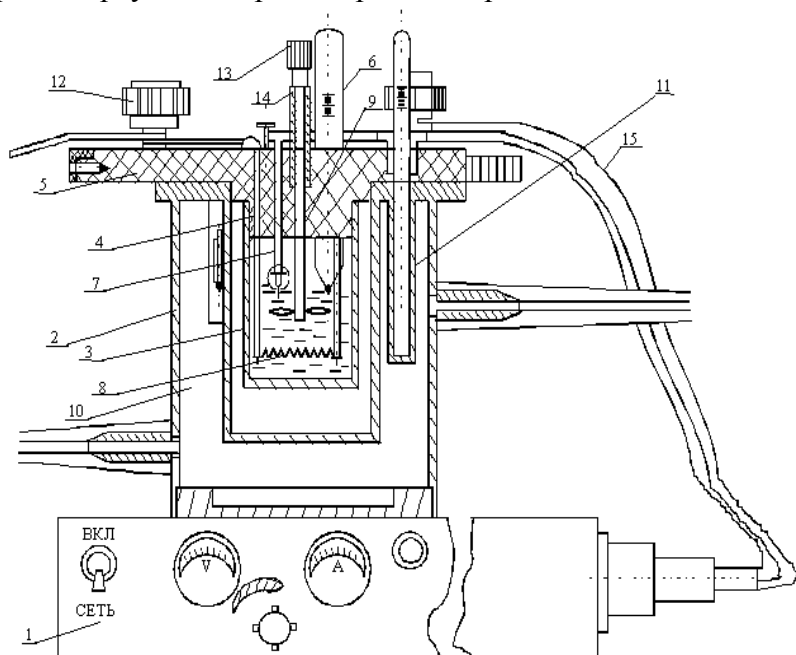
Отсюда видно, что температура калориметра при охлаждении уменьшается со временем по экспоненциальному закону. По данным опыта можно легко определить значение k , построив зависимость $\ln(T - T_{\hat{n}\delta})$ от времени τ . Подставив значение αS из (6.13) в (6.8), получим конечную формулу для определения удельной теплоемкости исследуемой жидкости:

$$c = \frac{IU(\tau_2 - \tau_1)}{m \left[(T_2 - T_1) + \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_{cp} \right) (\tau_2 - \tau_1) k \right]} - \frac{m_0 c_0}{m}. \quad (6.14)$$

6.3. Описание экспериментальной установки

Калориметр представляет собой (см. рис.6) алюминиевый стакан 3 с исследуемой жидкостью, внутри которого находится электрический нагреватель 8. Калориметр прикреплен к крышке и устанавливается внутри большого ци-

цилиндра 2 с двойными стенками, играющего роль термостата. Во время опытов через стенки термостата пропускается водопроводная вода и поддерживается постоянная температура среды $T_{\text{н\delta}}$. Электрический нагреватель подключается к автотрансформатору через дополнительное сопротивление R . Значение электрического тока, проходящего через нагреватель, измеряется амперметром, падение напряжения - вольтметром переменного тока. Значения температуры жидкости в калориметре и воды в термостате измеряются ртутным термометром с погрешностью $0,1\text{ K}$.



1 - блок управления, 2 - термостат, 3 - калориметр, 4 - выступы,
5 - крышка, 6 - термометр, 7 - хромель-копелевая термопара,
8 - нагреватель, 9 - мешалка, 10 - рубашка охлаждения,
11 - цилиндр ическое гнездо для термометра, 12 - клеммы,
13 - ручка мешалки, 14 - втулка, 15 - кабель питания нагревателя
Рис. 6. Установка для измерения удельной теплоемкости жидкости методом периодического нагрева и охлаждения

6.4. Порядок выполнения работы

6.4.1. Включите холодную воду, проходящую через термостат, и дождитесь, пока температура среды $T_{\text{н\delta}}$ перестанет изменяться.

6.4.2. Запишите в тетрадь спецификацию установки:

масса калориметра m_0 ;

масса калориметра с жидкостью $m + m_0$;

масса исследуемой жидкости m ;

удельная теплоёмкость калориметра c_0 .

6.4.3. Включите нагреватель, пропуская через него ток порядка $1,0 \div 1,5$ А. Когда температура жидкости в калориметре станет на $10 \div 15$ °С больше температуры охлаждающей жидкости в термостате, отключите нагреватель от сети.

6.4.4. Первый период. Включите секундомер и через каждую минуту записывайте в таблицу 6.1 температуру T жидкости в калориметре и температуру $T_{\text{н\delta}}$ проточной воды в термостате по показаниям соответствующих термометров. При этом необходимо постоянно перемешивать жидкость в калориметре, вращая ручную мешалку с крыльчаткой на конце. Измерения продолжать в течение 15 мин. Это будет первый период эксперимента. Секундомер нельзя выключать до полного окончания работы.

Таблица 6.1.

**Измерение температуры среды $T_{\text{н}\delta}$
и температуры и исследуемой жидкости T**

τ , мин	$T_{\text{н}\delta}$, $^{\circ}\text{C}$	T , $^{\circ}\text{C}$	τ , мин	$T_{\text{н}\delta}$, $^{\circ}\text{C}$	T , $^{\circ}\text{C}$	τ , мин	$T_{\text{н}\delta}$, $^{\circ}\text{C}$	T , $^{\circ}\text{C}$
Первый период			Второй период			Третий период		

6.4.5. Второй период. Через 15 мин снова включите нагреватель, пропуская через него ток порядка $1,0 \div 1,5$ А. Запишите значения силы тока и напряжения на нагревателе. Записывайте показания термометров через каждые 0,5 минуты в течение 15 минут второго периода.

6.4.6. Третий период. Через 15 минут выключите нагреватель и продолжайте записывать показания термометров через каждую минуту в течение 15 минут.

6.4.7. Выключите секундомер. Таким образом, эксперимент состоит из трёх периодов продолжительностью 15 минут каждый.

6.4.8. По результатам опытов для каждого измерения определите разность $T - T_{\text{н}\delta}$ и натуральный логарифм $\ln(T - T_{\text{н}\delta})$. Занесите данные в таблицу 6.2. Постройте график зависимости $\ln(T - T_{\text{н}\delta})$ от τ за все время опыта.

Таблица 6.2.

Данные для построения графика

τ , мин	$T - T_{\text{н\delta}}, ^\circ\text{C}$	$\ln(T - T_{\text{н\delta}})$
Первый период		
0		
1		
...		
15		
Второй период		
15,5		
16,0		
...		
30,0		
Третий период		
31		
32		
...		
45		

6.4.9. По тангенсам углов наклона участков графика, соответствующих режиму охлаждения до и после участка нагревания (первый и третий периоды), определите темпы охлаждения k_1 , k_2 и среднее значение $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

6.4.10. Поставив найденное значение k в формулу (6.14), найдите значение удельной теплоемкости исследуемой жидкости.

6.4.11. Сравните результат, полученный в Вашем опыте, с табличным значением удельной теплоемкости для исследуемой жидкости и объясните возможные причины расхождения их.

6.5. Вопросы для самопроверки

6.5.1. Что такое теплоемкость и что она характеризует?

6.5.2. Какие допущения сделаны при выводе формул (12) и (14)?

6.5.3. Каким образом учитываются потери тепла калориметра в окружающую среду в данной работе?

6.5.4. Почему график зависимости температуры воды в калориметре от времени в полулогарифмических координатах представляет отрезки прямых?

6.6. Литература

6.6.1. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под ред. Ивероновой В.И. – М.: Наука, 1967. – 352 с.

6.6.2. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. – М.: Высшая школа, 1987. – 360 с.

6.6.3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.2. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1979.

6.6.4. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. Кикоина И.К. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.

6.7. Задание на УИРС.

6.7.1. Измерьте массу пустого калориметра. Налейте в калориметр дистиллированную воду, измерьте массу калориметра с дистиллированной водой. Найдите массу воды. Соберите установку.

6.7.2. Повторите задание п.п. 6.4.1 – 6.4.10 для дистиллированной воды и найдите опытное значение её удельной теплоемкости.

6.7.3. Сравните опытное значение удельной теплоемкости воды с табличным и оцените точность измерений на данной установке. Оцените возможные причины расхождения данных и пути их устранения.

Лабораторная работа № 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ВОЗДУХА

7.1. Цель работы: экспериментальное определение вязкости воздуха.

7.2. Теоретическое введение

7.2.1. Вязкое трение.

Рассмотрим слой жидкости, заключенный между двумя пластинами, находящимися на расстоянии y друг от друга (рис.7.1).

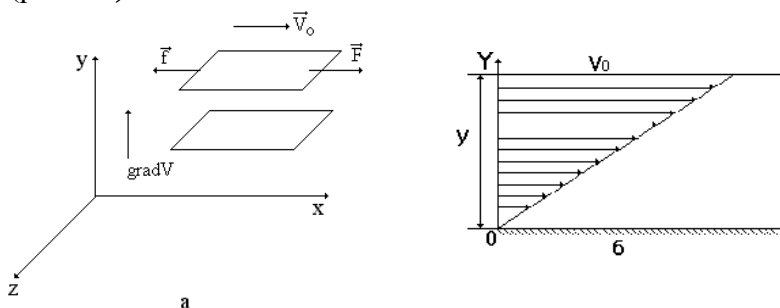


Рис. 7.1 К определению вязкости

Пусть нижняя пластина покоится, а верхняя пластина площадью S под действием внешней силы $\vec{F}$ движется в направлении оси x с постоянной скоростью $\vec{V}_0$. Тогда сила трения $\vec{f}$, приложенная к верхней пластине, равна и противоположна внешней силе $\vec{F}$ (рис.7.1 а).

Благодаря внутреннему трению слои жидкости, лежащие очень близко к поверхности тела, движутся практически со скоростью движения данного участка поверхности тела. Если $y \ll \sqrt{S}$, скорость жидкости между пластинами

будет линейно возрастать от 0 до v_0 при изменении вертикальной координаты слоя жидкости от 0 до y (рис. 7.1.б).

Ньютоном была предложена следующая зависимость для силы вязкого трения:

$$f_x = \eta \frac{v_0}{y} S \quad (7.1)$$

где коэффициент пропорциональности η называется вязкостью жидкости (или газа) и зависит только от свойств жидкости (газа), заполняющей пространство между поверхностями (при данной температуре).

Отношение силы трения f_x к площади поверхности пластины S

$$\tau_{xy} = \eta \frac{v_0}{y} \quad (7.2)$$

называется касательным напряжением трения. Здесь индексы x и y указывают направление движения (x) и направление, по которому происходит изменение величины скорости (y).

Представим себе, что жидкость между поверхностями разбита на тонкие параллельные слои. Каждый слой движется равномерно, причем верхний слой тянет вперед лежащий под ним слой с силой, по величине равной f , нижний слой тянет соседний верхний с силой, равной f , и направленной назад. Таким образом, сила трения f передается от одного слоя жидкости к другому, следовательно, от одной поверхности к другой. На каждый слой действуют две равные по величине и противоположные по направлению силы, поэтому и движение его равномерное. Сказанное полностью относится и к напряжению трения τ_{xy} , так как оно равно силе трения, действующей на единицу площади поверхности.

В СИ вязкость η измеряется в $\text{Па}\cdot\text{с}$ (паскаль-секунда).

Вязкость η различна для разных газов и возрастает с повышением температуры.

Для газов вязкость η связана со средней длиной свободного пробега $\langle l \rangle$ следующим соотношением:

$$\eta = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle u \rangle \rho, \quad (7.3)$$

где $\langle u \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул;
 ρ – плотность газа при данной температуре.

Известно, что для идеального газа

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad \rho = \frac{pM}{RT}, \quad (7.4)$$

где M – молярная масса газа;

p – давление;

T – абсолютная температура.

Из (7.3) и (7.4) следует:

$$\langle l \rangle = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{8M}}. \quad (7.5)$$

Формула (7.5) позволяет по экспериментальным значениям вязкости, температуры и давления определить длину свободного пробега молекул газа.

Используя формулу элементарной кинетической теории газов

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \quad (7.6)$$

можно определить эффективный диаметр молекул газа.

Наряду с динамической вязкостью η часто используют также кинематическую вязкость ν жидкости (или газа), определяемую как:

$$\nu = \eta / \rho,$$

где ρ – плотность жидкости (или газа).

Кинематическая вязкость измеряется в СИ в $\text{м}^2/\text{с}$.

В общем случае, когда вблизи поверхности тела скорость жидкости изменяется произвольно в направлении, перпендикулярном к рассматриваемому участку поверхности, численное значение касательного напряжения трения определяется по формуле :

$$\tau_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy}, \quad (7.7)$$

где y – направление нормали к элементу поверхности,

$\frac{dv_x}{dy}$ – производная от проекции скорости на ось x по

координате y .

7.2.2. Течение вязкой жидкости по трубе.

Рассмотрим стационарное ламинарное течение вязкой жидкости в круглой трубе и найдём закон изменения скорости v течения с расстоянием r от оси трубы.

Выделим внутри трубы радиуса R воображаемый цилиндрический объём жидкости радиуса r и длины l (рис.7.2).

