КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени АЛЬ-ФАРАБИ

З.Н. Мурзабеков

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**Алматы, 2017**

УДК 62-52

ББК 22.18

М 91

Рекомендовано к изданию ученым советом КазНУ им. Аль-Фараби

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор У.А. Тукеев;

Доктор технических наук, профессор Б.К. Синчев.

М 91 Мурзабеков З.Н. Оптимальное управление динамическими системами. – Алматы: Казак университет, 2017. – 243 с.

Илл. 49, библ. 41.

ISBN 978-601-263-013-8

Книга посвящена исследованию управляемых систем. В ней содержатся результаты исследования задач оптимального управления, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассматриваются системы управления и методы исследования устойчивости для линейных стационарных систем. Излагаются методы исследования абсолютной устойчивости нелинейных управляемых систем. Изучены вопросы управляемости и наблюдаемости линейных стационарных и нестационарных систем. Изложены методы теории оптимального управления: принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана, достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова. Исследованы проблемы построения синтезирующих управлений для динамических систем при наличии ограничений на управления, основанных на использовании множителей Лагранжа специального вида.

Предназначено для студентов старших курсов, магистрантов, докторантов, инженеров и научных работников, специализирующихся в области математической теории управляемых систем.

УДК 62-52

ББК 22.18

М

ISBN 978-601-263-013-8

**©** Мурзабеков З.Н., 2017

**©** КазНУ им. Аль-Фараби, 2017

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| Обозначения и сокращения…………………………………………  Введение……………………………………………………………… | 6  7 |
| 1. Системы управления….…………..………………………………..   1.1 Основные понятия и определения систем управления….……..   * 1. Классификация систем управления по математической модели.   1.3 Классификация задач расчета систем управления…………......  1.4 Проблема синтеза регуляторов..…………………….……………  1.4.1 Основные этапы синтеза регуляторов в классе линейных стационарных систем………………………………………………….  1.5 Обеспечение заданного качества и структура регулятора в классе линейных стационарных систем………………………………   * 1. Математические модели и структурные схемы регуляторов ..…   2. Математическая модель управляемых систем.............................   1.8 Допустимые управления………………………………………….. | 9  9  10  11  14  15  17  20  26  27 |
| 2 Анализ исследований по теории оптимального управления динамическими системами ……………………………………………  2.1 Анализ подходов к исследованию задач оптимального управления динамическими системами………………………………  2.2 Классификация задач оптимального управления динамическими системами …………………………………………… | 29  29  37 |
| 3 Устойчивость управляемых систем.. ……….................................  3.1 Основные определения теории устойчивости для непрерывных систем…………………………………………………………………..   * 1. Устойчивость решения линейного неоднородного уравнения…   2. Асимптотическая устойчивость…………………………………..   3.4 Второй метод Ляпунова…………………………...……………….  3.5 Функции Ляпунова для линейных стационарных систем и устойчивость по первому приближению………………………...…… | 41  41  43  45  48  57 |
| 4 Устойчивость нелинейных стационарных систем………………..   * 1. Система непрямого управления…………………………………..   2. Устойчивость нелинейных систем прямого управления………..   4.3 Сведение системы непрямого управления к системе прямого управления частного вида……………………….…………………….   * 1. Линеаризация систем прямого управления………………………   4.5 Линеаризация систем непрямого управления……………………  4.6 Устойчивость нелинейных управляемых систем. Теорема В.М. Попова………………………………………………………………… | 62  63  67  69  70  73  75 |
| 5 Управляемость и наблюдаемость линейных систем.. …..………..  5.1 Управляемость систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями……………………………………  5.2 Наблюдаемость систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями………………….………………..  5.3 Принцип двойственности в теории управляемости и наблюдаемости………………………………………………………….  5.4 Управляемость линейных нестационарных систем..…………..  5.5 Наблюдаемость линейных нестационарных систем……………. | 81  81  89  97  98  103 |
| 6 Принцип максимума Л.С. Понтрягина………………….…………  6.1 Постановка задачи оптимального управления…………………...  6.2 Формулировка принципа максимума Л. С. Понтрягина………..  6.3 Задача оптимального быстродействия……………………..........  6.3.1 Задача оптимального быстродействия для линейной нестационарной системы………………………………………………  6.3.2 Задача оптимального быстродействия для линейной стационарной системы ……………………………………………….. | 106  106  109  114  114  116 |
| 7 Оптимальное управление линейными системами с квадратичным функционалом. ……………………………………..…  7.1 Задача о регуляторе состояния……………………………………  7.2 Задача о регуляторе выхода………………………………………  7.3 Стационарные системы с бесконечным временем наблюдения..  7.4 Задача слежения .....………………………………………….......... | 125  125  133  135  137 |
| 8 Метод динамического программирования Р. Беллмана……….….  8.1 Дифференциальное уравнение Р. Беллмана.....………………….  8.2 Проблема синтеза для систем с непрерывным временем……….  8.3 Синтез линейных систем с закрепленными концами………….. | 141  141  143  146 |
| 9 Достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова …………….. 9.1 Постановка задачи и функция Кротова…………………………..9.2 Достаточные условия оптимальности для задач с закрепленным временем………………………………………………………………..9.3 Задача Коши-Кротова.………………..…………………………… | 151  151  153  157 |
| 10 Достаточные условия оптимальности управляемых динамических систем……………………………………………………….…………………   * 1. Постановка задачи……………………………………………..   10.2 Достаточные условия оптимальности динамических систем управления………………………………………………………………  10.3 Синтез линейных систем с квадратичным критерием качества  10.3.1 Синтез линейных систем………………………………………  10.3.2 Синтез линейных систем с ограничениями на управления…  10.4 Конструирование стационарных линейных систем с закрепленными концами траекторий………………………………….  10.4.1 Конструирование линейных систем…………………………..  10.4.2 Конструирование линейных систем с ограничениями на управления ……………………………………………………………..  10.5 Стабилизация стационарных линейных управляемых систем..  10.5.1 Стабилизация линейных управляемых систем.. …………….  10.5.2 Стабилизация линейных систем с ограничениями на управления……………………………………………………………… | 160  160  161  167  168  173  182  183  188  205  206  208 |
| Приложения   1. Математическая модель и алгоритм решения задачи ……………. 2. Программа к задаче 1 на Maple …………………………………….. 3. Программа к задаче 2 на Maple ……………………………………..   Список использованных источников ………………………………… | 216  222  229  241 |

**ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**

 - элемент  принадлежит множеству .

 - декартово произведение множеств .

 - множество  содержится в множестве .

 - отображение  множества  в множество ; функция  с областью определения , принимающая значения во множестве .

 - отображение (функция)  сопоставляет элементу  элемент ; обозначение для отображения (функции)  в случае, когда желательно указать обозначение его (ее) аргумента.

- обозначение, которым подчеркивается, что  является отображением (функцией).

 - множество всех действительных чисел; числовая прямая.

- нижняя (верхняя) грань чисел, входящих в множество .

- арифметическое - мерное пространство, наделенное стандартной евклидовой структурой, элементы  следует представлять себе в виде вектор-столбцов.

 - вектор-строчка, транспонированная к вектор-столбцу .

 - евклидова норма в .

.

- скалярное произведение в .

 - норма элемента  в нормированном пространстве.

 - расстояние от элемента  до элемента .

 - пространство непрерывных линейных отображений пространства  в пространство ; отображения из пространства  могут отождествляться с их матрицами относительно стандартных базисов.

 - единичный оператор;  или  - матрица единичного оператора из , то есть единичная матрица - го порядка.

 - оператор, сопряженный с оператором ; 

 - обозначение для квадратичной (билинейной) формы с матрицей .

 - матрица  положительно определена.

 - матрица  неотрицательно определена.

 - пространство непрерывных функций на отрезке .

 - внутренность множества .

# ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория управления, возникшая в 60-е годы ХХ века, была связана с потребностями решения технических и экономических задач и прежде всего, была математической основой для проектирования космических летательных аппара­тов и стратегических ракет. Достижения науки и техники последних лет, запуск искусствен­ных спутников Земли, пилотируемые космические корабли, мягкая посадка на Луну, полеты к другим планетам Солнечной системы вряд ли были бы возможны без использования математичес­кого моделирования, вычислительной техники и математи­ческой теории управ­ления.

Проблемы управления, в частности проблемы отыскания наилучшего, оптимального управления, возникают всюду при исследовании различных процессов физики, техники, экономики, экологии и др. Наиболее яркие примеры таких задач – это задачи управления:

- задача о космическом перелете из одной точки пространства в другую наибыстрейшим образом или с наименьшей затратой энергии;

- задача управления системой гидростанций и водохранилищ с целью получения максимального количества электроэнергии;

- задача организации и управления производства с целью получения максимальной прибыли при заданных затратах ресурсов;

* задача управления ядерными и химическими реакторами;
* задача о нагреве печи до заданного температурного режима и многие другие задачи.

В настоящее время оптимальное управление выросло в обширную самостоятельную теорию, использующую в своих исследованиях аппарат высшей алгебры, математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений.

В математической теории управления, в частности, рассматриваются задачи опти­маль­ного управления, при наличии краевых, фазовых и интегральных ограничений, а также при наличии ограничений на значения управления.

Решение таких классов задач невозможно с помощью методов классической матема­тики, в частности, теории дифференциальных уравнений, поэтому возникла потреб­ность в создании совершенно нового подхода к решению задач оптимального управ­ления. Первые шаги по созданию такой теории были осуществлены в 60-годы ХХ века. Л.С. Понтрягиным и его учениками [36] был предложен так называемый принцип максимума, который сводит исходную задачу оптимального управления к двухточечной краевой задаче обыкновенных дифференциальных уравнений.

В те же годы американским ученым Р. Беллманом [4] был предложен другой подход – метод динамического программирования на основе принципа оптимальности. Задача сводится к решению уравнения Беллмана. В последующие годы В.Ф. Кротовым [21] был предложен метод решения таких задач путем использования специальных функций (функций Кротова).

Обзор различных постановок задач оптимального управления и методов их решения можно найти, в частности, в работах [1], [11].

Эта книга относится к одному из перспективных и быстро развивающихся в последние годы разделов математики – теории управле­ния. Актуальность и значимость этих исследований обусловлены тем, что задачи управления встречаются фактически во сферах жизнедеятельности человека: это сложные технические системы и технологические процессы, природные явления, экономические и экологические системы, и др. Здесь вознивают вопросы достижения поставленных целей путем выбора оптимальных управляющих воздействий с учетом различных ограничений (начальные и конечные усло­вия, требования на траекторию движения системы, ограниченность управ­ления и т.п.). В области теории управления достигнуты значительные успехи (принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод динами-ческого программирования Р. Беллмана, достаточные условия опти­маль­ности В.Ф. Кротова и др.). В то же время еще много нерешенных проблем, связанных с реализацией имеющихся методов оптимального управления для конкретных систем и разработкой новых подходов к решению рассматри-ваемых задач.

# 