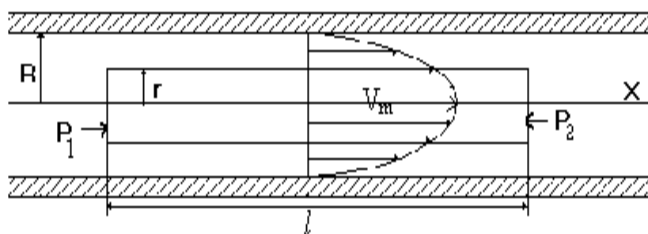


Рис.7.2. К выводу зависимости скорости течения от расстояния до оси трубы

При стационарном течении в трубе постоянного сечения скорости всех частиц потока остаются неизменными.

Следовательно, сумма всех внешних сил, действующих на выделенный объём жидкости, равна нулю.

В направлении течения вдоль оси x действует сила, обусловленная разностью давлений в сечениях 1 и 2:

$$F_{\ddot{a}\ddot{a}\ddot{a}} = (p_1 - p_2) \cdot \pi r^2.$$

На боковую поверхность выделенного объёма жидкости действует сила трения

$$F_{\dot{o}\dot{o}} = \tau_{xr} \cdot 2\pi r l.$$

Сумма проекций этих сил на направление течения должна быть равна нулю:

$$F_{\ddot{a}\ddot{a}\ddot{a}} + F_{\dot{o}\dot{o}} = (p_1 - p_2) \cdot \pi r^2 + \tau_{xr} \cdot 2\pi r l = 0. \quad (7.8)$$

Отсюда получаем

$$\tau_{xy} = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r}{2}.$$

Из этого равенства видно, что касательное напряжение изменяется по сечению трубы по линейному закону, возрастаая от нуля на оси трубы при $r=0$ до максимального значения

$$\tau_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R}{2}$$

на стенке трубы при $r = R$.

Подставляя в формулу (7.8) выражение для напряжения трения (7.7)

$$\tau_{xr} = \eta \frac{dv_x}{dr},$$

получим дифференциальное уравнение для скорости течения:

$$\frac{dv_x}{dr} = - \frac{(p_1 - p_2) \cdot r}{2l\eta}. \quad (7.9)$$

Интегрируя последнее уравнение, найдём:

$$v_x(r) = -\frac{(p_1 - p_2) \cdot r^2}{4\eta l} + C. \quad (7.10)$$

Постоянную интегрирования C найдем из граничного условия прилипания вязкой жидкости к стенкам трубы, т.е. $v_x = 0$ при $r = R$ (R – радиус трубы), отсюда:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{4\eta}. \quad (7.11)$$

Подставляя (7.11) в (7.10), получаем:

$$v_x(r) = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2). \quad (7.12)$$

Из этого выражения видно, что скорость распределена по сечению трубы по параболическому закону. Её величина равна нулю на стенке трубы при $r = R$ и достигает максимального значения v_0 при $r = 0$:

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{4\eta}. \quad (7.13)$$

Учитывая (7.13), преобразуем формулу (7.12) к виду:

$$v(r) = v_0 (1 - r^2 / R^2) \quad (7.14)$$

Профиль скорости течения изображён на рис.7.2.

Зная распределение скорости по сечению трубы, можно подсчитать секундный объемный расход жидкости Q через поперечное сечение трубы. Для этого выделим в сечении трубы элементарное кольцо радиусом r и толщиной dr , настолько малой, чтобы внутри этого кольца скорость течения жидкости можно было считать постоянной (рис.7.3).

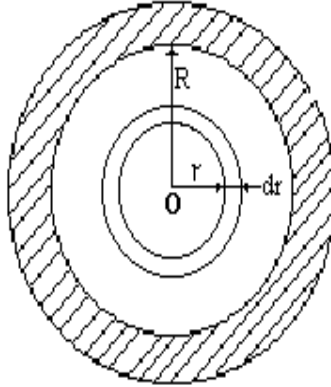


Рис. 7.3. К выводу формулы Пуазейля

Тогда через поперечное сечение тонкого кольца площадью $2\pi r dr$ за секунду пройдет объем жидкости:

$$dq = \nu 2\pi r dr. \quad (7.15)$$

Подставляя сюда значение скорости из формулы (7.14) и интегрируя по всему сечению трубы, найдем секундный объемный расход жидкости:

$$q = 2\pi \int_0^R \nu_0 \left(1 - r^2 / R^2\right) r dr = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}.$$

Окончательно получим закон Пуазейля:

$$q = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}. \quad (7.16)$$

Этот закон используется для экспериментального определения вязкости η по измеренным значениям секундного объемного расхода жидкости q , радиуса трубы R и перепада давления $p_1 - p_2$ на участке трубы длиной l по формуле:

$$\eta = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8ql} \quad (7.17)$$

Зная секундный объемный расход жидкости в трубе, найдём среднюю по сечению трубы скорость течения:

$$\langle v \rangle = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{8\eta}. \quad (7.18)$$

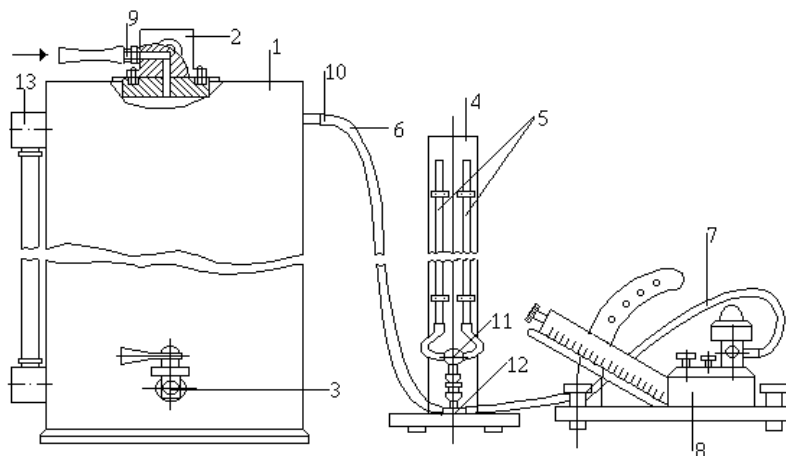
Из сравнения формул (7.13) и (7.18) видим, что максимальная скорость течения на оси трубы v_0 в 2 раза больше средней по сечению скорости:

$$v_0 = 2 \langle v \rangle.$$

7.3. Описание установки и методика выполнения эксперимента.

7.3.1. Принадлежности: капилляр (цилиндрическая труба), укрепленный на вертикальной стойке, микроманометр типа ММН, газометр, секундомер, мерная колба.

7.3.2. Схема экспериментальной установки изображена на рис.7.4. Поток воздуха через капилляр 5 создается за счет перепада давления на его концах. Нижний конец капилляра через тройник 11 соединяется с газометром 1, заполненным водой. При истечении воды из газометра через кран 3 над поверхностью создается разрежение. Следовательно, давление на нижнем конце капилляра меньше атмосферного. Перепад давления на концах капилляра измеряется микроманометром 8, соединенным с газометром и нижним концом капилляра через тройник 11.



1 – резервуар, 2 – кран впускной, 3 – кран сливной, 4 – штатив, 5 – капилляры, 6 – шланг, 7 – шланг, 8 – микроманометр, 9 – штуцер, 10 – штуцер, 11 – трехходовой стеклянный кран, 12 – тройник, 13 – указатель уровня

Рис. 7.4. Установка для определения вязкости воздуха, протекающего через капилляр в ламинарном режиме течения

Шкала микроманометра 8, проградуированная в *мм* водяного столба, позволяет измерять разность давлений до 250 *мм* H_2O (рабочей жидкостью в микроманометре является этиловый спирт). Для увеличения чувствительности микроманометра измерительной трубке придается наклонное положение. Разность между атмосферным давлением и давлением на нижнем конце капилляра в *Па* определяется длиной *n* столба спирта в делениях, отсчитанной по шкале микроманометра, умноженной на коэффициент *k* (0.2; 0.4; 0.6; 0.8;), соответствующий наклону измерительной трубки, и на ускорение свободного падения *g*.

Установки мениска спирта в измерительной трубке манометра на ноль шкалы производится с помощью цилиндра, глубина погружения которого в спирт регулируется

винтом. Микроманометр снабжен двумя уровнями, расположенными взаимно перпендикулярно на плите. Установка прибора по уровням производится двумя регулировочными ножками. На крышке микроманометра имеется 3-х ходовой кран, имеющий 2 рабочих положения. В первом рабочем положении измеряется разность атмосферного давления и давления в системе: через штуцер (+) – если в системе давление выше атмосферного, через штуцер (-) – если давление в системе ниже атмосферного. Во втором положении к резервуару микроманометра и к верхнему концу измерительной трубки подводится атмосферное давление, в этом положении производится установка прибора на ноль шкалы.

Мерная колба предназначена для определения объема жидкости, вытекающей из газометра за время τ , определяемое секундомером.

7.4. Порядок выполнения работы

7.4.1. Ознакомьтесь со всеми приборами, используемыми в работе. Занесите в таблицу 7.1 данные о длине капилляра l , радиусе капилляра R , комнатной температуре t , барометрическом давлении $p_{\text{атм}}$.

7.4.2. Если газометр не заполнен водой до верхнего уровня (следите за уровнем жидкости по водомерной трубке), попросите лаборанта лаборатории заполнить газометр водой.

7.4.3. Присоедините микроманометр к тройнику через штуцер (-) и установите микроманометр по уровням. Поставьте измерительную трубку микроманометра на указанный преподавателем коэффициент k наклона. Проверьте установку прибора на ноль шкалы.

7.4.4. Плавно открывая кран газометра (рис.7.4), подберите такую скорость истечения воды, чтобы перепад дав-

ления на концах капилляра был в пределах верхней половины шкалы.

7.4.5. После получения стационарности в истечении воды (показания микроманометра не изменяются) с помощью мерной колбы объемом V секундомером определяется τ – время истечения заданного объема воды из газометра. Данные опыта занесите в таблицу 7.1.

Таблица 7.1.

Результаты измерений расхода воды и перепада давления на концах капилляра

$p_{\text{до}} = \dots \text{Па}, \quad R = \dots \text{м}, \quad l = \dots \text{м}, \quad t = \dots ^\circ\text{C}$							
No.	k	n_i , дел	n_e , дел	$\langle n \rangle$, дел	$V, \text{м}^3$	τ , с	$q, \text{м}^3/\text{с}$
1.							
2.							
3.							

7.4.6. Если в процессе проведения эксперимента 7.4.5. заметно изменяются показания манометра, запишите показания микроманометра в начале (n_i) и в конце (n_e) опыта. Опыт повторите 3 раза.

7.4.7. Постепенно уменьшая скорость истечения воды, так, чтобы показания микроманометра уменьшались каждый раз в 1,5 раза, определите объемный расход жидкости для различных перепадов давления на концах капилляра. Заканчивается опыт при наименьшем перепаде давления, порядка 20 делений по наклонной шкале микроманометра. Все опыты вести в последовательности, указанной в пп. 7.4.5. и 7.4.6. Полученные результаты занесите в таблицу 7.1.

7.4.8. По данным каждого измерения определите секундный объемный расход жидкости $q = \frac{V}{\tau}$, среднее значение $\langle n \rangle = \frac{n_n + n_k}{2}$, занесите их в таблицу 7.1.

7.4.9. Перепад давления в Pa на концах капилляра определяется по формуле:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 9,8k \langle n \rangle,$$

в которую значения $\langle n \rangle$ подставляются в делениях, k – коэффициент наклона микроманометра. С учетом этого рабочая формула для определения динамической вязкости η воздуха имеет вид:

$$\eta = 3.848 \frac{k \cdot R^4 \cdot \langle n \rangle}{q \cdot l}. \quad (7.19)$$

Подставляя значение k , q , R , $\langle n \rangle$, l в формулу (7.19), вычислите значение вязкости воздуха η для каждого эксперимента и занесите в таблицу 7.2. Кроме того, в таблицу заносятся значения средней по сечению скорости $\langle v \rangle$ отдельно для каждого режима течения, которые рассчитываются по следующей формуле:

$$\langle v \rangle = \frac{q}{\pi R^2}.$$

Таблица 7.2.

Результаты расчета расхода q , коэффициента вязкости η и средней по сечению скорости $\langle v \rangle$

q , $м^3/с$	Δp , Pa	η , $Pa \cdot c$	$\langle \eta \rangle$, $Pa \cdot c$	$\Delta \eta$, $Pa \cdot c$	$\Delta \eta^2$, $Pa^2 \cdot c^2$	$\langle v \rangle$, $м/с$

7.4.10. Определите среднее значение η из результатов всех опытов и оцените погрешность по методу прямых измерений.

7.4.11. По наибольшему и наименьшему значениям скорости и секундного объемного расхода воздуха определите максимальное и минимальное значение числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{2R < v > \rho}{\eta} = \frac{2\rho q}{\pi \eta R}, \quad (7.20)$$

где ρ – плотность воздуха.

Плотность воздуха определяется по формуле:

$$\rho = \rho_0 \frac{p_{атм}}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}, \quad (7.21)$$

где $\rho_0 = 1,2928 \text{ кг/м}^3$ – плотность сухого воздуха при нормальном атмосферном давлении p_0 , $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$,

$T_0 = 273 \text{ К}$, $p_{атм}$ и $T = 273 + t^\circ \text{С}$ – давление и температура воздуха, при которых проведены опыты.

Плотность воздуха при температуре и давлении опыта можно также найти, используя уравнение Менделеева-Клапейрона.

7.4.12. По максимальному значению числа Рейнольдса оцените, в каком режиме течения воздуха в капилляре проведены опыты. Если $Re > 2300$, то течение турбулентное и формула Пуазейля для него несправедлива. Если $Re < 2300$, то течение ламинарное и можно применять формулу Пуазейля.

7.4.13. Сравните значение η , полученное в Ваших опытах, с табличным значением вязкости сухого воздуха, которое можно найти по формуле Сэзерленда, которая для воздуха имеет вид:

$$\eta = 1,528 \cdot 10^{-6} \frac{(273+t)^{\frac{3}{2}}}{403,6+t} \text{ (Па}\cdot\text{с)}, \quad (7.22)$$

где t – комнатная температура в $^{\circ}\text{C}$.

7.4.14. По найденному из опытов значению вязкости η , используя формулу (7.5), найдите среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$.

7.4.15. Зная длину свободного пробега $\langle l \rangle$, оцените эффективный диаметр молекулы азота (кислорода) из формулы (7.6):

$$d^2 = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \langle l \rangle p}.$$

Сравните полученный результат с табличным значением.

7.4.16. Постарайтесь объяснить причины расхождения результатов опыта с табличным значением и сформулируйте Ваши выводы.

7.5. Вопросы для самопроверки

7.5.1. Сформулируйте закон вязкого трения Ньютона. Дайте определение вязкости. В каких единицах измеряется вязкость в СИ?

7.5.2. В каких единицах измеряется давление в СИ? Какие внесистемные единицы давления вы знаете?

7.5.3. Выведите формулу Пуазейля для стационарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе.

7.5.4. Что называется средней длиной свободного пробега молекул? Как найти эту величину?

7.5.5. Объясните условия течения жидкости в трубе, при которых расчеты Пуазейля справедливы.

7.5.6. Объясните принцип действия лабораторной установки и принцип работы микроманометра.

7.6. Литература

7.6.1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: Учебник для физич. спец. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Матвеев А.Н. – М.: Высш. шк., 1987. – 360 с

7.6.2. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. 2-е изд. / Кикоин А.К., Кикоин И.К. – М.: Наука, 1976. 480 с.

7.6.3. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика / Савельев И.В. – М.: Астрель. АСТ, 2003.–208 с.

7.6.4. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

7.6.5. Таблицы физических величин. Справочник / Кикоин И.К., Григорьев И.С., Данилов Ю.А. и др.; Под ред. Кикоина И.К. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.

7.7. Задание для УИРС

7.7.1. Цель УИРС:

7.7.1.1. определить более точное значение вязкости воздуха, учитывая поправки на перепад давления на входе в капилляр и на разгонном участке течения, где формулы Пуазейля несправедливы;

7.7.1.2. определить зависимость коэффициента гидравлического сопротивления цилиндрической трубы от числа Рейнольдса;

7.7.1.3. определить критическое значение числа Рейнольдса, при котором происходит переход из ламинарной формы течения в турбулентную при движении жидкости в цилиндрической трубе.

7.7.2. Расчет поправок к формуле Пуазейля и вывод формул для вычисления гидравлического сопротивления трубы.

7.7.2.1. Ламинарное движение в разгонном участке трубы.

При выводе формул Пуазейля (7.16) мы предполагали, что во всех сечениях трубы распределение скоростей одинаково (т.е. течение установившееся). Для труб конечной длины это справедливо только для участков, находящихся на большом удалении от места входа в трубу.

Эксперимент показывает, что, если жидкость поступает в трубу из резервуара, размеры которого достаточно велики по сравнению с диаметром трубы, и вход в трубу плавно закруглен так, чтобы не было возмущений потока, то во входном сечении скорость во всех точках постоянна и равна средней расходной скорости жидкости (за исключением очень тонкого слоя вблизи стенок трубы).

По мере продвижения жидкости вдоль трубы слои жидкости, прилегающие к стенкам, затормаживаются благодаря действию сил вязкости. Толщина пограничного слоя растет по длине трубы, пока не заполнит всё её сечение. При этом с удалением от входа профили скорости, перестраиваясь, постепенно приближаются к параболическому профилю установившегося ламинарного течения (рис.7.5).

Участок трубы от входного сечения до сечения, где максимальная скорость на оси трубы отличается на 1% от максимальной скорости параболического профиля, называется начальным, или разгонным участком.

Длина начального участка x_i определяется полуэмпирической формулой:

$$x_i = 0,04 d Re , \quad (7.23)$$

здесь d – диаметр трубы.

Таким образом, формула Пуазейля (7.16) справедлива для участков трубы, расположенных за разгонным участком течения. Однако в большинстве случаев экспериментально удастся измерять падение давления только по всей длине тонкой трубки, начиная от входного сечения.

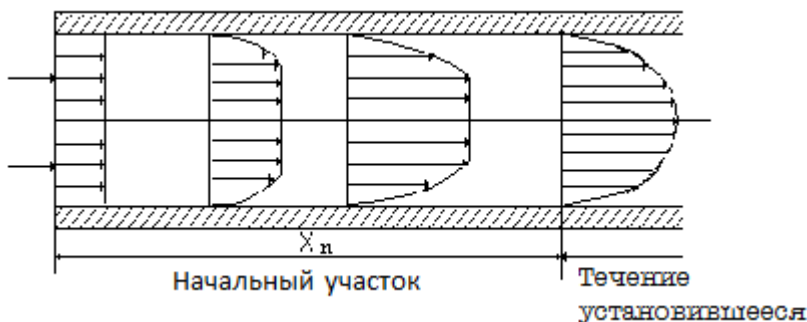


Рис. 7.5

В этом случае необходимо учесть поправку на падение давления в начальном участке.

Если жидкость или газ втекает в трубу из резервуара, большего по сравнению с диаметром трубы, то, применяя уравнение Бернулли к сечению резервуара вдали от входа в трубу и к входному сечению трубы, находим:

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho \cdot \langle v \rangle^2}{2}, \quad (7.24)$$

где p_0 – давление в резервуаре,

p_1 – давление во входном сечении трубы.

Далее в разгонном участке трубы по мере утолщения пограничного слоя скорость в осевой части потока возрастает от значения $\langle v \rangle$ до значения $v_{max} = 2 \langle v \rangle$ в конце разгонного участка. При этом кинетическая энергия потока, проходящего в единицу времени через сечения трубки, возрастает от ее начального значения

$$E_0 = \frac{m \langle v \rangle^2}{2} = \frac{\rho \pi R^2 \langle v \rangle^3}{2}, \quad (7.25)$$

где $m = \rho \pi R^2 \langle v \rangle$ – масса втекающей в трубу в единицу времени жидкости,
до значения E в конце разгонного участка, в котором устанавливается параболический профиль скорости:

$$E = 2 \pi \rho \int_0^R \frac{\langle v \rangle^3 r}{2} dr = \pi \rho R^2 \langle v \rangle^3. \quad (7.26)$$

Таким образом, кинетическая энергия E потока с параболическим профилем в 2 раза больше начальной кинетической энергии E_0 . Для того, чтобы сообщить потоку эту дополнительную кинетическую энергию, в разгонном участке происходит дополнительное падение давления, равное

$$\frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}. \quad (7.27)$$

Наконец, более высокий градиент скорости вблизи стенок трубы в разгонном участке создает перепад давления, превышающий падение давления по закону Пуазейля на той же длине, на величину

$$0,41 \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}. \quad (7.28)$$

Суммируя все виды дополнительных потерь в разгонном участке (7.24), (7.27) и (7.28) и добавляя их к потерям давления на длине трубы по формуле Пуазейля (7.16), получим:

$$p_0 - p_2 = \frac{8\eta \cdot l \langle v \rangle}{R^2} + 2,41 \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}. \quad (7.29)$$

Здесь p_0 и p_2 – статические давления в резервуаре перед входным сечением и в сечении, отстоящем от входа трубы на расстояние l .

Заменяя $\langle v \rangle$ через секундный объемный расход жидкости и учитывая, что $p_0 - p_2 = 9,8kn$, из (7.29) найдем значение вязкости:

$$\eta = \frac{9,8kn\pi R^4}{8ql} - \frac{2,41\rho q}{16\pi l} = 3,848 \frac{knR^4}{ql} - 0,048 \frac{\rho q}{l}. \quad (7.30)$$

Эта формула используется для определения вязкости воздуха при ламинарном движении в трубе с учетом поправок на влияние разгонного участка.

7.7.2.2. Расчет гидравлического сопротивления трубы.

При движении жидкости по трубе постоянного сечения диаметром d потери давления $p_1 - p_2$ на сопротивление трения для участка длиной l принято определять по эмпирическому закону Дарси:

$$p_1 - p_2 = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot \langle v \rangle^2}{2}. \quad (7.31)$$

Здесь λ называется коэффициентом гидравлического сопротивления трубы.

Если движение жидкости в цилиндрической трубе ламинарное и установившееся, то для участка трубы вдали от входа разность давлений $p_1 - p_2$ определяется формулой Пуазейля (7.16). Подставляя (7.16) в (7.31), найдем коэффициент гидравлического сопротивления:

$$\lambda = \frac{p_1 - p_2}{\frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot \langle v \rangle^2}{2}} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (7.32)$$

где $\text{Re} = \frac{\rho d \langle v \rangle}{\eta}$ называется числом Рейнольдса.

Формула (7.32) носит название закона Пуазейля для коэффициента гидравлического сопротивления при ламинарном течении жидкости. Число Рейнольдса имеет важней-

шее значение в теории подобия гидродинамических течений.

Экспериментально установлено, что ламинарное, или слоистое, течение вязкой жидкости с параболическим профилем скорости в трубе имеет место только при числах Рейнольдса $Re \leq 2300$. При значениях числа Рейнольдса $Re > 2300$ течение принципиально изменяет свой характер: вместо спокойного слоистого течения наблюдается вихревое, или турбулентное, течение.

При переходе из ламинарного режима течения в турбулентный коэффициент гидравлического сопротивления трубы резко возрастает и в области развитого турбулентного режима течения зависимость λ от числа Re подчиняется эмпирическому закону Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}, \quad (7.33)$$

справедливому в области значений: $2300 < Re < 10^5$.

Так как в наших опытах мы определяем перепад давления по всей длине трубки, начиная от входного сечения, то для определения λ при ламинарном течении необходимо учесть поправку на перепад давления в разгонном участке, используя формулу (7.29). Таким образом, формула для определения λ для ламинарного течения по данным опыта имеет вид:

$$\lambda = \frac{(p_0 - p_2) - 2,41 \cdot \frac{\rho \cdot \langle v \rangle^2}{2}}{\frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot \langle v \rangle^2}{2}} = 3,87 \frac{k \cdot n \cdot R^5}{\rho \cdot l \cdot q^2} - 4,82 \frac{R}{l}. \quad (7.34)$$

7.8. Порядок выполнения работы

7.8.1. Выполните работу согласно пунктам 7.4.1.÷7.4.3. При этом измерительную трубку микроманометра поставьте в положение, соответствующее коэффициенту наклона

$k = 0.8$ или для больших перепадов давлений используйте U-образный манометр.

7.8.2. Плавно открывая кран газометра, добейтесь максимального секундного расхода воды, при котором показание микроманометра будет близко к верхнему пределу шкалы. Измерьте время истечения τ объема жидкости V , соответствующего емкости мерной колбы, и запишите в таблицу 7.3 данные опыта.

7.8.3. Установите расход воды так, чтобы для каждого последующего опыта уровень жидкости в трубке микроманометра уменьшался на $20 \div 40$ делений и повторяйте измерения до значений $n = 20 \div 30$ делений при коэффициента наклона $k = 0.8$.

7.8.4. После этого переведите микроманометр на коэффициент наклона $k = 0,2$ и повторяйте измерения от значений $n = 240$ делений до $n = 20 \div 30$ делений аналогично пункту 7.8.3.

7.8.5. Вычислите коэффициент гидравлического сопротивления λ по формуле (7.34) по данным каждого опыта и занесите в таблицу 7.3.

Таблица 7.3

Расчет коэффициента гидравлического сопротивления

№ пп	k	n , дел.	V , $м^3$	τ , с	q , $м^3/с$	η , $кг/м \cdot с$	Re	λ	$lg 100\lambda$	$lg Re$
1.										
2.										
3.										

7.8.6. Для нескольких значений малого секундного объемного расхода жидкости из данных опыта вычислите вязкость воздуха η по формуле (7.30). Найдите их среднее значение и погрешность по методу прямых измерений. Сравните полученное значение η с результатом, получен-

ным по формуле (7.17) без учета поправок, и с табличным значением вязкости для воздуха.

7.8.7. По экспериментально найденному значению вязкости η и рассчитанному по формуле (7.21) значению плотности ρ воздуха вычислите число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{2\rho q}{\pi R\eta} \text{ для каждого измерения и занесите в таблицу}$$

7.3.

7.8.8. Найдите логарифмы значений $\text{Re}, 100\lambda$ для каждого опыта и занесите в таблицу 7.3. Перед логарифмированием надо λ умножить на 100 для того, чтобы получились положительные числа.

7.8.9. По данным опыта постройте график зависимости $\lg(100\lambda)$ от $\lg \text{Re}$. Экспериментальные данные нанесите в виде точек. На том же графике постройте теоретическую зависимость $\lg(100\lambda)$ от $\lg \text{Re}$, используя формулу (7.32). Если умножить обе части этой формулы на 100 и прологарифмировать, то получится:

$$\lg(100\lambda) = \lg 6400 - \lg \text{Re}. \quad (7.35)$$

Как видно, в логарифмических координатах график этой зависимости соответствует прямой линии. Для построения прямой достаточно найти две ее точки, соответствующие значениям $\text{Re} = 200$ и $\text{Re} = 2000$, и по этим точкам провести прямую.

Если измерения выполнены с достаточной точностью, то опытные точки лягут вблизи теоретической прямой линии. При приближении к критическому значению $\text{Re} = 2300$ опытные данные могут резко отличаться от закона Пуазейля (7.32), приближаясь к закону Блазиуса (7.33).

По области резкого отклонения опытных данных от закона Пуазейля можно судить о переходе течения в трубе из

ламинарной формы движения в турбулентную. По данным опыта из графика найдите критическое число Рейнольдса, если Вы достигли турбулентного режима течения.

7.8.10. Проанализируйте полученные результаты и напишите Ваши выводы.

7.9. Литература

7.9.1. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. – М.: Наука, 1964, гл.VI, § 2, 3, с. 583 – 590.

Лабораторная работа № 8

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

8.1. Цель работы:

8.1.1. определить зависимость вязкости жидкости от температуры методом капиллярного вискозиметра, используя формулу Пуазейля;

8.1.2. используя модель Я.И.Френкеля о внутреннем трении жидкости, дать интерпретацию зависимости вязкости от температуры и оценить энергию активации, необходимую для перехода молекулы из одного временного положения равновесия в другое.

8.2. Краткое теоретическое введение

Развитие теории жидкого состояния вещества является одной из важнейших задач современной статистической физики. Специфической особенностью жидкого состояния является интенсивное взаимодействие частиц при их большой неупорядоченности. Эта особенность жидкого состояния очень затрудняет теоретический анализ проблемы. Поэтому теория жидкости заметно отстает в своем развитии от теории газового и кристаллического состояния вещества.

Решающее значение для современного высокого уровня развития статистических теорий газов и кристаллов имело то обстоятельство, что в обоих этих случаях можно опереться на легко обозримые предельные случаи идеального газа и идеального кристалла. Идеальный газ – бесконечное разрежение частиц при их полной неупорядоченности, а идеальный кристалл – случай совершенной упорядоченности частиц при их большой плотности. Для жидкости не существует такой простой и легко обозримой модели, ко-

торая могла бы быть принята за нулевое приближение при построении теории жидкости.

Более глубокий анализ некоторых свойств газов, жидкостей и твердых тел приводит к выводу, что жидкость занимает некоторое промежуточное положение между кристаллом и газом. Первые рентгеноструктурные исследования жидкостей привели к решительным изменениям во взглядах на природу жидкого состояния. Выяснилось, что жидкости вовсе не бесструктурны, как газы. А именно, в жидкостях имеется определенный порядок в расположении ее частиц, особенно вблизи точки затвердения. Но порядок этот соблюдается на небольших расстояниях порядка 2-3 молекулярных слоев. В этом случае говорят о *ближнем порядке*, в отличие от *дальнего порядка* – порядка на больших расстояниях.

Итак, ближайшие соседи каждой молекулы жидкости, условно называемой “центральной”, располагаются в определенном порядке, образуя структуру, сходную со структурой твердого тела. Однако по мере увеличения расстояния r между молекулами ослабевает зависимость между расположением условно выбранной вначале “центральной” молекулы и ее более далеких соседей.

При $r > (3 \div 4)d$, где d – эффективный диаметр молекулы, такая зависимость, в отличие от кристаллов, практически отсутствует. В связи с этим говорят, что в жидкостях существует ближний порядок, а в кристаллах – дальний порядок.

Жидкости занимают промежуточное положение между газами и кристаллами не только по своей структуре и интенсивности межмолекулярного взаимодействия, но также и по способу теплового движения. Теория теплового движения частиц жидкости была разработана советским ученым Я.И. Френкелем.

В кристаллах мы себе представляем тепловое движение атомов, ионов или молекул в виде их колебаний возле строго определенного положения, в разреженных газах – в виде беспорядочных столкновений молекул в конце каждого свободного пробега. В случае жидкости тепловое движение реализуется в виде некоторой комбинации колебательного и трансляционного движения частиц. Таким образом, каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, а затем скачком перемещается в новое положение равновесия, отстоящее от предыдущего на расстояние, примерно равное размеру самой молекулы. Следовательно, молекулы лишь медленно перемещаются внутри жидкости, пребывая часть времени около определенных мест, находясь в “оседлом состоянии”.

Объяснить такое поведение молекул можно следующим образом. В 70-х годах XX века Дж. Д. Бернал выдвинул гипотезу о том, что в жидкостях мы встречаемся с так называемой симметрией 5-го порядка. Это означает, что в плоской модели каждая частица имеет в среднем около 5-ти ближайших соседей, а в пространственной упаковке – около 11-ти. Отсюда вытекает ряд важнейших следствий.

1) Легко убедиться, что в такого рода упаковке может осуществляться только ближний порядок, так как плоскость можно покрыть сеткой, состоящей из треугольников, квадратов, шестиугольников, но не пятиугольников. Точно так же пространство нельзя заполнить многогранниками, у которых грани были бы правильными пятиугольниками.

2) Отсюда следует, что пятиугольники, которые характеризуют упаковку частиц в жидкости, имеют несколько различные ребра. Если в кристаллах все частицы находятся друг от друга на расстоянии d , где силы притяжения равны силам отталкивания, то в жидкостях расстояния между

молекулами на одних ребрах несколько больше d , а на других меньше d , а в среднем равны d (около 10^{-10} м).

3) Итак, многогранники, имеющие симметрию 5-го порядка, при плотной упаковке не могут образовать правильную структуру, они образуют некоторые компактные пространственные образования – *псевдоядра*. Между этими ядрами обязательно должны возникнуть большие отверстия или, по терминологии Френкеля, *дырки*.

4) Псевдоядра не являются достаточно стабильными образованиями. Благодаря большому числу “дырок” частицы могут легко переходить от одного ядра к другому, и структура жидкости непрерывно меняется. Таким образом, частица жидкости колеблется около мгновенного положения равновесия в течение некоторого времени – *времени оседлости*. Затем она перескакивает на место *дырки* и присоединяется к другому *псевдоядру*.

Среднее время “оседлой жизни” – промежуток времени, в течение которого не меняется структурная конфигурация псевдоядер, характеризующая ближний порядок, – называется временем релаксации τ .

Для того, чтобы молекула жидкости перескочила из одного временного положения равновесия в другое, она должна нарушить связи с соседними молекулами. После перехода в новое положение равновесия молекула связывается с новыми “соседями”. Первый процесс требует затраты энергии, которая выделяется при установлении новых связей. Следовательно, при уходе со старого места потенциальная энергия молекулы должна возрасти на величину U_a . О таком переходе говорят как о переходе через потенциальный барьер высотой U_a , а U_a называют *энергией активации*.

Переход через потенциальный барьер происходит при случайном повышении энергии теплового движения от-

дельных молекул за счет передачи им этой энергии другими молекулами. Расчеты показывают, что время релаксации τ следующим образом зависит от энергии активации U_a и абсолютной температуры T :

$$\tau = \tau_0 \cdot e^{\frac{U_a}{kT}}, \quad (8.1)$$

где τ_0 – средний период колебаний молекул около положения равновесия,

k – постоянная Больцмана, $k = 1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Время релаксации τ зависит от температуры. С повышением температуры время релаксации быстро уменьшается, что обуславливает большую подвижность молекул жидкости при больших температурах. Можно оценить порядок величины периода одного колебания τ_0 . Если положить в формуле (8.1) $U_a = 0$, то время $\tau = \tau_0$ должно быть такого порядка величины, чтобы, двигаясь со своей средней тепловой скоростью v_x в данном направлении x , молекула прошла бы за это время путь, равный $\delta \approx 10^{-10}$ м. Тогда:

$$\tau_0 = \delta / v_x. \quad (8.2)$$

Скорость хаотического теплового движения молекул жидкости можно определить, используя связь между кинетической энергией теплового движения молекул и температурой:

$$mv_x^2 / 2 = kT / 2, \text{ откуда } v_x = \sqrt{kT/m}, \quad (8.3)$$

где m – масса одной молекулы.

При комнатной температуре средняя скорость теплового движения v_x имеет порядок сотен метров в секунду.

Поэтому, полагая $v_x \approx 0,5 \cdot 10^3 \text{ \AA} / \tilde{n}$, $\delta \approx 10^{-10} \text{ \AA}$, имеем $\tau_0 \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ с}$.

Время релаксации τ может быть самым различным, но всегда $\tau \gg \tau_0$. Для маловязких жидкостей (сжиженные благородные газы) $\tau \approx 10^{-11} \text{ с}$, а для смол достигает нескольких часов или даже суток.

В жидкостях вязкость η определяется подвижностью молекул, которая во многом зависит от межмолекулярных сил, причем

$$\eta \sim 1/v_0, \quad (8.4)$$

где v_0 – подвижность молекулы, т.е. скорость молекулы под действием единичной силы, причем $v_0 = v/F$, где v – скорость, приобретаемая молекулой под действием силы F . Эйнштейн показал, что подвижность молекулы пропорциональна коэффициенту диффузии: $v_0 \sim D/kT$.

Тогда

$$\eta \approx kT/D. \quad (8.5)$$

Найдем коэффициент диффузии D . Следуя идеям Френкеля, механизм диффузии в жидкости можно объяснить следующим образом. Обозначим среднюю длину свободного пробега частицы в жидкости через δ . По существу, δ – это расстояние между псевдоядрами. Тогда средняя скорость перемещения частицы внутри жидкости $\langle v \rangle = \delta/\tau$, где τ – среднее время оседлой жизни. Используя известную формулу для коэффициента диффузии газов:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle, \quad (8.6)$$

где $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул,

$\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега, мы можем для жидкости записать:

$$D = \frac{1}{3} \frac{\delta^2}{\tau} = \frac{\delta^2}{3\tau_0} e^{-U_a/kT}. \quad (8.7)$$

Итак, мы видим, что с увеличением температуры T коэффициент диффузии D растет. Это, очевидно, можно объяснить резким сокращением времени релаксации. Что касается вязкости, то, используя соотношения (8.5) и (8.7), для неё имеем:

$$\eta \sim \frac{kT}{\delta^2} e^{\frac{U_a}{kT}} \quad (8.8)$$

или

$$\eta = ATe^{U_a/kT}. \quad (8.9)$$

Таким образом, с ростом температуры вязкость жидкости быстро уменьшается за счёт экспоненциального множителя. С другой стороны, предэкспоненциальный множитель AT зависит от температуры и линейно возрастает с её ростом. Однако изменение этого члена имеет второстепенное значение по сравнению с изменением экспоненциального члена, пока значения температуры T не слишком велики. Если температура T становится настолько высокой, что $e^{U_a/kT} \sim 1$ (т.е. $kT \gg U_a$), то это означает, что молекулы жидкости уже практически не задерживаются при переходе от одного псевдоядра к другому, и их движение приобретает такой же характер, какой он имеет в газах. При таких условиях η начинает возрастать с повышением T , т.е. так же, как и для газов.

Но пока $(U_a/kT) \gg 1$, т.е. $e^{U_a/kT} \sim 10^2 \div 10^3$, множитель A имеет второстепенное значение по сравнению с экспонентой и вязкость жидкости η с повышением температуры T уменьшается.

Такая зависимость (8.9) вязкости от температуры хорошо согласуется с экспериментальными данными в определенном интервале температуры от точки плавления T_{ie} до критической температуры T_{eo} , выше которой жидкость существовать не может.

8.3. Экспериментальная установка для исследования температурной зависимости вязкости жидкостей

Для изучения температурной зависимости вязкости жидкостей в работе используется термостат, в рабочем баке которого устанавливаются вискозиметры с исследуемой жидкостью. Общий вид термостата изображен на рис. 8.1. Установка (рис.8.1) состоит из вискозиметров 1, 2 с исследуемой жидкостью, которые устанавливаются с помощью специальных фланцев в отверстиях плиты и погружаются в термостатирующую среду. Исследуемая жидкость в вискозиметрах прогоняется воздухом с помощью резиновых груш. Время истечения жидкости из резервуаров замеряется с помощью секундомера. В качестве термостатирующей жидкости в термостате используется дистиллированная вода, объем которой составляет примерно 16 литров. Вода находится в ванне 3 термостата.

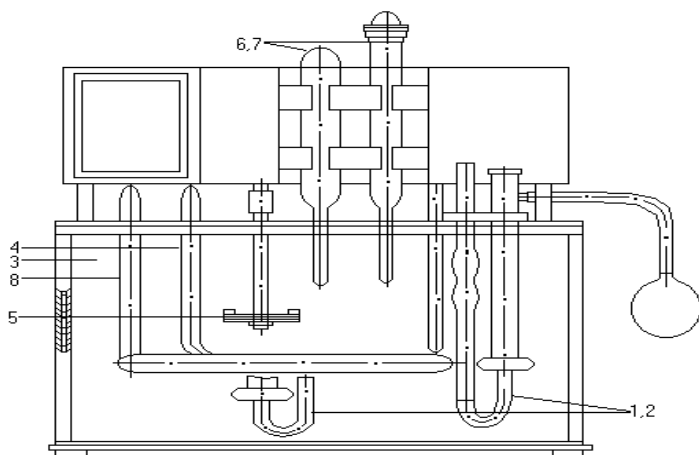


Рис. 8.1. Общий вид термостата

На дне ванны термостата находятся электрический нагреватель 4 и охлаждающий элемент 8, через который циркулирует водопроводная вода, используемая для охлаждения термостатирующей среды. Для перемешивания воды в ванне термостата предусмотрена электромеханическая мешалка 5, которую во время опытов следует периодически включать по мере необходимости. Визуальный контроль температуры термостатирующей жидкости осуществляется при помощи технического термометра. Для этого на крышке термостата укреплены контактный 6 и контрольный 7 ртутные термометры. Термостат позволяет плавно изменять температуру в пределах от комнатной (или температуры проточной воды) до 50°C .

Для измерения вязкости жидкости в этой работе используются стандартные вискозиметры Оствальда-Пинкевича типа ВПЖ. Вискозиметр ВПЖ представляет собой стеклянную U-образную трубку (рис. 8.2.), в колено 1 которой впаян капилляр 6, переходящий в резервуары 4 и

5. В нижней части колена 2 имеется расширение 7. При измерении вязкости жидкости из измерительного резервуара 4 жидкость течет по капилляру 6 в расширение 7. Резиновая груша 8 обеспечивает движение жидкости в вискозиметре.

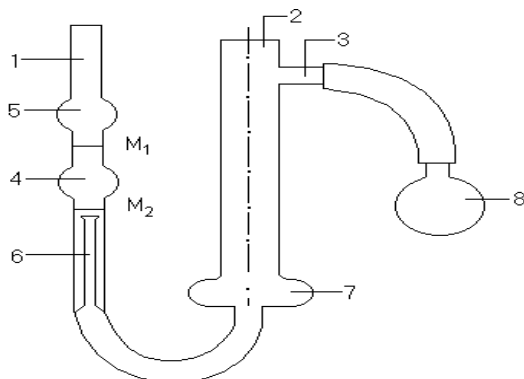


Рис.8.2. Вискозиметр ВПЖ

Распределение скорости жидкости по сечению при ламинарном движении в капиллярной трубке круглого сечения вдали от входа в трубу, согласно закону Пуазейля, имеет следующий вид:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2), \quad (8.10)$$

где $p_1 - p_2$ – перепад давления на участке трубки длиной l ,

R – радиус трубки,

r – расстояние от оси трубки до рассматриваемой точки, где скорость течения равна v ,

η – вязкость жидкости, протекающей по трубке.

Зная распределение скорости по сечению трубки, объем жидкости Q , протекающей через поперечное сечение трубки за время τ , можно определить из следующего соотношения:

$$Q = \tau \int_0^R v \cdot 2\pi \cdot r dr = \frac{P_1 - P_2}{8 \cdot \eta \cdot l} \pi R^4 \tau. \quad (8.11)$$

Принцип действия вискозиметра ВПЖ основан на законе Пуазейля (формула (8.11)).

Разность уровней жидкости в резервуаре 4 и расширении 7 обычно составляет $h \approx 200 \div 250$ мм. При этом жидкость заливается так, чтобы свободный уровень жидкости в колене 2 находился в пределах расширения 7. В колене 1 во время измерений уровень жидкости уменьшается от верхней метки M_1 до нижней метки M_2 мерного резервуара 4. Расстояние между метками $\Delta h \approx 15 \div 20$ мм. Поскольку жидкость движется под действием собственной тяжести, то можно записать:

$$p_1 - p_2 = \rho g h, \quad (8.12)$$

где ρ – плотность исследуемой жидкости,

h – разность уровней жидкости в коленах вискозиметра.

Пренебрегая изменением h во время движения жидкости ($\Delta h \ll h$), можно переписать выражение (8.11) для объема Q с учетом (8.12) в виде:

$$Q = \frac{\pi R^4 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot \tau}{8 \eta \cdot l}, \quad (8.13)$$

где Q – объем мерного резервуара 4 между метками M_1 и M_2 , τ – время истечения жидкости из этого объема.

Далее, используя выражение (8.13), найдем вязкость исследуемой жидкости:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g h \tau}{8 Q l}. \quad (8.14)$$

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\eta = B \rho \tau, \quad (8.15)$$

где

$$B = \frac{\pi R^4 g h}{8 Q l}. \quad (8.16)$$

В этом выражении все величины, входящие в коэффициент B , постоянны для данной конструкции вискозиметра и B является константой прибора, значение которой записано в паспорте каждого вискозиметра. Таким образом, для того, чтобы определить вязкость исследуемой жидкости, достаточно знать ее плотность при данной температуре T , постоянную прибора и время τ освобождения от жидкости мерного резервуара 4 вискозиметра ВПЖ.

8.4. Методика измерений

Измерения вязкости жидкости с помощью вискозиметра ВПЖ производят следующим образом. Зажав пальцем конец широкого колена 2, с помощью груши 8, прикрепленной к отростку 3 широкого колена 2, загоняют исследуемую жидкость в узкое колено, примерно до середины верхнего резервуара 5.

Затем снимают палец с широкого колена 2 и следят за опусканием мениска жидкости в колене 1. Когда мениск жидкости доходит до метки M_1 , включают секундомер, а в момент прохождения мениска мимо метки M_2 секундомер выключают. По секундомеру отсчитывают время τ истечения жидкости, а затем по формуле (8.15) определяют вязкость жидкости.

8.5. Порядок выполнения работы

8.5.1. Проверьте положение тумблеров (мешалка, нагреватель и переключатель “сеть”). Тумблеры должны находиться в нижней позиции (“выключено”). При включении в сеть загорается красная лампочка “сеть”.

8.5.2. Проверьте шланговые соединения холодильника с водопроводной сетью и со сливом.

8.5.3. Зафиксируйте температуру контрольного термометра. Он показывает комнатную температуру. Проведите первое измерение времени истечения жидкости из контрольного объема при комнатной температуре.

8.5.4. Включите установку в сеть.

8.5.5. Включите мешалку. При этом включается электродвигатель, начнется циркуляция воды в ванне.

8.5.6. Включите нагреватель. Для этого тумблер “нагреватель” переведите в верхнюю позицию. При этом температура воды в ванне начнет повышаться.

8.5.7. При достижении конкретной контрольной температуры выключите нагреватель и проведите измерения времени истечения жидкости из контрольного объема. **8.5. Температуру жидкости следует повышать не выше 40°C .** Затем отключают нагреватель.

8.5.8. Повышая температуру воды в термостате с помощью нагревателя с шагом $(1 \div 2)^{\circ}\text{C}$ в интервале $(20 \div 40)^{\circ}\text{C}$, определите время истечения жидкости из контрольного объема (от метки M_1 до метки M_2) в вискозиметре. Для каждой температуры это измерение времени произведите не менее трех раз. Результаты измерений занесите в таблицу 8.1.

Таблица 8.1.

Измерение времени истечения жидкости в вискозиметре

$t_{i\div}, ^{\circ}\text{C}$	$t_{\text{эп}}, ^{\circ}\text{C}$	$\langle t \rangle, ^{\circ}\text{C}$	τ_1, C	τ_2, C	τ_3, C	$\langle \tau \rangle, \text{C}$

8.5.9. Используя параметры вискозиметров, указанные в паспорте прибора, найдите значения вязкости η исследуе-

мых жидкостей для всех значений температуры, используя формулу (8.15). Результаты вычислений занесите в таблицу 8.2.

Таблица 8.2.

Расчёт коэффициентов вязкости жидкости

$\langle t \rangle, ^\circ C$	$\eta, 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$	T, K	$\frac{1}{T}, 10^{-3} K^{-1}$	$\frac{\eta}{T} 10^{-5}$	$\ln \frac{\eta}{T}$

8.5.10. По результатам измерений постройте график зависимости вязкости от температуры $\eta = f(t)$, где t – температура в $^\circ C$.

8.5.11. По экспериментальным данным вычислите значения и постройте график зависимости $\ln(\eta/T) = f(1/T)$, используя формулу (8.9).

Для этого преобразуйте эту формулу. Поделите обе части формулы на T и прологарифмируйте, тогда будет:

$$\ln\left(\frac{\eta}{T}\right) = \ln A + \frac{U_a}{k} \cdot \frac{1}{T}. \quad (8.17)$$

Формула (8.9) сводится к линейной зависимости вида $y = a + bx$, где $y = \ln\left(\frac{\eta}{T}\right)$, $a = \ln A$, $b = \frac{U_a}{k}$, $x = \frac{1}{T}$. (8.18)

Отсюда следует, что U_a/k определяется как угловой коэффициент наклона прямой в координатах $\ln(\eta/T) = f(1/T)$.

Вычисления параметров зависимости (8.17) методом наименьших квадратов удобно проводить, используя таблицу 8.3.

Таблица 8.3.

Данные для вычисления параметров зависимости

$$\ln\left(\frac{\eta}{T}\right) = \ln A + \frac{U_a}{k} \cdot \frac{1}{T} \quad (8.17)$$

N_0	$x_i = \frac{1}{T}$	$y_i = \ln\left(\frac{\eta}{T}\right)$	x_i^2	$x_i y_i$
1				
2				
...				
n				
	$\sum_{i=1}^n x_i =$	$\sum_{i=1}^n y_i =$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i =$

Формулы для нахождения параметров линейной зависимости методом наименьших квадратов:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (8.19)$$

В таблице 8.3. и в формулах (8.18) i - порядковый номер эксперимента.

5.8.12. Затем, подставляя значение постоянной Больцмана k , определите энергию активации U_a . Полученное значение энергии активации сравните с работой выхода электронов из металлов и оцените их порядок.

8.5.13. Значение коэффициента A в формуле (8.9) найдите, используя условие (8.18) $a = \ln A$. Тогда $A = e^a$.

8.5.14. Зная значение A , запишите окончательно вид полуэмпирической формулы температурной зависимости вязкости исследуемых жидкостей.

8.5.15. На основе Ваших измерений сделайте выводы, в частности, о пригодности формулы Френкеля (8.9) для описания зависимости вязкости жидкости температуры.

8.6. Вопросы для самопроверки

8.6.1. При каком движении слоев жидкости справедлива формула Пуазейля (8.11)?

8.6.2. Что называется вязкостью и какова ее размерность?

8.6.3. Почему в вискозиметрах используются капилляры?

8.6.4. Зачем в узком колене вискозиметра имеется расширение между метками M_1 и M_2 (см. рис.8.2)?

8.6.5. Оказывает ли влияние высота уровня жидкости в расширении на скорость истечения?

8.6.6. Объясните характер теплового движения молекул в жидкостях.

8.6.7. Что такое энергия активации?

8.6.8. Что такое время “оседлой” жизни молекул?

8.6.9. Каков характер изменения вязкости жидкости и газов при увеличении температуры? В чем отличие и почему?

8.6.10. Зачем нужен термостат и как он работает?

8.7. Литература

8.7.1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: Учебник для физич. спец. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Матвеев А.Н. – М.: Высш. шк., 1987. – 360 с

8.7.2. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. 2-е изд. / Кикоин А.К., Кикоин И.К. – М.: Наука, 1976. 480 с.

8.7.3. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика / Савельев И.В. – М.: Астрель. АСТ, 2003. – 208 с.

8.7.4. 8.7.5. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. / Френкель Я.И. – М.: Изд-во АН СССР, 1977. – 592 с.

8.7.5. . Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

8.7.6. Физический практикум. Механика и молекулярная физика: Учебное пособие / Иверонова В.И., Белянкин А.Г., Мотулевич Г.П., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Под ред. Ивероновой В.И. – М.: Наука, 1967. – 352 с.

8.7.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин / Зайдель А.Н. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

Лабораторная работа № 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

9.1. Цель работы: ознакомиться с методом экспериментального определения коэффициента поверхностного натяжения.

9.2. Краткое теоретическое введение

Молекулы жидкости располагаются настолько близко друг к другу, что силы притяжения между ними имеют значительную величину. Сила взаимодействия быстро убывает с расстоянием. В первом приближении можно считать, что сила притяжения $F \sim \frac{1}{r^6}$, а сила отталкивания

$F \sim \frac{1}{r^{12}}$, где r – расстояние между молекулами.

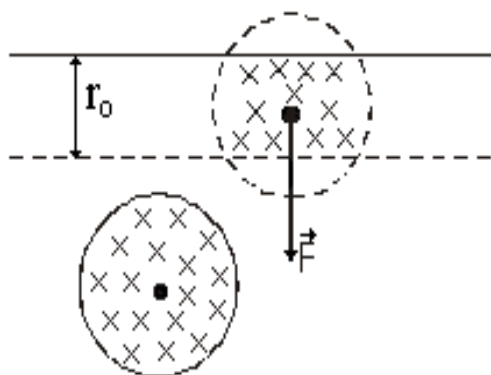


Рис. 9.1

Начиная с некоторого расстояния, силами межмолекулярного взаимодействия можно пренебречь. Это расстояние r_0 называется радиусом молекулярного действия, а

сфера радиуса r_0 называется сферой молекулярного действия. Каждая молекула испытывает притяжение со стороны всех соседних с ней молекул, находящихся в пределах сферы молекулярного действия, центр которой совпадает с данной молекулой. Равнодействующая всех этих сил для молекулы, находящейся внутри жидкости на расстоянии, превышающем r_0 от поверхности жидкости, очевидно, в среднем, равна нулю (рис.9.1).

Иначе обстоит дело, если молекула находится на расстоянии от поверхности меньшем, чем r_0 . Так как плотность газа во много раз меньше плотности жидкости, выступающая за пределы жидкости часть сферы молекулярного действия будет менее заполнена молекулами, чем остальная часть сферы. В результате на каждую молекулу, находящуюся в поверхностном слое толщиной r_0 , будет действовать сила, направленная внутрь жидкости. Величина этой силы растет в направлении от внутренней к наружной границе слоя. Поэтому переход молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой связан с необходимостью совершения работы против сил, действующих в поверхностном слое. Эта работа совершается молекулой за счет запаса ее кинетической энергии и идет на увеличение потенциальной энергии молекулы. При обратном переходе молекулы её потенциальная энергия переходит в кинетическую. Итак, молекулы в поверхностном слое обладают дополнительной потенциальной энергией.

Величина потенциальной, точнее, свободной энергии E поверхностного слоя зависит от числа поверхностных молекул, т.е. от площади поверхности S . Эта энергия носит название энергии поверхностного натяжения. Тогда, согласно сказанному,

$$E = \sigma S, \quad (9.1)$$

где σ – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом поверхностного натяжения.

Коэффициент поверхностного натяжения σ численно равен свободной энергии, приходящейся на единицу площади поверхностного слоя.

Отметим, что величина σ зависит от рода обоих граничащих сред.

Можно дать ещё одно определение коэффициента поверхностного натяжения.

Коэффициент поверхностного натяжения σ численно равен работе, необходимой для увеличения площади поверхностного слоя на единицу.

Силы поверхностного натяжения особенно сильно сказываются на поведении жидкостей. В частности, форма, которую принимает жидкость, определяется минимумом потенциальной энергии, складывающейся из энергии поверхностного натяжения и потенциальной энергии в поле силы тяжести.

При расчетах вместо энергии поверхностного натяжения нередко пользуются силой поверхностного натяжения, т.е. силой, с которой одна часть поверхности жидкости воздействует на другую ее часть.

Вдоль любой линии “ aa ”, мысленно проведенной на поверхности жидкости (рис.9.2), действуют перпендикулярные к линии и касательные к поверхности силы, “стягивающие” разделенные линией участки I и II.

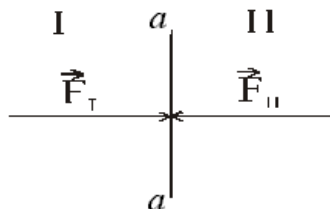


Рис. 9.2.

Эти силы, очевидно, тем больше, чем больше длина линии “ aa ”:

$$F = \sigma l, \quad (9.2)$$

где l – длина линии “ aa ”.

Увеличение свободной энергии при увеличении площади поверхности объясняется тем, что при этом совершается работа против сил поверхностного натяжения.

Согласно формуле (9.2), коэффициент поверхностного натяжения равен силе поверхностного натяжения, действующей по касательной к поверхности жидкости, отнесенной к единице длины линии раздела.

Коэффициент поверхностного натяжения в СИ измеряют в $H/м$ или в $Дж/м^2$.

Многие физические явления в жидкостях, такие, как волны на поверхности жидкости, явление смачивания и несмачивания, капиллярные явления, объясняются поверхностным натяжением.

Опыт показывает, что, если капилляр погрузить одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то под искривленной поверхностью в капилляре давление будет отличаться от давления под плоской поверхностью в широком сосуде на величину Δp , определяемую формулой Лапласа:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (9.3)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхности жидкости в двух взаимно перпендикулярных сечениях. Полусумма $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ называется средней кривизной поверхности в данной точке. Для всех форм поверхности, которые могут образоваться у жидкости, средняя кривизна остаётся по-

стоянной для любой пары нормальных взаимно перпендикулярных сечений поверхности в данной точке. Поэтому эти сечения выбирают из соображений удобства. Для сферической поверхности $R_1 = R_2 = R$, где R – радиус сферы, поэтому для круглого капилляра формула (9.4) примет вид:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (9.4)$$

В результате при смачивании стенок капилляра уровень жидкости в нем будет выше, чем в сосуде, при несмачивании – ниже. Изменение высоты уровня жидкости в узких трубках получило название капиллярности. Между жидкостью в круглом капилляре и широком сосуде устанавливается такая разность уровней h , чтобы гидростатическое давление ρgh уравновешивало капиллярное давление Δp :

$$2\sigma/R = \rho gh, \quad (9.5)$$

где ρ – плотность жидкости;

σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость – газ.

Радиус кривизны мениска R можно выразить через радиус капилляра r и краевой угол θ . Как видно из рис.9.3, $r = R \cdot \cos\theta$. Тогда

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos\theta}{\rho \cdot g \cdot r}. \quad (9.6)$$

При полном смачивании $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$. Тогда радиус кривизны поверхности R равен радиусу капилляра r и формула (9.4) примет вид:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (9.7)$$

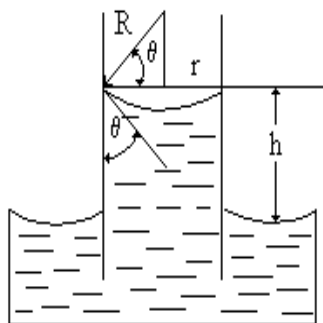


Рис.9.3. К выводу формулы (9.6)

Для высоты h подъёма жидкости в капилляре имеем:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho \cdot g \cdot r}. \quad (9.8)$$

Отсюда находим коэффициент поверхностного натяжения σ :

$$\sigma = \frac{\rho \cdot g \cdot h \cdot r}{2}. \quad (9.9)$$

Следовательно, достаточно измерить на опыте высоту столба жидкости h в капилляре и радиус капилляра r , чтобы, зная плотность жидкости ρ , по формуле (9.9) вычислить σ .

9.2. Экспериментальная установка и методика измерений

Измерение высоты столба жидкости в капилляре требует использования высокоточных приборов. Поэтому в данной работе это измерение заменяется измерением избыточного капиллярного давления Δp . Применяется метод компенсации добавочного давления.

Для измерения давления используется микроманометр многопредельный с наклонной трубкой типа ММН. описа-

ние устройства и принципа действия микроманометра многопредельного с наклонной трубкой приведено в приложении в конце учебного пособия.

Если опустить в сосуд с исследуемой жидкостью капиллярную трубку, то в случае смачивания стенок трубки этой жидкостью последняя поднимается в капилляре на некоторую высоту вследствие возникновения добавочного давления (в данном случае отрицательного). Добавочное капиллярное давление для круглого капилляра в случае полного смачивания определяется формулой (9.7).

Если тем или иным способом увеличить внешнее давление над поверхностью жидкости в капилляре, то можно добиться, чтобы уровни жидкости в капилляре и широком сосуде сравнялись. Очевидно, что при этом избыточное внешнее давление $\Delta p_{\text{âт}}$ равно добавочному давлению Δp , определяемому формулой (9.7).

Следовательно, компенсируя добавочное давление, мы получим возможность измерить его и определить коэффициент поверхностного натяжения.

Если внешнее давление измеряется микроманометром в паскалях, то

$$\Delta p_{\text{âт}} = 9,804 \, kn, \quad (9.10)$$

где n – длина столба спирта в измерительной трубке микроманометра в делениях;

k – коэффициент наклона измерительной трубки.

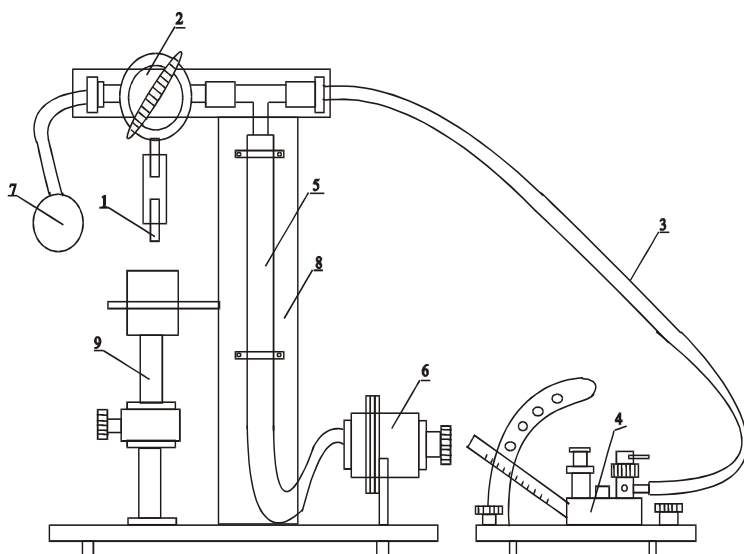
Из (9.7) и (9.10) получим:

$$\sigma = 9,804 \frac{k \cdot n \cdot r}{2}. \quad (9.11)$$

Установка (рис.9.4) имеет капилляр 1, который через трехходовой кран 2 сообщается с микроманометром 4 через трубку 3 и с компенсатором 6 через трубку 5. Чтобы увеличить внешнее давление над поверхностью жидкости в капилляре, т.е. для компенсации добавочного давления,

используют компенсатор 6. Компенсатор представляет собой цилиндр, внутрь которого помещена резиновая груша. Вращая ручку компенсатора по часовой стрелке, сжимаем грушу, тем самым увеличиваем внешнее давление над поверхностью жидкости в капилляре. Через трубку трехходовой кран 2 сообщается с резиновой грушей 7, которая используется для удаления остатков исследуемой жидкости из капилляра.

В работе определяется коэффициент поверхностного натяжения растворов спирта разных концентраций.



1 – капилляр, 2 – трёхходовой кран, 3 – трубка, 4 – микрометр,
5 – трубка, 6 – диафрагменный насос, 7 – резиновая груша, 8 – штатив,
9 – стойка

*Рис.9.4. Установка для определения коэффициента
поверхностного натяжения жидкости*

9.3. Порядок выполнения работы

9.3.1. Налейте дистиллированную воду в стаканчик, опустите туда капилляр и промойте его этой жидкостью.

9.3.2. Установите стаканчик так, чтобы конец капилляра был погружен в жидкость. Жидкость в капилляре поднимается и устанавливается на некоторой высоте (столбик жидкости не должен содержать пузырьков воздуха).

9.3.3. Медленно крутите ручку компенсатора 6 по часовой стрелке, повышая давление в системе, пока уровень жидкости в капилляре не снизится до уровня жидкости в стаканчике.

9.3.4. Произведите отсчет показаний микроманометра n . Повторите измерения 3÷5 раз. Найдите среднее значение n . Данные занесите в таблицу 9.1.

Таблица 9.1.

Измерение избыточного давления в растворах спирта различной концентрации

$c, \%$	k	$n_1, \text{мм рт.ст.}$	$n_2, \text{мм рт.ст.}$	$n_3, \text{мм рт.ст.}$	$\langle n \rangle, \text{мм рт.ст.}$

9.3.5. Проведите аналогичные измерения с водными растворами спирта C_2H_5OH , начиная с низкой концентрации спирта, затем берите растворы с более высокой концентрацией. Данные также занесите в таблицу 9.1.

9.3.6. Рассчитайте добавочное давление Δp и коэффициенты поверхностного натяжения σ для водных растворов спирта разных концентраций по формулам (9.10) и (9.11). Результаты вычислений занесите в таблицу 9.2.

Таблица 9.2.

**Расчёт добавочного давления Δp
и коэффициента поверхностного натяжения σ**

с, %	$\langle n \rangle, \text{ääë}$	$\Delta p, \text{Ĭà}$	$\sigma, \text{Í / ì}$

9.3.7. Для измерений с водой рассчитайте случайную погрешность $\Delta\sigma_{\tilde{n}\tilde{e}}$ по методу нахождения погрешностей прямых измерений, используя данные таблицы 9.3.

Таблица 9.3.

**Расчёт случайной погрешности $\Delta\sigma_{\tilde{n}\tilde{e}}$
для измерений с водой**

№	$n_i, \text{ääë}$	$\Delta p_i, \text{Ĭà}$	$\sigma_i, \text{Í / ì}$	$\langle \sigma \rangle, \text{Í / ì}$	$\Delta\sigma_i, \text{Í / ì}$	$\Delta\sigma_i^2, \text{Í}^2 / \text{ì}^2$
1						
2						
3						

9.3.8. Для одного из замеров оцените приборную погрешность $\Delta\sigma_{\tilde{i}\tilde{o}}$, используя метод нахождения погрешности для косвенных измерений:

$$\Delta\sigma_{\tilde{i}\tilde{o}} = \sigma \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2}, \quad (9.12)$$

где Δr – погрешность в определении радиуса капилляра (указана);

Δn – половина цены деления шкалы микроманометра, 0,5 мм.

9.3.9. Оцените погрешность результата с учетом случайной и приборной погрешности по формуле:

$$\Delta\sigma_{\text{н\ddot{e}i}} = \sqrt{\Delta\sigma_{\text{н\ddot{e}}}^2 + \Delta\sigma_{\text{i\ddot{o}}}^2} . \quad (9.13)$$

9.3.10. Оцените относительную погрешность:

$$\varepsilon_{<\sigma>} = \frac{\Delta\sigma_{\text{н\ddot{e}i}}}{<\sigma>} .$$

Окончательный результат представьте в виде:

$$\sigma = (<\sigma> \pm \Delta\sigma_{\text{н\ddot{e}i}}) \cdot \frac{f}{i} .$$

9.3.11. Постройте график зависимости коэффициента поверхностного натяжения жидкости от концентрации спирта в ней.

9.3.12. Определите неизвестную концентрацию раствора, используя данный график.

9.4. Вопросы для самопроверки

9.4.1. Чем вызваны поверхностные силы в жидкостях?

9.4.2. В чем состоят явления полного смачивания и полного несмачивания?

9.4.3. Что называется коэффициентом поверхностного натяжения? От чего он зависит?

9.4.4. Каковы причины возникновения добавочного давления?

9.4.5. Запишите формулу Лапласа для добавочного давления и объясните её.

9.4.6. Объясните капиллярные явления в жидкостях.

9.4.7. Какие сосуды можно считать капиллярными? Чем определяется высота поднятия жидкости в капилляре?

9.4.8. Расскажите о методе компенсации давлений. Какие давления компенсируют друг друга и чем они вызваны?

9.5. Литература

9.5.1. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под ред. Ивероновой В.И. – М.: Наука, 1967. – 352 с.

9.5.2. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: учебник для физических специальностей вузов. Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М: Высшая школа, 1987. – 360 с.

9.5.3. Кикоин И.К., Кикоин А. К., Молекулярная физика. - М.: Наука: 1976. – 480 с.

9.5.4. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин / Зайдель А.Н. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

Лабораторная работа № 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВЕЩЕСТВ КАЛОРИМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

10.1. Цель работы:

10.1.1. ознакомиться с явлением переноса энергии в веществе;

10.1.2. освоить калориметрический метод измерения теплопроводности вещества.

10.2. Краткое теоретическое введение

Теплопроводность

Заполненная некоторой средой область пространства, в каждой точке которой определено значение температуры среды $T = T(x, y, z, t)$, зависящее от координат и времени, представляет собой температурное поле. Оно нестационарно, если температура зависит от времени, и стационарно, если температура зависит только от координат: $T = T(x, y, z)$. Если температура одинакова во всех точках области, то температурное поле однородно.

В неоднородном температурном поле тепловая энергия всегда передается от участков с большей температурой к участкам с меньшей температурой. Различают три механизма передачи тепла.

1. *Конвекция* – перенос тепла движущейся средой. Конвекция возможна в жидких и газообразных средах.

2. *Лучеиспускание* – перенос тепла электромагнитными волнами.

3. *Теплопроводность* – непосредственная передача кинетической энергии молекулярного движения микрочастиц соседним микрочастицам того же тела или другого тела, находящегося в тепловом контакте с первым.

В данной работе рассматривается процесс теплопроводности.

Тепловой поток

При наличии разности температур в двух соседних точках температурного поля будет происходить процесс выравнивания температур за счет теплопроводности. В некотором условном смысле “тепло” “перетекает” из одного участка в другой. Поэтому количество тепла, проходящее из одного участка тела в другой через единичную площадку раздела в единицу времени, носит название плотности теплового потока q .

Фурье (Фурье Жан Батист Жозеф, 1768 – 1830) опытным путем установил, что плотность теплового потока определяется следующим выражением:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T,$$

где λ – теплопроводность вещества;

$\text{grad } T$ – градиент температуры – вектор, направленный в сторону наибольшего увеличения температуры, т.е. по нормали $\vec{n}$ к изотермической поверхности и численно равный производной от температуры по этому направлению:

$$\text{grad } T = \vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}; \quad |\text{grad } T| = \partial T / \partial n.$$

В случае одномерного поля температуры $T = T(x)$, и градиент вырождается в производную от температуры по x , т.е.

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (10.1)$$

Из соотношения (10.1) легко видеть, что теплопроводность λ численно равна количеству теплоты, проходящему через единичную площадку, перпендикулярную к направлению теплового потока, в единицу времени при градиенте температуры, равном единице.

В СИ λ измеряется в Вт/(м·К)

Для небольших интервалов температур λ не зависит от температуры. В общем случае λ – это функция температуры, давления и т.п.

Если процесс переноса тепла стационарный и температура меняется от слоя к слою равномерно, то соотношение (10.1) в этом случае примет следующий вид:

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{x}, \quad (10.2)$$

где $T_1 - T_2$ – разность температур между двумя сечениями вещества,

x – расстояние между ними.

При описании процесса теплопроводности используется коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{c\rho},$$

где c – удельная теплоёмкость вещества,

ρ – его плотность.

Теплопроводность, коэффициент температуропроводности и удельная теплоемкость вещества имеют большое теоретическое и практическое значение. Во всех отраслях техники, где в основе лежат тепловые процессы, знать эти характеристика очень важно.

Существует очень много методов определения этих характеристик. Подробнее ознакомимся с одним из них.

Рассмотрим одномерную задачу о переносе тепла через слой среды толщиной x .

Пусть по одну сторону этого слоя поддерживается неизменная температура T_H , а по другую ее сторону находится некоторая вторая среда с температурой $T < T_H$, не имеющая теплообмена с внешней средой. Прошедшее че-

рез перегородку тепло δQ вызовет изменение температуры второй среды на

$$dT = \frac{\delta Q}{c \cdot m}, \quad (10.3)$$

где c – удельная теплоемкость второй среды,

m – масса этой среды.

Количество тепла δQ , прошедшее через площадку S за время $d\tau$, равно:

$$\delta Q = q \cdot S \cdot d\tau.$$

Если можно считать, что изменение температуры в слое происходит по линейному закону (так называемый квази-стационарный режим), то

$$\delta Q = \lambda \frac{T_H - T}{x} \cdot S \cdot d\tau. \quad (10.4)$$

Тогда, на основании (10.3) и (10.4), мы можем написать:

$$c \cdot m \cdot x \frac{dT}{T_H - T} = \lambda \cdot S \cdot d\tau. \quad (10.5)$$

Если температура среды за перегородкой за некоторое время в этом режиме изменилась от T_1 до T_2 , то соотношение (10.5) запишется в виде:

$$c \cdot m \cdot x \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T_H - T} = \lambda \cdot S \cdot \int_0^{\tau} d\tau. \quad (10.6)$$

Проведя все указанные здесь математические операции, мы получим выражение для теплопроводности вещества перегородки в следующем виде:

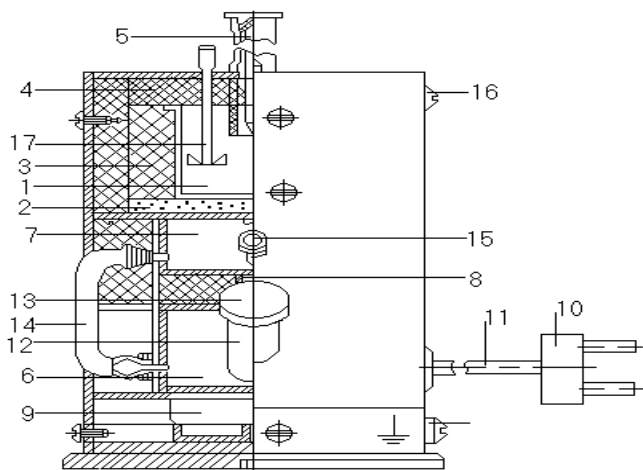
$$\lambda = \frac{c \cdot m \cdot x}{S \cdot \tau} \ln \frac{T_H - T_1}{T_H - T_2}. \quad (10.7)$$

Таким образом, если мы знаем массу m и удельную теплоемкость c среды за перегородкой, ее начальную температуру T_1 и конечную температуру T_2 , время τ , за которое произошло это изменение температуры в среде, толщину

перегородки x , площадь теплопроводящей поверхности S и температуру T_H , то не представляет никакого труда определить значение теплопроводности вещества, из которого эта перегородка изготовлена.

10.3. Описание экспериментальной установки

Принципиальная схема экспериментальной установки приведена на рисунке 10.



- 1 – калориметр, 2 – сыпучий материал, 3 – теплоизолирующая втулка, 4 – крышка, 5 – термометр, 6 – бачок для воды, 7 – емкость для пара, 8 – трубка, 9 – электронагреватель, 10 – вилка, 11 – сетевой шнур, 12 – горловина бачка, 13 – пробка, 14 – указатель уровня, 15 – дренажное отверстие, 16 – винт, 17 – мешалка.

Рис. 10. Установка для определения теплопроводности сыпучих материалов

Из бачка 6 в емкость для пара 7 непрерывно поступает пар, что обеспечивает условие неизменности температуры T_H . На металлической пластине, закрывающей ёмкость для пара, слой сыпучего материала (песка) 2, теплопровод-

ность которого необходимо определить. На слое песка установлен калориметр 1 с водой. Ёмкость для пара, слой сыпучего материала и калориметр теплоизолированы от окружающей среды.

Изменение температуры воды в калориметре фиксируется с помощью термометра 5.

Если нам известны: толщина слоя сыпучего материала x , его площадь S , температура пара T_H и температура воды в калориметре в начальный момент и по истечении промежутка времени τ , то мы можем подсчитать значение теплопроводности из соотношения (10.7), которое применительно к данной установке примет вид:

$$\lambda = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{S \cdot \tau} \cdot x \cdot \ln \frac{T_H - T_1}{T_H - T_2}; \quad (10.8)$$

здесь c_1 и c_2 – удельные теплоемкости воды и сосуда,

m_1 и m_2 – соответственно их массы.

10.4. Порядок выполнения работы

10.4.1. Взвесьте пустой калориметр и калориметр с водой; найти массу воды в калориметре.

10.4.2. Измерьте толщину и площадь слоя сыпучего материала. Результаты измерений в пп.10.4.1-10.4.2 занесите в таблицу 10.1.

Таблица 10.1.

Параметры экспериментальной установки

Масса, кг			Размеры исследуемых образцов, м			
Калориметра	Калориметра с водой	Воды	Толщина x	$< x >$	Диаметр d	$< d >$

10.4.3. Соберите экспериментальную установку в соответствии со схемой.

10.4.4. Определите температуру кипения воды в кипятильнике (из таблицы при данном атмосферном давлении) и измерьте начальную температуру воды в калориметре (желательно, чтобы она была на 5-10 градусов ниже комнатной).

10.4.5. Включите нагреватель и дождитесь поступления пара в сосуд 7. Одновременно начните отсчет времени и температуры воды в калориметре.

10.4.6. Снимите зависимость изменения температуры воды в калориметре от времени. Измерения ведите до тех пор, пока температура воды в калориметре не превысит комнатную на 5-10 градусов. Данные занесите в таблицу 10.2.

Таблица 10.2.

**Зависимость температуры воды в калориметре
от времени**

$\tau, \text{с}$												
$t, ^\circ\text{C}$												

10.4.7. По данным измерений постройте график зависимости $T = f(\tau)$. Значения температуры T и соответствующие им промежутки времени τ , используемые для расчетов по формуле (10.8), определяются из прямолинейного участка этого графика.

10.4.8. По результатам эксперимента определите значения теплопроводности исследуемых образцов.

10.5. Вопросы для самопроверки

10.5.1. Что называют теплопроводностью?

10.5.2. Что называют плотностью теплового потока?

10.5.3. Как связаны между собой плотность теплового потока и температура среды?

10.5.4. Какой физический смысл теплопроводности вещества?

10.5.5. Что означает термин “квазистационарный режим”?

10.5.6. Почему используемый в данной работе метод определения тепловой характеристики вещества называется калориметрическим?

10.5.6. Измерение какой из величин вносит наибольший вклад в погрешность результата?

10.6. Литература

10.6.1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: Учебник для физич. спец. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Матвеев А.Н. – М.: Высш. шк., 1987. – 360 с

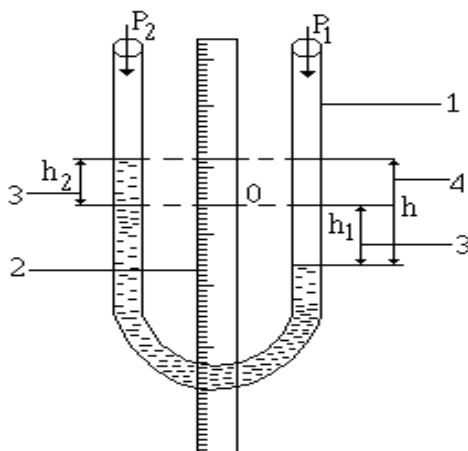
10.6.2. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. 2-е изд. / Кикоин А.К., Кикоин И.К. – М.: Наука, 1976. 480 с.

10.6.3. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика / Савельев И.В. – М.: Астрель. АСТ, 2003. – 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ЖИДКОСТНЫЕ ПРИБОРЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ С ВИДИМЫМ УРОВНЕМ

К этому типу приборов относятся U-образные двухтрубные и чашечные однотрубные манометры. Используются они для измерения давлений, разрежения и разности давлений воздуха и неагрессивных газов.



- 1 – стеклянная трубка, 2 – шкала, 3 – h_1 , h_2 – высоты столбов рабочей жидкости в обоих коленях, отсчитанные от нуля шкалы прибора,
4 – $h = h_1 + h_2$ – разности уровней жидкости в коленях манометра

Рис. 1. Схема U-образного манометра

Двухтрубный манометр состоит из стеклянной трубки, заполненной до половины своей высоты рабочей жидкостью, и шкалы, позволяющий производить отсчет уровней в обоих коленях. При равенстве давлений над поверхностью жидкости в обоих коленях уровни жидкости в них совпадают с нулем шкалы прибора. В качестве рабочей

жидкости используют воду, ртуть, спирт (при малом внутреннем диаметре трубки).

Измеряемое давление, разрежение или разность давлений уравнивается и измеряется столбом $h = h_1 + h_2$ рабочей жидкости. Устанавливается манометр по отвесу строго вертикально. Для измерения избыточного давления в объекте правое колено соединяется с объектом, левое остается открытым (сообщается с атмосферой, при этом $p_2 = p_{\text{атм}}$): $p_1 > p_2$.

При установившихся уровнях в коленях манометра имеет место равенство давлений

$$p_2 + \rho g_{\varphi} h = p_1 + \rho_c g_{\varphi} h,$$

отсюда

$$p_1 - p_2 = p_1 - p_{\text{атм}} = g_{\varphi} h (\rho - \rho_c), \quad (\text{П1})$$

где ρ – плотность рабочей жидкости (кг/м^3),

ρ_c – плотность среды над рабочей жидкостью (кг/м^3),

g_{φ} – ускорение свободного падения на данной географической широте места эксперимента (м/с^2),

h – разность уровней в коленях манометра (м).

Если $\rho_c \ll \rho$, то формула (П1) перепишется в виде:

$$p_1 - p_{\text{атм}} = \rho g_{\varphi} h, \quad (\text{П2})$$

а давление в объекте

$$p_1 = p_{\text{атм}} + \rho g_{\varphi} h.$$

При измерении разрежения левое колено сообщается с объектом, а правое остается открытым (сообщается с атмосферой), тогда $p_1 = p_{\text{атм}} > p_2$. При $\rho_c \ll \rho$ давление в объекте рассчитывается по формуле:

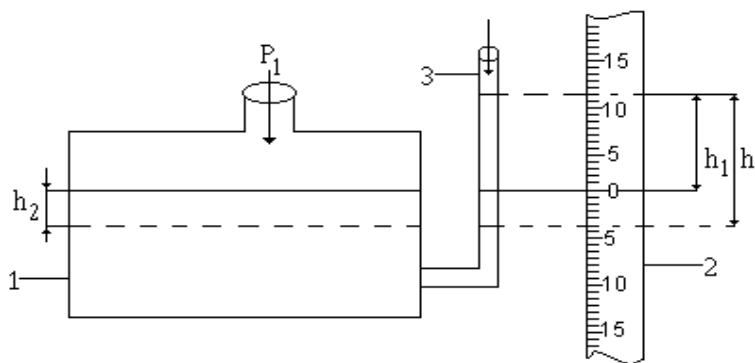
$$p_2 = p_{\text{атм}} - \rho g_{\varphi} h.$$

В случае измерения разности давлений в двух объектах большее давление подводится к правому, а меньшее к ле-

вому колену трубки прибора, результат измерения вычисляется по формуле (П1). Плотность рабочей жидкости, ускорение свободного падения даются в таблицах с погрешностью около 0.005%, следовательно, точность измерения давления зависит, в основном, от точности отсчета высоты столба рабочей жидкости h . В случае отсчета h невооруженным глазом при цене деления шкалы в 1 мм при отсчете в двух коленях приборная погрешность не превышает ± 1 мм столба рабочей жидкости.

Чашечный однотрубный манометр

Манометр состоит из цилиндрического сосуда 1 и сообщающейся с ним измерительной стеклянной трубки 3. Рабочая жидкость заливается в широкий сосуд так, чтобы уровень ее в измерительной трубке находился против нулевой отметки шкалы.



1 – стеклянная трубка, 2 – шкала, 3 – измерительная трубка

Рис. 2. Схема чашечного однотрубного манометра

При измерении давления в объекте (давление в объекте выше атмосферного) его соединяют с широким сосудом манометра, а при измерении разрежения в объекте (давление в объекте ниже атмосферного) – с измерительной труб-

кой прибора. При измерении разности давлений в двух объектах большее давление подается в сосуд, а меньшее в измерительную трубку. Если при этом жидкость в измерительной трубке поднялась на высоту h_1 , а в широком сосуде спустилась на высоту h_2 относительно нуля шкалы манометра, тогда высота столба рабочей жидкости

$$h = h_1 + h_2 \quad (\text{П3})$$

соответствует измеряемой величине разности давлений в мм столба рабочей жидкости. Объем жидкости, вытесненной из широкого сосуда, равен объему жидкости в измерительной трубке, т.е.

$$h_1 S_1 = h_2 S_2, \quad (\text{П4})$$

где S_1 и S_2 – площади внутреннего сечения в измерительной трубке и в широком сосуде соответственно.

Решая совместно уравнения 3 и 4, получим:

$$h = h_1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right)$$

и при условии $\rho_c \ll \rho$, в соответствии с (П1) имеем:

$$p_1 - p_2 = \rho g_\varphi h = \rho g_\varphi h_1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (\text{П5})$$

Чашечный прибор позволяет сделать только один отсчет h . При цене деления шкалы в 1 мм отсчет h_1 производится с погрешностью, не превышающей ± 1 мм столба рабочей жидкости. При измерениях поправка на понижение уровня жидкости в широком сосуде обычно составляет 0.25% от h_1 , при $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{400}$ эта поправка равна: $\Delta = 0,0025 h_1$,

где Δ - погрешность отсчета столба рабочей жидкости h_1 в мм. Погрешности в определении ρ и g_φ значительно меньше и ими пренебрегают.

При измерениях малых давлений, разрежений или разности давлений используют более точные приборы – микроманометры с наклонной измерительной трубкой.

Микроманометр с наклонной измерительной трубкой

Наклон измерительной трубки сделан с целью уменьшения погрешности измерения, увеличения точности отсчета измеряемого давления. При измерении давления в объекте ($p_{\text{объект}} > p_{\text{атм}}$) к нему присоединяют через шланг широкий сосуд, при измерении разрежений ($p_{\text{объект}} < p_{\text{атм}}$) – измерительную трубку. В случае измерения разности давлений большее давление подается в сосуд, а меньшее – в измерительную трубку.

Рабочей жидкостью является этиловый спирт с плотностью $\rho = 809,5 \text{ г/л}$, который заливают в широкий сосуд настолько, чтобы уровень его в наклонной измерительной трубке находился против нулевой отметки шкалы. Длина шкалы равна $250 \div 300 \text{ мм}$.

Пусть под действием измеряемого давления уровень жидкости в измерительной трубке, наклоненной под углом α к горизонтальной плоскости (рис.3), поднимается по вертикали на высоту h_1 , в широком сосуде при этом опустится на h_2 . Тогда разность высот h уровней рабочей жидкости в приборе, уравнивающая измеряемую величину p , будет равна:

$$h = h_1 + h_2. \quad (\text{П6})$$

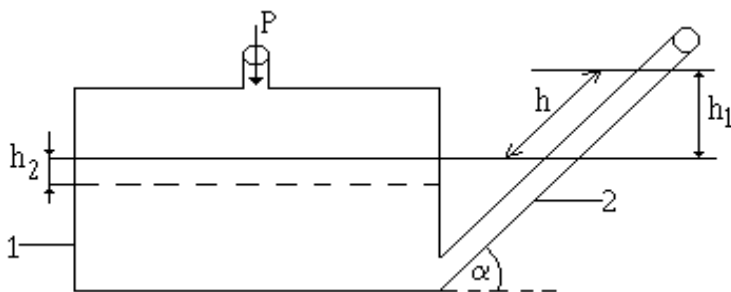
Если длина столба жидкости в измерительной трубке, отсчитанная по шкале, равна $n \text{ мм}$, то

$$h_1 = n \sin \alpha. \quad (\text{П7})$$

Тогда объем жидкости, заключенный в измерительной трубке, равен объему жидкости, вытесненной из широкого сосуда:

$$nS_1 = h_2S_2, \quad (\text{П8})$$

где S_1 – площадь поперечного сечения измерительной трубки, S_2 – площадь поперечного сечения широкого сосуда.



1 – сосуд с рабочей жидкостью, 2 – измерительная трубка, вдоль которой располагается шкала

Рис. 3. Схема микроманометра с наклонной стеклянной измерительной трубкой

Из (П6), (П7) и (П8) получим:

$$p = \rho g_{\varphi} h = \rho g_{\varphi} n \left(\sin \alpha + \frac{S_1}{S_2} \right) = k g_{\varphi} n, \quad (\text{П9})$$

где k – постоянная прибора;

$$k = \rho \left(\sin \alpha + \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (\text{П10})$$

Значения k даны на установочной дуге 3 (см. рис.4, $k = 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,8$).

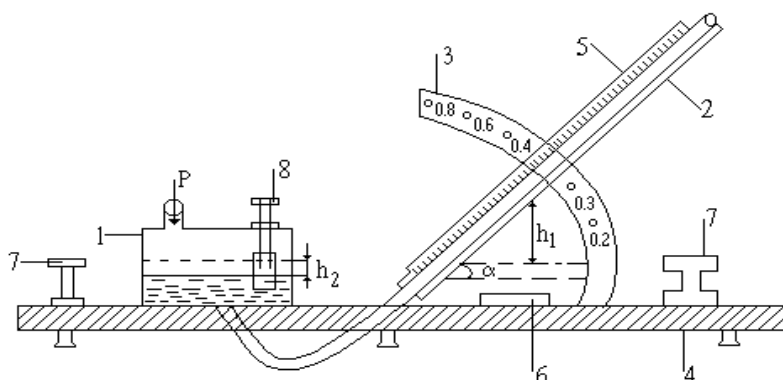
Значение $g_{\varphi} = 9,804 \text{ м/с}^2$ соответствует географической широте г. Алматы.

Следовательно, давление p в $Па$, измеренное с помощью микроманометра с наклонной трубкой, будет определяться по формуле:

$$p = kg_{\varphi}n \quad \text{или} \quad p = 9,804kn. \quad (\text{П11})$$

Здесь n измерены в $мм$.

В лаборатории используются микроманометры типа ММН с переменным углом наклона измерительной трубки. Благодаря этому прибор имеет несколько диапазонов измерения (рис. 4).



1 – широкий сосуд, 2 – измерительная трубка, 3 – установочная дуга, приспособление для фиксации угла наклона, 4 – плита основания, 5 – шкала измерительной трубки, 6 – уровень, 7 – винты для установки прибора по уровням, 8 – вытеснитель для установки уровня жидкости против нулевой отметки шкалы

Рис. 4. Схема микроманометра ММН

Прибор состоит из широкого сосуда 1, измерительной трубки 2, закрепленной на поворотном кронштейне, и приспособления 3 для фиксации угла наклона измерительной трубки. Все детали укреплены на общем основании 4. Каждому фиксированному углу наклона измерительной трубки к горизонтальной плоскости (т.е. заданному диапазону

измерений) соответствует определенное значение k постоянной прибора, указанное на установочной дуге приспособления 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Коэффициенты Стьюдента

Число изме- рений	<i>Доверитель- ная вероят- ность</i>	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
Значения коэффициентов Стьюдента														
2		0,16	0,33	0,51	0,73	1	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3		0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7	9,9	31,6
4		0,14	0,28	0,42	0,52	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5		0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6		0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7		0,13	0,27	0,4	0,55	0,72	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8		0,13	0,26	0,4	0,55	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9		0,13	0,26	0,4	0,54	0,71	0,9	1,1	1,4	1,8	2,3	2,9	3,4	5,0
10		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14		0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15		0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
100		0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
Лабораторная работа № 1 БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	21
Лабораторная работа № 2 ГРАДУИРОВКА ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕРМОМЕТРА	49
Лабораторная работа № 3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ БОЛЬЦМАНА	58
Лабораторная работа № 4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОТЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ (ПЛАВЛЕНИЯ) И ИЗМЕНЕНИЯ ЭНТРОПИИ ПРИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОЛОВА	67
Лабораторная работа № 5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ C_p/C_v МЕТОДОМ СТОЯЧИХ ВОЛН	82
Лабораторная работа № 6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ЖИДКОСТЕЙ КАЛОРИМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ	92
Лабораторная работа № 7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ВОЗДУХА	103
Лабораторная работа № 8 ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ	125
Лабораторная работа № 9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ	140

Лабораторная работа № 10 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВЕЩЕСТВ КАЛОРИМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ	152
ПРИЛОЖЕНИЕ I ЖИДКОСТНЫЕ ПРИБОРЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ С ВИДИМЫМ УРОВНЕМ	160
ПРИЛОЖЕНИЕ II КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЫЮДЕНТА	168

Учебное издание

Исатаев Совет Исатаевич, Исабаев Есенжол Амурзакович,
Аскарова Алия Сандыбаевна, Исатаев Мухтар Советович,
Локтионова Ирина Владимировна, Омирбеков Женис,
Ползик Владимир Всеволодович, Кашкаров Владимир Васильевич,
Корзун Ирина Николаевна, Бердибаев Мансур Сейдахметович,
Лаврищев Олег Александрович, Толеуов Газиз, Болегенова Салтанат Алихановна,
Есеналина Кантай Акатаевна, Досаева Бигайша Тойшибековна

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
Общий физический практикум

Третье издание